Übungsblatt 10 — Quantenmechanik I — SS 12

Abgabetermin: 28.6

Aufgabe 1 [1a) 3 Punkte, 1b) 2 Punkte] (*ehemalige Klausuraufgabe*)

Gegeben sei der Hamiltonoperator $H = H_0 + H_1$ mit

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2} m\omega^2 x^2 \ , \qquad H_1 = \alpha x^2 \ ,$$

wobei α konstant ist.

a) Fassen Sie H_1 als kleine Störung von H_0 auf und berechnen Sie die Korrektur zu den Energieeigenwerten von H_0 in 1. und 2. Ordnung Störungstheorie.

Hinweis: $x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$, $\quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$,

$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n|H_1|m\rangle|^2}{E_n - E_m} \ .$$

b) Finden Sie die exakten Eigenwerte von H. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Ergebnissen aus a). *Hinweis*: $\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \ldots$

Aufgabe 2 [1a) 3 Punkte, 1b) 2 Punkte]

a) Berechnen Sie explizit die Radialanteile R_{10}, R_{20}, R_{21} für das H-Atom aus der Formel

$$R_{nl}(r) = -\sqrt{\frac{(n-l-1)!\,(2\kappa)^3}{2n((n+l)!)^3}}\,(2\kappa r)^l\, e^{-\kappa r} L_{n+l}^{2l+1}(2\kappa r) \ .$$

Drücken Sie das Ergebnis durch den Bohrschen Radius $a := \frac{\hbar}{me^2}$ mit Hilfe von $\kappa = \frac{Z}{na}$ aus.

b) Wird der Atomkern als homogen geladene Kugel vom Radius R ($R \ll a$) angesehen, kann der Einfluß der endlichen Kernausdehung auf die Energieniveaus des Wasserstoffatoms durch den Störoperator

$$H_1 = \begin{cases} \dfrac{e^2}{R}\left(\dfrac{R}{r} - \dfrac{3}{2} + \dfrac{r^2}{2R^2}\right) & \text{für} \quad r \leq R, \\ 0 & \text{für} \quad r > R \end{cases}$$

beschrieben werden. Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie mit der Näherung $r \leq R \ll a$ (d.h. $e^{-2\kappa r} \approx 1$) die Energiekorrektur für den Grundzustand des Wasserstoffatoms. Zeigen Sie

$$E_0^1 = c\left(\tfrac{Z}{a}\right)^3 e^2 R^2 \ ,$$

und berechnen Sie c.

Aufgabe 3 [3a) 2 Punkte, 3b) 3 Punkte]

a) Gegeben sei der Hamiltonoperator

$$H = H_0 + \alpha\, \vec{L} \cdot \vec{S} \ , \qquad \alpha \in \mathbf{R} \ ,$$

wobei H_0 der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms ist. Berechnen Sie in 1. Ordnung Störungstheorie die Korrektur zur Energie E_n^0. Zeigen Sie

$$E_n^1 = c\ \alpha\hbar^2 \begin{cases} l & \text{für} \quad j = l + \frac{1}{2} \\ -l-1 & \text{für} \quad j = l - \frac{1}{2} \end{cases} ,$$

und berechnen Sie c. *Hinweis*: Benutzen Sie die Basis $|n, j, m_j, l, s\rangle$.

b) Berechnen Sie in der gleichen Basis $|n, j, m_j, l, s\rangle$ in 1. Ordnung Störungstheorie die Korrektur zur Energie für den Hamiltonoperator

$$H = H_0 + \beta \vec{B} \cdot (\vec{L} + 2\vec{S}) \ , \qquad \beta \in \mathbf{R} \ ,$$

wobei $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ ein homogenes magnetischen Feld ist. Zeigen Sie

$$E_n^1 = \hat{c}\ B_0\, \beta\, \hbar\, m_j\, (1 \pm \tfrac{1}{2l+1}) \quad \text{für} \quad j = l \pm \tfrac{1}{2} \ ,$$

und berechnen Sie $\hat{c}$.

Aufgabe 4 [1a), 1b),1d) je 1 Punkt, 1c) 2 Punkte]

Ggeben sei der Hamiltonoperator

$$H = H_0 + H_1 \ , \qquad \text{mit} \qquad H_0 = a\vec{L}^2 \ , \qquad H_1 = bL_x \ , \qquad a, b \in \mathbb{R} \ .$$

a) Wie lauten Eigenfunktionen, Eigenwerte von H_0 und was ist ihre Entartung?

b) Geben Sie in 1. Ordnung Störungstheorie die Korrektur zur Energie des Grundzustands an.

c) Wie lautet die Energiekorrektor in 1. Ordnung Störungstheorie für das erste angeregte Nivau? Geben Sie auch die richtigen Eigenzustände an.

Hinweis: Benutzen Sie entartete Störungstheorie.

d) Finden Sie in 1. Ordnung Störungstheorie die Korrektur zur Energie des Grundzustands und des ersten angeregten Nivaus für

$$H_0 = a(\vec{L}^2 - L_z) \ , \qquad H_1 = bL_x \ .$$