

Aufgabe 1

Die erzeugende Funktion Φ_s der zugeordneten Laguerre-Polynome $L_r^s(x)$ ist definiert als

$$\Phi_s(x, y) := (-y)^s (1-y)^{-(s+1)} e^{-\frac{yx}{1-y}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^r}{r!} L_r^s(x).$$

a) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s+\sigma} \Phi_s(x, y) \Phi_s(x, z) dx &= (s+\sigma)! ((1-y)(1-z))^\sigma \sum_{i=0}^{\infty} \binom{s+\sigma+i}{i} (yz)^{i+s} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^r z^j}{r! j!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s+\sigma} L_r^s(x) L_j^s(x) dx. \end{aligned}$$

Hinweis: : Benutzen Sie $\int_0^{\infty} e^{-ax} x^n = a^{-(n+1)} n!$ und $(1-t)^{-m} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+i-1}{i} t^i$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a)

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s+1} L_r^s(x) L_r^s(x) dx = \frac{(r!)^3}{(r-s)!} (2r-s+1).$$

Aufgabe 2

Gegeben sei das Zentralpotential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r \leq a, \\ 0 & \text{für } r > a \end{cases}, \quad V_0, a \in \mathbb{R}_+.$$

a) Machen Sie für die stationären Zustände den Separationsansatz $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$, wobei $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ die Kugelflächenfunktionen sind. Zeigen Sie, dass $R(r)$ für $r \leq a$ die folgende Radialgleichung erfüllt

$$\left(\partial_\rho^2 + \frac{2}{\rho} \partial_\rho - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1 \right) R(\rho) = 0, \quad \text{mit } \rho = \kappa r, \quad \hbar \kappa = \sqrt{2m(E + V_0)}.$$

b) Lösen Sie die DGL für $l = 0$ mit dem Ansatz $R(\rho) = \rho^{-1} u(\rho)$ und bestimmen Sie $u(\rho)$.

c) Machen Sie für $l \neq 0$ den Ansatz $R_l = \rho^l \chi_l$ und zeigen Sie, dass χ_l die DGL

$$\chi_l'' + \frac{2(l+1)}{\rho} \chi_l' + \chi_l = 0 \quad (*)$$

erfüllt.

d) Zeigen Sie, dass $\hat{\chi}_l = \rho^{-1} \chi_l'$ die DGL (*) für $l \rightarrow l + 1$ erfüllt.

Hinweis: Differenzieren Sie dazu (*).

e) Konstruieren Sie mit Hilfe von $\hat{\chi}$ die Lösung $\chi_l = (\rho^{-1} \partial_\rho)^l \chi_0$.

Aufgabe 3

Gegeben sei der Hamiltonoperator für ein Teilchen mit Masse m und Ladung q im konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{x}) \right)^2 \quad \text{mit} \quad \vec{A} = -\frac{1}{2} B_0 (y \vec{e}_x - x \vec{e}_y) .$$

a) Berechnen Sie $[p_i, A_j]$ für $i, j = x, y, z$.

b) Benutzen Sie zur Bestimmung der stationären Zustände den Separationsansatz

$$\psi(x, y, z) = e^{i k_z z} f(x, y) , \quad k_z \in \mathbb{R} .$$

Zeigen Sie, dass f eine Eigenwertgleichung $H_\perp f = E_\perp f$ erfüllt, bestimmen Sie H_\perp und drücken Sie E_\perp durch E und k_z aus.

c) Zeigen Sie $H_\perp = \hbar \omega_c (b^\dagger b + 1/2)$ mit

$$\omega_c := \frac{q B_0}{m c}, \quad b := \frac{1}{\sqrt{2 m \hbar \omega_c}} \left(\left(p_x - \frac{q}{c} A_x \right) + i \left(p_y - \frac{q}{c} A_y \right) \right) .$$

d) Berechnen Sie $[b, b^\dagger]$.

e) Wie lautet E_\perp ?