Übungsblatt 8 — Quantenmechanik I — SS 12

Abgabetermin: 7.6.

Aufgabe 1 [1a) 2 Punkte, 1b)-1d) je 1 Punkt]

a) Zeigen Sie, daß

$$L_r(x) := \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \, \frac{(r!)^2}{(k!)^2\,(r-k)!} \; x^{\,k}$$

die folgende Differentialgleichung erfüllt

$$x\,L_r'' + (1-x)\,L_r' + r\,L_r = 0 \; . \qquad (*)$$

b) Berechnen Sie explizit L_0, L_1, L_2.

c) Zeigen Sie, daß $L_r^s(x) := \frac{d^s}{dx^s}\; L_r(x)$ die Differentialgleichung

$$x\,L_r^{s\,\prime\prime} + (s+1-x)\,L_r^{s\,\prime} + (r-s)\,L_r^s = 0$$

erfüllt. *Hinweis:* Differenzieren Sie (*) s-mal.

d) Zeigen Sie, daß auch gilt

$$L_r^s = \sum_{k=0}^{r-s} (-1)^{k+s} \, \frac{(r!)^2}{k!(k+s)!(r-k-s)!} \; x^k .$$

Aufgabe 2 [2a) 2 Punkte, 2b) 3 Punkte]

In der Vorlesung wurde die erzeugende Funktion Φ_s der zugeordneten Laguerre-Polynome $L_r^s(x)$ definiert als

$$\Phi_s(x,y) \;:=\; (-y)^s (1-y)^{-(s+1)}\, e^{-\frac{yx}{1-y}} \;=\; \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^r}{r!} L_r^s(x) \; .$$

a) Zeigen Sie

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s+\sigma} \Phi_s(x,y)\Phi_s(x,z)dx = (s+\sigma)!\big((1-y)(1-z)\big)^{\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{s+\sigma+i}{i} (yz)^{i+s}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^r}{r!}\frac{z^j}{j!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s+\sigma} L_r^s(x) L_j^s(x) dx \; .$$

Hinweis: : Benutzen Sie $\int_0^\infty e^{-ax} x^n = a^{-(n+1)} n!$ und $(1-t)^{-m} = \sum_{i=0}^\infty \binom{m+i-1}{i} t^i$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a)

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s+1} L_r^s(x) L_r^s(x) dx \;=\; \frac{(r!)^3}{(r-s)!}\,(2r-s+1) \; .$$

Aufgabe 3 [3a)-3e) je 1 Punkt]

Gegeben sei das Zentralpotential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r \le a \ , \\ 0 & \text{für } r > a \end{cases} \ , \qquad V_0, a \in \mathbb{R}_+ \ .$$

a) Machen Sie für die stationären Zustände den Separationsansatz $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$, wobei $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ die Kugelflächenfunktionen sind. Zeigen Sie, dass $R(r)$ für $r \le a$ die folgende Radialgleichung erfüllt

$$\left(\partial_\rho^2 + \tfrac{2}{\rho}\,\partial_r - \tfrac{l(l+1)}{\rho^2} + 1\right)R(\rho) = 0 \ , \qquad \text{mit} \qquad \rho = \kappa r \ , \quad \hbar\kappa = \sqrt{2m(E+V_0)} \ .$$

b) Lösen Sie die DGL für $l = 0$ mit dem Ansatz $R(\rho) = \rho^{-1}u(\rho)$ und bestimmen Sie $u(\rho)$.

c) Machen Sie für $l \neq 0$ den Ansatz $R_l = \rho^l \chi_l$ und zeigen Sie, dass χ_l die DGL

$$\chi_l'' + \tfrac{2(l+1)}{\rho}\,\chi_l' + \chi_l = 0 \qquad\qquad (*)$$

erfüllt.

d) Zeigen Sie, dass $\hat{\chi}_l = \rho^{-1}\chi_l'$ die DGL $(*)$ für $l \to l+1$ erfüllt.

Hinweis: Differenzieren Sie dazu $(*)$.

e) Konstruieren Sie mit Hilfe von $\hat{\chi}$ die Lösung $\chi_l = (\rho^{-1}\partial_\rho)^l \chi_0$.

Aufgabe 4 [4a)-4e) je 1 Punkt]

Gegeben sei der Hamiltonoperator für ein Teilchen mit Masse m und Ladung q im konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\,\vec{A}(\vec{x})\right)^2 \qquad \text{mit} \qquad \vec{A} = -\tfrac{1}{2}B_0(y\vec{e}_x - x\vec{e}_y) \ .$$

a) Berechnen Sie $[p_i, A_j]$ für $i, j = x, y, z$.

b) Benutzen Sie zur Bestimmung der stationären Zustände den Separationsansatz

$$\psi(x,y,z) = \ e^{i\,k_z\,z}\, f(x,y) \ , \quad k_z \in \mathbb{R} \ .$$

Zeigen Sie, dass f eine Eigenwertgleichung $H_\perp f = E_\perp f$ erfüllt, bestimmen Sie $H_\perp$ und drücken Sie $E_\perp$ durch E und k_z aus.

c) Zeigen Sie $H_\perp = \hbar\omega_c(b^\dagger b + 1/2)$ mit

$$\omega_c := \frac{qB_0}{mc}, \qquad b := \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega_c}}\left((p_x - \frac{q}{c}A_x) + i(p_y - \frac{q}{c}A_y)\right) .$$

d) Berechnen Sie $[b, b^\dagger]$.

e) Wie lautet $E_\perp$?