Aufgabe 1

Die Lösungen der Dirac Gleichung lauten

$$\psi^+ = u(p)\, e^{-ip\cdot x} \qquad \text{mit} \qquad u(p) = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} (p\cdot\sigma + m)\,\xi^s \\ (p\cdot\bar{\sigma} + m)\,\xi^s \end{pmatrix} ,$$

und

$$\psi^- = v(p)\, e^{ip\cdot x} \qquad \text{mit} \qquad v(p) = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} (p\cdot\sigma + m)\,\xi^s \\ -(p\cdot\bar{\sigma} + m)\,\xi^s \end{pmatrix} ,$$

wobei

$$N = \sqrt{2(E_{\vec{p}} + m)} , \qquad \xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

a) Überprüfen Sie

$$\bar{u}^r(p)\, u^s(p) = 2m\delta^{rs} , \qquad \bar{v}^r(p)\, v^s(p) = -2m\delta^{rs} , \qquad \bar{u}^r(p)\, v^s(p) = 0 .$$

b) Zeigen Sie

$$\sum_{s=1}^{2} u^s(p)\, \bar{u}^s(p) \;=\; \gamma^\mu p_\mu + m , \qquad \sum_{s=1}^{2} v^s(p)\, \bar{v}^s(p) \;=\; \gamma^\mu p_\mu - m .$$

c) Zeigen Sie

$$\bar{u}(p')\, \gamma^\mu\, u(p) = \frac{1}{2m}\, \bar{u}(p')\Big(p'^\mu + p^\mu + 2iS^{\mu\nu}(p'-p)_\nu\Big)u(p) ,$$

wobei $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, daß der Hamiltonoperator für einen Dirac Spinor ψ durch

$$H(\psi) = i \int d^3x \, \bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi$$

gegeben ist.

b) Drücken Sie H durch Auf- und Absteigeoperatoren aus und zeigen Sie

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \, E_{\vec{p}} \sum_s \left(a^{s\dagger}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} + b^{s\dagger}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}} \right) + c(\psi) \ ,$$

für

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \, (2E_{\vec{p}})^{-\frac{1}{2}} \sum_s \left(a^s_{\vec{p}} \, u^s(p) \, e^{-ipx} + b^{s\dagger}_{\vec{p}} \, v^s(p) \, e^{ipx} \right) \ .$$

Berechnen Sie $c(\psi)$.

c) Berechen Sie analog für die Noetherladung

$$Q = \int d^3x \, \psi^\dagger \psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(a^{s\dagger}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} - b^{s\dagger}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}} \right) + c' \ ,$$

d) Addieren Sie zu $H(\psi)$ ein geeignetes $H(\phi^i)$ (ϕ^i seien freie Skalarfelder), so daß gilt

$$c(\psi) + c(\phi^i) = 0 \ .$$

Warum ist das keine Lösung des Problems der kosmologischen Konstante?