

Abgabetermin: 12.4.

Aufgabe 1 (15 Punkte, jede Teilaufgabe 3 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion

$$\Psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \Phi(\vec{k}) e^{i(\vec{x}\cdot\vec{k} - \omega t)}$$

die freie Schrödinger Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$$

für $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} = \frac{E}{\hbar}$ erfüllt.

b) Berechnen Sie Ψ explizit für

$$\Phi(\vec{k}) = A e^{-d^2(\vec{k}-\vec{k}_0)^2}, \quad A, d \in \mathbb{R},$$

und zeigen Sie

$$\Psi(\vec{x}, t) = \frac{A}{8(\pi a)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\frac{\vec{b}^2}{a} - d^2 \vec{k}_0^2\right) \quad \text{mit} \quad \vec{b} = d^2 \vec{k}_0 + \frac{i}{2} \vec{x}, \quad a = d^2 + \frac{i\hbar t}{2m}.$$

Hinweis: Ergänzen Sie den Exponenten quadratisch, substituieren Sie geeignet und benutzen Sie $\int d^3k e^{-ak^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$.

c) Zeigen Sie

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{[2\pi d^2(1+u^2)]^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(\vec{x} - \frac{\hbar \vec{k}_0 t}{m})^2}{2d^2(1+u^2)}\right)$$

und berechnen Sie u . Hierbei ist A so gewählt worden, dass $\int d^3x |\Psi|^2 = 1$ gilt.

d) Zeigen Sie

$$\langle \vec{x} \rangle = \frac{\hbar \vec{k}_0 t}{m}, \quad \langle \vec{p} \rangle = \hbar \vec{k}_0.$$

Hinweis: Schreiben Sie die Integranden so um, dass Sie Symmetrieeigenschaften bei der Berechnung der Integrale ausnutzen können.

e) Für eine beliebigen Operator A definiert man $(\Delta A)^2 := \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$. Zeigen Sie

$$(\Delta x)^2 = d^2(1+u^2), \quad (\Delta p_x)^2 = \frac{\hbar^2}{4d^2}, \quad \Delta x \Delta p_x = \frac{1}{2} \hbar \sqrt{1+u^2}.$$

Hinweis: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte, Teilaufgabe a) 2Punkte, Teilaufgabe b) 3Punkte)

Für Operatoren A, B definiert man den Kommutator

$$[A, B] := AB - BA.$$

a) Berechnen Sie

$$[x_i, x_j], \quad [x_i, p_j], \quad [p_i, p_j], \quad \text{für} \quad p_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

x_i, p_i sind die Komponenten der Vektoren \vec{x}, \vec{p} bezüglich einer kartesischen Basis, also

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i, \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^3 p_i \vec{e}_i.$$

b) Zeigen Sie

$$i) \quad [A + B, C] = [A, C] + [B, C],$$

$$ii) \quad [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B,$$

$$iii) \quad [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$