Übungsblatt 5 Quantenfeldtheorie I SS 07

Aufgabe 1

Gegeben sei

$$u^{-s}(\tilde{p}) = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} (\tilde{p} \cdot \sigma + m)\,(-i\sigma^2 \xi^s) \\ (\tilde{p} \cdot \bar{\sigma} + m)\,(-i\sigma^2 \xi^s) \end{pmatrix} ,$$

mit $\tilde{p} = (p_0, -\vec{p})$.

a) Zeigen Sie

$$u^{-s}(\tilde{p}) = -\gamma^1\gamma^3 \left(u^s(p)\right)^* .$$

b) Zeigen Sie

$$T\psi(t,\vec{x})\,T = \gamma^1\gamma^3\psi(-t,\vec{x}) ,$$

für $T a^s_{\vec{p}} T = a^{-s}_{-\vec{p}}$, $T b^s_{\vec{p}} T = b^{-s}_{-\vec{p}}$ und T anitunitär. (Benutzen Sie auch $v^{-s}(\tilde{p}) = -\gamma^1\gamma^3(v^s(p))^*$.)

c) Berechnen Sie

$$T\,\bar{\psi}\psi(t,\vec{x})\,T , \qquad T\,\bar{\psi}\gamma^5\psi(t,\vec{x})\,T , \qquad T\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(t,\vec{x})\,T .$$

Aufgabe 2

Gegeben sei

$$U(t,t') = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t')}e^{-iH_0(t'-t_0)}$$

a) Zeigen Sie,

$$i\partial_t U = H_I U$$

und berechen Sie H_I.

b) Zeigen Sie, daß für $t_1 \geq t_2 \geq t_3$ gilt

$$U(t_1,t_2)U(t_2,t_3) = U(t_1,t_3) , \qquad U(t_1,t_3)\left(U(t_2,t_3)\right)^\dagger = U(t_1,t_2)$$

Aufgabe 3

Gegeben sei

$$\phi^+ = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(2E_{\vec{p}})^{-\frac{1}{2}}\, a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x}\Big|_{p^0=E_{\vec{p}}} \;, \qquad \phi^- = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(2E_{\vec{p}})^{-\frac{1}{2}}\, a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x}\Big|_{p^0=E_{\vec{p}}} \;.$$

Zeigen Sie

$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)} = G_F(x-y) \;,$$

für $\overbrace{\phi(x)\phi(y)} := \theta(x^0-y^0)[\phi^+(x),\phi^-(y)] + \theta(y^0-x^0)[\phi^+(y),\phi^-(x)]$.

Aufgabe 4

Gegeben sein N Dirac Spinoren ψ_j , $j=1,\dots,N$ mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N} \bar{\psi}_j(i\gamma^\mu D_\mu - m_j)\psi_j - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

mit

$$D_\mu\psi_j = \partial_\mu\psi_j + iq_jA_\mu\psi_j \;, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \;.$$

a) Berechnen Sie das Transformationsverhalten von $D_\mu\psi_j$ unter der Eichtransformation

$$\psi_j \to \psi'_j = e^{iq_j\alpha(x)}\psi_j \;, \qquad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha(x) \;, \qquad \alpha \in \mathbf{R} \;.$$

b) Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}$ invariant ist und berechnen Sie den Noetherstrom j^μ.

c) Wie lauten die Bewegungsgleichungen?

d) Zeigen Sie, daß j^μ erhalten ist ohne Benutzung der Dirac Gleichung.