Klassische Feldtheorie 2

Mitschrift von Martin Bendschneider

Inhaltsverzeichnis

Inhalt:

1. Hamilton Mechanik
2. Integrable Systeme
   Chaotische Systeme
3. Gruppentheorie
4. Spezielle Relativitätstheorie

Literatur:

Wess: Theroretische Mechanik
Goldstein:
Arnold (symplektische Formulierung)

1 Hamilton Mechanik

1.1 Newton Mechanik

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i, \qquad i = 1, \dots, N = \text{Anzahl der Teilchen}$$

$3N \equiv f$ DGL 2. Ordnung (int) $\Rightarrow 6N = 2f$ intkonst ...Anfangsbedingungen

1.2 Lagrange

verallgemeinerte Koordinaten q_a, $a = 1, \dots, f$
... Geschwindigkeit $\dot{q}_a$
E-L:

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0 \qquad f \text{ DGL 2. Ordnung}$$

$$L = T - U, \qquad T = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{f}\sum_{b=1}^{f} g_{ab}\dot{q}_a\dot{q}_b, \qquad U(q_a, \cancel{\dot{q}_a})$$

E-L:

$$\sum_b g_{ab}\ddot{q}_b + \frac{\partial U}{\partial q^a} = 0$$

1.3 Hamilton

$2f$ DGL 1. Ordnung in t.

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}$$

$$H = H\left(q_a, P_a\right) = T + U \qquad \text{Hamiltonfunktion}$$

$$(\star) \qquad p_a = \frac{\partial L\left(q, \dot{q}\right)}{\partial \dot{q}_a} \qquad \text{zu } q_a \text{ konjugierte Impuls}$$

Forderung an L: $(\star)$ muss nach $\dot{q}_a$ auflösbar sein.

<u>Beispiel:</u>

N Teilchen in U.

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_N \end{pmatrix} 0$$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{b=1}^{f} m_b \dot{q}_b^2 - U\left(q\right), \qquad p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = m_a \dot{q}_a$$

$$\Rightarrow \dot{q}_a = \frac{p_a}{m_a}$$

$$\frac{\partial p_a}{\partial \dot{q}_b} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_b \partial \dot{q}_a} \qquad \text{muss Rang f haben}$$

$$\Rightarrow \det \underbrace{\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_b \partial \dot{q}_a}\right)}_{g_{ab}} \neq 0$$

Legendre-Transformierte von L

$$H\left(q_a, p_a\right) := \sum_{b=1}^{f} p_b \dot{q}_b - L\left(q, \dot{q}\right)$$

$$\text{genauer} := \sum_{b=1}^{f} p_b \dot{q}_b\left(q, p\right) - L\left(q, \dot{q}\left(q, p\right)\right)$$

Allgemein:

$$H\left(y\right) = y \cdot x - L\left(x\right), \qquad y := \frac{\partial L}{\partial x}$$

Prüfe: H hängt nicht von $\dot{q}$ ab:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_a} = p_a - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}}_{p_a} = 0$$

Das “-” sichert diese Eigenschaft.

jetzt das Beispiel:

$$H = \sum_{b=1}^{f} p_b \frac{p_b}{m_b} - \frac{1}{2}\sum_b m_b \left(\frac{p_b}{m_b}\right)^2 + U = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_b \frac{p_b^2}{m_b}}_{T} + U$$

H ist die Gesamtenergie des Systems.

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\sum_b \frac{p_b^2}{m_b} + U = T + U}$$

<u>Beweis 01</u>

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q_a} &= \frac{\partial}{\partial q_a}\left(\sum_{b=1}^{f} p_b \dot{q}_b\left(q,p\right) - L\left(q,\dot{q}\left(q,p\right)\right)\right) \\
&= \sum_b p_b \frac{\partial \dot{q}_b\left(p,q\right)}{\partial q_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} - \sum_b \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b}}_{p_b} \cdot \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a} \\
&= -\frac{\partial L}{\partial q_a} \underset{\text{E-L}}{=} -\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}}_{p_a} = -\dot{p}_a
\end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_a} &= \frac{\partial}{\partial p_a}\left(\sum_b p_b \dot{q}_b\left(p,q\right) - L\left(q,\dot{q}\left(p,q\right)\right)\right) \\
&= \dot{q}_a + \sum_b p_b \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial p_a} - \sum_b \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b}}_{p_b} \cdot \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial p_a} = \dot{q}_a
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_a} = \dot{q}_a \qquad -\frac{\partial H}{\partial q_a} = \dot{p}_a}$$

Hamilton Gleichungen $2f$ DGL 1. Ordnung. $2f$ Integrationskonstanten. $q_a\left(t = t_0\right), \qquad p_a\left(t = t_0\right)$

<u>Beispiel:</u>

N Teilchen im Potential:

$$H = \underbrace{\sum_b \frac{p_b^2}{2m_b}}_{T} + U(q)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} = \frac{\partial U}{\partial q_a} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_a} = \frac{p_a}{m_a}$$

H-Gl.:

$$\begin{cases} \dot{q}_a & = \frac{p_a}{m_a} \\ \dot{p}_a & = -\frac{\partial U}{\partial q_a} \end{cases} \Rightarrow m_a \ddot{q}_a = -\frac{\partial U}{\partial q_a} = F_a$$

f DGL 2. Ordnung. Hamilton und ELGr sind äquivalent. Systeme die die H. Gl erfüllen, erfüllen immer die Lagrangegleichungen.

Schritt 1: Finde H für physikalisches System.
Schritt 2: Berechne $\frac{\partial H}{\partial p}$, $\frac{\partial H}{\partial q}$
Schritt 3: Löse $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$, $\qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$

<u>Zeige:</u> H-Gl $\Rightarrow$ E-L Gl.

