Universität Hamburg, Fachbereich Physik

Übungsblatt 8 — Quantenmechanik I — SS 06

Abgabetermin: 15.6.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Ein Operator A transformiert unter einer unitären Transformation in den Operator A' nach der Vorschrift

$$A' = U^\dagger \, A \, U \ .$$

Ist A' hermitesch wenn A hermitesch ist?

Ist $[A', B'] = 0$ wenn $[A, B] = 0$ gilt?

b) In einem drei-dimensionalen Hilbertraum sei der Hamiltonoperator

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Geben Sie zwei Operatoren A_1, A_2 an, die mit H vertauschen, aber nicht untereinander. (Es soll also gelten $[A_1, H] = [A_2, H] = 0, [A_1, A_2] \neq 0$.)

c) Zeigen Sie ganz allgemein, daß falls $[A_1, H] = [A_2, H] = 0$ und $[A_1, A_2] \neq 0$ gilt, der Hamiltonoperator H entartete Eigenwerte haben muss.

d) Welche Bedingung muss $[A_1, A_2]$ erfüllen, damit es nicht-entartete Eigenwerte gibt?

Aufgabe 2 (3 Punkte)

a) Wie lautet die Matrixdarstellung der Operatoren L_x, L_y, L_z in der Basis $|l, m>$ für $l = 1$?

b) Zeigen Sie, daß L_x, L_y, L_z die selben Eigenwerte haben.

c) Finden Sie die Eigenvektoren von L_x und die Matrix U, die L_x auf Diagonalgestalt transformiert. Berechnen Sie $L'_x = U^\dagger L_x U$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Die Pauli-Matrizen lauten

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie

$$\sigma_i\,\sigma_j = \delta_{ij}\mathbf{1} + i\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\,\sigma_k\ ,$$

wobei $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix ist.

b) Berechnen Sie

- $[\sigma_i, \sigma_j]$,
- $\sigma_i\,\sigma_j + \sigma_j\,\sigma_i$,
- $(\sigma_i)^{-1}$.

Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus a).

c) Zeigen Sie

$$\exp(-i\,\vec{a}\cdot\vec{\sigma}) = \cos|\vec{a}|\,\mathbf{1} - i\,\frac{\vec{a}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{a}|}\ \sin|\vec{a}|\ ,$$

wobei $\vec{a}$ ein beliebiger konstanter Vektor ist.

Hinweis: Stellen Sie die Exponentialfunktion als Reihe dar und berechnen Sie $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})^2$ mit Hilfe von a).

d) Berechnen Sie $\langle \vec{S}^2\rangle$, $\langle S_z\rangle$, $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$, ΔS_x, ΔS_y für die Zustände $|s = 1/2, s_z = \pm 1/2\rangle$.