

**Aufgabe 1** (ehemalige Klausuraufgabe)

Gegeben sei der Hamiltonoperator  $H = H_0 + H_1$  mit

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad H_1 = \alpha x^2,$$

wobei  $\alpha$  konstant ist.

- a) Fassen Sie  $H_1$  als kleine Störung von  $H_0$  auf und berechnen Sie die Korrektur zu den Energieeigenwerten von  $H_0$  in 1. und 2. Ordnung Störungstheorie.

*Hinweis:*  $x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$ ,  $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ ,  $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ ,

$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n|H_1|m\rangle|^2}{E_n - E_m}.$$

- b) Finden Sie die exakten Eigenwerte von  $H$ . Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Ergebnissen aus a). *Hinweis:*  $\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \dots$

**Aufgabe 2**

- a) Berechnen Sie explizit die Radialanteile  $R_{10}, R_{20}, R_{21}$  für das H-Atom aus der Formel

$$R_{nl}(r) = -\sqrt{\frac{(n-l-1)!(2\kappa)^3}{2n((n+l)!)^3}} (2\kappa r)^l e^{-\kappa r} L_{n+l}^{2l+1}(2\kappa r).$$

Drücken Sie das Ergebnis durch den Bohrschen Radius  $a := \frac{\hbar}{me^2}$  mit Hilfe von  $\kappa = \frac{Z}{na}$  aus.

- b) Wird der Atomkern als homogen geladene Kugel vom Radius  $R$  ( $R \ll a$ ) angesehen, kann der Einfluß der endlichen Kernaushdehung auf die Energieniveaus des Wasserstoffatoms durch den Störoperator

$$H_1 = \begin{cases} \frac{e^2}{R} \left( \frac{R}{r} - \frac{3}{2} + \frac{r^2}{2R^2} \right) & \text{für } r \leq R, \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

beschrieben werden. Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie mit der Näherung  $r \leq R \ll a$  (d.h.  $e^{-2\kappa r} \approx 1$ ) die Energiekorrektur für den Grundzustand des Wasserstoffatoms. Zeigen Sie

$$E_0^1 = c \left( \frac{Z}{a} \right)^3 e^2 R^2,$$

und berechnen Sie  $c$ .

### Aufgabe 3

a) Gegeben sei der Hamiltonoperator

$$H = H_0 + \alpha \vec{L} \cdot \vec{S}, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

wobei  $H_0$  der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms ist. Berechnen Sie in 1. Ordnung Störungstheorie die Korrektur zur Energie  $E_n^0$ . Zeigen Sie

$$E_n^1 = c \alpha \hbar^2 \begin{cases} l & \text{für } j = l + \frac{1}{2} \\ -l - 1 & \text{für } j = l - \frac{1}{2} \end{cases},$$

und berechnen Sie  $c$ . *Hinweis:* Benutzen Sie die Basis  $|n, j, m_j, l, s\rangle$ .

b) Berechnen Sie in der gleichen Basis  $|n, j, m_j, l, s\rangle$  in 1. Ordnung Störungstheorie die Korrektur zur Energie für den Hamiltonoperator

$$H = H_0 + \beta \vec{B} \cdot (\vec{L} + 2\vec{S}), \quad \beta \in \mathbf{R},$$

wobei  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  ein homogenes magnetischen Feld ist. Zeigen Sie

$$E_n^1 = \hat{c} B_0 \beta \hbar m_j \left(1 \pm \frac{1}{2l+1}\right) \quad \text{für } j = l \pm \frac{1}{2},$$

und berechnen Sie  $\hat{c}$ .

### Aufgabe 4 (ehemalige Klausuraufgabe)

Gegeben sei der Hamiltonoperator

$$H = H_0 + H_1, \quad \text{mit} \quad H_0 = a\vec{L}^2, \quad H_1 = bL_x, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- Wie lauten Eigenfunktionen, Eigenwerte von  $H_0$  und was ist ihre Entartung?
- Geben Sie in 1. Ordnung Störungstheorie die Korrektur zur Energie des Grundzustands an.
- Wie lautet die Energiekorrektur in 1. Ordnung Störungstheorie für das erste angeregte Niveau? Geben Sie auch die richtigen Eigenzustände an.

*Hinweis:* Benutzen Sie entartete Störungstheorie.

d) Finden Sie in 1. Ordnung Störungstheorie die Korrektur zur Energie des Grundzustands und des ersten angeregten Niveaus für

$$H_0 = a(\vec{L}^2 - L_z), \quad H_1 = bL_x.$$