Umkehrtransformation $L(q, \dot{q}) := \sum_b \dot{q}_b p_b - H(q, p)$, $\qquad \dot{q}_b := \frac{\partial H}{\partial p_b}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_a} &= \sum_b \dot{q}_b \frac{\partial p_b}{\partial q_a} - \frac{\partial H}{\partial q_a} - \sum_b \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_b}}_{\dot{q}_b} \cdot \frac{\partial p_b}{\partial q_a} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q_a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} &= p_a + \sum_b q_b \frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a} - \sum_b \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_b}}_{\dot{q}_b} \cdot \frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a} \\ &= p_a \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} = \dot{p}_a + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_a}}_{-\dot{p}_a} = 0$$

2. Vorlesung:

$2f$ DGL 1. Ordnung:

$$\underbrace{\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}}_{\text{Hamilton Gl.}} \qquad a = 1, \ldots, f$$

$$H\left(p\left(t\right),q\left(t\right),t\right)=\sum_{b=1}^{f}p_b\dot{q}_b-L\left(q,\dot{q}\right),\qquad \dot{p}_a=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_a}\qquad \text{kanonischer Impuls}$$

Beispiel 1:

Teilchen im Potential U:

$$H=\underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m}}_{T}+U\left(\vec{x}\right)=T+U\qquad p=m\dot{q}$$

Beispiel: 2 Teilchen im Magnetfeld $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$L\left(x,\dot{x}\right)=\underbrace{\frac{m}{2}\sum_{b=1}^{3}\dot{x}_b^2}_{\frac{m}{2}\vec{v}^2}+\underbrace{q\sum_b\dot{x}_bA_b\left(x\left(t\right)\right)}_{q\,\dot{\vec{q}}\cdot\vec{A}}$$

E-L:

$$m\ddot{\vec{x}}=q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$p_a=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_a}=m\dot{x}_a+qA_a\Rightarrow\dot{x}_a=\frac{1}{m}\left(p_a-qA_a\right)$$

$$H=\sum_b\frac{p_b\left(p_b-qA_b\right)}{m}-\frac{m}{2m^2}\sum_b\left(p_b-qA_b\right)\left(p_b-qA_b\right)-\frac{q}{m}\sum_b\left(p_b-qA_b\right)A_b$$

$$H=\frac{1}{2m}\sum_b\left(p_b-qA_b\right)\left(p_b-qA_b\right)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_a&=\frac{\partial H}{\partial p_a}=\frac{1}{m}\left(p_a-qA_a\right)\\ \dot{p}_a&=-\frac{\partial H}{\partial x^a}=\frac{q}{m}\sum_b\left(p_b-qA_b\right)\cdot\frac{\partial A_b}{\partial x^a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_a&=\dot{p}_a-q\sum_b\frac{\partial A}{\partial x^b}\dot{x}^b\\ &=q\sum_b\left(\frac{\partial A_b}{\partial x^a}\dot{x}^b-\frac{\partial A}{\partial x^b}\dot{x}_b\right)\\ &=q\left(\dot{\vec{x}}\times\vec{B}\right)_a\end{aligned}$$

Kanonischer Impuls ist nicht gleich dem “Newtonschem Impuls”. Das bekommt man immer wenn man eine Geschwindigkeitsabhänge Abhängigkeit hat.

2 Phasenraum

q_a :Koordinaten des Konfigurationsraums. (dim f)
q_a, p_a: Phasenraum (dim $2f$).

Den Konfigurationsraum nimmt man wahr, den Phasenraum nicht.

<u>Beispiel:</u>

Man kann zentrale Theoreme im Phasenraum aufstellen, die man im Konfigurationsraum nicht bemerkt.

$$H = \frac{p^2}{2m} + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q$$

$$\left(\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega^2 q \Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0\right)$$

Ellipse:

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1 \qquad a = \sqrt{2mE}, \qquad b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

Ist die Energie wirklich erhalten?

$$\dot{E} = \frac{p\overbrace{\dot{p}}^{-m\omega^2 q}}{m} + m\omega^2 q \overbrace{\dot{q}}^{\frac{p}{m}} = -p\omega^2 q + \omega^2 qp = 0$$

2.1 Symplektische Struktur des Phasenraums

Definition:

$2f$ dim Vektor

$$\eta = \begin{pmatrix} q_a \\ p_a \end{pmatrix}$$

$2f \times 2f$ dim Matrix

$$J = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & 0 & & & 1 \\ \hline -1 & & & 0 & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & 0 \end{array}\right)$$

Es gilt:

$$J^T = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) = J^{-1}$$

(J ist ähnlich wie $\eta_{\mu\nu}$ in SRT: $\eta_{\mu\nu} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$)

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{p}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_a} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_a} \end{pmatrix} = J\frac{\partial H}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial H}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{\eta} = J\frac{\partial H}{\partial \eta}}$$

2.2 Poisson Klammer

beliebige Funktion:

$$A\left(p\left(t\right), q\left(t\right), t\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_b \left(\frac{\partial A}{\partial p_b} \underbrace{\dot{p}_b}_{-\frac{\partial H}{\partial q_b}} + \frac{\partial A}{\partial q_b} \underbrace{\dot{q}_b}_{\frac{\partial H}{\partial p_b}}\right) \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \underbrace{\sum_b \left(\frac{\partial A}{\partial q_b}\frac{\partial H}{\partial p_b} - \frac{\partial A}{\partial p_b}\frac{\partial H}{\partial q_b}\right)}_{=\{A,H\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{A, B\} :&= \sum_{b=1}^{f} \left(\frac{\partial A}{\partial q_b}\frac{\partial B}{\partial p_b} - \frac{\partial A}{\partial p_b}\frac{\partial B}{\partial q_b}\right) \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial \eta}\right)^T J\frac{\partial B}{\partial \eta} \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial q}, \frac{\partial A}{\partial p}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial B}{\partial q} \\ \frac{\partial B}{\partial p} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \frac{\partial B}{\partial p} \\ -\frac{\partial B}{\partial q} \end{pmatrix}} \\ &= \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q} \end{aligned}$$

