

# Theorie B

# Elektrodynamik und

# Relativitätstheorie

Wintersemester 2011/12

KLAUS FREDENHAGEN

II. Institut für Theoretische Physik  
Universität Hamburg

## Literatur

- K. Schilcher: Theoretische Physik kompakt für das Lehramt. Oldenbourg 2010
- J.D. Jackson: Classical Electrodynamics. Third Edition. Wiley 1999
- W. Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik, Zimmermann 1990
- H. Römer, M. Forger: Elementare Feldtheorie, VCH 1993
- F. Scheck: Theoretische Physik 3 Klassische Feldtheorie, Springer 2002
- T. Fließbach. Elektrodynamik. Lehrbuch zur Theoretischen Physik II. Spektrum 2008

## Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. Spezielle Relativitätstheorie	5
1. Teilchen und Felder	5
2. Raum und Zeit in der speziellen Relativitätstheorie	6
Kapitel II. Ausblick auf die Allgemeine Relativitätstheorie	17
1. Das Äquivalenzprinzip	17
2. Raumzeit als Lorentz-Mannigfaltigkeit	18
3. Bewegungen im rotationssymmetrischen Gravitationsfeld	22
Kapitel III. Elektrostatik	27
1. Coulombgesetz, das elektrische Feld	27
2. Potential	29
3. Das Gaußsche Gesetz	31
4. Leiter	36
5. Randwertprobleme; Greensche Funktionen	37
6. Elektrostatische Energie	45
Kapitel IV. Magnetostatik	49
1. Stationäre Ströme	49
2. Kräfte zwischen Strömen	50
3. Magnetfeld(magnetische Induktion)	51
4. Vektorpotential und Eichtransformationen	53
5. Das Vektorpotential einer lokalisierten Stromverteilung	55
6. Dipol im äußeren magnetostatischen Feld	57
7. Supraleiter	58
Kapitel V. Maxwellgleichungen	63
1. Das Faradaysche Induktionsgesetz	63
2. Maxwellsche Ergänzung	64
3. Maxwellgleichungen; die Wellengleichung	65
4. Potentiale und Eichtransformationen	65
Kapitel VI. Elektromagnetische Wellen	67
1. Die homogene Wellengleichung	67
2. Die inhomogene Wellengleichung; retardierte Potentiale	69
3. Polarisierung	73
4. Reflexion und Brechung	75



## KAPITEL I

# Spezielle Relativitätstheorie

### 1. Teilchen und Felder

In der klassischen nichtrelativistischen Mechanik denkt man sich die Materie aus kleinsten Teilchen, den Massepunkten, aufgebaut. Diese nehmen zu jeder Zeit  $t$  einen Punkt  $\mathbf{r}$  des 3-dimensionalen euklidischen Raums ein. Man studiert dann die Bewegung der Teilchen, nämlich ihre Bahnkurven  $\mathbf{r}(t)$ . Wichtige Größen für die Beschreibung der Bahnkurve sind die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}(t)$$

und die Beschleunigung

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) .$$

Die Bewegung des Teilchens wird durch die Newtonsche Bewegungsgleichung bestimmt,

$$\boxed{m \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t)} , \quad (1.1)$$

sofern die Anfangswerte  $\mathbf{r}(0)$  und  $\mathbf{v}(0)$  gegeben sind. Hierzu muss das Kraftgesetz bekannt sein.

Z. B. gilt für die Gravitationskraft, die eine Masse der Größe  $M$  am Punkt  $\mathbf{R}$  ausübt

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -GmM \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} . \quad (1.2)$$

Die Mechanik führt so Kräfte auf Fernwirkungen zurück. Das Teilchen wird vom Vorhandensein einer Masse an einem anderen Ort beeinflusst. Anschaulich gesprochen, muss das Teilchen merken, wo diese Masse sich zur selben Zeit befindet. Dies hat man in der Physik immer als unbefriedigend empfunden. Seitdem bekannt ist, dass es eine maximale Geschwindigkeit für die Ausbreitung von Signalen gibt, die Lichtgeschwindigkeit, ist eine solche instantane Wirkung ausgeschlossen.

Das Unbehagen an dem Konzept der Fernwirkung hat zur Formulierung des Nahwirkungsprinzips geführt. Danach sollen physikalische Systeme nur ihre unmittelbaren Nachbarn direkt beeinflussen können. Als Überträger der Kraft wird eine neue Größe postuliert, nämlich das Feld. Ein Feld ist eine Funktion auf dem Ortsraum. Wir kennen skalare

Felder, wie die Dichte oder die Temperaturverteilung, und Vektorfelder, etwa das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit, das Gravitationsfeld und elektrische und magnetische Felder. Im obigen Beispiel ist  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  das Kraftfeld, das die Bewegung des Teilchens bestimmt.

Es stellte sich dann heraus, dass die Felder eine selbständige Rolle spielen, die sich zum Beispiel in der Existenz elektromagnetischer Wellen zeigt. In der modernen Elementarteilchentheorie sind die Felder das grundlegende Konzept, aus dem die Teilchen abgeleitet werden.

Thema dieser Vorlesung ist das elektromagnetische Feld. Die Gesetze des elektromagnetischen Feldes wurden erstmals von Maxwell (1862) vollständig angegeben. Ihre wichtigste Konsequenz ist die Existenz elektromagnetischer Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit  $c = 299792458 \text{ms}^{-1}$  ausbreiten.

Eine große Überraschung war, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Bewegung des Bezugssystems ist, wie Michelson-Morley 1881 zeigten. Dies lässt sich mit Hilfe der speziellen Relativitätstheorie erklären, die von Einstein 1905 aufgestellt wurde.

## 2. Raum und Zeit in der speziellen Relativitätstheorie

Unser Raum ist mit guter Genauigkeit ein 3-dimensionaler euklidischer Raum. Nach der Wahl eines Ursprungs  $O$  („origin“) kann ein beliebiger Punkt  $P$  durch einen Verschiebungsvektor  $\mathbf{r}$  beschrieben werden, der  $O$  nach  $P$  verschiebt. Ändert man den Ursprung zu  $O'$  und ist  $\mathbf{R}$  der Verschiebungsvektor von  $O'$  nach  $O$ , so ergibt sich die Verschiebung  $\mathbf{r}'$  von  $O'$  nach  $P$  als die Vektorsumme der beiden Verschiebungsvektoren  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{R} .$$

In einem kartesischen Koordinatensystem kann  $\mathbf{r}$  mit einem Tripel  $(x, y, z)$  reeller Zahlen identifiziert werden. Vektoraddition und Skalarmultiplikation erfolgen dann komponentenweise,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} ,$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} , \lambda \in \mathbb{R} .$$

Als weitere Struktur hat man einen Abstands begriff

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.1)$$

(Pythagoras), aus dem man das Skalarprodukt

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2} (|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|^2 - |\mathbf{r}_1|^2 - |\mathbf{r}_2|^2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (2.2)$$

ableiten kann. Der Winkel  $\alpha$  zwischen  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  wird durch

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|}$$

definiert. Das Skalarprodukt hat die Eigenschaften

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 \quad (\text{Symmetrie}) , \quad (2.3)$$

$$\mathbf{r}_1 \cdot (\lambda \mathbf{r}_2 + \mu \mathbf{r}_3) = \lambda \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + \mu \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 \quad (\text{Linearität}) , \quad (2.4)$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{r}|^2 > 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \neq 0 \quad (\text{Positivität}) . \quad (2.5)$$

Wichtig ist ferner das Vektorprodukt, das in dieser Form nur in 3 Dimensionen existiert. Man ordnet dabei 2 Vektoren  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  einen Vektor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$  zu, der senkrecht auf dem von  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  aufgespannten Parallelogramm steht und dessen Länge gerade die Fläche des Parallelogramms ist. Dabei wird die Orientierung einer Rechtsschraube gewählt: dreht man  $\mathbf{r}_1$  innerhalb des Parallelogramms in die Richtung von  $\mathbf{r}_2$ , so bewegt sich die Schraube in Richtung  $\mathbf{r}$ . Die Fläche des Parallelogramms ist

$$|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2| \sin \alpha .$$

In Komponenten gilt

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} . \quad (2.6)$$

Das Vektorprodukt ist also antisymmetrisch und linear.

Für das zweifache Vektorprodukt erhält man

$$\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3) \mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \mathbf{r}_3 . \quad (2.7)$$

Man entnimmt dieser Formel, dass das Kreuzprodukt nicht assoziativ ist. Stattdessen gilt die **Jacobi-Identität**

$$\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \mathbf{0} , \quad (2.8)$$

wie man durch Einsetzen der Formel für das zweifache Vektorprodukt leicht nachrechnet.

Das Volumen  $V$  eines Parallelepipeds („Spat“), der von den Vektoren  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  und  $\mathbf{r}_3$  aufgespannt wird, lässt sich mit Hilfe des **Spatprodukts** berechnen,

$$V = \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = \mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) = \mathbf{r}_3 \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} . \quad (2.9)$$

Hierbei ist die Determinante  $\det$  im  $n$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^n$  ein Funktional auf quadratischen Matrizen. Am einfachsten lässt es sich

als multilineares Funktional auf den Spaltenvektoren der Matrix charakterisieren. Sind die  $n$ -Vektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  die Spaltenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix} .$$

Dann ist  $\det(A) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$  durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt:

- (i) Die Determinante erfüllt für jeden Spaltenvektor das Distributivgesetz,

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \lambda \mathbf{a}_i + \mu \mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = \lambda \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + \mu \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{a}_n) . \quad (2.10)$$

- (ii) Vertauscht man zwei Spaltenvektoren, so ändert sich das Vorzeichen,

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) . \quad (2.11)$$

- (iii) Die Determinante der  $n$  Einheitsvektoren ist 1,

$$\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1 \quad (2.12)$$

mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$ , die an der  $i$ -ten Stelle eine 1 haben und deren andere Komponenten verschwinden

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} (i\text{-te Stelle})$$

Wichtige Rechenregeln für die Determinante sind der Determinanten-Multiplikationssatz: Sind  $A$  und  $B$  zwei  $n \times n$ -Matrizen, so ist die Determinante des Produkts gleich dem Produkt der Determinanten,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) , \quad (2.13)$$

sowie die Gleichheit der Determinanten einer Matrix  $A$  und ihrer Transponierten  $A^T$ ,

$$\det(A^T) = \det(A) , \quad (2.14)$$

mit der transponierten Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Wir wollen jetzt Bewegungen im Raum geometrisch beschreiben. Dazu fügen wir unserem Raum die Zeit als 4. Dimension hinzu. Die Bahn eines Massenpunktes wird dann eine Kurve im 4-dimensionalen Raum, eine sogenannte **Weltlinie**

$$(t, x(t), y(t), z(t)) .$$

Eine geradlinig gleichförmige Bewegung durch den Ursprung hat die Form

$$t(1, v_x, v_y, v_z)$$

mit dem konstanten Geschwindigkeitskomponenten  $v_x, v_y$  und  $v_z$ .

Wir stellen jetzt 2 Postulate auf:

**Postulat I:** Alle geradlinig gleichförmig bewegten Bezugssysteme (mit Geschwindigkeit  $v < 1$ ) sind äquivalent.

**Postulat II:** Die Lichtgeschwindigkeit  $c \equiv 1$  ist unabhängig von der Geschwindigkeit des (geradlinig gleichförmig) bewegten Bezugssystems.

Wir diskutieren diese Postulate für den Fall, dass es nur eine räumliche Dimension gibt. Zunächst geben wir eine Definition der Koordinaten, die ein gleichförmig bewegter Beobachter verwenden kann. Unser Beobachter hat eine Uhr und sendet zur Zeit  $t_1$  ein Signal aus, das am Punkt  $P$  der Raumzeit reflektiert wird und zur Zeit  $t_2$  vom Beobachter wieder empfangen wird. Dann ordnet er dem Punkt  $P$  die Zeitkoordinate  $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$  und die Raumkoordinate  $x = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$  zu.

Wir vergleichen jetzt die Uhren zweier Beobachter, die sich relativ zueinander bewegen. Dazu sendet der erste Beobachter in Zeitabständen  $T$  Signale aus, die der zweite Beobachter in Zeitabständen  $kT$  empfängt. Der Faktor  $k$  (der sogenannte Rotverschiebungsfaktor) soll bestimmt werden. Sendet Beobachter 2 Signale aus, so empfängt sie der erste Beobachter ebenfalls in Zeitabständen, die um denselben Faktor  $k$  verändert sind (Äquivalenz der Bezugssysteme). Seien die Beobachter zur Zeit  $t = 0$  am selben Ort und bewege sich der zweite Beobachter mit Geschwindigkeit  $v$ , während der erste ruht. Zur Zeit  $T$  sendet der erste Beobachter ein Signal aus, das vom zweiten Beobachter nach seiner Uhr zur Zeit  $kT$  empfangen wird, sofort reflektiert wird und beim ersten Beobachter zur Zeit  $k^2T$  nach dessen Uhr erhalten wird.

Nach unserer Vorschrift zur Wahl der Koordinaten gibt Beobachter 1 dem Raumzeitpunkt der Reflexion die Koordinaten  $t = \frac{1}{2}(1 + k^2)T$  und  $x = \frac{1}{2}(k^2 - 1)T$ . Da der zweite Beobachter sich mit Geschwindigkeit

$v$  bewegt, gilt  $x = vt$ . Also folgt

$$v = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \quad \text{und daher} \quad k = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}. \quad (2.15)$$

Vergleichen wir jetzt 3 Beobachter 1,2,3 mit  $k$ -Faktoren  $k_{12}$ ,  $k_{23}$  und  $k_{13}$ , so treffen die Signale, die Beobachter 1 in Zeitabständen  $T$  absendet, in Zeitabständen  $k_{12}T$  bei Beobachter 2 und in Zeitabständen  $k_{13}T$  bei Beobachter 3 ein. Für Beobachter 3 ist das jedoch dasselbe, als wenn Beobachter 2 Signale in Zeitabständen  $k_{12}T$  abgesendet hätte (für den Fall dass die Geschwindigkeit  $v_{13}$  von Beobachter 3 größer ist als die Geschwindigkeit  $v_{12} > 0$  des zweiten Beobachters, beides bezogen auf Beobachter 1). Daher gilt

$$k_{13} = k_{12}k_{23}. \quad (2.16)$$

Also folgt für die Geschwindigkeiten ( $v_{23}$  ist die Geschwindigkeit von Beobachter 3, bezogen auf Beobachter 2)

$$v_{13} = \frac{k_{13}^2 - 1}{k_{13}^2 + 1} = \frac{k_{12}^2 k_{23}^2 - 1}{k_{12}^2 k_{23}^2 + 1} = \frac{\frac{(1+v_{12})(1+v_{23})}{(1-v_{12})(1-v_{23})} - 1}{\frac{(1+v_{12})(1+v_{23})}{(1-v_{12})(1-v_{23})} + 1} = \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + v_{12}v_{23}}. \quad (2.17)$$

Dies ist das relativistische **Additionstheorem** für Geschwindigkeiten. Für kleine Geschwindigkeiten  $v \ll 1$  kann der Nenner durch 1 ersetzt werden, die Geschwindigkeiten addieren sich dann wie in der nicht-relativistischen Theorie. Geht aber z.B.  $v_{23}$  gegen 1 (die Lichtgeschwindigkeit), so auch  $v_{13}$ , die Lichtgeschwindigkeit ist also, wie gefordert, unabhängig vom Bezugssystem.

