Übungsblatt 7 Theoretische Physik A (Quantenmechanik) SS 09

Abgabetermin: 27.5.

Aufgabe 1

Die Pauli-Matrizen sind definiert durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spinoperatoren haben die Form $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$.

a) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen hermitesche Matrizen sind.

b) Zeigen Sie, dass die S_i die Drehimpulsvertauschungsrelationen erfüllen.

c) Berechne die Matrix $\vec{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$, und zeige, dass sie mit den S_i vertauscht.

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie die Operatoren L_+ und L_- in Polarkoordinaten.

b) Konstruieren Sie die Drehimpulseigenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ für die Fälle $l = 0$ und $l = 1$ (und für alle dazugehörigen Werte von m).

Hinweis: Die Eigenfunktionen $Y_{ll}(\theta, \varphi)$ sind Lösungen der Differentialgleichungen

$$L_z Y_{ll}(\theta, \varphi) = \hbar l Y_{ll}(\theta, \varphi), \qquad L_+ Y_{ll}(\theta, \varphi) = 0,$$

und die übrigen Y_{lm} (mit $m < l$) folgen dann durch wiederholte Anwendung des Operators L_-.

Aufgabe 3

Skizzieren Sie für die Fälle $l = 0, 1, 2$, $m \leq l$ graphisch die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten als Funktionen der Winkel θ und φ.

Hinweis: Für die Fälle $l = 0$ und $l = 1$ verwenden Sie die Resultate aus Aufgabe 2; für den Fall $l = 2$

$$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{2i\varphi}, \; Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}, \; Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(3\cos^2\theta - 1\right).$$