2.2.1 Eigenschaften der Poissonklammer

1. $\{A, B\} = -\{B, A\}$
2. $\{A, \lambda B + \mu C\} = \lambda \{A, B\} + \mu \{A, B\}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$
3. $\{A, BC\} = \{A, B\} C + B \{A, C\}$
4. $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$ Jacobi Identität

Beweis:

a)

$$\{B, A\} = \sum_b \frac{\partial B}{\partial q_b}\frac{\partial A}{\partial p_b} - \frac{\partial B}{\partial p_b}\frac{\partial A}{\partial q_b} = -\{A, B\}$$

b)

$$\{A, \lambda B + \mu C\} = \sum_b \frac{\partial A}{\partial q_b}\left(\lambda\frac{\partial B}{\partial p_b} + \mu\frac{\partial C}{\partial p_b}\right) - \frac{\partial A}{\partial p_b}\left(\lambda\frac{\partial B}{\partial q_b} + \mu\frac{\partial C}{\partial q_b}\right) = \lambda \{A, B\} + \mu \{A, C\}$$

c)

$$\sum_b \left(\frac{\partial A}{\partial q_b}\underbrace{\frac{\partial BC}{\partial p_b}}_{\frac{\partial B}{\partial q_b}C + B\frac{\partial C}{\partial p_b}} - \frac{\partial A}{\partial p_b}\underbrace{\frac{\partial BC}{\partial q_b}}_{\frac{\partial B}{\partial q_b}C + B\frac{\partial C}{\partial q_b}}\right) = \{A, B\} C + B \{A, C\}$$

d) Hausaufgabe

$$\{q_a, q_b\} = \sum_c \left(\frac{\partial q_a}{\partial q_c}\underbrace{\frac{\partial q_b}{\partial p_c}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial q_a}{\partial p_c}}_{=0}\frac{\partial q_b}{\partial q_c}\right) = 0$$

$$\{p_a, p_b\} = 0$$

$$\{q_a, p_b\} = \sum_c \left(\frac{\partial q_a}{\partial q_c}\frac{\partial p_b}{\partial p_c} - \underbrace{\frac{\partial q_a}{\partial p_c}\frac{\partial p_b}{\partial q_c}}_{=0}\right) = \delta_{ab}$$

$$\{A, q_a\} = \sum_b \left(\frac{\partial A}{\partial q_b}\underbrace{\frac{\partial q_a}{\partial p_b}}_{0} - \frac{\partial A}{\partial p_b}\underbrace{\frac{\partial q_a}{\partial q_b}}_{\delta_{ab}}\right) = -\frac{\partial A}{\partial p_a}$$

$$\{A, p_a\} = \frac{\partial A}{\partial q_a}$$

$\Rightarrow$ Hamilton Gleichung:

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a} = -\{H, q_a\} = \{q_a, H\}$$
$$\dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a} = -\{H, p_a\} = \{p_a, H\}$$

$$\boxed{\dot{q}_a = \{q_a, H\}\,, \qquad \dot{q}_a = \{p_a, H\}}$$

2.3 Erhaltene Größen $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} = 0$$

für $\frac{\partial A}{\partial t} = 0 \Rightarrow \{A, H\} = 0$

z.B.:

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \qquad \left\{\vec{L}, H\right\} = 0$$

<u>Zyklische Variablen:</u>

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0$$

Hamilton:

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} \underset{\text{letzte VL}}{=} -\frac{\partial H}{\partial q_a} = \{p_a, H\} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}}_{p_a} = \dot{p}_a = \{p_a, H\} = 0$$

<u>Bemerkungen</u>

$$\{A, A\} = -\{A, A\} = 0$$
$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \underbrace{\{H, H\}}_{=0} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

E ist erhalten für $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

---

3 Kanonische Transformationen

K.T. sind Koordinatentransformationen, die die Struktur der H-Mechanik erhalten. Das entspricht Koordinatentransformationen im Phasenaraum)

$$\begin{cases} q_a & \to Q_a\left(q,\, p\right) \\ p_a & \to P_a\left(q,\, p\right) \end{cases} \text{mit } \dot{Q}_a = \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_a},\; \dot{P}_a = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_a} \qquad \hat{H}\left(P,\, Q\right)$$

Das ist eine Definition. Wann ist das Wahr, und wozu ist das gut? Wir können die Lösung für das Problem einfacher finden, wenn wir zu gescheiten Koordinaten übergehen.

Wann gilt das? Genau dann, wenn:

$$(*) \qquad L\left(q\left(t\right),\, \dot{q}\left(t\right),\, t\right) = \hat{L}\left(Q\left(t\right),\, \dot{Q}\left(t\right),\, t\right) - \frac{dF}{dt}$$

Wir werden nur Systeme anschauen, bei denen L und $\hat{L}$ nicht explizit von der Zeit abhängen. mit

$$H = \sum_b p_b \dot{q}_b - L, \qquad \hat{H} = \sum_b P_b \dot{Q}_b - \hat{L}$$

<u>Beweis:</u>

In Klassische Feldtheorie 1 wurde gezeigt, dass L und $\hat{L}$ die gleichen E-L Gl. haben!

$$S = \int L\, dt = \int \left(L + \frac{dF}{dt}\right) dt = \int L\, dt + \underbrace{F|}_{\text{kann nicht beitragen}}$$

Kanonische Transformationen werden durch F charakterisiert. F heißt auch erzeugende Funktion.
F kann von $2f+1$ unabhängigen Variablen abhängen.
Z.B. $F\left(q_a,\, p_a, t\right),\, F\left(Q_a,\, P_a,\, t\right),\, F\left(q_a,\, Q_a,\, t\right),\, F\left(p_a,\, P_a,\, t\right)$
<u>Spezialfall:</u> $F = F_1\left(q,\, Q,\, t\right)$, mit q, Q unabhängig.

