

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, daß für Operatoren A, B die folgenden Beziehungen gelten:

$$(i) (A^\dagger)^\dagger = A ,$$

$$(ii) (cA)^\dagger = c^* A^\dagger , \quad c \in \mathbb{C} ,$$

$$(iii) (A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger ,$$

$$(iv) (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger ,$$

$$(v) [A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger] ,$$

$$(vi) [A^n, B] = nA^{n-1} [A, B] , \text{ falls } [A, B] = 1 .$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\vec{x} , \quad \vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} , \quad H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \quad \text{und} \quad \vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$$

hermitesche Operatoren sind.

Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse aus 1a).

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie $[H, x_i]$ und $[H, p_i]$ für $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$.

b) Zeigen Sie

$$\frac{d}{dt} \langle x_i \rangle = \frac{\langle p_i \rangle}{m} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \langle p_i \rangle = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x_i} \right\rangle .$$

Was ist die physikalische Bedeutung dieser beiden Gleichungen und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ehrenfest Theorem.

Aufgabe 3

Gegeben sei die stationäre SG

$$H\psi_n = E_n\psi_n$$

mit

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad \text{und} \quad E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\psi(x) = c \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right] H\left(\frac{x}{x_0}\right) \quad \text{mit} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad c \in \mathbb{C},$$

eine Lösung der stationären SG ist, falls $H(\zeta)$, $\zeta = x/x_0$ die Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{d}{d\zeta} + 2n \right] H(\zeta) = 0 \quad (*)$$

erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass

$$H_n(\zeta) = (-1)^n e^{\zeta^2} \frac{d^n}{d\zeta^n} e^{-\zeta^2}$$

die DGL (*) erfüllt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß

$$\frac{dH_n}{d\zeta} = 2\zeta H_n - H_{n+1} \quad \text{und} \quad H_{n+1} = -2n H_{n-1} + 2\zeta H_n$$

gilt. (Benutzen Sie dazu auch Aufgabe 1a) (vi).)

c) Berechnen Sie explizit H_0, H_1, H_2, H_3 .