Lösungen zur 2. Übungsklausur

Aufgabe 1

a) Gegeben ist die Energie des Systems als eine Funktion der Entropie:

$$E(S) = \begin{cases} S^2 & 0 \leq S \leq 1 \\ 2S - 1 & 1 < S \leq 2 \\ \frac{1}{2}S^2 + 1 & S \geq 2 \end{cases}$$

Diese Funktion ist überall konvex, da:

$$0 \leq E''(S) = \begin{cases} 2 & 0 \leq S \leq 1 \\ 0 & 1 < S \leq 2 \\ 1 & S \geq 2 \end{cases}$$

Sie ist streng konvex (das heißt $0 < E''(S)$) für $0 < S < 1$ und $S > 2$.

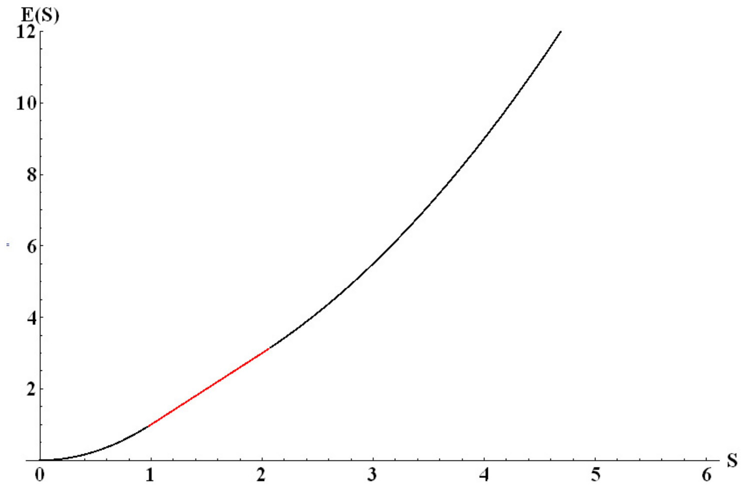


Abbildung 1: Die Funktion $E(S)$.

b) Ein Phasenübergang findet im Bereich $S \in [1, 2]$ statt. Die Temperatur des Phasenübergangs ist gleich: $T_P = E'(S)\big|_{S\in[1,2]} = 2$. Die reinen Phasen entsprechen den Randpunkten des Intervalls $[1, 2]$. Die zugehörigen extensiven Größen lauten:

a) Phase 1: $S_1 = 1$ $E_1 = 1$

b) Phase 2: $S_2 = 2$ $E_2 = 3$

c) Die freie Energie berechnet man als die Legendre-Transformation der Energie:

$$F(T) = \inf_{S\geq 0}\{E(S) - TS\} = \begin{cases} -\frac{T^2}{4} & 0 \leq T < 2 \\ -\frac{T^2}{2} + 1 & T \geq 2 \end{cases}$$

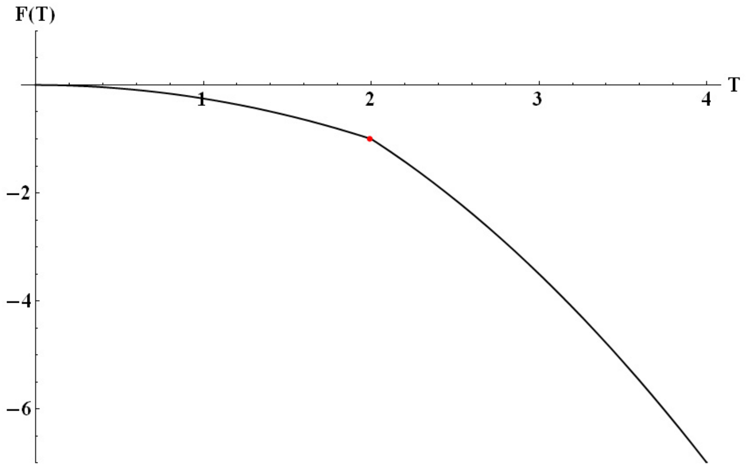
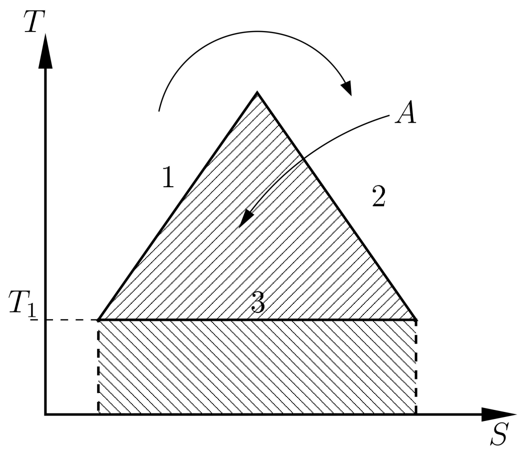


Abbildung 2: Die freie Energie $F(T)$.