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_b \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_b}\dot{q}_b + \frac{\partial F_1}{\partial Q_b}\dot{Q}_b\right)$$

$$\curvearrowright (*) : \qquad \sum_b p_b \dot{q}_b - H = \sum_b P_b \dot{Q}_b - \frac{\partial F_1}{\partial t} - \sum_b \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_b}\dot{q}_b + \frac{\partial F_1}{\partial Q_b}\dot{Q}_b\right)$$

$$\Rightarrow \sum_b \dot{q}_b \left(p_b + \frac{\partial F_1}{\partial q_b}\right) - \dot{Q}_b \left(P_b - \frac{\partial F_1}{\partial Q_B}\right) = H - \hat{H} - \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \hat{H} = H - \frac{\partial F_1}{\partial t}, \qquad P_b = \frac{\partial F_1\left(q,\, Q\right)}{\partial Q_b}, \qquad p_b = -\frac{\partial F_1\left(q,\, Q\right)}{\partial q_b}$$

$$q = q\left(Q,\, P\right) \to P = P\left(Q,\, P\right)$$
$$\hat{H} = \hat{H}\left(Q,\, P\right)$$

<u>Beispiel 1:</u>

$$F_1 = \sum_{a=1}^{f} q_a Q_a$$
$$P_b = \frac{\partial F_1}{\partial Q_b} = q_b, \qquad P_b = -\frac{\partial F_1}{\partial q_b} = -Q_b$$
$$\Rightarrow q_b = P_b \qquad \text{bzw.} \qquad P_b = -Q_b$$

$\Rightarrow$ Kanonische Transformation

$$\hat{H}\left(P,\, Q\right) = H\left(p,\, q\right) = H\left(-Q,\, P\right)$$

<u>Beispiel 2:</u> harmonischer Oszilator

$$H\left(P,\, q\right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$
$$F_1 = -\frac{1}{2} m\omega q^2 \cot\left(Q\right)$$
$$P = \frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{2} m\omega q^2 \frac{1}{\sin^2\left(Q\right)},\ (1) \qquad p = -\frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot\left(Q\right)\ (2)$$

auflösen (1) nach q:

$$q\left(Q,\, P\right) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin\left(Q\right)$$
$$\curvearrowright (2): \qquad p = -m\omega q \cot Q = m\omega \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \sin\left(Q\right) \frac{\cos Q}{\sin Q}$$
$$p\left(P,\, Q\right) = \sqrt{m\omega^2 P}\, \cos Q$$

Die Vorzeichen stimmen möglichereise noch nicht

$$\begin{aligned} \hat{H}\left(P,\, Q\right) = H\left(p,\, q\right) &= \frac{1}{2m} m\omega P \cos^2 Q + \frac{1}{2} m\omega \cdots \\ &= \omega P \left(\cos^2 Q + \sin^2 Q\right) \\ &= \omega P \end{aligned}$$

$\Rightarrow Q$ ist zyklische Variable

$$\dot{P} = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{konst.} = \frac{E}{\omega}, \qquad \dot{Q} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial P} = \omega$$
$$Q = \omega t + \varphi$$

$$
\begin{aligned}
q &= \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) \\
p &= \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \varphi)
\end{aligned}
$$

Andere erzeugende Funktion: $F(q,\, P,\, t) = \sum_a Q_a(q,\, P)\, P_a - F_2(q,\, P,\, t)$

$$
\curvearrowright \qquad \underbrace{\sum_b p_b \dot{q}_b - H}_{L} = \underbrace{\sum_b P_b \dot{Q}_b - \hat{H}}_{\hat{L}} - \frac{dF}{dt}
$$

Rechnung HA:

$$
p_a = \frac{\partial F_2}{\partial q_a}, \qquad q_a = \frac{\partial F_2}{\partial P_a}, \qquad \hat{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}
$$

<u>Beispiel für F_2:</u>

$$
F_2 = \sum_b q_b P_b + \varepsilon H(q,\, P) \qquad \text{mit } \varepsilon \text{ klein}
$$

$$
\begin{aligned}
p_a &= \frac{\partial F_2}{\partial q_a} = P_a + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial q_a} && (1) \\
Q_a &= \frac{\partial F_2}{\partial P_a} = q_a + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial P_a} && (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1): \qquad P_a &= p_a - \varepsilon \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_a}(q,\, P)}_{\frac{\partial H}{\partial q_a}(q,p) + \mathcal{O}(\varepsilon)} = p_a - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial q_a}(q,\, P) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \\
(2): \qquad Q_a &= q_a + \varepsilon \frac{\partial H(q,\, p)}{\partial p_a} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_a &= p_a + \underbrace{\varepsilon}_{\Delta t} \dot{p}_a = p_a + \Delta t\, \dot{p}_a = p_a(t + \Delta t) = P_a \\
Q_a &= q_a + \underbrace{\varepsilon}_{\Delta t} q_a = \underbrace{q_a + \Delta t\, \dot{q}_a}_{\text{Taylor-Entwicklung}} = q_a(t + \Delta t) = Q_a
\end{aligned}
$$

Die Zeitentwicklung eines physikalisches Sysems kann aufgefasst werden als kanonische Transformation.

