Aufgabe 1

Die Eigenzustände von L^2, L_z seien $|l, m\rangle$ mit $l = 0, \ldots,\ m = -l, \ldots, l$

a) Wie lautet die dreidimensionale Matrixdarstellung der Operatoren L_x, L_y, L_z in der Basis $|l, m\rangle$ für $l = 1$? *Hinweis*: Benutzen Sie $L_\pm$.

b) Zeigen Sie, daß die Matrizendarstellungen von L_x, L_y, L_z die selben Eigenwerte haben.

c) Finden Sie die Eigenvektoren von L_x und die Matrix U, die L_x auf Diagonalgestalt transformiert. Berechnen Sie $L'_x = U^\dagger L_x U$.

Aufgabe 2

a) Ein Operator A transformiert unter einer unitären Transformation in den Operator A' nach der Vorschrift

$$A' = U^\dagger\, A\, U\ , \qquad \text{mit} \qquad U^\dagger\, U = U\, U^\dagger = \mathbf{1}\ .$$

Ist A' hermitesch wenn A hermitesch ist? Ist $[A', B'] = 0$ wenn $[A, B] = 0$ gilt?

b) In einem dreidimensionalen Hilbertraum sei der Hamiltonoperator

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 \end{pmatrix}\ , \qquad h_1, h_2 \in \mathbb{R}\ ,$$

gegeben. Geben Sie zwei Operatoren A_1, A_2 an, die mit H vertauschen, aber nicht untereinander. (Es soll also gelten $[A_1, H] = [A_2, H] = 0, [A_1, A_2] \neq 0$.)

c) Zeigen Sie, dass für eine Basis $|n\rangle$ mit $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ ganz allgemein gilt, daß falls $[A_1, H] = [A_2, H] = 0$ und $[A_1, A_2]|n\rangle \neq 0\,\forall n$, der Hamiltonoperator H entartete Eigenwerte haben muss.

d) Welche Bedingung muss $[A_1, A_2]|n\rangle$ erfüllen, damit es nicht-entartete Eigenwerte gibt?

Aufgabe 3

Die Pauli-Matrizen lauten

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie

$$\sigma_i \, \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1} + i \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \, \sigma_k \ ,$$

wobei $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix ist.

b) Zeigen Sie

$$\exp\left(-i \, \vec{a} \cdot \vec{\sigma}\right) = \cos|\vec{a}| \, \mathbf{1} - i \, \frac{\vec{a} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{a}|} \ \sin|\vec{a}| \ ,$$

wobei $\vec{a}$ ein beliebiger konstanter Vektor ist.

Hinweis: Stellen Sie die Exponentialfunktion als Reihe dar und berechnen Sie $(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})^2$ mit Hilfe von a).

c) Berechnen Sie $\langle \vec{S}^2 \rangle$, $\langle S_z \rangle$, $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$, ΔS_x, ΔS_y für die Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$.

Aufgabe 4

Der Gesamtdrehimpuls eines Teilchens ist durch $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ definiert. Die Eigenzustände von $\{\vec{J}^2, J_z, \vec{L}^2, \vec{S}^2\}$ seien $|j, m_j, l, s\rangle$, die Eigenzustände von $\{\vec{L}^2, L_z, \vec{S}^2, S_z\}$ seien $|l, m\rangle \otimes |s, s_z\rangle$. Für $l = s = 1$ hat man $(2l+1)(2s+1) = 9$ Zustände.

a) Starten Sie mit $|j = 2, m_j = 2, l = 1, s = 1\rangle = |l = 1, m = 1\rangle \otimes |s = 1, s_z = 1\rangle$ und berechnen Sie $J^2|2, 2, 1, 1\rangle$ sowie $J_z|2, 2, 1, 1\rangle$.

Hinweis: Benutzen Sie $J^2 = L^2 + S^2 + 2L_zS_z + L_+S_- + L_+S_-$.

b) Konstruieren Sie durch Anwendung von J_- auf $|2, 2, 1, 1\rangle$ 4 weitere Zustände.

Hinweis: Legen Sie die Normierung erst am Ende der Rechnung fest und benutzen Sie

$$L_\pm|l, m\rangle = \sqrt{(l \pm m + 1)(l \mp m)}|l, m \pm 1\rangle \ , \quad S_\pm|s, s_z\rangle = \sqrt{(s \pm s_z + 1)(s \mp s_z)}|s, s_z \pm 1\rangle \ .$$

c) Berechnen Sie j und m_j für den Zustand

$$|j, m_j, l = 1, s = 1\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle \otimes |1, 1\rangle - |1, 1\rangle \otimes |1, 0\rangle) \ ,$$

und konstruieren Sie daraus durch Anwendung von J_- 2 weitere Zustände.

d) Berechnen Sie j und m_j für den Zustand

$$|j, m_j, l = 1, s = 1\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(|1, -1\rangle \otimes |1, 1\rangle - |1, 0\rangle \otimes |1, 0\rangle + |1, 1\rangle \otimes |1, -1\rangle) \ .$$