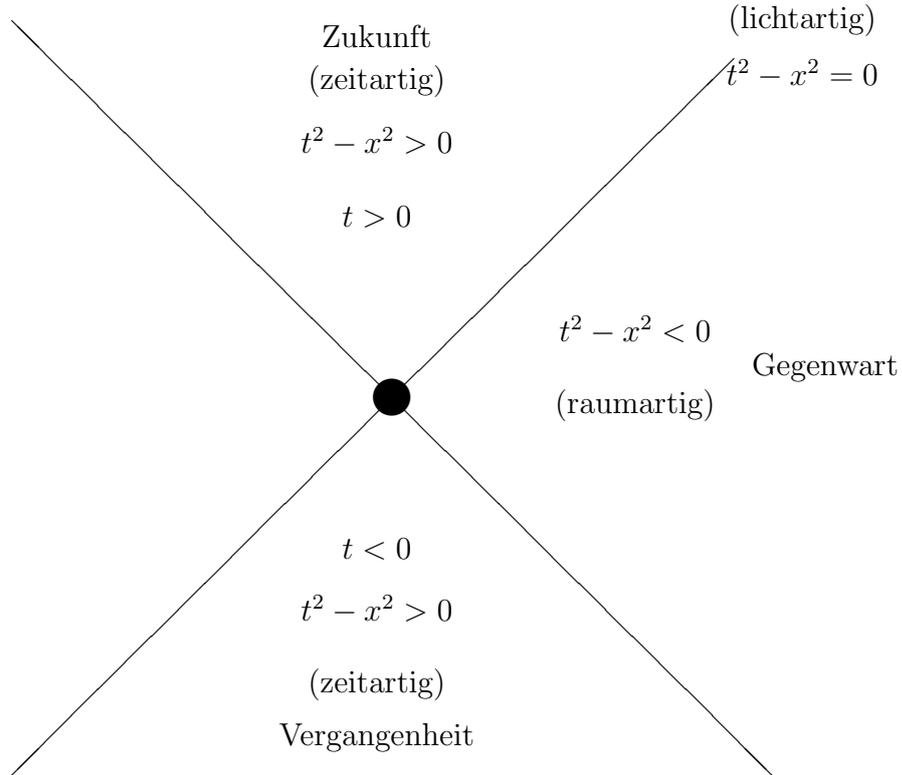
Eine wesentliche Einsicht Einsteins bestand darin, dass die Frage, ob 2 Ereignisse gleichzeitig stattfinden, vom Bezugssystem abhängt. Unabhängig vom Bezugssystem findet man (nach Wahl eines Ursprungs) die Einteilung der Raumzeit in drei Bereiche:

**Zukunft:** Die Zukunft besteht aus den Punkten der Raumzeit, die vom Ursprung aus mit einer Geschwindigkeit  $v \leq 1$  erreicht werden können. Nur Ereignisse in der Zukunft können vom Ursprung aus beeinflusst werden.

**Vergangenheit:** Die Vergangenheit besteht aus den Punkten der Raumzeit, von denen aus der Ursprung mit einer Geschwindigkeit  $v \leq 1$  erreicht werden kann. Nur Ereignisse in der Vergangenheit können am Ursprung bekannt sein.

**raumartiges Gebiet:** Alle anderen Raumzeitpunkte nennt man raumartig. Für jeden raumartigen Punkt gibt es ein Bezugssystem, für das dieser Punkt die gleiche Zeitkoordinate wie der Ursprung hat.

Man erhält das folgende Bild



Wir wollen jetzt die **Eigenzeit** eines gleichförmig bewegten Beobachters berechnen. Seine Weltlinie sei  $(t, x) = t(1, v)$  mit  $0 < v < 1, t > 0$ . Ein vom ruhenden System bei  $x = 0$  ausgesandtes und am Punkt  $(t, x)$  reflektiertes Signal wird zur Zeit  $t_1 = t - x$  abgeschickt und zur Zeit  $t_2 = t + x$  wieder empfangen. Der bewegte Beobachter misst als Zeitpunkt, zu dem das Signal bei ihm eintrifft

$$\tau = kt_1 = k(t - x) = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} t(1-v) = t\sqrt{1-v^2} = \sqrt{t^2 - x^2}. \quad (2.18)$$

Diese Zeit nennt man die Eigenzeit. Die Eigenzeit ist unabhängig vom Bezugssystem. Denn ein zweiter Beobachter (mit Geschwindigkeit  $0 < v' < v$ ), dessen Weltlinie ebenfalls durch den Ursprung geht, hätte dem Ereignis die Koordinaten  $(t', x')$  zugeordnet mit  $t'_1 = t' - x'$  als Zeitpunkt, zu dem das Signal vom ruhenden System bei ihm eintrifft, und  $t'_2 = t' + x'$  als Zeitpunkt, bei dem das reflektierte Signal bei ihm durchläuft. Nach der Definition der  $k$ -Faktoren gilt

$$t'_1 = k't_1, \quad t_2 = k't'_2, \quad k' = \sqrt{\frac{1+v'}{1-v'}}$$

und damit

$$\tau^2 = t^2 - x^2 = t_1 t_2 = t'_1 t'_2 = t'^2 - x'^2. \quad (2.19)$$

Insbesondere ist die Eigenzeit also immer kleiner als die von einem anderen System aus gemessene Zeit (**Zeitdilatation**). Wir können jetzt die Koordinaten von einem ruhenden auf ein mit Geschwindigkeit  $v$

bewegtes System umrechnen. Eine solche Transformation nennt man **Lorentztransformation**. Wir finden

$$t' - x' = k(t - x) \quad , \quad t' + x' = k^{-1}(t + x)$$

mit  $k = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$  und daher

$$\boxed{\begin{array}{l} t' = \gamma(t - vx) \\ x' = \gamma(-vt + x) \end{array}} \quad (2.20)$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{2}(k + k^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad . \quad (2.21)$$

Wir betrachten jetzt die mit dem Ursprung gleichzeitigen Raumzeitpunkte im System, das sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt. Per definitionem haben diese im gestrichenen Koordinatensystem die Zeitkoordinate  $t' = 0$ . Für die Koordinaten im ruhenden System ergibt sich

$$(t, x) = x(v, 1) \quad ,$$

in unserer 2-dimensionalen Raumzeit bilden die gleichzeitigen Punkte also eine Gerade, die sich durch Spiegelung der Weltlinie  $(t, x) = t(1, v)$  des bewegten Beobachters am Lichtstrahl  $(t, x) = t(1, 1)$  ergibt (für  $v > 0$ ).

Wir können nun das Phänomen der **Längenkontraktion** diskutieren. Eine Stange der Länge  $L$  bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v$ . Die Weltlinien von Anfangspunkt und Endpunkt seien im mitbewegten System die Geraden  $x' = 0$  und  $x' = L$ . Im ruhenden System werden diese Geraden durch die Gleichungen  $0 = \gamma(x - vt)$  und  $L = \gamma(x - vt)$  beschrieben. Die  $x$ -Koordinaten der beiden Punkte unterscheiden sich zu gleichen Zeiten  $t$  des ruhenden Systems also um

$$\boxed{L' = \sqrt{1 - v^2}L} \quad , \quad (2.22)$$

Die Länge erscheint daher vom ruhenden System aus gesehen um den Faktor  $\sqrt{1 - v^2}$  verkürzt.

Wir haben gesehen, dass Zeiten und Längen vom Bezugssystem abhängen. Dies ist der Grund für die Bezeichnung *Relativitätstheorie*. Leider hat dieser Name zu unsinnigen Simplifizierungen geführt („alles ist relativ“). Tatsächlich gibt es aber auch invariante Größen: für zwei Ereignisse an den Raumzeitpunkten  $P_1, P_2$  mit Koordinaten  $(t_1, x_1)$  und  $(t_2, x_2)$  ist die Größe

$$(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 \quad (2.23)$$

unabhängig vom Bezugssystem. Im Fall  $(t_1 - t_2)^2 > (x_1 - x_2)^2$  ist die Größe das Quadrat der Eigenzeit  $\tau$  eines gleichförmig bewegten Beobachters zwischen den Ereignissen  $P_1$  und  $P_2$ , im Fall  $(t_1 - t_2)^2 <$

$(x_1 - x_2)^2$  ist sie das negative Quadrat des Abstandes der beiden Punkte in einem Bezugssystem, in dem die beiden Ereignisse gleichzeitig sind.

Wir lassen jetzt die Einschränkung auf eine räumliche Dimension fallen. Ereignisse sind dann Punkte in einem 4-dimensionalen Raum, den wir nach Auszeichnung eines Ursprungs  $O$ , eines gleichförmig bewegten Beobachters  $A$ , dessen Weltlinie durch den Ursprung geht, sowie eines kartesischen Koordinatensystems in der zum Ursprung gleichzeitigen Punktmenge mit dem  $\mathbb{R}^4$  identifizieren können,

$$P \mapsto x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{r}) . \quad (2.24)$$

In diesem Raum definieren wir die quadratische Form

$$x^2 := (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = t^2 - |\mathbf{r}|^2 . \quad (2.25)$$

Der  $\mathbb{R}^4$ , versehen mit dieser quadratischen Form, heißt **Minkowski-raum**.

Weltlinien von Teilchen sind Kurven der Form  $(t, \mathbf{r}(t))$  mit  $|\frac{d\mathbf{r}}{dt}| \leq 1$ . Wir wollen die Eigenzeit eines Teilchens, das sich nicht notwendig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, berechnen. Ist die Bewegung stückweise gleichförmig,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{cases} \mathbf{v}_1 & , \quad 0 \leq t \leq t_1 , \\ \mathbf{v}_2 & , \quad t_1 \leq t \leq t_2 , \\ \dots & , \quad \dots . \end{cases}$$

so addieren sich die Eigenzeiten, und wir erhalten

$$\tau = t_1 \sqrt{1 - |\mathbf{v}_1|^2} + (t_2 - t_1) \sqrt{1 - |\mathbf{v}_2|^2} + \dots .$$

Eine beliebige Weltlinie denken wir uns in kleine annähernd gerade Stücke zerlegt und erhalten im Limes beliebig feiner Unterteilung die allgemeine Formel für die Eigenzeit

$$\tau = \int dt \sqrt{1 - \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2} . \quad (2.26)$$

**Beispiele:**

**Geradlinig gleichförmige Bewegung:** Die Weltlinie ist  $(t, \mathbf{r}(t)) = (t, t\mathbf{v})$  with  $|\mathbf{v}| \leq 1$ . Die Eigenzeit ist

$$\tau = \int_0^t dt' \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} = t \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} .$$

**Gleichförmig beschleunigte Bewegung:** Hier ist die Weltlinie gegeben durch  $(t, \mathbf{r}(t)) = (t, \sqrt{t^2 + L^2}, 0, 0)$ . Die Eigenzeit ergibt sich aus dem Integral

$$\tau = \int_0^t dt' \sqrt{1 - \frac{t'^2}{t'^2 + L^2}} = L \int_0^{\frac{t}{L}} dt' \frac{1}{\sqrt{t'^2 + 1}} .$$

Zur Berechnung machen wir die Substitution  $t' = \sinh u$ . Dann ist  $dt' = \cosh u du$ ,  $t'^2 + 1 = \cosh^2 u$  und  $u$  wird über

das Intervall  $[u_1, u_2]$  mit  $u_1 = 0$  und  $\sinh u_2 = \frac{t}{L}$  integriert.  
Also folgt  $\tau = L \sinh^{-1} \frac{t}{L}$ .

Anstatt die Weltlinie durch die Zeit in einem beliebig gewählten Bezugssystem zu parametrisieren, kann man auch die Eigenzeit als Parameter wählen (dies entspricht der Parametrisierung einer Kurve im euklidischen  $\mathbb{R}^n$  durch die Bogenlänge). Sei

$$x(\tau) = (t(\tau), \mathbf{r}(t(\tau)))$$

eine durch die Eigenzeit parametrisierte Weltlinie. Dann folgt für die Geschwindigkeit

$$u = \frac{dx}{d\tau}$$

immer die Beziehung

$$u^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right|^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 1. \quad (2.27)$$

Man nennt  $u$  die **Vierergeschwindigkeit**. Im ersten Beispiel ist  $t(\tau) = \gamma\tau$ , mit  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2}}$ , und damit  $u = \gamma(1, \mathbf{v})$ . Im zweiten Beispiel ist  $t(\tau) = L \sinh \frac{\tau}{L}$  und  $x(\tau) = L \cosh \frac{\tau}{L}$ . Damit folgt für die Vierergeschwindigkeit

$$u = \left(\cosh \frac{\tau}{L}, \sinh \frac{\tau}{L}, 0, 0\right).$$

Wir können jetzt auch die Beschleunigung bezüglich der Eigenzeit berechnen. Sie ist

$$a = \frac{du}{d\tau} = \frac{1}{L} \left(\sinh \frac{\tau}{L}, \cosh \frac{\tau}{L}, 0, 0\right).$$

Während die Vierergeschwindigkeit immer zeitartig ist, ist die Beschleunigung immer raumartig. Im System des beschleunigten Beobachters ist ihr Betrag

$$\sqrt{-a^2} = \frac{1}{L} \quad (2.28)$$

Die Beschleunigung ist also, vom mitbewegten Beobachter aus gesehen, konstant.

Wir wollen die Gleichung  $u^2 = 1$  physikalisch interpretieren. Dazu differenzieren wir sie nach der Zeit und erhalten

$$u_0 \dot{u}_0 = \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}},$$

also

$$\dot{u}_0 = \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \text{ mit } \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{u_0}.$$

Wir identifizieren jetzt  $m_0 \mathbf{u}$  mit dem Impuls  $\mathbf{p}$  und  $m_0 u_0$  mit der Energie  $E$  des Teilchens. Definieren wir die Kraft durch  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ , so ergibt sich die bekannte Beziehung für die Leistung

$$\dot{E} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.29)$$

Wir nennen  $p = (E, \mathbf{p})$  den **Viererimpuls** des Teilchens. Offenbar gilt

$$p^2 \equiv E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m_0^2 u^2 = m_0^2 . \quad (2.30)$$

Zwischen Energie und Impuls besteht also die Beziehung

$$E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_0^2} = m_0 \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{m_0^2}} . \quad (2.31)$$

Für kleine Impulse gilt ( $|\mathbf{p}| \ll m_0$ )

$$E \approx m_0 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m_0} - \frac{1}{8} \frac{|\mathbf{p}|^4}{m_0^3} . \quad (2.32)$$

Die Geschwindigkeit ist

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E} . \quad (2.33)$$

Bei Reaktionen zwischen Elementarteilchen gilt der Erhaltungssatz

$$p_1 + \cdots + p_n = p'_1 + \cdots + p'_m , \quad (2.34)$$

die Summe der Viererimpulse der Teilchen  $1, \dots, n$  vor dem Stoß ist also gleich der Summe der Viererimpulse der bei der Reaktion entstandenen Teilchen  $1, \dots, m$ . Dieser Satz tritt an die Stelle von Energie- und Impulserhaltungssatz der nichtrelativistischen Mechanik.

Die Größe

$$s = (p_1 + \cdots + p_n)^2 \quad (2.35)$$

ist unabhängig vom Lorentzsystem. Im Schwerpunktssystem ( $\sum \mathbf{p}_i = 0$ ) ist  $s$  das Quadrat der Gesamtenergie. In jedem anderen Lorentzsystem ist die Energie größer, wie man aus der Gleichung

$$s^2 = \left( \sum E_i \right)^2 - \left| \sum \mathbf{p}_i \right|^2$$

sieht.

Die Stöße stellt man sich als Wechselwirkungen vor, die nur auftreten, wenn die Teilchen zusammentreffen. Die Kraftgesetze, die man aus der klassischen Mechanik kennt, beschreiben aber Wechselwirkungen über eine endliche Entfernung. Dies lässt sich kaum mit der endlichen maximalen Signalgeschwindigkeit aus der speziellen Relativitätstheorie vereinbaren. Tatsächlich gibt es keine relativistische Verallgemeinerung der Mechanik. Stattdessen treten als Grundgrößen jetzt die Felder auf. Bevor wir uns den elektromagnetischen Feldern zuwenden, wollen wir einige Ideen der Allgemeinen Relativitätstheorie besprechen.



## KAPITEL II

### Ausblick auf die Allgemeine Relativitätstheorie

#### 1. Das Äquivalenzprinzip

Die allgemeine Relativitätstheorie ist eine Theorie der Gravitation. Als solche tritt sie an die Stelle der Newtonschen Gravitationstheorie. In der Newtonschen Gravitationstheorie wird die Gravitation durch ein Potential  $\varphi$  beschrieben, das eine Lösung der Poissongleichung ist,

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho , \quad (1.1)$$

mit der Gravitationskonstanten  $G$  und der Massendichte  $\rho$ . Ein Probekörper erfährt in diesem Feld die Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\text{grad } \varphi . \quad (1.2)$$

Bemerkenswerterweise ist die Beschleunigung unabhängig von der Masse des Probekörpers (solange diese Masse so klein ist, dass sie das Gravitationsfeld nicht nennenswert beeinflusst). Dieser Effekt wird besonders anschaulich in der Erfahrung der Schwerelosigkeit in einem Raumschiff. Schwerelosigkeit bedeutet hierbei, dass relativ zur Bewegung des Raumschiffs keine Beschleunigungen infolge der Schwerkraft auftreten (von den winzigen, durch die Inhomogenität des Gravitationsfeldes bedingten Gezeitenkräften abgesehen). Einstein hat dasselbe Phänomen am Beispiel des frei fallenden Lifts erläutert.

Die Unabhängigkeit der Gravitationsbeschleunigung von der Masse (oder, äquivalent, die Gleichheit von träger und schwerer Masse) ist experimentell sehr gut bestätigt. Berühmt sind die Versuche von Eötvös (1890-1922) der Genauigkeiten von  $5 \cdot 10^{-9}$  erreicht hat. Erst in den letzten Jahren hat man diese Schranken auf  $4 \cdot 10^{-13}$  verbessert.

Ausgehend von diesen Erfahrungen (allerdings kannte Einstein die Experimente von Eötvös noch nicht und stützte sich auf ältere Experimente mit geringerer Genauigkeit) formulierte Einstein sein berühmtes Äquivalenzprinzip: In einem frei fallenden System laufen alle Vorgänge so ab, als ob kein Gravitationsfeld vorhanden wäre.

