Übungsblatt 5 — Quantenmechanik I — SS 06

Abgabetermin: 11.5.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Der Hamiltonoperator für ein Teilchen in einem 2-dim. Potentialkasten mit unendlich hohen Wänden lautet

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x) \quad \text{mit} \quad V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < a,\ |y| < a \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Finden Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes $\psi(x, y) = f(x)g(y)$ die stationären Zustände von H und berechnen Sie die Energieeigenwerte

b) Wieviele Zustände gibt es zu den niedrigsten 3 Energieeigenwerten? Diskutieren Sie die Entartung dieser Energieeigenwerte.

c) Wie lautet die allgemeine Lösung der Schrödinger Gleichung $\Psi(x, y, t)$?

Aufgabe 2 (3 Punkte)

a) Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

b) Zeigen Sie

$$[L_i, x_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} x_k \ , \qquad [L_i, p_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} p_k \ , \qquad [L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \ ,$$
$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm \ , \qquad [L_+, L_-] = 2\hbar L_z \ , \qquad [\vec{L}^2, L_i] = 0 \ , \qquad [\vec{L}^2, L_\pm] = 0 \ ,$$

mit $L_\pm := L_x \pm i\, L_y$.

c) Zeigen Sie

$$L_\pm L_\mp = L_x^2 + L_y^2 \pm \hbar L_z = \vec{L}^2 - L_z^2 \pm \hbar L_z \ .$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Ein physikalisches System befinde sich im Eigenzustand ψ_{lm} zu $\vec{L}^2$ und L_z. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle L_x \rangle$, $\langle L_y \rangle$ sowie ΔL_x, ΔL_y.

Hinweis: Drücken Sie L_x, L_y durch $L_\pm$ aus.