Übungsblatt 4 Theoretische Physik A (Quantenmechanik) SS 09

Abgabetermin: 6.5.

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, daß für den Erwartungswert eines Operators A gilt

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H,A]\rangle + \langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle\ .$$

b) Berechnen Sie $[H, x_i]$ und $[H, p_i]$ für $H = \dfrac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$.

c) Zeigen Sie

$$\frac{d}{dt}\langle x_i\rangle = \frac{\langle p_i\rangle}{m} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}\langle p_i\rangle = -\langle\frac{\partial V}{\partial x_i}\rangle.$$

Was ist die physikalische Bedeutung dieser beiden Gleichungen?

Aufgabe 2

Zur Zeit $t = 0$ befinde sich ein harmonischer Oszillator im Zustand $\Psi(x, t = 0) = c\,(\psi_0 + \psi_1)$, wobei ψ_0 und ψ_1 die normierten Eigenzustände des 1-dim. harmonischen Oszillators sind.

a) Bestimmen Sie c, so daß Ψ normiert ist.

b) Ist Ψ ein Eigenzustand von H?

c) Geben Sie für $t > 0$ die zeitliche Entwicklung $\Psi(x, t)$ an.

Aufgabe 3

Für einen eindimensionalen harmonischen Oszillator definiert man den Operator

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{\omega m}{2\hbar}}\ \hat{x} + \frac{i}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}\ \hat{p}_x\ .$$

a) Berechnen Sie $\hat{a}^\dagger$ und $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$. Ist $\hat{a}$ hermitesch?

b) Zeigen Sie $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2})$ für $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$.

c) Berechnen Sie $[\hat{n}, \hat{a}^\dagger]$ und $[\hat{n}, \hat{a}]$. (*Hinweis*: Benutzen Sie das Ergebnis aus a).)

d) Die Eigenfunktionen von $\hat{n}$ seinen ψ_n. Zeigen Sie, dass $\hat{a}\psi_n$ und $\hat{a}^\dagger\psi_n$ auch Eigenfunktionen von $\hat{n}$ sind und berechnen Sie jeweils die Eigenwerte.

e) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\hat{n}$ positiv sind. Wie lautet der niedrigste Eigenwert? (*Hinweis*: Betrachten Sie $\langle\psi_n|\hat{n}|\psi_n\rangle$.)