Eine erste Konsequenz aus diesem Prinzip ist die gravitative Rotverschiebung. Dazu betrachten wir zwei Experimentatoren in einem gleichförmig beschleunigten Raumschiff. Die Beschleunigung sei  $g$ , und der Abstand der Beobachter in Richtung von  $g$  sei  $h$ . Zur Zeit  $t = 0$  schicke der untere Beobachter ein Photon in Richtung des oberen Beobachters ab. Wir nehmen an, dass das Raumschiff zu diesem Zeitpunkt ruht. Zur Zeit  $t = \frac{h}{c}$  erreicht das Photon den oberen Beobachter

(bei Vernachlässigung des von diesem zurückgelegten Wegs, der eine Korrektur 2. Ordnung darstellt). Dieser hat zu diesem Zeitpunkt eine Geschwindigkeit  $v = gt = \frac{gh}{c}$  erreicht. Er sieht daher das Photon mit einer Rotverschiebung von

$$z = \frac{\delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v}{c} = \frac{gh}{c^2} . \quad (1.3)$$

Nach dem Äquivalenzprinzip ist dieselbe Rotverschiebung in einem homogenen Gravitationsfeld zu erwarten. Die gravitative Rotverschiebung ergibt sich zu

$$z = \frac{\delta\varphi}{c^2} \quad (1.4)$$

mit der Gravitationspotentialdifferenz  $\delta\varphi$ . Diese Rotverschiebung konnte tatsächlich mit Hilfe des Mössbauer-Effekts nachgewiesen werden. Eine innertheoretische Bestätigung für die gravitative Rotverschiebung ergibt sich durch die Betrachtung der Energien. Wir nehmen an, dass das Photon mit einer Masse  $m = \frac{E}{c^2}$  an das Gravitationsfeld gekoppelt ist. Das Photon verliert dann bei seinem Flug die Energie

$$\delta E = -\delta\varphi \frac{E}{c^2} . \quad (1.5)$$

Mit  $E = \frac{hc}{\lambda}$  folgt

$$\frac{\delta E}{E} \approx -\frac{\delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\delta\varphi}{c^2} . \quad (1.6)$$

Die Aufgabe, die sich Einstein gestellt hat, war, eine Theorie der Gravitation zu finden, die sowohl das Äquivalenzprinzip als auch das Postulat der speziellen Relativitätstheorie erfüllt, dass die Ausbreitung von Licht unabhängig vom Bewegungszustand des Senders erfolgt.

## 2. Raumzeit als Lorentz-Mannigfaltigkeit

Nach der speziellen Relativitätstheorie lassen sich Raum und Zeit zum sogenannten Minkowskiraum zusammenfassen. Dabei wird  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  mit einer quadratischen Form

$$\eta(t, \mathbf{r}) = t^2 - |\mathbf{r}|^2 \quad (2.1)$$

versehen.

Die kräftefreien Bewegungen im Minkowskiraum können durch ein Extremalprinzip charakterisiert werden, das der Charakterisierung von Geraden im euklidischen Raum als Verbindungslinien kürzester Länge entspricht. Dazu betrachten wir zwei Punkte  $(t_1, \mathbf{r}_1)$  und  $(t_2, \mathbf{r}_2)$  mit  $t_2 - t_1 > |\mathbf{x}_2 - \mathbf{r}_1|$ . Der Raumzeitpunkt  $(t_2, \mathbf{r}_2)$  liegt also in der Zukunft des Punktes  $(t_1, \mathbf{r}_1)$ , Bahnen massiver Teilchen, die im Zeitraum  $[t_1, t_2]$  von  $\mathbf{r}_1$  nach  $\mathbf{r}_2$  gelangen, werden durch eine (stückweise stetig

differenzierbare) Funktion  $\mathbf{r}(t)$  mit  $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2$  und  $|\dot{\mathbf{r}}| < 1$  beschrieben. Die Eigenzeit längs dieser Bahn ist

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - |\dot{\mathbf{r}}(t)|^2} . \quad (2.2)$$

Wir erkennen insbesondere, dass die Eigenzeit beliebig klein werden kann, falls die Geschwindigkeit sich der Lichtgeschwindigkeit annähert. Bei Überlichtgeschwindigkeiten verliert die Eigenzeit ihren Sinn.

Wir suchen jetzt die Bahn mit der größten Eigenzeit. Dazu wählen wir ein Bezugssystem, in dem Anfangs- und Endpunkt der Weltlinie am selben Ort sind. Die Bahn hat dann die Form

$$x(t) = (t, \mathbf{r}(t)) , \quad \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2) . \quad (2.3)$$

Wir finden wegen  $\sqrt{1 - a} < 1$  für  $a > 0$

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - |\dot{\mathbf{r}}(t)|^2} < \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 \quad (2.4)$$

falls  $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$  für ein  $t \in (t_1, t_2)$ . Also folgt aus dem Prinzip der maximalen Eigenzeit, dass das kräftefreie Teilchen in einem geeignet gewählten Bezugssystem ruht. Wegen der Äquivalenz der Bezugssysteme ist das gleich bedeutend mit der bekannten Tatsache, dass sich ein kräftefreies Teilchen geradlinig gleichförmig bewegt.  $t_2 - t_1$  ist die Eigenzeit, falls das Teilchen in Ruhe bleibt.

Zur Veranschaulichung betrachten wir eine Bewegung auf einer Kreisbahn mit Radius  $r$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$ . Damit die Geschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, muss

$$r < \frac{t_2 - t_1}{2\pi}$$

gelten. Die Eigenzeit auf dieser Bahn beträgt

$$\tau = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - r^2 \omega^2} . \quad (2.5)$$

Bei einer Geschwindigkeit von  $360\text{km/h} = 100\text{m/s} \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-6}c$  und einer Fahrzeit von  $1\text{h} = 3600\text{s}$  bleibt die Uhr des mitbewegten Beobachters um etwa  $0,2$  Nanosekunden hinter der des ruhenden Beobachters zurück. Dies ist im Bereich heutiger Messgenauigkeiten.

Einsteins Idee war es jetzt, die frei fallende Bewegung im Gravitationsfeld als eine Bewegung längster Eigenzeit in einer Raumzeit aufzufassen, die lokal die Struktur des Minkowskiraums besitzt. Als Ansatz wird eine ortsabhängige Metrik

$$g = ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (2.6)$$

postuliert, die dieselbe Signatur  $(+ - - -)$  wie die Minkowskiraum-Metrik  $\eta$  hat. Bahnen  $x(s)$  massiver Teilchen erfüllen die Bedingungen

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu > 0 \quad (2.7)$$

und

$$e^\mu g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu > 0, \quad (2.8)$$

wobei  $(e^\mu)$  ein zeitartiges Vektorfeld ist, das die Zeitorientierung charakterisiert.

Die frei fallende Bewegung ist jetzt dadurch ausgezeichnet, dass die Eigenzeit

$$\tau = \int_{s_1}^{s_2} ds \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad (2.9)$$

maximal ist. Als Beispiel wählen wir  $g_{00} = 1 + 2\varphi$ , mit dem Gravitationspotential  $\varphi$  (so normiert, dass es bei unendlich verschwindet) und lassen die anderen Komponenten von  $g$  gegenüber ihren Minkowskiraumwerten unverändert. Für die Eigenzeit finden wir, wenn wir  $x^0 = t$  als Parameter benutzen,

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 + 2\varphi - |\dot{\mathbf{x}}|^2}. \quad (2.10)$$

Für den Fall, dass das Potential  $\varphi$  und die Geschwindigkeit sehr viel kleiner als 1 sind (d.h. die potentielle und die kinetische Energie sind klein im Vergleich zur Ruhenergie), können wir die Wurzel approximieren

$$\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.11)$$

und erhalten

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( 1 - \left( \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 - \varphi \right) \right), \quad (2.12)$$

das Prinzip der längsten Eigenzeit geht also in diesem Grenzfall in das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung über, das in der klassischen Mechanik verwendet wird. Nach diesem Prinzip verläuft die Bewegung zwischen zwei Raumzeitpunkten so, dass das Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \quad (2.13)$$

minimal wird.  $S$  nennt man die Wirkung, und  $L$  ist eine Funktion des Ortes, der Geschwindigkeit und der Zeit, die als Lagrangefunktion bezeichnet wird. In typischen Fällen hat sie die Form

$$L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} \quad (2.14)$$

mit der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$  und der potentiellen Energie  $E_{\text{pot}}$ .

Wir haben es hier mit einem Extremalproblem zu tun, bei dem die Variable eine Funktion ist. Diese Problem behandelt man mit Hilfe der Variationsrechnung. Sei im einfachsten Fall  $L$  eine Funktion zweier Variablen  $q$  und  $\dot{q}$ . Wir wollen eine Funktion  $q(t)$  finden mit  $q(t_1) = q_1$  und  $q(t_2) = q_2$ , für die das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t)) \quad (2.15)$$

minimal ist. Hierbei setzt man für die 2. Variable in der Funktion  $L$  die Ableitung  $\frac{d}{dt}q(t) = \dot{q}(t)$  der Funktion  $q(t)$  ein.

Sei nun die Funktion  $q(t)$  eine Lösung des Extremalproblems. Sei  $h(t)$  eine beliebige andere Funktion mit  $h(t_1) = h(t_2) = 0$ . Wir betrachten die Funktion

$$S(\lambda) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t) + \lambda h(t), \dot{q}(t) + \lambda \dot{h}(t)) . \quad (2.16)$$

Diese Funktion besitzt ein Extremum bei  $\lambda = 0$ . Also gilt

$$0 = \frac{d}{d\lambda} S(0) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h}(t) \right) \quad (2.17)$$

Den zweiten Term auf der rechten Seite können wir partiell integrieren,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h}(t) = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h(t) \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) h(t) . \quad (2.18)$$

Der Randterm verschwindet aufgrund der Randbedingungen an  $h$ , und wir finden

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) h(t) = 0 \quad (2.19)$$

für beliebige Funktionen  $h$ , die an den Stellen  $t_1$  und  $t_2$  verschwinden. Daraus folgt, dass  $q(t)$  die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (2.20)$$

erfüllt.

Im Fall mehrerer Variablen erhält man entsprechend für die Lösung des Extremalproblems

$$\int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1(t), \dots, q_n(t); \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)) \quad (2.21)$$

die  $n$  Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 , \quad i = 1, \dots, n . \quad (2.22)$$

Zum Beispiel ist die Lagrange-Funktion für ein Teilchen der Masse  $m$ , das sich in einem Potential  $V$  bewegt,

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) . \quad (2.23)$$

Die Ableitungen der Lagrange-Funktion nach den Geschwindigkeiten nennt man die den Koordinaten zugeordneten kanonischen Impulse, und die Bewegungsgleichung für die  $x$ -Koordinate ergibt sich zu

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} , \quad (2.24)$$

und entsprechend für die anderen Koordinaten.

Ein anderes Beispiel ist das mathematische Pendel, also eine punktförmig gedachte Masse, die im homogenen Schwerfeld  $g$  mittels einer masselosen starren Stange der Länge  $l$  an einem Punkt befestigt ist und sich in einer vertikalen Ebene bewegen kann. Als einzigen Freiheitsgrad besitzt das Pendel die Auslenkung aus der Ruhelage, die wir durch einen Winkel  $\phi$  beschreiben können. Die kinetische Energie ist

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2, \quad (2.25)$$

die potentielle Energie ist  $E_{\text{pot}} = mgh$  mit  $h = -l \cos \phi$ . Damit lautet die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mgl \cos \phi. \quad (2.26)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung des mathematischen Pendels ergibt sich zu

$$ml^2\ddot{\phi} + mgl \sin \phi = 0. \quad (2.27)$$

### 3. Bewegungen im rotationssymmetrischen Gravitationsfeld

Als ein wichtiges Beispiel betrachten wir ein rotationssymmetrisches Gravitationsfeld. Dies wird in Kugelkoordinaten durch die Schwarzschild-Metrik

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.1)$$

beschrieben, mit  $r > 2m$ .  $m$  ist hierbei ein freier Parameter, der als  $GM$  interpretiert wird, wobei  $M$  die Masse des Zentralkörpers bedeutet.

Ein Probekörper bewegt sich in diesem Feld so, dass seine Eigenzeit maximal wird. Wir parametrisieren die Weltlinie durch einen Parameter  $s$ . Die Eigenzeit ist

$$\tau = \int L ds, \quad (3.2)$$

mit der Lagrangefunktion

$$L = \sqrt{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2)}, \quad (3.3)$$

wobei  $\dot{f}$  die Ableitung einer Funktion  $f$  nach  $s$  bezeichnet.

Unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie können wir als Anfangswerte für  $\theta$  die Werte  $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$  und  $\dot{\theta}(0) = 0$  wählen. Aber dann ist wegen der Reflexionssymmetrie  $\theta \mapsto \pi - \theta$  der Lagrangefunktion  $\theta = \frac{\pi}{2}$  für alle Zeiten. Wir erkennen daraus, dass der Winkelanteil der Bewegung wie im Keplerproblem auf einem Großkreis der Einheitssphäre  $S^2$  verläuft. Es genügt daher, die Lagrangefunktion

$$L_0 = \sqrt{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2} \quad (3.4)$$

zu untersuchen (im folgenden wieder mit  $L$  bezeichnet).

Die Euler-Lagrange-Gleichung bezüglich  $t$  lautet

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = 0 . \quad (3.5)$$

Also ist  $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}}$  eine Erhaltungsgröße. Sie entspricht der Energie beim nichtrelativistischen Problem. Wir berechnen

$$E = \frac{1}{L} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} . \quad (3.6)$$

Eine weitere Erhaltungsgröße ergibt sich aus der Euler-Lagrange-Gleichung für den Azimuthalwinkel  $\phi$ , nämlich

$$p_\phi = \frac{1}{L} r^2 \dot{\phi} . \quad (3.7)$$

$p_\phi$  entspricht dem Drehimpuls in der Bahnebene beim Keplerproblem.

Wir ersetzen jetzt in  $L$  die Zeitkomponente  $\dot{t}$  der Geschwindigkeit durch  $EL(1 - \frac{2m}{r})^{-1}$ , die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}$  durch  $\frac{Lp_\phi}{r^2}$  und die Radialgeschwindigkeit  $\dot{r}$  durch  $\frac{dr}{d\tau}L$  mit der Eigenzeit  $\tau$  und finden

$$L = \sqrt{\left( \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(E^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2\right) - \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) L^2} . \quad (3.8)$$

Für  $E$  folgt

$$E^2 = 1 - \frac{2m}{r} + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} - \frac{2mp_\phi^2}{r^3} . \quad (3.9)$$

Dies lässt sich in der vertrauten Form

$$\frac{1}{2}(E^2 - 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad (3.10)$$

schreiben, mit dem effektiven Potential

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{m}{r} + \frac{p_\phi^2}{2r^2} - \frac{mp_\phi^2}{r^3} . \quad (3.11)$$

In den beiden ersten Termen des effektiven Potentials erkennen wir das Gravitations- und das Zentrifugalpotential des Keplerproblems. Neu ist der letzte Term. Dieser übertrifft bei kleinen Werten von  $r$  das Zentrifugalpotential, sodass der Massenpunkt auch bei nichtverschwindendem Drehimpuls in das Zentrum hineingezogen werden kann.

Bei radialer Bewegung ( $p_\phi = 0$ ) ändert sich nichts gegenüber der nichtrelativistischen Situation. Im Fall  $p_\phi \neq 0$  berechnen wir zunächst die lokalen Extrema des effektiven Potentials.

Aus

$$0 = U'_{\text{eff}} = \frac{m}{r^2} - \frac{p_\phi^2}{r^3} + \frac{3mp_\phi^2}{r^4} \quad (3.12)$$

folgt die quadratische Gleichung

$$r^2 - \frac{p_\phi^2}{m}r + 3p_\phi^2 = 0 \quad (3.13)$$

mit den Lösungen

$$r_\pm = \frac{p_\phi^2}{2m} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{12m^2}{p_\phi^2}} \right). \quad (3.14)$$

Die Nullstellen sind reell, falls  $p_\phi^2 > 12m^2$  ist. In diesem Fall hat das Potential ein Maximum bei  $r_-$  und ein Minimum bei  $r_+$ . Anderenfalls hat es kein lokales Extremum, die möglichen Bahnen enden alle bei  $r = 0$ .