<u>Bemerkung:</u>

- F_2 kann aus F_1 durch Legendre Transformation gewonnen werden. (Beweis: Übung oder in Wess, Goldstein nachlesen)

$F = F_1\,(q,\,Q)$:	$p_a = \frac{\partial F_1}{\partial q_a}$	$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_a}$
$F\,(q,\,P) = F_2 - \sum_a Q_a P_a$	$p_a = \frac{\partial F_2}{\partial q_a}$	$Q_a = \frac{\partial F_2}{\partial P_a}$
$F\,(p,\,Q) = F_3 + \sum_a q_a p_a$	$q_a = -\frac{\partial F_3}{\partial p_a}$	$P_a = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_a}$
$F\,(p,\,P) = F_4 + \sum_a \left(q_a P_a - Q_a \dot{P}_a\right)$	$q_a = -\frac{\partial F_4}{p_a}$	$Q_a = \frac{\partial F_4}{\partial P_a}$

Tabelle 1: Alles Legendretransformation

<u>kanonische Transformationen</u>

$q_a \to Q_a\,(q,\,p)\,;\qquad p_a \to P_a\,(q,\,p)$ mit

$$\dot{Q}_a = \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_a}$$
$$\dot{P}_a = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_a}$$

$$\hat{H}\,(P,\,Q) = H\,(p,\,q) + \frac{\partial F_i}{\partial t}$$

3.1 Invarianten der KT

Lemma. *Es gilt* $\{A,\,B\}_{p,\,q} = \{A,\,B\}_{P,\,Q}$ *d.h.* $\sum_a \left(\frac{\partial A}{\partial q_a}\frac{\partial B}{\partial p_a} - \frac{\partial A}{\partial p_a}\frac{\partial B}{\partial q_a}\right) = \sum_a \left(\frac{\partial A}{\partial Q_a}\frac{\partial B}{\partial P_a} - \frac{\partial A}{\partial P_a}\frac{\partial B}{\partial Q_a}\right)$

Beweis. Beweis z.B. im Buch von Wess. Die P.Klammer ist eine Invariante bzgl. der kanonischen Transformation.
$\Rightarrow \{A,\,B\}_{p,\,q} = \{A,\,B\}_{P,\,Q} = \{A,\,B\}$ $\square$

Corollary. *Es gilt:*

$$\{P_a,\,P_b\} = 0 = \{Q_a,\,Q_b\}\,(*)$$
$$\{P_a,\,Q_b\} = \delta_{ab}(*)$$

$\Rightarrow$ *equiv. Defi von KT:* $P\,(p,\,q)\,,\,Q\,(p,\,q)$ *so dass (*) gilt.*

Lemma. *Satz von Liouville:*
Es gilt $dT := dq_1 \cdots dq_f\,dp_1 \cdots dp_f = dQ_1 \cdots dQ_f\,dP_1 \cdots dP_f$ *Phasenraumvolumen und zeitllich konstant.*

3. Es gilt $\sum_a dp_a\,dq_a = \sum_a dP_a\,dQ_a$ Bewei: Wess, Goldstein

4 Hamilton-Jacobi Theorie

Alles was man mit HJT lösen kann, haben wir schon gemacht. Aber Zugang zu integrablen Systemen. Außerdem kommt es in der QM bei WKB-Näherung vor.

4.1 Grundidee

Kononische Transformation, so dass: $\hat{H} \equiv 0$.

$$\hat{H}(P, Q) = H(p, q) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(q, P)$$

$$p_a = \frac{\partial F_2}{\partial q_a}, \qquad Q_a = \frac{\partial F_2}{\partial P_a}$$

Wenn das wahr ist, dann gilt:

$$\dot{P}_a = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_a} = 0, \qquad \dot{Q}_a = \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_a} = 0$$

$$\Rightarrow P_a, Q_a \quad \text{konstant}$$

Dass heißt entsprechendes F finden.

$$\Rightarrow \boxed{H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0} \qquad \text{Hamilton-Jacobi-DGL}$$

diese Gleichung ist nicht-linear.

4.1.1 1. Beispiel: 1d freies Teilchen

$$H = \frac{p^2}{2m}, \qquad p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$$

$$\curvearrowright H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q}\right)^2$$

$$\text{H-J:} \qquad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

<u>Ansatz:</u> $F_2(q, P, t) = W(q) - Et$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial t} = -E$$

$$\curvearrowright \text{H-J:} \qquad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 - E = 0 \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{2mE}$$

$$\Rightarrow W = \pm\sqrt{2mE}q + \text{konst.}$$

$$\boxed{F_2 = \pm\sqrt{2mE}q + \text{konst} - Et}\ [= S(q,\, \alpha,\, t)]$$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \pm\sqrt{2mE} = \text{konst} \qquad E = \frac{p^2}{2m}$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \underbrace{=}_{\text{Wahl}} \frac{\partial F_2}{\partial E} = \pm\sqrt{\frac{m}{2E}}q - t = \text{konst} \ = \beta$$

$$q = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}\,(t+\beta) = \pm\,(v_0 t + q_0)$$

Man hätte auch von vornerein $E = P$ wählen können. Bei der Rechnung wurde nicht auf Einheiten geachtet.

