Universität Hamburg, Fachbereich Physik

Übungsblatt 2 Quantenmechanik I SS 16

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion

$$\Psi(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\, \Phi(\vec{k})\, e^{i(\vec{x}\cdot\vec{k}-\omega\, t)}$$

die freie Schrödinger Gleichung

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\psi$$

für $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} = \frac{E}{\hbar}$ erfüllt.

b) Berechnen Sie Ψ explizit für

$$\Phi(\vec{k}) = A\, e^{-d^2(\vec{k}-\vec{k}_0)^2}\;, \qquad A, d \in \mathbb{R}\;,$$

und zeigen Sie

$$\Psi(\vec{x},t) = \frac{A}{8(\pi a)^{\frac{3}{2}}}\,\exp\left(\frac{\vec{b}^2}{a} - d^2\vec{k}_0^2\right) \qquad \text{mit} \qquad \vec{b} = d^2\vec{k}_0 + \tfrac{i}{2}\vec{x}\;, \quad a = d^2 + \frac{i\hbar t}{2m}\;.$$

Hinweis: Ergänzen Sie den Exponenten quadratisch, substituieren Sie geeignet und benutzen Sie $\int d^3k\, e^{-a\vec{k}^2} = (\frac{\pi}{a})^{\frac{3}{2}}$.

c) Zeigen Sie

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{[2\pi d^2(1+u^2)]^{\frac{3}{2}}}\,\exp\left(-\frac{(\vec{x}-\frac{\hbar\vec{k}_0 t}{m})^2}{2d^2(1+u^2)}\right)$$

und berechnen Sie u. Hierbei ist A so gewählt worden, dass $\int d^3x|\Psi|^2 = 1$ gilt.

d) Zeigen Sie

$$\langle\vec{x}\rangle = \frac{\hbar\vec{k}_0 t}{m}\;, \qquad \langle\vec{p}\rangle = \hbar\vec{k}_0\;.$$

Hinweis: Schreiben Sie die Integranden so um, dass Sie Symmetrieeigenschaften bei der Berechnung der Integrale ausnutzen können.

e) Für eine beliebigen Operator A definiert man $(\Delta A)^2 := \langle(A-\langle A\rangle)^2\rangle$. Zeigen Sie

$$(\Delta x)^2 = d^2(1+u^2)\;, \quad (\Delta p_x)^2 = \frac{\hbar^2}{4d^2}\;, \quad \Delta x\Delta p_x = \tfrac{1}{2}\,\hbar\sqrt{1+u^2}\;.$$

Hinweis: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$.

Aufgabe 2

Für Operatoren A, B definiert man den Kommutator

$$[A, B] := AB - BA.$$

a) Berechnen Sie

$$[x_i, x_j] \ , \qquad [x_i, p_j] \ , \qquad [p_i, p_j] \ , \qquad \text{für} \qquad p_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^i} \ , \qquad i = 1, 2, 3 \ .$$

x_i, p_i sind die Komponenten der Vektoren $\vec{x}, \vec{p}$ bezüglich einer kartesischen Basis, also $\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i, \ \vec{p} = \sum_{i=1}^{3} p_i \vec{e}_i$.

b) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} &i) \qquad [A + B, C] = [A, C] + [B, C] \ , \\ &ii) \qquad [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \ , \\ &iii) \qquad [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \ . \end{aligned}$$