Universität Hamburg, Fachbereich Physik

1. Übungsklausur Quantenmechanik I SS 06

Aufgabe 1 (5 Punkte)

a) Wie lauten die Eigenfunktionen des Impulsoperators $\hat{\vec{p}}$?

b) Unter welcher Bedingung sind diese Eigenfunktionen auch Eigenfunktionen von

$$H = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\vec{x}) \, ?$$

c) Wie lauten in diesem Fall die Eigenwerte von H?

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zur Zeit $t = 0$ sei ein Zustand $\Psi(\vec{x}, t = 0)$ gegeben durch

$$\Psi(\vec{x}, t = 0) = \sum_n \sum_l \sum_m c_{nlm} \psi_{nlm}(\vec{x}) \ ,$$

wobei ψ_{nlm} orthonormierte Eigenfunktionen des Hamiltonoperators sind.

a) Welche Bedingungen müssen die c_{nlm} erfüllen, damit $\Psi(\vec{x}, t = 0)$ normiert ist?

b) Wie lautet die Zeitentwicklung $\Psi(\vec{x}, t)$.

c) Berechnen Sie $\langle H \rangle$ im Zustand $\Psi(\vec{x}, t)$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

a) Wie lauten die Energieeigenwerte des eindimensionalen harmonischen Oszillators?

b) Welche Differentialgleichung erfüllt der Grundzustand. Geben Sie die Lösung dieser DGL, also die (unnormierte) Wellenfunktion des Grundzustandes an.

Hinweis: $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x}{x_0} + \frac{i}{\hbar}x_0 P)$.

c) Gegeben sei ein physikalisches System mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} \frac{m}{2}\,\omega^2\,x^2 & \text{falls} \quad x > 0, \\ \infty \quad \text{falls} & x \leq 0 \end{cases}$$

Welche Randbedingung muß die Wellenfunktion bei $x = 0$ erfüllen?

Wie lauten die Energieeigenwerte?

Hinweis: Die Hermiteschen Polynome lauten

$$H_n(\zeta) = (-1)^n e^{\zeta^2} \frac{d^n}{d\zeta^n} e^{\zeta^2}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei der Hamilton-Operator

$$H = a\,L_z^2 + b\left(L_x^2 + L_y^2\right), \qquad a, b \in R.$$

a) Berechnen Sie $[H, L_z]$ und $[H, \vec{L}^2]$.

Hinweis: $[L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k$

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenfunktionen von H.

c) Wie lautet die allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung?