Übungen zur Theorie A – Quantenmechanik

Aufgabe 8b

$$H = \begin{pmatrix} E & \epsilon \\ \epsilon & E \end{pmatrix}, E, \epsilon \in \mathbb{R}$$

Zur Zeit $t = 0$ sei das Stickstoffatom in einer der beiden Positionen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Atom zu einem späteren Zeitpunkt in der anderen Position zu finden?

Wenn sich das N-Atom oberhalb befindet: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Zugehöriger Projektor: $P_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Wen n sich das N-Atom unterhalb befindet: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Zugehöriger Projektor: $P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Heisenberggleichung lautet:

$$\frac{d}{dt}A(t) = i[H, A(t)]$$

Berechnen wir zuerst den Kommutator:

$$\begin{aligned}
&[H, A(t)] = HA(t) - A(t)H \\
&= \begin{pmatrix} E & \epsilon \\ \epsilon & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \epsilon \\ \epsilon & E \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} EA_{11}(t) + \epsilon A_{21}(t) & EA_{12}(t) + \epsilon A_{22}(t) \\ \epsilon A_{11}(t) + EA_{21}(t) & \epsilon A_{12}(t) + EA_{22}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} EA_{11}(t) + \epsilon A_{12}(t) & \epsilon A_{11}(t) + EA_{12}(t) \\ EA_{21}(t) + \epsilon A_{22}(t) & \epsilon A_{21}(t) + EA_{22}(t) \end{pmatrix} \\
&= \epsilon \begin{pmatrix} A_{21}(t) - A_{12}(t) & A_{22}(t) - A_{11}(t) \\ A_{11}(t) - A_{22}(t) & A_{12}(t) - A_{21}(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dies in die Heisenberggleichung eingesetzt ergibt somit

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{pmatrix} = i\epsilon \begin{pmatrix} A_{21}(t) - A_{12}(t) & A_{22}(t) - A_{11}(t) \\ A_{11}(t) - A_{22}(t) & A_{12}(t) - A_{21}(t) \end{pmatrix}$$

Nun haben wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \frac{d}{dt}A_{11}(t) = i\epsilon\big(A_{21}(t) - A_{12}(t)\big) \\
&(2)\ \frac{d}{dt}A_{22}(t) = i\epsilon\big(A_{12}(t) - A_{21}(t)\big) \\
&(3)\ \frac{d}{dt}A_{12}(t) = i\epsilon\big(A_{22}(t) - A_{11}(t)\big) \\
&(4)\ \frac{d}{dt}A_{21}(t) = i\epsilon\big(A_{11}(t) - A_{22}(t)\big)
\end{aligned}$$

$$(1) + (2): \frac{d}{dt}\big(A_{11}(t) + A_{22}(t)\big) = i\epsilon\big(A_{21}(t) - A_{12}(t) + A_{12}(t) - A_{21}(t)\big) = 0$$

$$(3) + (4): \frac{d}{dt}\big(A_{12}(t) + A_{21}(t)\big) = i\epsilon\big(A_{22}(t) - A_{11}(t) - A_{22}(t) + A_{11}(t)\big) = 0$$

$$(1) - (2): \frac{d}{dt}\big(A_{11}(t) - A_{22}(t)\big) = 2i\epsilon\big(A_{21}(t) - A_{12}(t)\big) \qquad (5)$$

$$(3)-(4): \frac{d}{dt}\big(A_{12}(t)-A_{21}(t)\big)=2i\epsilon\big(A_{22}(t)-A_{11}(t)\big) \qquad (6)$$

Gleichung (5) umgeformt ergibt:

$$(5)': -\frac{1}{2i\epsilon}\frac{d}{dt}\big(A_{11}(t)-A_{22}(t)\big)=A_{12}(t)-A_{21}(t)$$

Diese in die Gleichung (6) eingesetzt ergibt:

$$(6)': -\frac{1}{2i\epsilon}\frac{d^2}{dt^2}\big(A_{11}(t)-A_{22}(t)\big)=2i\epsilon\big(A_{22}(t)-A_{11}(t)\big)$$
$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}\big(A_{11}(t)-A_{22}(t)\big)=-4\epsilon^2\big(A_{11}(t)-A_{22}(t)\big)$$
$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}\big(A_{11}(t)-A_{22}(t)\big)+4\epsilon^2\big(A_{11}(t)-A_{22}(t)\big)=0$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (Schwingungsgleichung (siehe auch: Harmonische Schwingungen Wikipedia)).

Mit Hilfe des Lösungsansatzes erhalten wir dann die Gleichung:

$$(7)\ A_{11}(t)-A_{22}(t)=\big(A_{11}(t=0)-A_{22}(t=0)\big)\cos(2\epsilon t)+\frac{\frac{d}{dt}A_{11}(t=0)-\frac{d}{dt}A_{22}(t=0)}{2\epsilon}\sin(2\epsilon t)$$

Nun benutzen wir die Gleichung (5) und erhalten damit die allgemeine Lösung:

$$A_{11}(t)-A_{22}(t)=\big(A_{11}(0)-A_{22}(0)\big)\cos(2\epsilon t)+\big(A_{21}(0)-A_{12}(0)\big)i\ \sin(2\epsilon t)$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit gilt:

$$W(P_-=1|P_+(t))=\mathrm{Tr}\,P_-P_+(t)$$
$$=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_+(t)_{11}&P_+(t)_{12}\\P_+(t)_{21}&P_+(t)_{22}\end{pmatrix}$$
$$=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}0&0\\P_+(t)_{21}&P_+(t)_{22}\end{pmatrix}$$
$$=\mathrm{Tr}\,P_+(t)_{22}=P_+(t)_{22}$$

Nun wissen wir, dass $1=1+2-2$ gilt und diesen Trick wenden wir auch hier an:

$$P_+(t)_{22}=\frac{1}{2}\underbrace{(P_+(t)_{11}+P_+(t)_{22})}_{\substack{\text{Vergleich mit Gleichung}\\ \text{(1)+(2) zeigt, dass dies}\\ \text{eine Konstante sein muss}}}-\frac{1}{2}\underbrace{(P_+(t)_{11}-P_+(t)_{22})}_{\substack{\text{Vergleich mit Gleichungen}\\ \text{(7) und (1)+(2)}}}$$

$$\Longrightarrow P_+(t)_{22}=\frac{1}{2}(\text{Konstante})-\frac{1}{2}(\text{Konstante})\cos(2\epsilon t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\epsilon t)$$

Dadurch ergeben sich folgende Werte:

$P_+(t)_{22}=0$ für $t=0$ $\qquad$ $P_+(t)_{22}=1$ für $t=\frac{\pi}{2\epsilon}$