<u>Mathe:</u> Es existiert immer eine <u>vollständige</u> Lösung der H-J DGL

$$F_2 = S(q_1, \ldots, q_f,\, \alpha_1, \ldots, \alpha_f,\, t) \qquad \alpha_a : f \text{ linear unabh. Int.konst.}$$

Die Physik identifiziert $\alpha_a = P_a$

$$\Rightarrow p_a = \frac{\partial S(q,\, \alpha,\, t)}{\partial q_a}, \qquad Q_a = \frac{\partial S(q,\, \alpha,\, t)}{\partial \alpha_a} = \beta_a = \text{konst.}$$

$$q(\underbrace{\alpha,\, \beta}_{2f-\text{konst.}},\, t) \rightarrow \text{Bahnkurve}$$

Lemma. *S heißt Hamiltonsche Wirkungsfunktion und ist tatsächlich die Wirkung des Systems.*

Beweis.

$$\frac{dS}{dt} = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{-H} + \sum_a \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_a}}_{p_a} \dot{q}_a = -H + \sum_a p_a \dot{q}_a = L$$

$$\Rightarrow S = \int L\, dt + \text{konst.}$$

□

Spezialfall: $H = H(p,\, q,\, \cancel{t})$
Ansatz: $S = W(q_1, \ldots, q_f, \alpha_1, \ldots, \alpha_f) - \underbrace{\alpha_1}_{E} t$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_1, \qquad \frac{\partial S}{\partial q_a} = \frac{\partial W}{\partial q_a} = P_a$$

$$\curvearrowright \text{H-J:} \qquad H\left(q,\, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1 \equiv E$$

W heißt Hamiltonsche Charakteristische Funktion.

4.1.2 2. Beispiel: 1d harmonischer Oszilator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E$$

$$\text{H-J:} \qquad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$S = W(q) - Et, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -E, \qquad \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q}$$

$$\curvearrowright \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \overbrace{\frac{1}{2}m\omega^2 q^2}^{u(q)}}_{H\left(q,\, \frac{\partial W}{\partial q}\right)} = E$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\left(E - u(q)\right)}$$

das $\pm$ spielt keine Rolle. Das Vorzeichen gibt die Richtung der Zeit an.

$$\Rightarrow W(q) = \int^q \sqrt{2m\left(E - u(q')\right)}\, dq'$$

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial W}{\partial E} - t = \int^q \frac{m}{\sqrt{2m\left(E - u(q')\right)}}\, dq' - t$$

$$(\beta + t) = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\right) \rightarrow \boxed{q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin\left(\omega t + \beta'\right)}$$

Im Allgemeinen: Lösung von H-Jacobi schwierig.
<u>Ausnahme: </u>System ist (vollständig) <u>separierbar</u>

4.2 Hamilton-Jacobi separierbar

$S(q_1, \ldots, q_f,\, \alpha_1, \ldots, \alpha_f\, t) = S_1(q_1,\, \alpha_1, \ldots, \alpha_f,\, t) + S_2(q_2, \ldots, q_f,\, \alpha_1, \ldots, \alpha_f,\, t)$

H-J vollständig separierbar:

$$S(q_1, \ldots, q_f,\, \alpha_1, \ldots, \alpha_f,\, t) = \sum_{a=1}^{f} S_a(q_a,\, \alpha_1, \ldots, \alpha_f,\, t)$$

$$? \qquad H_a\left(q_a,\, \frac{\partial S_a}{\partial q_a},\, t\right) + \frac{\partial S_a}{\partial t} = 0$$

immer lösbar.

---

5 Integrable Modelle

Vorbemerkung: Keine einheitliche Definition. Erhaltungsgröße $\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \{H, I\} = 0$

Lemma. *(Satz von Liouville)*

Ein Hamiltonsches System mit f Freiheitsgraden ist integrabel, wenn f Funktionen $I_a\left(p_a, q_a, \cancel{t}\right), a = 1, \ldots, f$ existieren mit folgenden Eigenschaften:

i) $\{I_a, H\} = 0 \Rightarrow I_a$ sind Erhaltungsgrößen

ii) $\{I_a, I_b\} = 0 \,\forall\, a, b \Rightarrow I_a$ sind Involutionen (eine davon, z.B. $I_1, = H$)

iii) $dI_a = \sum_b \frac{\partial I}{\partial q_b} dq_b + \frac{\partial I_a}{\partial p_b} dp_b$ sind linear unabhängig.

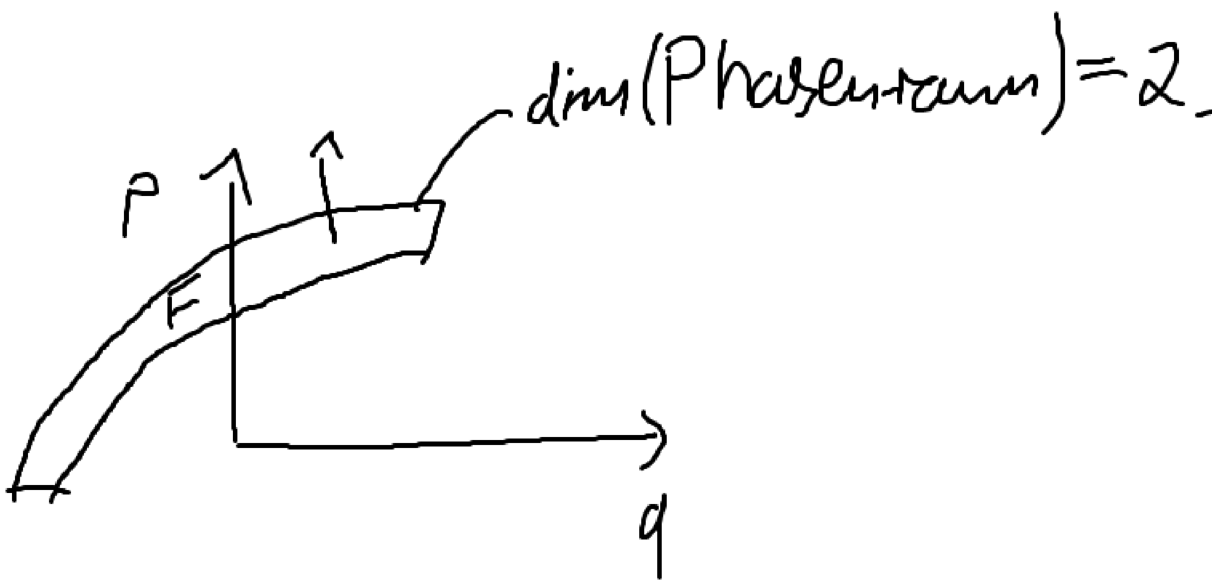
Beweis. [Arnold] (sehr lang) zumindest plausibel machen.