Im Fall  $p_\phi^2 > 12m^2$  gibt es für  $\frac{1}{2}(E^2 - 1) \leq \max U_{\text{eff}}(r)$  Bahnen, die nicht im Ursprung  $r = 0$  enden. Insbesondere gibt es die Kreisbahn mit  $r = r_+$ . Der zugehörige Drehimpuls  $p_\phi$  ergibt sich durch Auflösung der Gleichung (3.13) zu

$$|p_\phi| = \frac{r}{\sqrt{\frac{r}{m} - 3}}. \quad (3.15)$$

Die Umlaufdauer (in der Eigenzeit) berechnen wir aus

$$\frac{2\pi}{T_{\text{eigen}}} = \left| \frac{d\phi}{d\tau} \right| = \frac{|p_\phi|}{r^2} = \frac{1}{r\sqrt{\frac{r}{m} - 3}} \quad (3.16)$$

und finden

$$T_{\text{eigen}} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{m} - 3}. \quad (3.17)$$

Zum Vergleich: beim Keplerproblem ist die Umlaufzeit der Kreisbahn mit Radius  $r$  etwas größer, nämlich  $T = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{m}}$ .

Wir können auch die Umlaufdauer in der Koordinatenzeit  $t$  berechnen. Hierzu wählen wir  $t$  als den Parameter der Bahn. Der Wert von  $L$  auf der Kreisbahn liefert dann den Umrechnungsfaktor von der Eigenzeit auf die Koordinatenzeit. Aus Gleichung (3.4) erhalten wir, indem wir  $\frac{dr}{d\tau} = 0$  setzen,  $\dot{\phi}$  durch den Drehimpuls und  $L$  ausdrücken und Gleichung (3.15) benutzen,

$$L = \sqrt{1 - \frac{3m}{r}}. \quad (3.18)$$

Es folgt

$$T_{\text{koord}} = \frac{T_{\text{eigen}}}{L} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{m}}, \quad (3.19)$$

also derselbe Wert wie beim Keplerproblem.

Wir betrachten jetzt den Fall  $U_{\text{eff}}(r) < \frac{1}{2}(E^2 - 1) < 0$ . In diesem Fall gibt es eine gebundene Bahn zwischen den Radien  $r_1$  und  $r_2$ , wenn  $r_1 > r_2 > r_3$  die drei Nullstellen der Funktion  $\frac{1}{2}(E^2 - 1) - U_{\text{eff}}(r)$  sind.

Bevor wir dieses Problem näher untersuchen, erinnern wir uns an das Keplerproblem. Dort gehen wir von der Gleichung der Energieerhaltung

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{m}{r} + \frac{p_\phi^2}{2r^2} \quad (3.20)$$

aus. Wir ersetzen jetzt die Variable  $r$  durch  $w = \frac{m}{r}$ . Dies vereinfacht das effektive Potential, und für die kinetische Energie ergibt sich

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \frac{m}{w} \right)^2 = \frac{m^2}{w^4} \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{m^2} \left( \frac{dw}{d\phi} \right)^2. \quad (3.21)$$

Wir setzen dies in den Ausdruck für die Energie ein und erhalten

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dw}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( w - \frac{m^2}{p_\phi^2} \right)^2 = \frac{Em^2}{p_\phi^2} + \frac{m^4}{p_\phi^4}. \quad (3.22)$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit der Formel für die Energie eines harmonischen Oszillators mit (Kreis-)Frequenz 1 und Ruhelage bei  $w = \frac{m^2}{p_\phi^2}$ . Die Ruhelage entspricht gerade der Kreisbahn bei dem vorgegebenen Drehimpuls.

Aus der bekannten Lösung der Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator erhalten wir daher die Bahnkurve in der Form

$$w \equiv \frac{m}{r} = \frac{m^2}{p_\phi^2} + A \cos(\phi - \phi_0) \quad (3.23)$$

mit  $A = \sqrt{2(E \frac{m^2}{p_\phi^2} + \frac{m^4}{p_\phi^4})}$  und  $\phi_0$  beliebig. Dies ist die Gleichung eines Kegelschnitts. Im Fall  $E < 0$  ergibt sich eine Ellipse. Eine bemerkenswerte Eigenschaft des Keplerproblems ist, dass die Bahnkurve als Funktion von  $\phi$  dieselbe Periode wie  $\phi$  besitzt und daher geschlossen ist.

Im entsprechenden relativistischen Problem tritt im effektiven Potential ein zusätzlicher Term  $-\frac{p_\phi^2}{m^2}w^3$  auf. Im Fall  $p_\phi^2 \gg 12m^2$  wird das lokale Minimum bei  $w = \frac{m^2}{p_\phi^2}$  nur wenig modifiziert. Die Frequenz ergibt sich aus der 2. Ableitung des effektiven Potentials nach  $w$  an der Stelle  $\frac{m^2}{p_\phi^2}$ . Wir erhalten

$$\omega^2 = 1 + \left. \frac{d^2(-w^3)}{dw^2} \right|_{w=\frac{m^2}{p_\phi^2}} = 1 - \frac{6m^2}{p_\phi^2}. \quad (3.24)$$

Damit ändert sich der Winkel  $\phi$  bei einem Umlauf um

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi \left( 1 + \frac{3m^2}{p_\phi^2} \right). \quad (3.25)$$



## KAPITEL III

### Elektrostatik

Nach diesem kurzen Ausblick auf die Allgemeine Relativitätstheorie wollen wir uns jetzt der Feldtheorie zuwenden. Der wichtigste Spezialfall sind dabei die elektromagnetischen Felder. Diese sollen im folgenden genauer untersucht werden.

#### 1. Coulombgesetz, das elektrische Feld

Elektrische und magnetische Phänomene sind bereits seit langem bekannt, jedoch gelangte man erst recht spät zu quantitativen Aussagen. Die erste derartige Aussage ist das Coulombsche Gesetz über die Kräfte zwischen zwei ruhenden Ladungen. Seien  $e_1$  und  $e_2$  zwei punktförmig gedachte Ladungen an den Orten  $\mathbf{x}_1$  and  $\mathbf{x}_2$ , dann wirkt auf die Ladung  $e_1$  die Kraft

$$\mathbf{F} = k \frac{e_1 e_2 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \quad (1.1)$$

mit einer Konstanten  $k > 0$ . Im SI-System ist  $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$  mit  $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi} \cdot \frac{\text{A}^2}{\text{c}^2 \text{N}}$ . Es gibt auch Maßsysteme, z.B. das Gaußsche System, in denen man  $k = 1$  setzt und damit die Einheit der elektrischen Ladung durch mechanische Einheiten ausdrückt. Für die Elementarteilchenphysik wichtig ist die Beziehung von  $k$  zu anderen Naturkonstanten. Es gilt:

$$k = \alpha \frac{\hbar c}{e_0^2} \quad (1.2)$$

mit der Feinstrukturkonstanten  $\alpha \approx \frac{1}{137}$ . Wir werden im folgenden  $\epsilon_0 = c = 1$  setzen. Dies bedeutet, dass, ausgehend von den Einheiten Sekunde und Newton, Längen in Lichtsekunden ( $1\text{m} = (2,99792458 \cdot 10^8)^{-1}\text{s} \approx 3 \cdot \text{ns}$ ) und Ströme in Vielfachen von  $\sqrt{\frac{10^7}{4\pi}} \text{A}$  gemessen werden.

Das Coulombgesetz hat dieselbe Form wie das Newtonsche Gravitationsgesetz, bis darauf, dass die Ladungen verschiedene Vorzeichen haben können, sodass gleichnamige Ladungen sich abstoßen, während ungleichnamige sich anziehen. Dieser Sachverhalt ist für die Stabilität der Materie von ganz entscheidender Bedeutung.

Wie das Gravitationsgesetz ist das Coulombgesetz ein Fernwirkungsgesetz: Ladung 1 wird davon beeinflusst, an welchem Ort sich Ladung 2 befindet. Die Einführung einer Fernwirkung ist schon zu Newtons

Zeiten als unbefriedigend empfunden worden. Sie lässt sich in der folgenden Weise vermeiden, die zunächst rein formal erscheint.

Man definiert eine neue Größe, das *elektrische Feld* am Punkt  $\mathbf{x}$ , als die Kraft, die eine Probeladung am Punkt  $\mathbf{x}$  erfährt, dividiert durch deren Ladung. Dabei ist die Probeladung so klein, dass sie das System nicht beeinflusst,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{1}{e} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad . \quad (1.3)$$

Man stellt sich jetzt vor, dass das Feld auch vorhanden ist, wenn es nicht durch eine Probeladung getestet wird. Das Problem der Fernwirkung ist damit in zwei Teile zerlegt worden: die Kraft auf das Probeteilchen ist durch dessen Ladung und durch das elektrische Feld an seinem Ort bestimmt, und es bleibt zu verstehen, wie ein elektrisches Feld von einer Konfiguration von Ladungen erzeugt wird. Wie sich später herausstellen wird, ist das elektrische Feld tatsächlich eine selbständige Größe, die auch unabhängig von dem Vorhandensein von Ladungen einen Sinn hat.

Aus den Gleichungen (1.1) und (1.3) ergibt sich das elektrische Feld einer Punktladung  $e$  am Ort  $\mathbf{y}$  zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} e \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \quad . \quad (1.4)$$

Elektrische Felder mehrerer Punktladungen addieren sich vektoriell,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_i e_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_i|^3} \quad . \quad (1.5)$$

Oft ist es sinnvoll, ein System vieler kleiner Punktladungen durch eine kontinuierliche Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{y})$  zu beschreiben. Das elektrische Feld erhält man dann als das Integral

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \quad . \quad (1.6)$$

Während das elektrische Feld einer Punktladung am Ort der Ladung divergiert, ist das Feld einer unendlich oft differenzierbaren Ladungsdichte  $\rho$  selbst auch unendlich oft differenzierbar.

Neben kontinuierlichen und punktförmigen Ladungsverteilungen betrachtet man auch flächenhafte und linienförmige Verteilungen. Alle diese Situationen kann man einheitlich durch den Begriff der Distribution beschreiben. So ist die Ladungsdichte einer Punktladung am Ort  $\mathbf{x}$  durch die dreidimensionale Diracsche Deltafunktion gegeben,

$$\rho(\mathbf{y}) = e \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad , \quad (1.7)$$

während eine Flächenladungsdichte  $\sigma$  auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius  $R$  und Mittelpunkt  $\mathbf{a}$  einer Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{y}) \delta(|\mathbf{y} - \mathbf{a}| - R) \quad (1.8)$$

entspricht. Ist eine Fläche durch  $\mathbf{x}(u, v)$  parametrisiert,  $(u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2$ , so führt die Flächenladungsdichte  $\sigma(\mathbf{x})$  auf dieser Fläche zu einer Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{y}) = \int_G dudv \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right| \sigma(\mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}(u, v)) \quad . \quad (1.9)$$

Ist die Ladung stattdessen auf einer durch  $\mathbf{x}(s)$ ,  $s \in I \subset \mathbb{R}$  parametrisierten Kurve mit Linienladungsdichte  $\lambda(\mathbf{y})$  konzentriert, so ist die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{y}) = \int_I ds \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| \lambda(\mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}(s)) \quad . \quad (1.10)$$

## 2. Potential

Verschiebt man die Ladung im elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  entlang eines Weges  $\gamma$ , so leistet man die Arbeit

$$A = e \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} \quad . \quad (2.1)$$

Hierbei wird das Linienintegral eines Vektorfeldes gebildet. Dies ist in der folgenden Weise definiert. Sei  $\mathbf{C}$  ein Vektorfeld, und sei  $\gamma$  ein Weg, der durch  $\mathbf{x}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  parametrisiert wird. Das Linienintegral von  $\mathbf{C}$  über den Weg  $\gamma$  ist dann

$$\int_{\gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{C}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt \quad .$$

Das Linienintegral ist unabhängig von der Parametrisierung. Denn sei  $t = f(s)$  mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $f$  mit  $f' > 0$  und  $f(c) = a$ ,  $f(d) = b$ . Dann gilt

$$\int_c^d \mathbf{C} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = \int_c^d \mathbf{C} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{df}{ds} ds = \int_a^b \mathbf{C} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \quad , \quad (2.2)$$

wobei wir erst die Kettenregel und dann die Substitutionsregel benutzt haben. Im Gegensatz zur Länge einer Kurve hängt das Linienintegral aber davon ab, in welcher Richtung die Kurve durchlaufen wird.

Im elektrischen Feld definiert man die **Spannung** als die Arbeit pro Ladung, die bei der Verschiebung einer Ladung im elektrischen Feld geleistet wird,

$$U(\gamma) = \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad .$$

Im elektrostatischen Feld gilt, dass die Spannung für geschlossene Wege ( $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ ) verschwindet. In diesem Fall kann man das **elektrostatische Potential**  $\varphi$  einführen durch

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0 + U(\gamma) \quad ,$$

wobei  $\varphi_0$  das willkürlich gewählte Potential an einem Punkt  $\mathbf{r}_0$  und  $\gamma$  ein Weg von  $\mathbf{r}$  nach  $\mathbf{r}_0$  ist.

Die Beziehung zwischen Potential und elektrischem Feld

$$\varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2) = \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

für alle Wege  $\gamma$  von  $\mathbf{r}_1$  nach  $\mathbf{r}_2$  kann man auch differentiell formulieren. Dies ist das erste Beispiel für einen Integralsatz. Er beruht, wie alle Integralsätze, auf dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b dx F'(x) .$$

Sei  $\gamma$  ein Weg von  $\mathbf{r}_1$  nach  $\mathbf{r}_2$  mit Parametrisierung  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = \int_a^b dt \frac{d\varphi(\mathbf{r}(t))}{dt} .$$

Die Ableitung berechnet man nach der Kettenregel zu

$$\frac{d\varphi(\mathbf{r}(t))}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} .$$

Wir führen jetzt das Vektorfeld

$$\text{grad } \varphi = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \equiv \nabla\varphi$$

ein.  $\text{grad } \varphi$  nennt man den **Gradienten** (Steigung) von  $\varphi$ . Das Tripel  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  nennt man den **Nabla-Operator**.

Der Gradient zeigt an, wie sich  $\varphi$  ändert, wenn man sich von der Stelle  $\mathbf{r}$  zur Stelle  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  bewegt,

$$d\varphi = \varphi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}) = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz .$$

Bewegt man sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , so ist die Änderungsgeschwindigkeit von  $\varphi$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{v} = |\text{grad } \varphi| |\mathbf{v}| \cos \theta$$

mit dem Winkel  $\theta$  zwischen den beiden Vektoren  $\text{grad } \varphi$  und  $\mathbf{v}$ . Bei gleichem Betrag der Geschwindigkeit ändert sich  $\varphi$  also am schnellsten, wenn  $\mathbf{v}$  in die Richtung von  $\text{grad } \varphi$  zeigt ( $\theta = 0$ ).

Setzen wir die obigen Beziehungen in das Integral ein und vergleichen mit der Definition des Potentials, so folgt der Zusammenhang

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi .$$

(Achtung: Vorzeichenkonvention!)

Z.B. ist das Potential einer Punktladung im Ursprung

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} .$$

Die  $x$ -Komponente des elektrischen Feldes ist dann

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{q}{4\pi} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{q}{4\pi} \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x = \frac{q}{4\pi} \frac{x}{|\mathbf{r}|^3} .$$

Die Wegunabhängigkeit der Spannung formuliert man infinitesimal in der folgenden Weise.

Nach dem Stokesschen Satz gilt die Beziehung

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d^2\mathbf{x} \quad (2.3)$$

für ein Flächenstück  $S$  mit Rand  $\partial S$ . Damit erhält man die Beziehung

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad , \quad (2.4)$$

Allgemein gilt

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \quad . \quad (2.5)$$

Für distributionsartige Felder gilt dieselbe Beziehung, wenn die Ableitungen im Sinne von Distributionen interpretiert werden. Interessant ist der Fall von Flächenladungen. Wir betrachten eine glatte Flächenladungsdichte  $\sigma$  auf einer Fläche  $S$  und bewegen eine Ladung auf einem geschlossenen Weg  $\gamma$ , der unmittelbar oberhalb der Fläche verläuft (Teilstück  $\gamma_1$ ) und dann unter ihr zurückläuft (Teilstück  $\gamma_2$ ). Im Limes verschwindenden Abstands von der Fläche erhält man für  $\gamma_2 = \gamma_1^{-1}$  die Gleichung

$$\int_{\gamma_1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbf{E}(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}) - \mathbf{E}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{n})) \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad (2.6)$$

mit dem Normalenvektorfeld  $\mathbf{n}$ , und damit für jeden Tangentialvektor  $\mathbf{t}$  an die Fläche im Punkt  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{t} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbf{E}(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}) - \mathbf{E}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{n})) = 0 \quad . \quad (2.7)$$

Die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes an einer geladenen Fläche sind also stetig.

### 3. Das Gaußsche Gesetz

Das elektrische Feld einer Ladungsverteilung nimmt mit dem Quadrat des Abstandes ab. Man kann das Feld geometrisch in der folgenden Weise beschreiben: Von jeder Ladung gehen Feldlinien aus. Ihre Richtung gibt die Richtung des elektrischen Feldes wieder, ihre Dichte dessen Betrag. Die Zahl der Feldlinien, die aus einem Gebiet  $G$  austreten, ist ein Maß für die in diesem Gebiet enthaltene Ladung. Quantitativ lässt sich dieser Zusammenhang durch das Gaußsche Gesetz beschreiben.

