Übungsblatt 9 — Theoretische Physik A (Quantenmechanik) — SS 09

Abgabetermin: 17.6.2009

Aufgabe 1

Berechne die Radialfunktionen $R_{nl}(r)$ für $n = 3$, $l = 0, 1, 2$ mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen Rekursionsformeln (einschließlich der Normierungsfaktoren).

Aufgabe 2

Betrachte die Wellenfunktion des Wasserstoffatoms

$$\psi_{n,l,m} = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

im Grundzustand $(n, l) = (1, 0)$. Berechne die Erwartungswerte der Operatoren der kinetischen und der potentiellen Energie im Grundzustand:

$$E_{kin} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \, , E_{pot} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Aufgabe 3

Betrachte die klassische Bewegung eines Elektrons im Coulombpotential. Nach Übungsblatt 6, Aufgabe 3 sind die Gesamtenergie und der Drehimpuls erhalten:

$$E_{ges} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r) \, , p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi}$$

wobei $p_r = m\dot{r}$, $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$. Berechne aus den Bohr-Sommerfeld Quantisierungsbedingungen

$$\oint p_r dr = kh \, , \oint p_\varphi d\varphi = lh,$$

(wobei die Integrale sich jeweils um einen geschlossenen Umlauf erstrecken) die (negativen) Energieeigenwerte des Wasserstoffatoms.

Hinweis: Benutze die Gleichung für die klassische Bahnkurve (Ellipse)

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos\varphi, \; p = \frac{p_\varphi^2}{m\alpha}, \; e^2 = 1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}$$

sowie den Wert des Integrals

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 + e\cos\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - e^2}}.$$