Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

JAN LOUIS

SS 2024

Do $10^{15} - 11^{45}$

SR A203

Vorlesungsplan

1. 4.4 Newtonsche Theorien

2. 11.4. Elektrodynamik

3. 18.4. spezielle Relativitätstheorie

4. 25.4 Äquivalenzprinzip

5. 2.5 Riemannsche Geometrie

6. 16.5 Einstein Gleichung

7. 30.5 Lichtablenkung / Gravitationslinse / Tests

8. 6.6. schwarze Löcher

9 13.6 Gravitationswellen

10 20.6 Kosmologie / Expandierendes Universum

11 27.6 kos. Konstante / Dunkle Energie

12 4.7 3K Hintergrundstrahlung

13 11.7 Strukturbildung

V1: Newtonsche Mechanik & Gravitationstheorie

Moderne Physik beginnt mit Galileo (1564–1642).
Er begründet die heutige wissenschaftliche Methode:

i) Quantitative Analyse der Natur mit Hilfe von Beobachtungen, Experimenten & Messungen

ii) Auffinden von exakten Naturgesetzen

iii) Formulierung der Naturgesetze in math. Sprache

[Galileo führte viele Beobachtungen & Messungen durch z.B. Fallgesetze vom schiefen Turm in Pisa]

Unterscheidung:

Experimentalphysik : i) & ii)

$\updownarrow$

Theoretische Physik : ii) & iii)

Beobachtungen von Galileo wurden von I. Newton (1643–1727) in der 1. Theorie der Physik zusammengefasst.

1.1. Newtonsche Mechanik

Thema: Bewegungen von Körpern auf Grund von angreifenden Kräften

Axiom:

1. Kräftefreier Körper ruht oder bewegt sich geradlinig gleichförmig

2. Einwirkung einer Kraft $\vec{F}$ auf Körper mit Masse m:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}$$

$$\underbrace{\vec{p} = m\,\vec{v}}_{\text{Impuls}}\,, \qquad \underbrace{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}}_{\text{Geschwindigkeit}}\,.$$

Ort des Körpers: $\vec{r}(t) = r_x(t)\,\vec{e}_x + r_y(t)\,\vec{e}_y + r_z(t)\,\vec{e}_z$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$: Orthonormierte Basis des Ortsraums $\mathbb{R}$

3. Kraft = Gegenkraft: $|\vec{F}_{A\to B}| = |\vec{F}_{B\to A}|$

Zentrale Aufgabe der N. Mechanik:

Berechnung der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ des Körpers für vorgegebene Kräfte $\vec{F}$

Methode: Lösung der Newton Differentialgleichung (DGL)

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} \underset{\substack{\uparrow \\ m \neq m(t)}}{=} m\dot{\vec{v}} = m\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Beschleunigung}}}{\vec{a}} = m\ddot{\vec{r}}(t) \quad (*)$$

$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ heißt Bewegungsgleichung

ist DGL 2. Ordnung in der Zeit

allg. Lösung (= Bahnkurve): $\vec{r}(t) = \vec{r}_h(t) + \vec{r}_i(t)$

$\vec{r}_h$ löst DGL für $\vec{F} = 0$, also $\ddot{\vec{r}}_h = 0$

$\Rightarrow \vec{r}_h(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$ ($\hat{=}$ geradlinig gleichförmige Bewegung 1. Axiom)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_h(t=0) \\ \vec{r}_0 = \vec{r}_h(t=0) \end{array}\right\} \hat{=} \left| \begin{array}{l} \text{6 Integrationskonstanten der DGL} \\ \text{6 phys. Anfangswerten der Bewegung zum Zeitpunkt } t=0 \end{array}\right.$$

$\vec{r}_i$: spezielle Lösung der inhomogenen DGL $(*)$

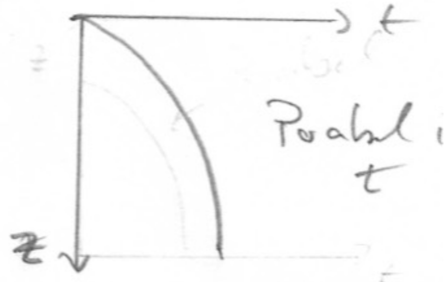
hängt von $\vec{F}$ ab

<u>Beispiel 1:</u> $\vec{F} = \vec{F}_0 = \text{konstant}$

$$\Rightarrow \vec{r}_i = \frac{1}{2}\frac{\vec{F}_0}{m} t^2 \quad , \text{ prüfe: } \dot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{F}_0}{m} t, \ \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{F}_0}{m} \checkmark$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \qquad (\text{Fallgesetz})$$