SATZ 3.1. Sei  $G$  ein beschränktes Gebiet des  $\mathbb{R}^3$  mit glattem Rand  $\partial G$ . Dann gilt für das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  einer Ladungsverteilung  $\rho$ , die auf  $\partial G$  nicht singulär ist

$$\int_{\partial G} \mathbf{E} \cdot d^2\mathbf{x} = \int_G \rho d^3\mathbf{x} \quad . \quad (3.1)$$

Hierbei ist der Ausdruck auf der linken Seite der sogenannte elektrische Fluss durch die Fläche  $\partial G$ . Ist die Fläche  $S$  durch

$$\mathbf{x}(s, t), \quad (s, t) \in [a, b] \times [c, d], \quad (3.2)$$

parametrisiert, so wird der elektrische Fluss durch  $S$  durch

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d^2\mathbf{x} = \int_c^d \left( \int_a^b \mathbf{E} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) ds \right) dt \quad (3.3)$$

definiert.

*Beweis:* Da  $\mathbf{E}$  linear von  $\rho$  abhängt, genügt es, den Satz für den Fall einer Punktladung der Stärke 1 zu zeigen. Wir wählen den Ort der Punktladung als den Ursprung unseres Koordinatensystems. Wir beschränken uns auf den Fall, dass das Gebiet  $G$  in Kugelkoordinaten von der Form ist

$$G = \{(r, \theta, \phi) | 0 \leq r \leq r(\theta, \phi), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi\} \quad (3.4)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $r(\theta, \phi)$ . Dies Funktion parametrisiert die Oberfläche des Gebietes. Wir berechnen

$$\mathbf{x} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \right) = r^3 \sin \theta, \quad (3.5)$$

also gilt für den elektrischen Fluss

$$\int_{\partial G} \mathbf{E} \cdot d^2\mathbf{x} = \frac{1}{4\pi r^3} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^3 \sin \theta = 1 \quad (3.6)$$

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Wenn die Ladungsdichte  $\rho$  stetig ist, kann man das Gaußsche Gesetz auch infinitesimal formulieren.

Hierzu benutzen wir den Gaußschen Satz. Dieser besagt, dass der Fluss eines Vektorfeldes  $\mathbf{C}$  durch die Oberfläche  $\partial G$  eines Gebietes  $G \subset \mathbb{R}^3$  gleich dem Integral der Divergenz des Vektorfeldes über das Gebiet  $G$  ist,

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{C} d^3\mathbf{x} = \int_{\partial G} \mathbf{C} \cdot d^2\mathbf{x}$$

Hierbei berechnet man die Divergenz eines Vektorfeldes in kartesischen Koordinaten durch

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = \nabla \cdot \mathbf{C} = \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2} + \frac{\partial C_3}{\partial x_3}. \quad (3.7)$$

Die differentielle Form des Gaußschen Gesetzes lautet also

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho. \quad (3.8)$$

Für stetig differenzierbare elektrische Felder ist die differentielle Form des Gaußschen Gesetzes äquivalent zur integralen Form. Für singuläre Felder ist die differentielle Form des Gaußschen Gesetzes nicht unmittelbar anwendbar. In diesem Fall interpretiert man die Ableitungen im Sinne von Distributionen. Sei  $f$  eine unendlich oft differenzierbare Funktion, die außerhalb eines beschränkten Gebiets verschwindet. Dann wird  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  als Distribution durch

$$\int \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = - \int \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (3.9)$$

definiert. Im Sinne dieser Definition gilt das Gaußsche Gesetz auch für distributionsartige Ladungsdichten und Felder. Für eine Punktladung 1 am Punkt 0 erhält man die Formel

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = 4\pi \delta^3(\mathbf{x}) \quad . \quad (3.10)$$

Interessant ist die differentielle Form des Gaußschen Gesetzes auch für den Fall einer Flächenladung. Sei  $\sigma$  eine glatte Flächenladungsdichte. Wir betrachten die dosenförmigen Gebiete

$$G_\varepsilon = \{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S, |\lambda| < \varepsilon\} \quad (3.11)$$

für ein Teilstück  $S$  der Fläche mit Normalenvektorfeld  $\mathbf{n}$ . Das Integral des infinitesimalen elektrischen Flusses über den Rand von  $G_\varepsilon$  ergibt Beiträge von Deckel und Boden der Dose

$$\int_S \{\mathbf{E}(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}) \cdot d^2(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}) - \mathbf{E}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{n}) \cdot d^2(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{n})\} \quad , \quad (3.12)$$

wobei das Minuszeichen von der entgegengesetzten Orientierung des Bodens herrührt, sowie Beiträge vom Mantel der Dose. Im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  verschwinden die letzteren, da das elektrische Feld einer flächenartigen Ladungsverteilung überall beschränkt ist, und wir erhalten die Aussage, dass die Normalkomponente des elektrischen Feldes an einer geladenen Fläche einen Sprung von  $\sigma$  macht. Man nennt den Sprung der Normalkomponenten an einer Fläche die Flächendivergenz.

Die beiden Differentialgleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad , \quad (3.13)$$

die das elektrostatische Feld erfüllt, sind die Grundgleichungen der Elektrostatik. Wir stellen uns jetzt auf den Standpunkt, dass alle Lösungen dieser Gleichung physikalisch mögliche elektrische Felder sind. Um die allgemeine Lösung zu finden, nutzen wir zunächst aus, dass die Gleichung  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$  identisch erfüllt wird, wenn man  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$  setzt, für eine Funktion  $\varphi$ , das bereits eingeführte elektrostatische Potential. In einem beliebigen einfach zusammenhängenden Gebiet des Raumes gilt auch die Umkehrung, dass nämlich jedes rotationsfreie Vektorfeld der Gradient einer skalaren Funktion ist.  $\varphi$  ist durch  $\mathbf{E}$  bis auf eine

additive Konstante eindeutig bestimmt. Einsetzen dieser Form von  $\mathbf{E}$  in die erste Gleichung ergibt

$$\rho = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\nabla \cdot \nabla \varphi = -\Delta \varphi \quad , \quad (3.14)$$

wobei  $\Delta$  der sogenannte Laplaceoperator ist. In kartesischen Koordinaten ist er gegeben durch

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad . \quad (3.15)$$

Die Gleichung

$$\boxed{\Delta \varphi = -\rho} \quad (3.16)$$

heißt die Poissongleichung. Die Aufgabe der Elektrostatik ist es, diese Gleichung zu lösen.

Die Poissongleichung ist eine inhomogene lineare partielle Differentialgleichung. Zwei Lösungen  $\varphi_1, \varphi_2$  unterscheiden sich daher um eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, der Laplacegleichung

$$\Delta \varphi = 0 \quad , \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad . \quad (3.17)$$

Die Lösungen der Laplacegleichung nennt man harmonische Funktionen. In zwei Dimensionen sind die harmonischen Funktionen gerade die Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen. Auch in drei Dimensionen sind harmonische Funktionen unendlich oft differenzierbar. Für uns ist besonders wichtig, dass eine im ganzen Raum beschränkte, harmonische Funktion konstant ist. Eine Lösung der Poissongleichung ist daher eindeutig bestimmt, wenn man verlangt, dass sie im Unendlichen verschwindet.

Wenn die Ladungsdichte  $\rho$  vorgegeben ist und außerhalb eines beschränkten Gebietes verschwindet, so erhält man als eine Lösung der Poissongleichung

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad . \quad (3.18)$$

Wendet man diese Formel auf eine Punktladung im Ursprung an, so findet man die bemerkenswerte Gleichung

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi \delta^3(\mathbf{x}) \quad , \quad (3.19)$$

die natürlich im Sinne von Distributionen zu verstehen ist.

Betrachten wir einige Beispiele.

- (i) Homogen geladene Kugel

Wir wählen den Ursprung des Koordinatensystems im Mittelpunkt der Kugel,  $R$  sei der Radius und  $Q$  sei die Ladung der Kugel. Wir suchen eine Lösung  $\varphi$ , die nur von  $|\mathbf{x}|$  abhängt. Dann ist  $\mathbf{E}$  parallel zu  $\mathbf{x}$ . Nach dem Gaußschen Gesetz gilt

für eine Kugelschale  $S$  mit dem Radius  $r$  um den Kugelmittelpunkt

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d^2\mathbf{x} = Q \quad , \quad r > R$$

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d^2\mathbf{x} = Q \frac{r^3}{R^3} \quad , \quad r < R \quad (3.20)$$

Mit  $\int_S \mathbf{E} \cdot d^2\mathbf{x} = 4\pi r^2 |\mathbf{E}|$  folgt

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} Q \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad , \quad |\mathbf{x}| > R$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} Q \frac{\mathbf{x}}{R^3} \quad , \quad |\mathbf{x}| < R \quad (3.21)$$

Für das Potential erhält man

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} Q \frac{1}{|\mathbf{x}|} \quad , \quad |\mathbf{x}| > R$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} Q \left( \frac{3}{2R} - \frac{|\mathbf{x}|^2}{2R^3} \right) \quad , \quad |\mathbf{x}| < R \quad . \quad (3.22)$$

(ii) Dipol

Wir betrachten zwei Punktladungen  $(e, \mathbf{x})$  und  $(-e, 0)$ . Ihr Potential ist

$$\varphi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} e \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{1}{|\mathbf{y}|} \right) \quad . \quad (3.23)$$

Wir interessieren uns für den Grenzfall  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ ,  $e \rightarrow \infty$ , so dass das Dipolmoment  $\mathbf{p} = e\mathbf{x}$  konstant bleibt. Dann gilt (mit  $s = e^{-1}$ )

$$\varphi(\mathbf{y}) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi s} \left( \frac{1}{|\mathbf{y} - s\mathbf{p}|} - \frac{1}{|\mathbf{y}|} \right) = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{y}|} \quad . \quad (3.24)$$

Die zugehörige Ladungsdichte ist die Ableitung der  $\delta$ -Funktion,

$$\rho(\mathbf{x}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{x}) = -\operatorname{div} \mathbf{p} \delta^3(\mathbf{x}) \quad . \quad (3.25)$$

(iii) Homogen geladene Ebene

Die Ebene  $z = 0$  sei mit der homogenen Flächenladungsdichte  $\sigma$  versehen. Wir suchen eine Lösung  $\varphi$ , die unabhängig von  $x$  und  $y$  ist. Die Poissongleichung wird dann zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dz^2} \varphi = -\sigma \delta(z) \quad . \quad (3.26)$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{\sigma}{2} |z| \quad . \quad (3.27)$$

Das zugehörige elektrische Feld ist  $\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{\sigma}{2} \operatorname{sign}(z) \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{e}_z$  Einheitsvektor in  $z$ -Richtung.

(iv) Zwei parallele Ebenen

Die Ebenen  $z = -a/2$  und  $z = a/2$ ,  $a > 0$  seien mit homogenen Flächenladungsdichten  $\sigma$ , bzw.  $-\sigma$  versehen. Eine Lösung der Poissongleichung, die nur von  $z$  abhängt, ist

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} & , \quad z < -a/2 \\ -\sigma z & , \quad -a/2 \leq z \leq a/2 \\ -\frac{\sigma}{2} & , \quad z > a/2 \end{cases} \quad (3.28)$$

Das zugehörige elektrische Feld verschwindet außerhalb der beiden Ebenen und ist zwischen den beiden Ebenen konstant (Plattenkondensator).

#### 4. Leiter

Die Bestimmung des elektrischen Feldes und des elektrostatischen Potentials bei vorgegebener Ladungsverteilung ist durch die im letzten Abschnitt angegebenen Formeln auf Integrationen zurückgeführt worden. In vielen Fällen ist jedoch die Ladungsverteilung zunächst nicht bekannt. Diese Situation liegt zum Beispiel bei elektrischen Leitern vor. Solange im Innern der Leiter ein elektrisches Feld besteht, bewegen sich die Ladungen; wenn sie ruhen, ist das elektrische Feld im Leiter Null. Man muss daher das elektrostatische Potential so bestimmen, dass es außerhalb der Leiter die Poissongleichung erfüllt und innerhalb der Leiter konstant ist. Die Ladung kann nur auf der Oberfläche der Leiter sitzen. Auf den Leitern kann entweder das Potential vorgegeben werden (z.B. durch „Erdung“) oder die Ladung (isolierte Leiter).

Betrachten wir nun einen Hohlraum  $V$  im Inneren eines Leiters, der das Gebiet  $G$  ausfüllt. Sei  $S$  eine geschlossene Fläche im Inneren des Leiters, die den Hohlraum  $V$  umschließt. Da das elektrische Feld innerhalb des Leiters verschwindet, ist nach dem Gaußschen Gesetz die von  $S$  umschlossene Ladung Null. Wir betrachten jetzt den Fall, dass sich keine Ladung im Innern des Hohlraums befindet. Dann ist  $\varphi = \text{const}$  eine Lösung der Poissongleichung in Leiter und Hohlraum,  $G \cup V$ . Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass es die einzige Lösung ist. Das elektrostatische Feld in einem ladungsfreien Hohlraum im Innern eines Leiters verschwindet also (Faradayscher Käfig).

Als Beispiel betrachten wir eine geladene leitende Kugel mit Radius  $R$ . Das Potential ist  $\varphi = \frac{Q}{4\pi|\mathbf{x}|}$  für  $|\mathbf{x}| > R$  und  $\frac{Q}{4\pi R}$  für  $|\mathbf{x}| < R$ .

Ein anderes Beispiel für Ladungsverteilungen, die nicht vorgegeben werden, sind die Dipoldichten, die bei Dielektrika in elektrischen Feldern durch die Polarisierbarkeit der Materie auftreten. Man zerlegt hierbei die Ladungsdichte in einen vorgegebenen Teil  $\rho_0$  und einen durch die Polarisierung (Dipolmoment pro Volumen)  $\mathbf{P}$  hervorgerufenen Anteil,

$$\rho = \rho_0 - \text{div } \mathbf{P} \quad (4.1)$$

In vielen Fällen ist die Polarisierung eine lineare Funktion des elektrischen Feldes,

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \quad (4.2)$$

mit der Suszeptibilität  $\chi$ . Wir werden auf diese Situation später zurückkommen.

### 5. Randwertprobleme; Greensche Funktionen

Die Poissongleichung bei Anwesenheit von Leitern führt auf ein sogenanntes Randwertproblem. Man sucht die Lösung der Gleichung in einem Gebiet  $V$ , dem Komplement der von den Leitern eingenommenen Gebiete  $V_i$ , unter der zusätzlichen Bedingung, dass das Potential am Rand  $\partial V$  des Gebietes, also an den Oberflächen  $\partial V_i$  der Leiter, gewissen Einschränkungen unterworfen ist; entweder ist der Wert des Potentials vorgegeben, oder das Potential ist konstant und die Ladung

$$Q_i = - \int_{\partial V_i} \partial_n \varphi dF \quad (5.1)$$

auf dem  $i$ -ten Leiter ist vorgegeben. Hierbei ist  $\partial_n \varphi = \mathbf{n} \cdot \text{grad } \varphi$  mit dem Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}$  auf  $\partial V_i$ , und  $dF$  ist das Flächenelement auf  $\partial V_i$ .

Zunächst fragen wir nach der Eindeutigkeit der Lösung. Seien  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  zwei Lösungen. Dann ist die Differenz  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$  eine Lösung der Laplace-Gleichung, also eine harmonische Funktion, mit den Eigenschaften

$$\psi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial V_i \quad (5.2)$$

falls das Potential auf  $V_i$  festliegt, und

$$\int_{\partial V_i} \partial_n \psi = 0, \quad \psi(\mathbf{x}) = \psi_i = \text{const}, \quad \mathbf{x} \in V_i, \quad (5.3)$$

falls die Ladung auf  $V_i$  vorgegeben ist.

Im folgenden werden wir mehrfach die sogenannten Greenschen Identitäten benutzen. Seien  $f$  und  $g$  zwei (genügend glatte) Funktionen. Aus der Produktregel der Differentiation folgt

$$\text{div}(f \text{grad } g) = \text{grad } f \cdot \text{grad } g + f \Delta g \quad (5.4)$$

Integrieren wir beide Seiten über das Gebiet  $V$  und benutzen auf der linken Seite den Gaußschen Integralsatz, so ergibt sich

$$\boxed{\int_{\partial V} f \partial_n g dF = \int_V \text{grad } f \cdot \text{grad } g d^3 \mathbf{x} + \int_V f \Delta g d^3 \mathbf{x}} \quad (5.5)$$

mit dem Flächenelement  $dF$  (1. Greensche Identität). Wir vertauschen jetzt die Rolle der Funktionen  $f$  und  $g$  und bilden die Differenz der aus der 1. Greenschen Identität erhaltenen Ausdrücke,

$$\boxed{\int_{\partial V} (f \partial_n g - g \partial_n f) dF = \int_V (f \Delta g - g \Delta f) d^3 \mathbf{x}} \quad (5.6)$$

(2. Greensche Identität).