Aufgabe 2

Der Dreiecks-Kreisprozess im T-S Diagramm sieht wie folgt aus:



Der Wirkungsgrad dieses Kreisprozesses ist gegeben durch

$$\eta = \frac{A}{Q_{\mathrm{zu}}}$$

den Quotienten aus geleisteter Arbeit und zugeführter Wärme. Die geleistete Arbeit ist einfach durch den Flächeninhalt des Dreicks gegeben

$$A = \frac{1}{2}\Delta S \Delta T.$$

Wegen $\delta Q = T\,\mathrm{d}S$ und $T > 0$ wird in diesem Prozess ist auf den Teilstücken 1 und 2 Wärme zugeführt. Der Betrag dieser Wärme ist die Fläche unter den Graphenstücken, also insgesammt die Fläche des Dreicks und des Rechtecks unter dem Dreicks (schraffiert). Diese ergibt sich zu

$$Q_{\mathrm{zu}} = A + T_1 \Delta S$$

und damit

$$\eta = \frac{A}{Q_{\mathrm{zu}}} = \frac{A}{A + T_\Delta S} = \frac{1}{1 + 2\frac{T_1}{T_2 - T_1}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}$$

Der Carnot Wirkungsgrad zwischen den extremalen Temperaturen ist immer größer:

$$\eta_{\mathrm{Carnot}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} > \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}$$

Aufgabe 3

Die grosskanonische Zustandssumme des freien relativistischen Fermigases im Würfel mit Kantenlänge L ist

$$Z_G = \prod_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^3} \left(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{n}} - \mu)}\right), \quad E_{\mathbf{n}} = |\mathbf{n}|\pi/L$$

Wir berechnen $\ln Z_G$, wobei wir L als gross annehmen, so dass die Summe durch ein Integral ersetzt werden kann:

$$\begin{aligned}
\ln Z_G &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^3} \ln(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{n}} - \mu)}) \\
&\approx \int_{n_i > 0} \ln(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{n}} - \mu)}) \\
&= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int \mathrm{d}^3\mathbf{k} \ln(1 + e^{-\beta(|\mathbf{k}| - \mu)})
\end{aligned}$$

Wir benutzen die Beziehung $\ln Z_G = \beta V p$ (in unserem Fall gilt $V = L^3$) und berechnen den Druck als Funktion des chem. Potentials und der Temperatur:

$$p = (2\pi)^{-3} \int \mathrm{d}^3\mathbf{k} \beta^{-1} \ln(1 + e^{-\beta(|\mathbf{k}| - \mu)})$$

Der Integrand konvergiert für $\beta \to \infty$ punktweise gegen $(\mu - |\mathbf{k}|)\Theta(\mu - |\mathbf{k}|)$. Daher kann man in diesem Regime das Integral elementar berechnen und erhält

$$\lim_{\beta \to \infty} p = \frac{\mu^4}{24\pi^2}$$

Für die Teilchenzahldichte gilt

$$n = \frac{\partial p(\beta, \mu)}{\partial \mu} = (2\pi)^{-3} \int \mathrm{d}^3\mathbf{k}(1 + e^{\beta(|\mathbf{k}|-\mu)})^{-1}$$

Für $\beta \to \infty$ konvergiert der Integrand punktweise gegen $\Theta(\mu - |\mathbf{k}|)$, so dass wir erhalten:

$$\lim_{\beta\to\infty} n = \frac{\mu^3}{6\pi^2}$$

Das liefert schliesslich

$$p(T = 0) = \frac{(6n\pi^2)^{4/3}}{24\pi^2}$$

Aufgabe 4

a) Die Hamiltonfunktion für N Teilchen, die sich in einem Zylinder mit Grundfläche S befinden, der parallel zur z-Achse steht, ist gegeben durch $H = \sum_1^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_1^N mgz_i$, mit $0 \leq z_i \leq \infty$. Die Zustandssumme ist

$$Z = \left(\int d\mathbf{p} \int dS \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta mgz} dz\right)^N = \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3N/2} S^N \left(\frac{1}{\beta mg}\right)^N$$

b) Die Anzahl der Teilchen $N_>$, die sich über einer Höhe h befinden, ergibt sich aus $N_> = Nn(h_>)$, wobei $n(h_>)$ die Wahrscheinlichkeit ist, ein Teilchen über der Höhe h zu finden:

$$n(h_>) = \int d\mathbf{p} \int dS \int_h^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\beta H}}{Z} \delta(z_i - z) dz = \frac{\int_h^\infty \mathrm{e}^{-\beta mgz} dz}{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta mgz} dz} = e^{-\beta mgh}$$

$$N_> = N\mathrm{e}^{-\beta mgh}$$

c) Der Druck in einer Höhe h wird von der Gewichtskraft der Teilchen verursacht, die sich überhalb dieser Höhe befinden, also

$$P = \frac{F}{S} = \frac{N_> mg}{S} = \frac{Nmg}{S} e^{-\beta mgh}$$