Bemerkungen:

1) Gradienten im Phasenraum

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} I_a &:= \sum_b \frac{\partial I_a}{\partial q_b} \vec{e}_{q_b} + \frac{\partial I_a}{\partial p_a} \vec{e}_{p_b} \\ &= \left(\nabla_{q_b} I_a, \nabla_{p_a} I_a\right) \end{aligned}$$

$\vec{\nabla} I_a$ steht senkrechte auf der Fläche, die durch $I_a\left(q, p\right) = \left(\text{konst.}\right)_a$ definiert wird.



$$I_a = (\text{konst.})_a \qquad f \text{ Gleichungen}$$
$$\dim F = f$$

wegen

$$\{I_a,\, I_b\} = \sum_c \left(\frac{\partial I_a}{\partial p_c} \frac{\partial I_b}{\partial q_c} - \frac{\partial I_a}{\partial q_c} \frac{\partial I_b}{\partial p_c} \right) = 0$$

sind die Vektoren

$$\vec{V}_a := \sum_b \frac{\partial I_a}{\partial p_b} \vec{e}_{q_b} - \frac{\partial I_a}{\partial q_b} \vec{e}_{p_b}$$

tangential zu F.

$$\begin{aligned} \vec{V}_a \cdot \vec{\nabla} I_a &= \sum_{b,\, c} \frac{\partial I_a}{\partial q_c} \frac{\partial I_a}{\partial p_c} \underbrace{\vec{e}_{q_b} \cdot \vec{e}_{q_c}}_{\delta_{bc}} - \frac{\partial I_a}{\partial p_b} \frac{\partial I_a}{\partial q_c} \underbrace{\vec{e}_{p_b} \cdot \vec{e}_{p_c}}_{\delta_{bc}} \\ &= \sum_b \frac{\partial I_a}{\partial q_b} \frac{\partial I_a}{\partial p_b} - \frac{\partial I_a}{\partial p_b} \frac{\partial I_a}{\partial q_b} = 0 \end{aligned}$$

d.h. $\vec{V}_c$ bilden eine Basis von F.

(2) Es existiert eine kanonische Transformation $(p_a,\, q_a) \to \underset{(P_a,\, Q_a)}{(J_a,\, \varphi_a)}$ Wirkungsvariable, Winkelvariable. Mit $\dot{J}_a = 0$, d.h. $J_a\,(I_a)$

$$\Rightarrow \dot{J}_a = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \varphi_a} = 0 \Rightarrow \hat{H}\,(J_a)\ldots, \qquad \text{mit } \hat{H}\,(P;\, Q) = H\,(p,\, q) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

d.h. φ_a sind zyklische Variablen von $\hat{H}$

$$\dot{\varphi}_a = \frac{\partial \hat{H}}{\partial J_a} \equiv \omega_a\,(J_a)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_a = \omega_a t + \varphi_a^0}$$

Problem gelöst.

Konstruktion von $(J,\, \varphi)$

$$\hat{H}\,(P;\, Q) = H\,(p,\, q) + \frac{\partial F_2\,(q,\, P,\, t)}{\partial t}$$

$$p_a = \frac{\partial F_2}{\partial q_a}, \quad Q_a = \frac{\partial F_2}{\partial P_a}, \quad \text{hier: } F_2 = F_2\,(q,\, P,\, \cancel{t})$$

hier:

$$H\,(p,\, q) = \hat{H}\,(J,\, \varphi) = \hat{H}\,(J)\,, \quad P_a = \frac{\partial F_2\,(q,\, J)}{\partial q_a}, \, \varphi_a = \frac{\partial F_2}{\partial J_a}$$

$$H\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_a},\, q_b\right) = \hat{H}\left(J\right) = \text{konst.} \qquad \text{ist DGL } F_2$$

1d: + periodisch

$$F_2\left(J,\, q\right) = \int^q p\, dq' = \int^q \frac{\partial F_2}{\partial q'}\, dq' = F_2$$

$$\varphi = \frac{\partial F_2}{\partial J}, \qquad \oint_{\text{Periode}} d\varphi = 2\pi \Rightarrow \oint_{\text{Periode}} \frac{\partial^2 F_2}{\partial J \partial q}\, dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial F_2}{\partial q}\, dq = 2\pi$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial F_2}{\partial q}\, dq = \boxed{\frac{1}{2\pi} \oint p\, dq = J}$$

□

<u>Beispiele: 1d:</u>

$f = 1 \Rightarrow$ Systeme sind <u>immer</u> integrabel! (Kontrolle: alle Systeme mit $H = \sum_{i=1}^{f} H_i\left(p_i,\, q_i\right)$ integrabel)

5.0.1 harmonischer Oszilator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = E \Rightarrow p\left(q\right) = \pm\sqrt{2m\left(E - U\left(q\right)\right)}$$

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p\, dq = \underbrace{\pm}_{\text{Umlaufsinn}} \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2m\left(E - U\right)}\, dq = \cdots = \frac{E}{\omega} = J$$

$$\hat{H}\left(J\right) = H\left(p,\, q\right) = \cdots = \omega J, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial J} = \omega$$

5.0.2 allgemeiner Fall

$$J_a = \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{Periode}} p_a\, dq_a$$

f unabhängige Winkelvariablen $= F = T^f = \underbrace{S^1 \times S^1 \times S^1 \cdots \times S^1}_{f}$ (topologisch)

5.0.3 $f = 2$: Teilchen im Zentralpotential

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + U(r), \qquad x = r\cos(\varphi), \; y = r\sin(\varphi)$$
$$\{H, L_z\} = \cdots = 0$$

