Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, daß die Oberfläche einer d-dimensionalen Kugel durch

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} , \qquad \Gamma(n) := \int_0^\infty dy\, y^{n-1} e^{-y^2}$$

gegeben ist.

Hinweis: Benutzen Sie geeignete Potenzen des Gaußintegrals $\int dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a) und einer Wick-Rotation $l^0 = il_E^0$, $\vec{l} = \vec{l}_E$

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)\Delta^{m-2}} , \qquad m \geq 3$$

und

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^2}{(l^2 - \Delta)^m} = \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2} \frac{2}{(m-1)(m-2)(m-3)\Delta^{m-3}} , \qquad m \geq 4$$

Hinweis: Es gilt $\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} = \int_0^\infty dy y^{m-1}(1-y)^{n-1}$.

c) Wiederholen Sie die Rechnung in b) für ein d-dimensionales Integral und zeigen Sie

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{m-d/2}} \frac{\Gamma(m - d/2)}{\Gamma(m)} ,$$

und

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 - \Delta)^m} = \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{1}{\Delta^{m-d/2-1}} \frac{\Gamma(m - d/2 - 1)}{\Gamma(m)} , \qquad .$$

Hinweis: Es gilt $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

Aufgabe 2

a) Die Γ-Funktion hat eine Produktdarstellung der Form

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n}) e^{-\frac{z}{n}} \ ,$$

wobei γ die Euler-Mascheroni Konstante ist. Benutzen Sie diese Formel, um

$$\lim_{z \to 0} \Gamma(z) = \frac{1}{z} - \gamma + \mathcal{O}(z)$$

herzuleiten.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von a)

$$\lim_{d \to 4} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{4-d} - \ln \Delta - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(4-d) \right) \ .$$

c) Berechnen Sie mit Hilfe von b)

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^2}{(l^2 - \Delta)^3}$$

Aufgabe 3

In der Pauli-Villars Regularisierung ersetzt man

$$\frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} \to \frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} - \frac{1}{(l^2 - M)^3} \ .$$

Zeigen Sie, daß mit dieser Ersetzung das Integral in 2c) konvergent wird. In welchem Limes sieht man nun die UV-Divergenz?