Übungsblatt 9 Quantenmechanik I SS 06

Abgabetermin: 22.6.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Der Gesamtdrehimpuls eines Teilchens ist durch $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ definiert. Die Eigenzustände von $\{\vec{J}^2, J_z, \vec{L}^2, \vec{S}^2\}$ seien $|j, m_j, l, s\rangle$, die Eigenzustände von $\{\vec{L}^2, L_z, \vec{S}^2, S_z\}$ seien $|l, m\rangle \otimes |s, s_z\rangle$.

a) Berechnen Sie für $l = s = 1$ die Anzahl der Zustände in beiden Basen.

b) Wie lautet der Zusammenhang der beiden Basen für $l = s = 1$?
(Berechnen Sie die Clebsch-Gordon Koeffizienten.)

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben sei der Hamiltonoperator $H = H_0 + H_1$ mit

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \ , \qquad H_1 = \alpha x \ ,$$

wobei α konstant ist.

a) Fassen Sie H_1 als kleine Störung von H_0 auf und berechnen Sie die Korrektur zu den Eigenwerten von H_0 in 1. und 2. Ordnung Störungstheorie.

b) Berechnen Sie die Korrektur zu den Eigenzuständen von H_0 in 1. Ordnung Störungstheorie.

c) Finden Sie die exakten Eigenwerte von H indem Sie geeignet quadratisch ergänzen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Ergebnissen aus a).

Aufgabe 3 (3 Punkte)

a) Berechnen Sie explizit die Radialanteile R_{10}, R_{20}, R_{21} für das H-Atom aus der Formel

$$R_{nl}(r) = -\sqrt{\frac{(n-l-1)!(2\kappa)^3}{2n((n+l)!)^3}}\,(2\kappa r)^l\, e^{-\kappa r} L_{n+l}^{2l+1}(2\kappa r)$$

Drücken Sie das Ergebnis durch den Bohrschen Radius $a = \frac{\hbar}{me^2}$ mit Hilfe von $\kappa = \frac{Z}{na}$ aus.

b) Wird der Atomkern als homogen geladene Kugel vom Radius R ($R \ll a$) angesehen, kann der Einfluß der endlichen Kernausdehung auf die Energieniveaus des Wasserstoffatoms durch den Störoperator

$$H_1 = \begin{cases} \dfrac{e^2}{R}\left(\dfrac{R}{r} - \dfrac{3}{2} + \dfrac{r^2}{2R^2}\right) & \text{für} \quad r \leq R, \\ 0 & \text{für} \quad r > R \end{cases}$$

beschrieben werden. Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Energiekorrektur für den Grundzustand des Wasserstoffatoms in der Näherung $r \leq R \ll a$
(d.h. approximieren Sie $e^{-\kappa r} \approx 1$).