Übungsblatt 4 — Quantenmechanik I — SS 16

Aufgabe 1

Gegeben seien orthonormierte Eigenfunktionen ψ_n eines Hamiltonoperators H, d.h. es gelte

$$H\psi_n = E_n\psi_n \;, \qquad \langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm} \;,$$

wobei die Energieeigenwerte E_n nicht entartet sind. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das physikalische System im Zustand

$$\Psi(x, t = 0) = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \;, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \;.$$

a) Unter welchen Bedingungen ist $\Psi(x, t = 0)$ ein Eigenzustand von H?

b) Geben Sie für $t > 0$ die zeitliche Entwicklung $\Psi(x, t)$ an.

c) Bestimmen Sie c_1, c_2, so daß $\Psi(x, t)$ normiert ist.

d) Betrachten Sie den Fall $c_1 = -c_2$. Nach welcher Zeit befindet sich das System im Zustand $\psi_1 + \psi_2$?

e) Berechnen Sie $\langle H\rangle$ für $c_1 = -c_2$.

Aufgabe 2

a) Ein unitärer Operator U erfüllt die Bedingung $U\,U^\dagger = U^\dagger\,U = \mathbf{1}$.
Was bedeutet das für die Eigenwerte von U?

b) Ist das Produkt von zwei unitären Operatoren U, V unitär?

c) Gegeben sei ein hermitescher Operator A. Zeigen Sie, dass $U = e^{i\lambda A}, \lambda \in \mathbb{R}$ ein unitärer Operator ist und berechnen Sie die Eigenwerte von U als Funktion der Eigenwerte von A.

Hinweis: Die Exponentialfunktion eines Operators ist durch die Reihenentwicklung $e^{i\lambda A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\lambda A)^n$ definiert.

d) Berechnen Sie $\frac{dU}{d\lambda}$.

e) ψ sei die Eigenfunktion eines hermiteschen Operators A. Zeigen Sie

$$\langle\psi|\,[A, B]\,|\psi\rangle = 0$$

für jeden beliebigen Operator B.

Aufgabe 3

(*ehemalige Klausuraufgabe*)

a) Wie lauten die Eigenfunktionen des Impulsoperators $\hat{\vec{p}}$?

b) Unter welcher Bedingung sind diese Eigenfunktionen auch Eigenfunktionen von

$$H = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\vec{x})\,?$$

c) Wie lauten in diesem Fall die Eigenwerte von H?

d) Wie lauten die Impulseigenwerte wenn zusätzlich die Randbedingung $\psi(\vec{x} = \vec{0}) = \psi(\vec{x} = \vec{a})$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ auferlegt wird?

e) Wie lautet in diesem Fall die allgemeine Lösung $\Psi(\vec{x}, t)$?

Aufgabe 4

Der Hamiltonoperator für ein Teilchen in einem 2-dim. Potentialkasten mit unendlich hohen Wänden lautet

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x,y) \quad \text{mit} \quad V(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a,\ a \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Finden Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes $\psi(x,y) = f(x)g(y)$ die stationären Zustände von H und berechnen Sie die Energieeigenwerte.

b) Was sind die niedrigsten drei Energieeigenwerte und wieviele Zustände gibt es zu jedem Energieeigenwert?

c) Was ist die niedrigsten Energiewert wenn der Potentialkasten im y-Richtung nür von 0 bis $a/2$ gross wäre (bei gleichen Grosse im x-Richtung)?