Für Fallgesetz $\vec{F}_0$ = konstant
Gravitationskraft der Erde
$\vec{F}_0 = m\vec{g}$



wichtige Größe: <u>Energie</u>

kin. Energie : $T = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$

pot. Energie : Für konservative Kraftfelder gilt: $\vec{F} = -\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} := \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

im Beispiel: $V = -\vec{F}_0 \vec{x} + c$ ← konstant, $\vec{x} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$

prüfe: $-\vec{\nabla} V = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x}(\vec{F}_0 \cdot \vec{x}) + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y}(\vec{F}_0 \cdot \vec{x}) + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}(\vec{F}_0 \cdot \vec{x})$

$$= \vec{e}_x F_{0x} + \vec{e}_y F_{0y} + \vec{e}_z (F_{0z}) = \vec{F}_0 \checkmark$$

Gesamtenergie: $E = T + V$

Auf der Bahnkurve gilt : $\dot{E} = 0$ (Erhaltungsgröße)

Prüfe: $\dot{E} = \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{p}}{m} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{p}}{m} + \vec{\nabla} V \cdot \dot{\vec{x}}$

$= \frac{1}{m}\vec{F}\vec{p} - \frac{1}{m}\vec{F}\vec{p} = 0$

1.2. Newtonsches Gravitationsgesetz

Zwei Körper mit Massen m_1 und m_2 üben eine anziehende Kraft aufeinander aus

$$\vec{F} = -G_N\, m_1 m_2 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -G_N\, m_1 m_2 \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}$$

$\hat{r} := \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ Einheitsvektor in Richtung von $\vec{r}$

G_N = Newtonsche Gravitationskonstante = fundamentale Naturko

Eine Masse im Ursprung ($\vec{r}_1 = 0$, $\vec{r}_2 = \vec{r}$)

$$\vec{F} = -G_N\, m_1 m_2 \frac{\hat{r}}{r^2} = -m_1 \vec{\nabla} U, \quad U = -\frac{G_N m_2}{r}$$

Gravitation ist eine fundamentale Wechselwirkung der Natur

Für 2 beliebige Körper ist

$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ exakt lösbar (2 Körperproblem

Lösung separiert in Schwerpunktsbewegung und Bewegung um Schwerpunkt

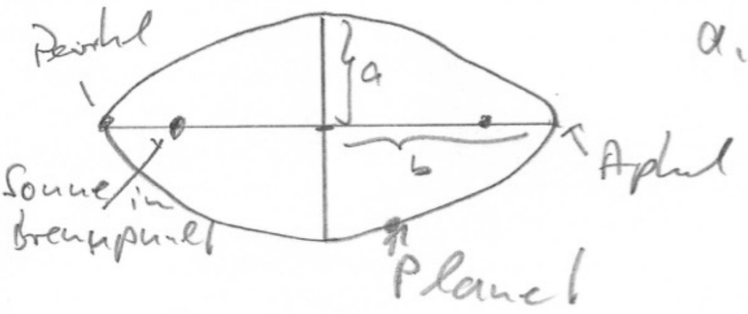
Schwerpunkt: geradlinig gleichförmig

Bewegung um Schwerpunkt: Kegelschnitt: Ellipse, Hyperbel, Parabel

Beispiel: Planetenbahnen

Schwerpunkt: innerhalb der Sonne

Sitzt im Brennpunkt einer Ellipse



a, b: kleine + große Halbachse

Newton Gesetz reproduziert (3) Keplerschen Gesetze

2 Planeten: 3-Körper Problem, nur noch approximativ lösbar

→ Rosettebahn, Periheldrehung

· wird beobachtet

· Diskrepanz beim Merkur

· Entdeckung des Neptun 1846 durch Galle, vorhergesagt von Le Verrier