Lösungen zur 1. Übungsklausur

Aufgabe 1

Die Entropie ist gegeben durch:

$$S(E,V,N) = \frac{5}{2}kN\ln\left(\frac{E}{Ne_0}\right) + kN\ln\left(\frac{V}{Nv_0}\right) + Ns_0\,. \tag{1}$$

Es folgt aus $dS = \frac{1}{T}dE + \frac{p}{T}dV$, dass:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V, \qquad p = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E.$$

Daraus folgt die kalorische Zustandsgleichung:

$$\frac{1}{T} = \frac{5}{2}\frac{kN}{E} \quad \Rightarrow \; E = \frac{5}{2}NkT\,. \tag{2}$$

Analog leitet man die thermische Zustandsgleichung her:

$$p = T\frac{kN}{V} \quad \Rightarrow \; pV = NkT\,. \tag{3}$$

Die freie Energie ist definiert durch $F = E - TS$. Die kanonische Variablen sind T und V. Mit (1) und (2) bekommt man:

$$F(T,V,N) = \frac{5}{2}NkT\left(1 - \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right) - NkT\ln\left(\frac{V}{Nv_0}\right) - NTs_0\,. \tag{4}$$

Das chemische Potential ist definiert durch $\mu = G/N$, wobei $G = F + pV$. Aus (3) und (4) folgt, dass:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2}kT\left(7 - 5\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right) - kT\ln\left(\frac{V}{Nv_0}\right) - Ts_0 = \\ &= \frac{7}{2}kT\left(1 - \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right) - kT\ln\left(\frac{p_0}{p}\right) - Ts_0\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Für den gegebenen Kreisprozess soll der Wirkungsgrad berechnet werden. Der Kreisprozess soll in folgender Richtung durchlaufen werden: α startet bei 0 und endet bei 2π. Dann wird Wärme genau dann aufgenommen, wenn $\delta Q = T\,\mathrm{d}S > 0$, dh. $S_1 \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha > 0$, dh. im Gebiet $[0,\pi]$. Wegen $\oint \mathrm{d}E = 0$ ist $W = \oint p\,\mathrm{d}V = \oint T\,\mathrm{d}S$. Mit der Definition des Wirkungsgrads ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{W}{Q_{\text{zu}}} = \frac{\int_0^{2\pi} T(\alpha)\,\mathrm{d}S(\alpha)}{\int_0^{\pi} T(\alpha)\,\mathrm{d}S(\alpha)} = \frac{\int_0^{2\pi}(T_0 + T_1\sin\alpha)S_1\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\int_0^{\pi}(T_0 + T_1\sin\alpha)S_1\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha} \\ &= \frac{\pi S_1 T_1}{\frac{1}{2}S_1(4T_0 + \pi T_1)} = \frac{2T_1}{\frac{4}{\pi}T_0 + T_1}\end{aligned} \tag{5}$$

Der Carnot-Wirkungsgrad zwischen Wärmereservoirs der jeweiligen extremalen Temperaturen $T_{\max} = T_0 + T_1$ und $T_{\min} = T_0 - T_1$ ist dann

$$\eta_{\mathrm{C}} = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} = \frac{2T_1}{T_0 + T_1} \tag{6}$$

Man sieht, dass $\eta < \eta_{\mathrm{C}}$, da $4 > \pi$.

Aufgabe 3

Die hypothetische Entropiefunktion in den extensiven Variablen lautet

$$S(E, V, N) = \sqrt{EN} + \sqrt{VN}. \tag{7}$$

a) Wir berechnen Druck und Temperatur:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S &= \frac{1}{T}\,\mathrm{d}E + \frac{p}{T}\,\mathrm{d}V \\ \Rightarrow T &= \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)^{-1}_{V,N} = 2\sqrt{\frac{E}{N}} \\ p &= T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} = \sqrt{\frac{E}{V}} \end{aligned} \tag{8}$$

b)Bestimmung von c_V:

$$\mathrm{d}V = 0 \Rightarrow \delta Q = T\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}E = \frac{1}{2}NT\,\mathrm{d}T \Rightarrow c_V = \frac{1}{2}NT \tag{9}$$

