Übungsblatt 7 — Quantenmechanik I — SS 06

Abgabetermin: 1.6.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei der Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2a}\vec{L}^2 , \qquad a \text{ reell.}$$

a) Geben Sie die Eigenfunktionen und Eigenwerte von H an.

b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das physikalische System im Zustand

$$\psi(\theta, \varphi) = c\,(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta) , \qquad c = \text{konst.}$$

Berechnen Sie c so, daß ψ ein normierter Zustand ist.

Hinweis: $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$, $Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$

c) Wie lautet die Wellenfunktion $\Psi(\theta, \varphi, t)$?

d) Berechnen Sie die Erwartungswerte von H und L_z im Zustand Ψ.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß

$$L_r(x) := \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \frac{(r!)^2}{(k!)^2\,(r-k)!}\; x^k$$

die Differentialgleichung

$$x\,L_r'' + (1-x)\,L_r' + r\,L_r = 0 \qquad (*)$$

erfüllt.

b) Berechnen Sie explizit L_0, L_1, L_2.

c) Zeigen Sie, daß $L_r^s(x) := \frac{d^s}{dx^s}\, L_r(x)$ die Differentialgleichung

$$x\, L_r^{s\,\prime\prime} + (s+1-x)\, L_r^{s\,\prime} + (r-s)\, L_r^s = 0$$

erfüllt.

Hinweis: Differenzieren Sie (*) s-mal.

d) Zeigen Sie, daß auch gilt

$$L_r^s = \sum_{k=0}^{r-s} (-1)^{k+s} \frac{(r!)^2}{k!(k+s)!(r-k-s)!}\, x^k.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Gegeben sei der Hamiltonoperator für ein Elektron im Magnetfeld $\vec{B}$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\,\vec{A}(\vec{x})\right)^2 \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

a) Zeigen Sie, daß für ein homogenes Magnetfeld $\vec{B} = B_0\, \vec{e}_z$ gilt

$$A_x = -\frac{1}{2} y B_0, \quad A_y = \frac{1}{2} x B_0, \quad A_z = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0\ .$$

Berechnen Sie $[p_i, A_j]$ $(i, j = x, y, z)$.

b) Führen Sie zur Bestimmung der stationären Zustände einen Separationsansatz

$$\psi(x, y, z) = e^{i\, k_z\, z}\, f(x, y)$$

durch. Zeigen Sie, daß f eine Eigenwertgleichung $H_\perp f = E_\perp f$ erfüllt und bestimmen Sie $H_\perp$. Drücken Sie E durch $E_\perp$ und k_z aus.

c) Zeigen Sie, daß gilt $H_\perp = \hbar\omega_c(b^\dagger b + 1/2)$ mit

$$\omega_c := \frac{eB_0}{mc}, \qquad b := \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega_c}}\left[\left(p_x - \frac{e}{c} A_x\right) + i\left(p_y - \frac{e}{c} A_y\right)\right].$$

d) Berechnen Sie $[b, b^\dagger]$.

e) Wie lautet $E_\perp$?