Sei nun  $\psi$  eine harmonische Funktion mit dem oben angegebenen Verhalten am Rand. Aus der 1. Greenschen Identität folgt

$$\int_V \psi \Delta \psi d^3 \mathbf{x} = \int_{\partial V} \psi \operatorname{grad} \psi d^2 \mathbf{x} - \int_V |\operatorname{grad} \psi|^2 d^3 \mathbf{x} . \quad (5.7)$$

Die linke Seite verschwindet wegen  $\Delta \psi = 0$ . Für den zweiten Term auf der rechten Seite gilt

$$\int_{\partial V_i} \psi \partial_n \psi dF = \psi_i \int_{\partial V_i} \partial_n \psi = 0 , \quad (5.8)$$

da auf  $\partial V_i$  entweder  $\psi_i$  oder das Integral über  $\partial_n \psi$  verschwindet. Wir schließen also, dass  $\operatorname{grad} \psi = 0$  gilt.

Zwei Lösungen der Poisson-Gleichung mit den angegebenen Randbedingungen können sich also höchstens um eine Konstante unterscheiden. Sowie der Wert des Potentials an einer Stelle festliegt, ist das Potential eindeutig bestimmt.

Zur Konstruktion einer Lösung verwenden wir die sogenannten Greenschen Funktionen des Laplace-Operators. Eine Greensche Funktion  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ist eine Funktion zweier Variablen, die für jeden Wert von  $\mathbf{x}$  die Gleichung

$$\boxed{-\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V} \quad (5.9)$$

erfüllt. (Der Index  $\mathbf{y}$  am Laplace-Operator bedeutet, dass die Ableitungen bezüglich der Variablen  $\mathbf{y}$  zu nehmen sind.) Die Greensche Funktion ist also als Funktion von  $\mathbf{y}$  das Potential einer Punktladung der Stärke 1 am Punkt  $\mathbf{x}$ . Ein Beispiel für eine Greensche Funktion ist das Coulomb-Potential einer Punktladung,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ .

Sei  $\varphi$  eine Lösung der Poisson-Gleichung  $\Delta \varphi = -\rho$  und sei  $G$  eine Greensche Funktion. Dann folgt mittels der Greenschen Identitäten

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \int_V d^3 \mathbf{y} \varphi(\mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = - \int_V d^3 \mathbf{y} \varphi(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \int_V d^3 \mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \int_{\partial V} (\partial_n \varphi(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y}) \partial_{n,\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) dF(\mathbf{y}) . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Wir sehen, dass  $\varphi$  durch seine Werte und die seiner Normalenableitung auf dem Rand von  $V$  festgelegt ist. Allerdings können diese nicht beliebig vorgegeben werden. Wir wählen jetzt eine Greensche Funktion  $G_D$ , die Dirichletsche Randbedingungen erfüllt,

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 , \quad \mathbf{y} \in \partial V , \quad \mathbf{x} \in V . \quad (5.11)$$

Dann verschwindet in der obigen Darstellung von  $\varphi$  der Beitrag der Normalenableitungen, und wir erhalten die folgende Darstellung der

Lösung

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{y}) G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^3\mathbf{y} - \int_{\partial V} \varphi(\mathbf{y}) \partial_{n,\mathbf{y}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dF(\mathbf{y}) \quad . \quad (5.12)$$

Insbesondere erkennt man, dass eine harmonische Funktion (d.h.  $\rho = 0$ ) durch ihre Randwerte eindeutig festgelegt wird.

Wir fragen jetzt umgekehrt danach, ob die Randwerte beliebig vorgegeben werden können. Sei  $\chi$  eine stetige Funktion auf dem Rand und sei

$$\psi(\mathbf{x}) = - \int_{\partial V} \chi(\mathbf{y}) \partial_{n,\mathbf{y}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad . \quad (5.13)$$

Wir sehen leicht, dass  $\psi$  eine harmonische Funktion ist. Dazu müssen wir den Laplace-Operator bezüglich des ersten Arguments auf die Greensche Funktion  $G_D$  anwenden. Diese Funktion ist aber symmetrisch unter Vertauschung der beiden Argumente, wie man mittels der 2. Greenschen Identität erkennt,

$$\begin{aligned} & G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_D(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ &= - \int_V d^3\mathbf{z} (G_D(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \Delta_{\mathbf{z}} G_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - G_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \Delta_{\mathbf{z}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \\ &= - \int_{\partial V} dF(\mathbf{z}) (G_D(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \partial_{n,\mathbf{z}} G_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - G_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \partial_{n,\mathbf{z}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \quad . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Der Ausdruck in der letzten Zeile verschwindet wegen der Randbedingung (5.11), die die Greensche Funktion  $G_D$  erfüllt. Aufgrund der Symmetrie von  $G_D$  gilt  $\Delta_{\mathbf{x}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . Einsetzen in Gleichung (5.13) ergibt für einen Punkt  $\mathbf{x}$  im Inneren von  $V$

$$\Delta\psi(\mathbf{x}) = \int_{\partial V} \chi(\mathbf{y}) \partial_{n,\mathbf{y}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad . \quad (5.15)$$

Da die Ableitung der  $\delta$ -Funktion für von Null verschiedene Argumente verschwindet, ist  $\psi$  im Inneren von  $V$  harmonisch.

In der Elektrostatik verwendet man überwiegend die Dirichletsche Greensche Funktion  $G_D$ . Es ist im allgemeinen schwer, diese explizit anzugeben. Es lassen sich aber einige qualitative Aussagen machen. Wir betrachten zunächst einen Spezialfall. Sei  $V$  eine Kugel mit Radius  $R$  um den Punkt  $\mathbf{x}$ . Dann ist

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{1}{R} \right) \quad . \quad (5.16)$$

Hieraus folgt mit (5.12) für eine beliebige harmonische Funktion

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=R} \psi(\mathbf{y}) dF \quad (5.17)$$

$\psi(\mathbf{x})$  ist also gleich dem Mittelwert von  $\psi(\mathbf{y})$  über die Oberfläche einer beliebigen Kugel mit Mittelpunkt  $\mathbf{x}$ . Hieraus folgt der wichtige Satz:

**SATZ 5.1.** *Eine in einem offenen, zusammenhängenden Gebiet harmonische Funktion nimmt ihr Supremum oder Infimum nur dann an, wenn sie konstant ist.*

*Beweis:* Sei  $\psi$  harmonisch in dem offenen Gebiet  $V$ , und sei  $\mathbf{x} \in V$  mit  $\psi(\mathbf{x}) \geq \psi(\mathbf{y}) \forall \mathbf{y} \in V$ . Es gibt ein  $R > 0$ , so dass die Kugel um  $\mathbf{x}$  mit Radius  $R$  in  $V$  liegt. Wegen der Mittelwerteigenschaft muss dann  $\psi(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{x})$  gelten für alle  $\mathbf{y}$  mit  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < R$ . Die Menge der Punkte  $\mathbf{y}$ , an denen  $\psi$  sein Supremum annimmt, ist also offen, wegen der Stetigkeit von  $\psi$  aber auch abgeschlossen in  $V$ . Da  $V$  zusammenhängend ist, stimmt sie mit  $V$  überein. Falls das Infimum angenommen wird, argumentiert man entsprechend.  $\square$ .

Ist  $V$  beschränkt und  $\psi$  stetig auf dem Abschluss von  $V$ , so nimmt es sein Maximum und Minimum notwendig auf dem Rand an. Man kann sich diesen Sachverhalt in einem ganz anderen physikalischen Zusammenhang klarmachen. Wir betrachten die Temperaturverteilung  $T(\mathbf{x}, t)$  in einem Festkörper. Diese wird durch die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t T = \lambda \Delta T \quad (5.18)$$

zusammen mit geeigneten Randbedingungen bestimmt. Wir betrachten jetzt den Fall, dass die Temperaturverteilung an der Oberfläche des Körpers fest vorgegeben ist und fragen nach der stationären Verteilung  $T$  mit  $\partial_t T = 0$ . Diese ist offenbar durch eine harmonische Funktion mit den vorgegebenen Randbedingungen gegeben, und das Maximumsprinzip sagt aus, dass die Temperatur im Innern zwischen dem maximalem und dem minimalen Wert auf dem Rand liegt.

Aus dem Satz folgt insbesondere, dass

$$m_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := -\partial_{n,\mathbf{y}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \quad (5.19)$$

für  $\mathbf{y} \in \partial V$  gilt. Denn angenommen, es gäbe ein  $\mathbf{y} \in \partial V$  mit  $m_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) < 0$ . Es gäbe dann eine Umgebung  $U$  von  $\mathbf{y}$ , in der  $m_{\mathbf{x}}$  ebenfalls negativ wäre (wir setzen hier der Einfachheit halber voraus, dass  $m_{\mathbf{x}}$  stetig ist, der allgemeine Fall kann ähnlich behandelt werden). Wir wählen jetzt eine Funktion  $\chi$  auf dem Rand, die überall nichtnegativ ist und außerhalb der Umgebung  $U$  verschwindet. Die zugehörige harmonische Funktion  $\psi$  wäre dann negativ, obwohl ihr Minimum am Rand nichtnegativ ist, im Widerspruch zum obigen Satz.

In der Mathematik nennt man  $m_{\mathbf{x}} dF$  das harmonische Maß von  $\partial V$  bezüglich des Punktes  $\mathbf{x} \in V$ . Physikalisch kann man die Positivität von  $m_{\mathbf{x}}$  in der folgenden Weise verstehen.  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ist das Potential einer Punktladung der Stärke 1 am Ort  $\mathbf{x} \in V$ , in Gegenwart eines geerdeten Leiters, der  $V$  umschließt. Durch die Punktladung wird auf der Oberfläche des Leiters eine Flächenladungsdichte  $\sigma$  induziert. Nach

dem Satz über die Flächendivergenz springt die Normalkomponente des elektrischen Feldes an der Leiteroberfläche von  $\sigma$  auf 0. Berücksichtigt man, dass die Leiteroberfläche entgegengesetzt zu  $\partial V$  orientiert ist, so folgt

$$\sigma(\mathbf{y}) = \partial_{n,\mathbf{y}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -m_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \quad . \quad (5.20)$$

Die induzierte Flächenladung ist also immer negativ. Die insgesamt induzierte Flächenladungsdichte ist

$$\int_{\partial V} \sigma(\mathbf{y}) dF = -1 \quad (5.21)$$

da das Maß  $m_{\mathbf{x}}$  auf 1 normiert ist ( $\int m_{\mathbf{x}}$  ist eine harmonische Funktion, die auf dem Rand den Wert 1 hat und daher überall gleich 1 ist).

Wir betrachten jetzt die von der Lösung  $\varphi$  (5.12) der Poissongleichung beschriebene Flächenladungsdichte auf dem Rand von  $V$ . Die in einem Punkt  $\mathbf{x} \in \partial V$  induzierte Flächenladungsdichte ist

$$\sigma(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{y}) \partial_{n,\mathbf{x}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^3 \mathbf{y} - \int_{\partial V} \varphi(\mathbf{y}) \partial_{n,\mathbf{x}} \partial_{n,\mathbf{y}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dF(\mathbf{y}) \quad . \quad (5.22)$$

Ist  $V$  beschränkt und verschwindet das Potential auf dem Rand von  $V$ , so ist die insgesamt induzierte Ladung

$$Q = - \int_V \rho d^3 \mathbf{x} \quad . \quad (5.23)$$

Das Komplement des Gebietes  $V$  besteht aus Zusammenhangskomponenten  $V_j$ , die wir uns durch Leiter ausgefüllt denken. Auf jedem Leiter  $V_j$  sei jetzt das Potential  $\varphi_j$  vorgegeben. Dann wird auf  $\partial V_i$  zusätzlich die Ladung

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \varphi_j \quad (5.24)$$

induziert mit den sogenannten Kapazitätskoeffizienten

$$C_{ij} = - \int_{\partial V_i} dF(\mathbf{x}) \int_{\partial V_j} dF(\mathbf{y}) \partial_{n,\mathbf{x}} \partial_{n,\mathbf{y}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad . \quad (5.25)$$

Die Matrix  $C$  ist nach Definition symmetrisch. Weiter besitzt sie die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\sum_j C_{ij} = 0$
- (ii)  $C$  ist positiv semidefinit

*Beweis:* Sei  $\rho = 0$  in  $V$  und  $\varphi_j = 1$  für alle  $j$ . Dann ist das Potential  $\varphi = 1$  in ganz  $V$ , da es als harmonische Funktion Maximum und Minimum auf dem Rand von  $V$  annimmt. Also verschwindet die induzierte Flächenladungsdichte überall. Insbesondere ist die auf dem  $i$ -ten Leiter induzierte Ladung  $Q_i = \sum_j C_{ij} = 0$ . Dass  $C$  positiv semidefinit ist, folgt aus der folgenden Überlegung: Sei wieder  $\rho = 0$  in  $V$ , und sei  $\varphi$

das durch die Vorgabe der Werte  $\varphi_j$  auf  $V_j$  bestimmte Potential. Dann gilt:

$$\sum_{ij} \varphi_i C_{ij} \varphi_j = \sum_i \varphi_i Q_i = \sum_i \int_{\partial V_i} \varphi_i \sigma dF = \int_{\partial V} \varphi \partial_n \varphi dF = \int_V |\text{grad } \varphi|^2 d^3 \mathbf{x} \quad .$$

$C$  ist also positiv semidefinit, und  $\sum \varphi_i C_{ij} \varphi_j = 0$  impliziert  $\varphi_i = \varphi_j$  für alle  $i, j$ .  $\square$ .

Als Beispiel betrachten wir eine Anordnung aus  $n$  konzentrischen Kugelschalen mit Radien  $0 < R_1 < R_2 < \dots < R_n$ , mit Potentialen  $\varphi_i$  und Ladungen  $Q_i$  auf der  $i$ -ten Kugelschale mit  $\sum_{i=1}^n Q_i = 0$ . Das Potential hängt nur vom Radius  $|\mathbf{x}| = r$  ab. Zwischen der  $i$ -ten und der  $i + 1$ -ten Kugelschale gilt für das Potential

$$\varphi(r) = \frac{\sum_{j=1}^i Q_j}{4\pi r} + \varphi_i - \frac{\sum_{j=1}^i Q_j}{4\pi R_i} \quad (5.26)$$

Die Stetigkeit des Potentials an  $i + 1$ -ten Kugelschale führt zu der Gleichung

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = \frac{1}{4\pi} \frac{R_i - R_{i+1}}{R_i R_{i+1}} \sum_{j=1}^i Q_j \quad (5.27)$$

Wir erhalten

$$\sum_{j=1}^i Q_j = 4\pi (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \frac{R_i R_{i+1}}{R_i - R_{i+1}} \quad (5.28)$$

Subtraktion der entsprechenden Gleichung für  $i - 1$  ergibt

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \varphi_j \quad (5.29)$$

mit den Kapazitätskoeffizienten

$$C_{i,i+1} = 4\pi \frac{R_i - R_{i+1}}{R_i R_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (5.30)$$

$$C_{ii} = -C_{i,i+1} - C_{i-1,i} \quad (5.31)$$

und

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad C_{ij} = 0 \text{ falls } |i - j| > 1, \text{ oder } j, i = 0, n+1 \quad (5.32)$$

Lässt man die äußere Kugelschale gegen unendlich gehen ( $R_n \rightarrow \infty$ ), so findet man

$$C_{nn} = 4\pi R_{n-1} \quad (5.33)$$

Wir wollen jetzt die Greensche Funktion  $G_D$  in einigen Spezialfällen berechnen. Eine wichtige Methode dabei ist die Methode der Spiegelladungen. Das einfachste Beispiel ist ein Halbraum, der durch eine Ebene begrenzt wird. Die Greensche Funktion ergibt sich zu

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{1}{|S\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right), \quad (5.34)$$

wobei  $S$  die Spiegelung an der Ebene bezeichnet. Eine Punktladung vor einer leitenden geerdeten Ebene induziert also eine Flächenladungsdichte auf der Ebene, deren elektrisches Feld im Halbraum mit dem einer entgegengesetzt geladenen Punktladung am gespiegelten Ort übereinstimmt. Ist ein Gebiet  $W$  der Durchschnitt mehrerer Halbräume mit der Eigenschaft, dass die Spiegelungen an den jeweiligen Begrenzungsebenen eine endliche Gruppe  $G$  erzeugen (diese Gruppe ist dann notwendig eine Untergruppe der  $O(3)$ ), so macht man für die Greensche Funktion den Ansatz

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{S \in G} \frac{\det(S)}{|S\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad . \quad (5.35)$$

Falls  $W \cap SW = \emptyset$  für  $S \neq 1$  und für jedes  $\mathbf{y} \in \partial W$  ein  $S \in G$  mit  $S\mathbf{y} = \mathbf{y}$  und  $\det(S) = -1$  existiert, so erfüllt der angegebene Ausdruck die Bedingungen für  $G_D$ .

