Übungsblatt 5 Quantenmechanik I SS 16

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $(\Delta x)^2 := \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$, $(\Delta p)^2$ und $\Delta x \, \Delta p$ im Eigenzustand ψ_n des 1-dim. harmonischen Oszillators.

Hinweis: : Benutzen Sie die Auf- und Absteigeoperatoren $a, a^\dagger$.

b) Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung der Erwartungswerte $\langle x \rangle, \langle p \rangle$ im Zustand

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} \; .$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Wellenfunktion

$$\phi_\alpha(x) := c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \, \psi_n(x) \; , \qquad c, \alpha \in \mathbb{C} \; ,$$

wobei ψ_n die orthonormierten Eigenfunktionen des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators sind. Diese Form der Wellenfunktion wird kohrente Zustand genent.

a) Zeigen Sie, daß ϕ_α Eigenfunktion des Absteigeoperators a ist und berechnen Sie den Eigenwert. Ist ϕ_α Eigenfunktion von H?

b) Bestimmen Sie c so, dass ϕ_α normiert ist.

c) Konstruieren Sie aus $\phi_\alpha(x)$ ein $\phi_\alpha(x,t)$, dass die zeitabhängige Schrödinger Gleichung erfüllt.

d) Berechnen Sie $\langle x \rangle$ im Zustand $\phi_\alpha(x,t)$. *Hinweis*: Benutzen Sie Aufgabe 1b).

e) Bestimmen Sie ein Operator B so dass $\phi_\alpha(x) = c\, e^B \, \psi_0$.

Hinweis: : Nutzen Sie $(a^\dagger)^n \psi_0 \propto \psi_n$

Aufgabe 3 (*ehemalige Klausuraufgabe*)

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -V_0 & \text{für} \quad -a \leq x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < -a \end{cases} \qquad \text{mit} \quad V_0, a > 0 \; .$$

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Wellenfunktionen die zeitunabhängige Schrödingergleichung lösen und drücken Sie k_I, k_{II} durch V_0 und E aus

$$\begin{aligned} x < -a: \qquad & \psi_I = Ae^{ik_I x} + Be^{-ik_I x} \; , \\ -a \leq x < 0: \qquad & \psi_{II} = Ce^{ik_{II} x} + De^{-ik_{II} x} \; . \end{aligned}$$

b) Wie lauten die Randbedingungen bei $x = 0$ und $x = a$?

c) Lösen Sie die Randbedingungen für $E > 0$ und eine von links einlaufende Welle und berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten R sowie $|R|^2$.

d) Lösen Sie die Randbedingungen für $-V_0 < E < 0$ und zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte diskret sind. (Es ist nicht notwendig, die Eigenwerte explizit zu berechnen.)

Aufgabe 4

Gegeben sei ein Teilchen im Potential

$$V(x) = -V_0 \, \delta(x) \; , \qquad V_0 > 0.$$

a) Berechnen Sie Reflexions- und Transmissionskoeffizienten $|R|^2$ und $|T|^2$ für $E > 0$. Wie verhalten sie sich für $E \to \infty$?

Hinweis: Benutzen Sie zur Lösung von $H\psi = E\psi$ folgenden Ansatz

$$x < 0: \quad \psi_I = e^{ikx} + R\, e^{-ikx} \; , \qquad x > 0: \quad \psi_{II} = T\, e^{ikx} \; .$$

Nehmen Sie an, daß $\psi(x)$ bei $x = 0$ stetig ist, aber $\psi'(x)$ bei $x = 0$ einen Sprung hat. Zeigen Sie durch Integration von $H\psi = E\psi$ im Intervall $-\epsilon \leq x \leq \epsilon$ und den Grenzübergang $\epsilon \to 0$: $\psi_I'(0) - \psi_{II}'(0) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}\, \psi(0)$.

b) Lösen Sie $H\psi = E\psi$ für $E < 0$. Wieviele gebundene Zustände gibt es?

Hinweis: Benutzen Sie $\psi_I = Ae^{qx}$, $\psi_{II} = Be^{-qx}$ als Lösungsansatz.