Übungsblatt 2 Quantenmechanik I SS 06

Abgabetermin: 20.4.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß für den Erwartungswert eines Operators A gilt

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H,A]\rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t}\rangle \ .$$

b) Berechnen Sie $[H, x_i]$ und $[H, p_i]$ für $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$.

c) Zeigen Sie

$$\frac{d}{dt}\langle x_i\rangle = \frac{\langle p_i\rangle}{m} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}\langle p_i\rangle = -\langle \frac{\partial V}{\partial x_i}\rangle.$$

Was ist die physikalische Bedeutung dieser beiden Gleichungen?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß für Operatoren A, B die folgenden Beziehungen gelten:

- $(A^\dagger)^\dagger = A$
- $(cA)^\dagger = c^* A^\dagger \ , c \in \mathbf{C}$
- $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$
- $(A\,B)^\dagger = B^\dagger\,A^\dagger$
- $[A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$
- $[A, B^n] = nB^{n-1}$, wenn $[A, B] = 1$

b) Zeigen Sie, daß $\vec{x}$, $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$, $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$ und $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ hermitesche Operatoren sind.

c) Zeigen Sie, daß für einen hermiteschen Operator A gilt $\langle A\rangle - \langle A\rangle^* = 0$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

a) Zeigen Sie für das Wellenpaket aus Blatt1, Aufgabe 4c

$$\langle \vec{x} \rangle = \frac{\vec{p}_0 t}{m} \;, \qquad \langle \vec{p} \rangle = \vec{p}_0$$

Hinweis: : Nutzen Sie Symmetrieeigenschaften bei der Berechnung des Integrals aus.

b) Für eine beliebigen Operator A definiert man $(\Delta A)^2 := \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$. Zeigen Sie für das Wellenpaket aus Blatt1, Aufgabe 4c

$$(\Delta x)^2 = d^2(1+u^2) \;, \quad (\Delta p_x)^2 = \frac{\hbar^2}{4d^2} \;, \quad \Delta x \Delta p_x = \frac{1}{2}\,\hbar\sqrt{1+u^2} \;.$$

Hinweis: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$