Ein etwas komplizierteres Problem, das sich mit der Methode der Spiegelladungen lösen lässt, ist das Problem einer leitenden Kugel. Sei  $V$  der Außenraum einer Kugel mit Radius  $R$  um den Ursprung. Für die Greensche Funktion machen wir den Ansatz

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{q}{|S\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \quad (5.36)$$

mit  $|S\mathbf{x}| < R$  für  $|\mathbf{x}| > R$ . Die Randbedingung für  $G_D$  ist äquivalent zu

$$|S\mathbf{x} - \mathbf{y}| = q|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad , \quad |\mathbf{y}| = R \quad . \quad (5.37)$$

Aus Symmetriegründen ist  $S\mathbf{x}$  parallel zu  $\mathbf{x}$ . Für  $\mathbf{y}$  parallel zu  $\mathbf{x}$  folgen die Beziehungen

$$R \pm |S\mathbf{x}| = q(|\mathbf{x}| \pm R) \quad .$$

Addition ergibt mit  $r = |\mathbf{x}|$

$$q = \frac{R}{r} \quad (5.38)$$

und damit

$$S\mathbf{x} = q^2\mathbf{x} \quad . \quad (5.39)$$

Mit diesen Werten ist die obige Bedingung für die Greensche Funktion erfüllt. Denn das Quadrat der linken Seite ist

$$q^4 r^2 - 2q^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + R^2 \quad ,$$

das der rechten Seite

$$q^2 r^2 - 2q^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + q^2 R^2 \quad .$$

Beide Seiten stimmen überein, wenn der Wert für  $q$  eingesetzt wird. Wir erhalten also als Greensche Funktion der Kugel

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{q}{|q^2\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \quad , \quad q = \frac{R}{r} \quad . \quad (5.40)$$

Für die auf der Kugeloberfläche durch eine Einheitsladung im Punkt  $\mathbf{x}$  influenzierte Flächenladung ergibt sich ( $|\mathbf{y}| = R$ )

$$\sigma(\mathbf{y}) = \left(-\frac{\mathbf{y}}{R}\right) \cdot \text{grad}_{\mathbf{y}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (5.41)$$

mit

$$\text{grad}_{\mathbf{y}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} - q \frac{q^2 \mathbf{x} - \mathbf{y}}{|q^2 \mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \right) .$$

Wegen  $|q^2 \mathbf{x} - \mathbf{y}| = q|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  vereinfacht sich die rechte Seite zu

$$\frac{1}{4\pi} (q^{-2} - 1) \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} .$$

Mit  $\cos \gamma = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}$  erhält man

$$\sigma(\mathbf{y}) = -\frac{r^2 - R^2}{4\pi R (r^2 - 2rR \cos \gamma + R^2)^{\frac{3}{2}}} . \quad (5.42)$$

Die insgesamt influenzierte Ladung ist

$$\begin{aligned} \int \sigma dF &= -\frac{r^2 - R^2}{4\pi R} 2\pi R^2 \int_{-1}^1 \frac{dw}{(r^2 - 2rRw + R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2} (r^2 - R^2) R \frac{1}{rR} (r^2 - 2rRw + R^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{2r} (r^2 - R^2) \left( \frac{1}{r - R} - \frac{1}{r + R} \right) \\ &= -\frac{1}{2r} (r + R - (r - R)) = -\frac{R}{r} = -q , \end{aligned}$$

stimmt also mit der Spiegelladung überein.

Bei der Berechnung der Kapazitätskoeffizienten ist zu beachten, dass der Rand von  $V$  aus dem Rand der Kugel  $V_1$  und aus dem Rand bei  $\infty$  besteht. Es gilt

$$\begin{aligned} C_{11} &= - \int_{\partial V_1} dF(\mathbf{x}) \int_{\partial V_1} dF(\mathbf{y}) \partial_{n,\mathbf{x}} \partial_{n,\mathbf{y}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= - \int_{|\mathbf{x}|=R} dF(\mathbf{x}) \partial_n \left( \frac{R}{|\mathbf{x}|} \right) = 4\pi R^2 \frac{1}{R} = 4\pi R . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Wir wollen jetzt die Greensche Funktion der Kugel zur Lösung einiger elektrostatischer Probleme benutzen.

(i) Punktladung ( $e, \mathbf{x}$ ) vor geerdeter Kugel:

$$\varphi(\mathbf{y}) = e G_D(\mathbf{y}, \mathbf{x}) . \quad (5.44)$$

(ii) Punktladung ( $e, \mathbf{x}$ ) vor Kugel auf konstantem Potential  $\varphi_1$ :

$$\varphi(\mathbf{y}) = e G_D(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \varphi_1 \int dF(\mathbf{z}) \partial_{n,\mathbf{z}} G_D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = e G_D(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \varphi_1 \frac{R}{|\mathbf{y}|} \quad (5.45)$$

Die influenzierte Ladung ist

$$Q = -e \frac{R}{|\mathbf{x}|} + C_{11} \varphi_1 = -e \frac{R}{|\mathbf{x}|} + \varphi_1 4\pi R \quad . \quad (5.46)$$

- (iii) Punktladung  $(e, \mathbf{x})$  vor leitender isolierter Kugel mit Ladung  $Q$ :

Das Potential auf der Kugel ist

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{Q}{R} + \frac{e}{|\mathbf{x}|} \right) \quad . \quad (5.47)$$

Daraus ergibt sich  $\varphi$  wie oben. Ist insbesondere  $Q = 0$ , so ist  $(q = \frac{R}{|\mathbf{x}|})$

$$\varphi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} e \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - q \left( \frac{1}{|q^2 \mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{1}{|\mathbf{y}|} \right) \right) \quad ; \quad (5.48)$$

für große Werte von  $|\mathbf{x}|$  verhält sich die Ladungsverteilung auf der Kugel also wie ein im Zentrum der Kugel befindlicher Dipol mit dem Dipolmoment  $\mathbf{p} = -eq^3 \mathbf{x} = -4\pi R^3 \mathbf{E}$ , wobei  $\mathbf{E}$  das von der Punktladung am Ort  $\mathbf{x}$  im Zentrum der Kugel erzeugte Feld ist.

- (iv) Leitende Kugel (isoliert, ungeladen) im homogenen Feld:  
Wir approximieren das homogene elektrische Feld  $\mathbf{E}$  durch das Feld einer weit entfernten Punktladung und erhalten wie im vorherigen Beispiel ein induziertes Dipolfeld.

## 6. Elektrostatische Energie

Die potentielle Energie eines Systems von Punktladungen  $(e_i, \mathbf{x}_i)$  ist

$$U = \frac{1}{8\pi} \sum_{i \neq j} \frac{e_i e_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad . \quad (6.1)$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen ergibt sich

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{y} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad . \quad (6.2)$$

Nach der Definition des elektrostatischen Potentials einer Ladungsverteilung  $\rho$  findet man

$$U = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \quad . \quad (6.3)$$

Nach der Poissongleichung ist  $\rho(\mathbf{x}) = -\Delta \varphi(\mathbf{x})$ . Setzt man dies in die obige Gleichung ein und benutzt die 1. Greensche Identität, so folgt

$$U = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 \quad (6.4)$$

mit dem elektrischen Feld  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ .  $U$  wird jetzt interpretiert als die Energie des elektrostatischen Feldes  $\mathbf{E}$ ,  $u = \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2$  als Energiedichte.

Insbesondere ist  $U \geq 0$ . Die Formel bleibt richtig für Flächenladungen, für Punktladungen aber divergiert die sogenannte Selbstenergie. Man muss dann die Energie „renormieren“, indem man die unendlichen Selbstenergien subtrahiert. Die Energie des elektrischen Feldes einer Punktladung  $(e, \mathbf{x})$  im Außenraum einer Kugel mit Radius  $R$  um den Ort der Ladung ist

$$U_R = \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|>R} d^3\mathbf{y} |\mathbf{E}|^2 = \frac{e^2}{8\pi R} \quad . \quad (6.5)$$

Sind Punktladungen  $(e_i, \mathbf{x}_i)$  vorhanden, so ist die renormierte Energie des Feldes

$$U_{\text{ren}} = \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|>R} d^3\mathbf{x} |\mathbf{E}|^2 - \frac{1}{8\pi R} \sum_i e_i^2 \right\} \quad . \quad (6.6)$$

Die renormierte Energie ist nicht mehr notwendig positiv. Divergenzen bei kurzen Abständen und ihre Beseitigung durch Renormierung sind nicht auf die klassische Elektrodynamik beschränkt, sondern treten auch in der Quantenelektrodynamik auf.

Die Positivität der elektrostatischen Energie in Abwesenheit von Punktladungen führt zu einer Charakterisierung von elektrostatischen Feldern als Feldkonfigurationen mit minimaler Energie.

**Satz:** Sei  $\varphi$  eine Lösung der Laplacegleichung in  $V$  und sei  $\psi$  eine andere (genügend glatte) Funktion, die auf  $\partial V$  mit  $\varphi$  übereinstimmt. Dann gilt

$$\int_V d^3\mathbf{x} |\text{grad } \psi|^2 > \int_V d^3\mathbf{x} |\text{grad } \varphi|^2 \quad . \quad (6.7)$$

*Beweis:* Sei  $\chi = \psi - \varphi$ . Es gilt

$$\int_V d^3\mathbf{x} |\text{grad } \psi|^2 = \int_V d^3\mathbf{x} |\text{grad } \varphi|^2 + 2 \int_V d^3\mathbf{x} \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \chi + \int_V d^3\mathbf{x} |\text{grad } \chi|^2 \quad . \quad (6.8)$$

Anwendung der 1. Greenschen Identität auf den gemischten Term ergibt

$$\int_V d^3\mathbf{x} \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \chi = \int_{\partial V} dF(\mathbf{x}) (\partial_n \varphi) \chi - \int_V d^3\mathbf{x} (\Delta \varphi) \chi = 0 \quad . \quad (6.9)$$

Daraus folgt die Behauptung.

Dieser Satz ermöglicht es, obere Schranken für die Matrix der Kapazitätskoeffizienten zu finden. Denn die Feldenergie ist gerade durch  $\frac{1}{2} \sum_{ij} \varphi_i C_{ij} \varphi_j$  gegeben, wenn  $\varphi_i$  das Potential auf dem  $i$ -ten Leiter ist. Wir wählen Funktionen  $\psi_i$ , die auf dem  $i$ -ten Leiter den Wert 1 und auf allen anderen den Wert 0 annehmen. Dann ist  $\psi = \sum_i \varphi_i \psi_i$  eine

Funktion, die auf dem Rand des Gebietes mit  $\varphi$  übereinstimmt. Also gilt

$$\sum_{ij} \varphi_i C_{ij} \varphi_j \leq \sum_{ij} \varphi_i \tilde{C}_{ij} \varphi_j \quad (6.10)$$

mit  $\tilde{C}_{ij} = \int_V d^3\mathbf{x} \operatorname{grad} \psi_i \cdot \operatorname{grad} \psi_j$ . Die Matrix  $\tilde{C}$  ist also eine obere Schranke für die Matrix  $C$ .

Eine ähnliche Aussage macht der Satz von Thomson. Nach diesem Satz verteilen sich die Ladungen in einem Leiter gerade so, dass die elektrostatische Energie minimal wird. Sei  $\mathbf{E}$  das elektrostatische Feld einer Anordnung von Leitern mit vorgegebenen Ladungen, und sei  $\mathbf{E}'$  ein anderes innerhalb von  $V$  divergenzfreies Feld mit denselben Flüssen durch die Leiteroberflächen,

$$\int_{\partial V_i} \mathbf{E}' \cdot d^2\mathbf{x} = \int_{\partial V_i} \mathbf{E} \cdot d^2\mathbf{x} \quad \forall i \quad . \quad (6.11)$$

Dann gilt

$$\int_V d^3\mathbf{x} |\mathbf{E}'|^2 > \int_V d^3\mathbf{x} |\mathbf{E}|^2 \quad . \quad (6.12)$$

Dies folgt ähnlich wie oben aus dem Verschwinden des Terms

$$\int_V d^3\mathbf{x} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) = \sum_i \int_{\partial V_i} \varphi (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) \cdot dF - \int_V d^3\mathbf{x} \varphi \operatorname{div} (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) \quad . \quad (6.13)$$

Insbesondere sinkt die Feldenergie, wenn ein ungeladener Leiter in das System eingeführt wird. Ein ungeladener Leiter wird also von einem geladenen Leiter angezogen.



## KAPITEL IV

### Magnetostatik

#### 1. Stationäre Ströme

Magnetische Erscheinungen sind mindestens ebenso lange bekannt wie elektrische. Ihre mathematische Beschreibung aber erwies sich lange Zeit als schwierig. Der Grund ist die Abwesenheit magnetischer Ladungen.

Grundlegend für das Verständnis der Magnetostatik war die Beobachtung Oersteds (1819), dass ein stromdurchflossener Draht ein Magnetfeld erzeugt. Wir gehen daher von der Elektrostatik, in der alle Ladungen ruhen, zu der Situation über, in der sich Ladungen bewegen.

Die Bewegung von Ladungen beschreibt man durch die elektrische Stromdichte  $\mathbf{j}$ .  $\mathbf{j}$  ist ein Vektorfeld, das angibt, wieviele Ladungen pro Zeiteinheit durch ein Flächenelement hindurchtreten,

$$dQ = \mathbf{j} \cdot d^2\mathbf{x} dt \quad . \quad (1.1)$$

Betrachtet man ein Gebiet  $V$ , so ist

$$\int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d^2\mathbf{x} = -\frac{d}{dt}Q(V) \quad , \quad (1.2)$$

wenn  $Q(V)$  die in  $V$  enthaltene Ladung ist. Diese Beziehung drückt die Ladungserhaltung aus. Mit Hilfe der Ladungsdichte schreibt man

$$\int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d^2\mathbf{x} + \int_V d^3\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) = 0 \quad . \quad (1.3)$$

Daraus erhält man mittels des Gaußschen Satzes die sogenannte Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \quad . \quad (1.4)$$

Man nennt einen Strom stationär, wenn  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  zeitunabhängig sind. Dann gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad , \quad (1.5)$$

oder für ein Gebiet  $V$

$$\int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d^2\mathbf{x} = 0 \quad , \quad (1.6)$$

d.h., es fließen genauso viele Ladungen hinein wie hinaus.

Der elektrische Strom, der durch eine Fläche  $S$  hindurchtritt, ist definiert als

$$I(S) = \int_S \mathbf{j} \cdot d^2\mathbf{x} = \int_S dF(\mathbf{x}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \quad , \quad (1.7)$$

wobei  $\mathbf{n}$  das Normalenfeld auf  $S$  bezeichnet. Wir werden oft linienförmige Stromverteilungen betrachten. Dort fließt der Strom  $I$  in geschlossenen Wegen  $\gamma$ . Die Stromdichte ist dann

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = I \int_0^1 ds \frac{d\mathbf{y}}{ds} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}(s)) \quad , \quad (1.8)$$

für eine Parametrisierung  $[0, 1] \ni s \rightarrow \mathbf{y}(s)$  von  $\gamma$ .

## 2. Kräfte zwischen Strömen

Zwei stromdurchflossene Leiter üben Kräfte aufeinander aus. Diese Kräfte werden durch das Ampèresche Gesetz beschrieben. Seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zwei Leiterschleifen, in denen die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  fließen. Dann wirkt auf die erste Schleife die Kraft

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -k' I_1 I_2 \int_{\gamma_1 \times \gamma_2} (d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2) \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \\ &= -k' I_1 I_2 \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \left( \frac{d\mathbf{x}_1}{ds_1} \cdot \frac{d\mathbf{x}_2}{ds_2} \right) \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \quad , \quad (2.1) \end{aligned}$$

mit Parametrisierungen  $[0, 1] \ni s_i \rightarrow \mathbf{x}_i(s_i)$  von  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ .  $k' > 0$  ist hierbei eine Konstante. Das Verhältnis  $k/k'$  der Konstanten, die in Coulombgesetz und Ampèregesetz auftreten, hat die Dimension einer Geschwindigkeit zum Quadrat. Messungen ergeben, dass  $\sqrt{\frac{k}{k'}}$  mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  übereinstimmt. Im SI-System definiert man als die Einheit des Stroms das Ampère A, indem man setzt

$$k' = 10^{-7} \frac{N}{A^2} \quad . \quad (2.2)$$

Mit  $\mu_0 = 4\pi k'$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$  erhält man dann

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad , \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} \quad , \quad k' = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad . \quad (2.3)$$

Im Einklang mit unseren Konventionen aus der Elektrostatik setzen wir  $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = 1$ .