Bestimmung von c_p:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}p &= \frac{1}{2\sqrt{EV}}\,\mathrm{d}E - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{E}}{V^{3/2}}\,\mathrm{d}V \overset{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow V\,\mathrm{d}E = E\,\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{10}$$

Also folgt

$$\delta Q = \mathrm{d}E + p\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}E\left(1 + \frac{pV}{E}\right) = \mathrm{d}T\left(1 + \frac{pV}{E}\right)\sqrt{NE} \tag{11}$$

Wir lesen ab

$$c_p = \left(1 + \frac{pV}{E}\right)\sqrt{NE} = \frac{1}{2}TN(1 + p^{-1}) = c_V(1 + p^{-1}) \tag{12}$$

c) Wie wir in d) sehen werden, ist S strikt konkav. Deshalb ist G definiert als

$$G = E(T, p) - TS(T, p) + pV(T, p) \tag{13}$$

Mit den obigen Ergebnissen folgt

$$G(T,p,N) = -\frac{T^2 N}{4}(1+p^{-1}) \tag{14}$$

d) Wir pruefen die Konkavitaet von S nach: Sei $0 < \lambda < 1$ und $E, V, N > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &S(\lambda(E_1, V_1, N_1) + (1-\lambda)(E_2, V_2, N_2)) && (15)\\ =&\sqrt{(\lambda E_1 + (1-\lambda)E_2)(\lambda N_1 + (1-\lambda)N_2)} + \sqrt{(\lambda V_1 + (1-\lambda)V_2)(\lambda N_1 + (1-\lambda)N_2)} && (16) \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &(\lambda E_1 + (1-\lambda)E_2)(\lambda N_1 + (1-\lambda)N_2)\\ =&\lambda^2 E_1 N_1 + (1-\lambda)^2 E_2 N_2 + \lambda(1-\lambda)(E_1 N_2 + E_2 N_1)\\ \geq&\lambda^2 E_1 N_1 + (1-\lambda)^2 E_2 N_2 + 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{E_1 E_2 N_1 N_2}\\ =&\left(\lambda\sqrt{E_1 N_1} + (1-\lambda)\sqrt{E_2 N_2}\right)^2 \end{aligned}$$

wobei die Abschaetzung in der dritten Zeile aus

$$\begin{aligned} &(E_1 N_2 - E_2 N_1)^2 \geq 0\\ &\Rightarrow (E_1 N_2)^2 + (E_2 N_1)^2 \geq 2E_1 E_2 N_1 N_2 \end{aligned}$$

und

$$E_1 N_2 + E_2 N_1 = \sqrt{(E_1 N_2 + E_2 N_1)^2} = \sqrt{(E_1 N_2)^2 + (E_2 N_1)^2 + 2E_1 E_2 N_1 N_2} \geq 2E_1 E_2 N_1 N_2$$

folgt. und die analoge Abschaetzung fuer das Argument der zweiten Wurzel. Daraus folgt unmittelbar die Konkavitaet von S in den Variablen (E, V, N).

Aufgabe 4

Given the equation of state:

$$p = \frac{KT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \tag{17}$$

and the definition of isothermal compresibility

$$k_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_p \tag{18}$$

we take

$$k_T = -\left(\frac{-vkT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^2}\right)^{-1} \tag{19}$$

We can find the critical point applying the conditions $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0$, $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_T = 0$ from which follows $v_c = 3b$ and $T_c = \frac{8a}{27bk}$.

For a point which is close to the critical temperature $T = T_c + \tau$ and at the critical volume v_c we take

$$k_T = -\left(\frac{-v_c k(T_c+\tau)}{(v_c-b)^2} + \frac{2a}{v_c^2}\right)^{-1} = \frac{4b}{3k\tau} \tag{20}$$