$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi \, d\varphi = p_\varphi \frac{1}{2\pi}\oint d\varphi = p_\varphi$$
$$J_r = \frac{1}{2\pi}\int p_r \, dr = \frac{1}{2\pi}\int \sqrt{2m}\sqrt{E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - U(r)}\, dr$$

$p_r = \pm\sqrt{2m}\sqrt{E - U - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}}$. Mit $U = -\frac{\kappa}{r}$

$$= -J_\varphi + \frac{\kappa}{2}\sqrt{\frac{2m}{-E}}$$

$$J_r = -J_\varphi + \frac{\kappa}{2}\sqrt{\frac{2m}{-E}}$$

$$\hat{H}(J) = -\frac{m\kappa^2}{2\left(J_\varphi + J_r\right)^2}$$

$$\omega_{r,\varphi} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial J_{r,\varphi}} = \frac{m\kappa^2}{\left(J_\varphi + J_r\right)^2}$$

5.0.4 $f = 3$ dreidimensionale Systeme

- $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \cdots = \sum_i H_i$
- Teilchen im Zentralpotential

$$H = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i^2}{2m} + U(r)$$

$$\{H, L_i\} = 0 \quad \forall\, i \qquad \Rightarrow \vec{L} \quad \text{ist erhalten}$$

aber:

$$\{L_x, L_y\} = \cdots = L_z + \text{ zyklisch}$$

Involution: $\left(H, L_z, \vec{L}^2\right)$

$$\left\{H, \vec{L}^2\right\} = 0, \qquad \left\{L_z, \vec{L}^2\right\} = 0$$

6 Chaotische Systeme

6.1 Zusammenfassung der letzten Stunde:

Es sei f linear unabhängige Involutionen I_a $a = 1, \ldots, f$

$$\{I_a, I_b\} = 0 \,\forall\, a, b = 1, \ldots, f$$

(dabei ist $I_1 = H$ in der Regel $\Rightarrow$ I_a zeitunabhängig

$\Rightarrow$ Bewegung im Phasenraum findet auf einer f-dim Unterraum F^f statt. Wobei topologisch $F^f = T^f = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{f \text{ mal}}$

parametrisiert durch Wirkungsvariablen

$$J_a = \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{Periode}} p_a \, dq_a$$

mit

$$\dot{J}_a = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \varphi_a} = 0, \qquad H(p, q) = \hat{H}(J_a, \varphi_a) = \hat{H}(J_a) = \text{konst.}$$

$$\dot{\varphi}_a = \frac{\partial \hat{H}}{\partial J_a} \equiv \omega_a(J) = \text{konst.} \Rightarrow \varphi_a = \omega_a t + \varphi_a^0$$

Bei chaotischen Systemen kann man das $\varphi(t)$ nicht so einfach hinschreiben.

periodische Bewegung: bei kommensurablen Frequenzen

$$m\omega_1 = n\omega_2, \qquad n, m \in \mathbb{N}$$
$$\omega_1 = \frac{n}{m}\omega_2$$

quasi-periodische Bewegungen: bei inkommensurablen Frequenzen, also $m\omega_1 \neq n\omega_2$ (nicht resonanter Torus)

Das drei Körper-Problem ist nicht integrabel.

6.2 Störung eines integrablen Systems

Möglichkeiten:

1. Bewegung ändert sich wenig (reguläre Lösung)
2. Bewegung ändert sich komplett (chaotische Lösung)

Chaos folgt aus deterministischen Gleichungen, aber auf Grund spez. Anfangsbedingungen ist Bewegung nicht vorhersagbar.

(empfindliche Abhängigkeit von Anfangsbedingungen.)

6.3 KAM-Theorem

(Kolmogorow (1956), Arnold (1965), Moser (65))

$$H = \underbrace{H_0}_{\text{int. Sys.}} + \underbrace{\Delta}_{\text{kl. Stör.}} H, \qquad \Delta H = \epsilon H_1, \quad \epsilon \ll 1$$

Hat H_0 Frequenzen, die "genügend inkommensurabel" sind, so hat das gestörte System H für ϵ klein überwiegend solche Lösungen, die ebenfals quasiperiodisch sind und sich nur wenig von denen von H_0 unterscheiden.

genügend inkommensurabel :=

$$\left|\omega - \frac{n}{m}\right| \geq \gamma m^{-\alpha} \qquad \gamma, \alpha \in \mathbb{N}$$

6.4 Hénon-Heiles System

$$H = \underbrace{\frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x^2 + y^2\right)}_{H_0} + \underbrace{\lambda \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)}_{=\Delta H}$$

Übergang zu dimensionslosen Koordinaten:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \hat{x} \\ y &= \alpha \hat{y} \end{aligned}$$

$\hat{x}$, $\hat{y}$ dimensionslos.

$$u = m\omega^2 \alpha^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right) + \hat{\lambda}\left(\hat{x}^2 \hat{y} - \frac{\hat{y}^3}{3}\right)\right)}_{\hat{u}}, \qquad \hat{\lambda} = \frac{\alpha\lambda}{m\omega^2}$$

$\hat{\lambda} \ll 1 \Rightarrow$harmonischer Osz. $\hat{\lambda} = \mathcal{O}(1) \Rightarrow$ anderes System.

$\hat{\lambda} = 1$ $\hat{u} \ll 1$ harmonischer Oszilator $\hat{u} = \mathcal{O}(1)$anderes System

$$\hat{u} - \frac{1}{6} = \left(\hat{y} + \frac{1}{2}\right)\left(\hat{x}^2 - \frac{(\hat{y}-1)^2}{3}\right) = 0 \text{ für } \begin{cases} \hat{y} &= -\frac{1}{2} \\ \hat{x} &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(y-1) \end{cases}$$