Universität Hamburg, Fachbereich Physik

Übungsblatt 3 — Quantenmechanik I — SS 12

Abgabetermin: 19.4.

Aufgabe 1 [1a) 3 Punkte, 1b) 2 Punkte]

a) Zeigen Sie, daß für Operatoren A, B die folgenden Beziehungen gelten:

(i) $(A^\dagger)^\dagger = A$,

(ii) $(cA)^\dagger = c^* A^\dagger$, $\quad c \in \mathbb{C}$,

(iii) $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$,

(iv) $(A\,B)^\dagger = B^\dagger\,A^\dagger$,

(v) $[A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$,

(vi) $[A^n, B] = nA^{n-1}$, falls $\quad [A, B] = 1$.

b) Zeigen Sie, dass

$$\vec{x}\ , \quad \vec{p} = \tfrac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\ , \quad H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \quad \text{und} \quad \vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$$

hermitesche Operatoren sind.

Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse aus 1a).

Aufgabe 2 [2a) 2Punkte, 2b) 3Punkte]

a) Berechnen Sie $[H, x_i]$ und $[H, p_i]$ für $H = \dfrac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$.

b) Zeigen Sie

$$\frac{d}{dt}\langle x_i\rangle = \frac{\langle p_i\rangle}{m} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}\langle p_i\rangle = -\langle\frac{\partial V}{\partial x_i}\rangle.$$

Was ist die physikalische Bedeutung dieser beiden Gleichungen und vergleichen Sie Ihr Ergbnis mit dem Ehrenfest Theorem.

Aufgabe 3 [3a) 4 Punkte, 3b) 4 Punkte, 3c) 2 Punkte]

Gegeben sei die stationäre SG

$$H\psi_n = E_n\psi_n$$

mit

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad \text{und} \quad E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2}) \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\psi(x) = c \ \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right] H\left(\frac{x}{x_0}\right) \qquad \text{mit} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \ c \in \mathbb{C} \ ,$$

eine Lösung der stationären SG ist, falls $H(\zeta), \zeta = x/x_0$ die Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} - 2\zeta\,\frac{d}{d\zeta} + 2n\right] H(\zeta) = 0 \qquad (*)$$

erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass

$$H_n(\zeta) = (-1)^n \ e^{\zeta^2} \ \frac{d^n}{d\zeta^n} \ e^{-\zeta^2}$$

die DGL (*) erfüllt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß

$$\frac{dH_n}{d\zeta} = 2\zeta\, H_n - H_{n+1} \quad \text{und} \quad H_{n+1} = -2n\, H_{n-1} + 2\zeta H_n$$

gilt. (Benutzen Sie dazu auch Aufgabe 1a) (vi).)

c) Berechnen Sie explizit H_0, H_1, H_2, H_3.