Das Auftreten einer Naturkonstanten mit der Dimension einer Geschwindigkeit in einem statischen Problem lässt zwei Deutungen zu:

- Die Gesetze der Elektrodynamik sind nicht in allen Inertialsystemen gleich.
- Die Vorstellungen der klassischen Mechanik über die Struktur von Raum und Zeit müssen revidiert werden.

Nachdem die erste Alternative durch Experimente ausgeschlossen war, blieb nur die zweite Möglichkeit offen, die dann durch die spezielle Relativitätstheorie Einsteins ausgefüllt wurde.

### 3. Magnetfeld(magnetische Induktion)

Ebenso wie in der Elektrostatik möchte man das Fernwirkungsgesetz durch ein Nahwirkungsgesetz ersetzen. Als Ansatz führt man ein Tensorfeld  $\mathcal{B}_{ij}$  ein, das mit der auf einen Teststromkreis wirkenden Kraft über die Gleichung

$$F_j = I \sum_i \int_{\gamma} dx_i \mathcal{B}_{ij}(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

zusammenhängt. Da in der Magnetostatik nur geschlossene Stromkreise betrachtet werden, ist das Tensorfeld  $\mathcal{B}_{ij}$  durch diese Gleichung nur bis auf einen Term der Form  $\frac{\partial}{\partial x_i} f_j$  bestimmt. Eine zusätzliche Information liefert das auf den Stromkreis ausgeübte Drehmoment. Wir setzen an

$$N_k = I \sum_{ijl} \int_{\gamma} x_i dx_j \mathcal{B}_{jl} \varepsilon_{ilk} \quad (3.2)$$

mit dem total antisymmetrischem Tensor  $\varepsilon_{ilk}$ . Wir betrachten diese Gleichung für einen sehr kleinen Stromkreis  $\gamma$ , so dass  $\mathcal{B}_{jl}$  bei der Integration über  $\gamma$  als konstant angesehen werden kann. Sei  $m_{ij} = I \int_{\gamma} x_i dx_j$ .  $m_{ij}/I$  ist der von der Projektion von  $\gamma$  auf die (ij)-Ebene eingeschlossene orientierte Flächeninhalt. Es gilt daher  $m_{ij} = -m_{ji}$ , und wir setzen

$$m_k = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} m_{ij} \quad . \quad (3.3)$$

Man nennt den Vektor  $\mathbf{m}$  das magnetische Moment des Stromkreises  $(I, \gamma)$ . Einsetzen in (3.2) liefert (mit  $m_{ij} = \sum_k \varepsilon_{ijk} m_k$ )

$$\begin{aligned} N_k &= \sum_{ijln} \varepsilon_{ijl} m_l \mathcal{B}_{jn} \varepsilon_{ink} \\ &= \sum_{jln} (\delta_{jn} \delta_{lk} - \delta_{jk} \delta_{ln}) m_l \mathcal{B}_{jn} \\ &= \sum_j (m_k \mathcal{B}_{jj} - m_j \mathcal{B}_{kj}) \quad . \end{aligned}$$

Messung des Drehmoments auf magnetische Momente ergibt die Koeffizienten  $\mathcal{C}_{ij} = \delta_{ij} \sum_k \mathcal{B}_{kk} - \mathcal{B}_{ij}$ , aus denen  $\mathcal{B}$  durch

$$\mathcal{B}_{ij} = -\mathcal{C}_{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k \mathcal{C}_{kk} \quad (3.4)$$

die Komponenten von  $\mathcal{B}$  bestimmt werden.

Man findet

$$\mathcal{B}_{ij} = \frac{I'}{4\pi} \int_{\gamma'} \left( dy_i \frac{x_j - y_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} - dy_j \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \right) \quad . \quad (3.5)$$

Der 2. Term ist von der Form  $\frac{\partial}{\partial x_i} f_j$  und trägt daher nicht zur Kraft auf den Stromkreis  $(I, \gamma)$  bei. Das Tensorfeld  $\mathcal{B}$  ist antisymmetrisch, hat

also nur 3 unabhängige Komponenten. Wir führen jetzt das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  (auch magnetische Induktion genannt) ein durch

$$B_k = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} \mathcal{B}_{ij} \quad . \quad (3.6)$$

Wir erhalten

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (3.7)$$

mit

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} I' \int_{\gamma'} d\mathbf{y} \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \quad . \quad (3.8)$$

(Biot-Savartsches Gesetz). Der Zusammenhang mit dem Ampèreschen Gesetz ist

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= I \int_{\gamma} d\mathbf{x} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} II' \int_{\gamma \times \gamma'} d\mathbf{x} \times (d\mathbf{y} \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} II' \int_{\gamma \times \gamma'} (d\mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}) d\mathbf{y} - \frac{1}{4\pi} II' \int_{\gamma \times \gamma'} (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \quad , \quad (3.9) \end{aligned}$$

wobei der erste Term als Integral eines Gradienten über einen geschlossenen Weg verschwindet.

Wie in der Elektrostatik gilt auch in der Magnetostatik das Superpositionsprinzip, dass Felder verschiedener Stromkreise sich ungestört überlagern. Wir beschreiben nun eine allgemeine stationäre Stromverteilung durch eine Stromdichte  $\mathbf{j}$  mit  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ . Das erzeugte magnetische Feld ist

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \quad . \quad (3.10)$$

Unter Benutzung von  $\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} = -\text{grad}_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$  und von  $\mathbf{a} \times \text{grad } f = -\text{rot } \mathbf{a}f$  für konstantes  $\mathbf{a}$ , können wir auch schreiben

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (3.11)$$

mit

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad . \quad (3.12)$$

Ein Vektorfeld  $\mathbf{A}$  mit der Eigenschaft  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$  heißt ein zu  $\mathbf{B}$  gehörendes Vektorpotential. Wegen  $\text{div rot} = 0$  folgt

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (3.13)$$

oder in integraler Form

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d^2\mathbf{x} = 0 \quad (3.14)$$

Diese Gleichung besagt, dass es keine magnetischen Ladungen gibt. Sie entspricht der Gleichung  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  in der Elektrostatik.

Als nächstes berechnen wir  $\text{rot } \mathbf{B}$ . Wir nutzen dabei aus, dass sich der Laplaceoperator auf Vektorfeldern in der Form

$$\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot} \quad (3.15)$$

schreiben lässt. Setzen wir  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  mit dem oben angegebenen Vektorpotential  $\mathbf{A}$ , so gilt wegen

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = -\frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \cdot \text{grad}_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{y}) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

die Gleichung

$$\text{rot } \mathbf{B} = \text{rot } \text{rot } \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} = \mathbf{j} \quad . \quad (3.17)$$

Diese Gleichung heißt Ampèresches Durchflutungsgesetz und stellt in Analogie zum Gaußschen Gesetz den Zusammenhang zwischen Strom und Magnetfeld her. Die integrale Form lautet

$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = I(S) \quad . \quad (3.18)$$

#### 4. Vektorpotential und Eichtransformationen

Die beiden Gleichungen

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j} \quad (4.1)$$

sind die Grundgleichungen der Magnetostatik. Wie in der Elektrostatik wollen wir alle Lösungen dieses Gleichungssystems als physikalisch erlaubte Magnetfelder ansehen.

In zusammenziehbaren Gebieten ist die erste Gleichung äquivalent zur Existenz eines Vektorpotentials  $\mathbf{A}$  mit  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$  (Poincarésches Lemma). Das Vektorpotential lässt sich in der folgenden Weise konstruieren:

Wir definieren zunächst das Linien-Integral von  $\mathbf{A}$  über eine beliebige Kurve  $\gamma$ . Für Randkurven einer orientierten Fläche muss wegen des Stokeschen Satzes gelten

$$\int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{B} \cdot d^2\mathbf{x} \quad .$$

Wir ordnen jetzt jeder Kurve  $\gamma$  mit Parametrisierung  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , eine Fläche  $S_\gamma$  mit Parametrisierung  $\mathbf{x}(s, t) = s\mathbf{x}(t)$ ,  $(s, t) \in [0, 1]^2$  zu und definieren

$$\int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \int_{S_\gamma} \mathbf{B} \cdot d^2\mathbf{x} \quad .$$

Die Tangentenvektoren an  $S_\gamma$  sind

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \mathbf{x}(t) \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = s\dot{\mathbf{x}}(t) \quad .$$

Es folgt

$$\int_0^1 dt \mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \int_0^1 ds \int_0^1 dt \mathbf{B}(s\mathbf{x}(t)) \cdot (\mathbf{x}(t) \times s\dot{\mathbf{x}}(t)) \quad .$$

Wir wenden die zyklische Vertauschungsregel für das Spatprodukt an und erhalten nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge für die rechte Seite

$$\int_0^1 dt \left( \int_0^1 ds s \mathbf{B}(s\mathbf{x}(t)) \times \mathbf{x}(t) \right) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) .$$

Da die Gleichung für alle Wege  $\gamma$  gelten soll, folgt

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_0^1 ds s \mathbf{B}(s\mathbf{x}) \times \mathbf{x} .$$

Wir überzeugen uns davon, dass  $\mathbf{A}$  die gewünschte Bedingung erfüllt. Dazu betrachten wir eine geschlossene Kurve  $\gamma$ . Die zugehörige wie oben konstruierte Fläche  $S_\gamma$  besitzt  $\gamma$  als Randkurve  $\partial S_\gamma$ , in Übereinstimmung mit der Bedingung an  $\mathbf{A}$ . Sei nun  $S_1$  eine andere Fläche, die ebenfalls  $\gamma$  als Randkurve besitzt. Dann bilden  $S_\gamma$  und  $S_1$  zusammen den Rand eines Gebietes  $G$ , wobei das eine Flächenstück nach außen und das andere nach innen orientiert ist. Also gilt

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d^2\mathbf{x} = \int_{S_\gamma} \mathbf{B} \cdot d^2\mathbf{x} = \int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} ,$$

d.h. nach dem Stokeschen Satz ist

$$\int_{S_1} (\mathbf{B} - \text{rot } \mathbf{A}) \cdot d^2\mathbf{x} = 0$$

für beliebige Flächen  $S_1$ , also löst  $\mathbf{A}$  das gestellte Problem.

Als Beispiel betrachten wir ein konstantes Magnetfeld  $\mathbf{B} = \text{const.}$  Dann gilt

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_0^1 ds s \mathbf{B} \times \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{x} .$$

Diese Form des Vektorpotentials tritt z.B. bei der Behandlung des Einflusses eines konstanten magnetischen Feldes auf die Atomspektren auf (Zeeman-Effekt).

Das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  ist durch  $\mathbf{B}$  nicht eindeutig bestimmt. Sind  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_2$  zwei Lösungen der Gleichung  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , so gilt

$$\text{rot } (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) = 0 \quad , \quad (4.2)$$

d.h. es gibt eine skalare Funktion  $\Lambda$  mit  $\text{grad } \Lambda = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$ . Die Transformation  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \text{grad } \Lambda$  ändert das Magnetfeld nicht und wird Eichtransformation genannt.

Wir setzen jetzt  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  in das Ampèresche Durchflutungsgesetz ein und erhalten

$$\text{rot } \text{rot } \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} + \text{grad } \text{div } \mathbf{A} = \mathbf{j} \quad . \quad (4.3)$$

Wir nutzen die Eichfreiheit bei der Wahl von  $\mathbf{A}$  aus, um  $\text{div } \mathbf{A}$  beliebig vorzugeben. Sei  $\mathbf{A}'$  ein Vektorfeld mit  $\text{rot } \mathbf{A}' = \mathbf{B}$ . Wir suchen eine

Funktion  $\Lambda$ , so dass das eichtransformierte Vektorpotential  $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \text{grad } \Lambda$  die Bedingung

$$\text{div } \mathbf{A} = f \quad (4.4)$$

erfüllt.  $\Lambda$  erhält man dann als Lösung der Poissongleichung

$$\Delta \Lambda = f - \text{div } \mathbf{A}' \quad (4.5)$$

Wählt man  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  (Coulombbeziehung), so erfüllt  $\mathbf{A}$  in jeder Komponente die Poissongleichung

$$\Delta \mathbf{A} = -\mathbf{j} \quad , \quad (4.6)$$

und als Lösung, die (bei Stromverteilungen mit kompaktem Träger) im Unendlichen verschwindet, erhält man

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad , \quad (4.7)$$

also die bereits angegebene Form des Vektorpotentials.

### 5. Das Vektorpotential einer lokalisierten Stromverteilung

Sei  $\mathbf{j}$  eine gegebene Stromverteilung, die ganz in dem Gebiet  $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < R\}$  lokalisiert ist. Wir interessieren uns für das Verhalten des magnetischen Feldes bei großen Abständen. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Tatsache, dass wegen  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  die Integrale über Funktionen der Form  $\text{grad } f(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{y})$  verschwinden. Denn nach der Produktregel gilt  $\text{grad } f(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{y}) = \text{div } (f(\mathbf{y})\mathbf{j}(\mathbf{y}))$  falls  $\text{div } \mathbf{j}(\mathbf{y}) = 0$ , und das Integral über die Divergenz einer im Unendlichen schnell genug abfallenden Funktion verschwindet aufgrund des Gaußschen Satzes. Setzen wir  $f(\mathbf{y}) = y_k$ , so erhalten wir  $\text{div } y_k \mathbf{j}(\mathbf{y}) = j_k(\mathbf{y})$ , also verschwinden die Integrale über die Komponenten der Stromdichte. Setzen wir  $f(\mathbf{y}) = y_i y_k$ , so erhalten wir  $\text{div } y_i y_k \mathbf{j}(\mathbf{y}) = y_k j_i(\mathbf{y}) + y_i j_k(\mathbf{y})$ . Hieraus folgt, dass die ersten Momente der Stromverteilung

$$m_{ik} = \int d^3\mathbf{y} y_i j_k(\mathbf{y}) \quad (5.1)$$

antisymmetrisch unter Vertauschung der Indizes sind,  $m_{ik} = -m_{ki}$ . Wir können daher diese Momente zu einem Vektor  $\mathbf{m}$  mit den Komponenten  $m_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} m_{ij}$  zusammenfassen:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{y} \times \mathbf{j}(\mathbf{y}) \quad (5.2)$$

nennt man das magnetische Moment der Stromverteilung.

Diese Definition fällt im Falle eines linienförmigen Stroms mit der vorher gegebenen Definition zusammen. Denn sei  $\mathbf{j}(\mathbf{x}) = I \int_{\gamma} d\mathbf{y} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . Dann ist

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \times \left( \int d\mathbf{y} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) = \frac{I}{2} \int \mathbf{y} \times d\mathbf{y} \quad . \quad (5.3)$$

Sei nun

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (5.4)$$

Wir sehen, dass  $\mathbf{A}$  mindestens wie  $|\mathbf{x}|^{-1}$  im Unendlichen abfällt. Tatsächlich fällt  $\mathbf{A}$  noch schneller ab. Denn es gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\mathbf{x}| \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}(\mathbf{y}) = 0. \quad (5.5)$$

Wir wollen jetzt den Anteil von  $\mathbf{A}$  ermitteln, der sich wie  $|\mathbf{x}|^{-2}$  verhält. Dieser Anteil kann richtungsabhängig sein; wir setzen daher  $\mathbf{x} = r\mathbf{n}$  mit einem Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  und halten  $\mathbf{n}$  im Limes  $r \rightarrow \infty$  fest.

Es gilt (unter Berücksichtigung von  $\int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}(\mathbf{y}) = 0$ )

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \mathbf{A}(r\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{r}{|r\mathbf{n} - \mathbf{y}|} - 1 \right) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot \mathbf{n}. \quad (5.6)$$

Wir haben dabei ausgenutzt, dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{r}{|r\mathbf{n} - \mathbf{y}|} - 1 \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \left( |\mathbf{n} - u\mathbf{y}|^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) = \frac{d}{du} |\mathbf{n} - u\mathbf{y}|^{-\frac{1}{2}} \Big|_{u=0} = \frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot \mathbf{n} \quad (5.7)$$

ist.

Wir sehen, dass das Langabstandsverhalten von  $\mathbf{A}$  durch die ersten Momente  $m_{ik} := \int d^3\mathbf{y} y_i j_k(\mathbf{y})$  der Stromverteilung bestimmt ist. Mit Hilfe des magnetischen Moments lässt sich das asymptotische  $\mathbf{A}$ -Feld in der Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{4\pi |\mathbf{x}|^3}, \quad (5.8)$$

schreiben. Das zugehörige Magnetfeld ergibt sich zu

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left( \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right) \quad (5.9)$$

$$= \frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}) \mathbf{m} - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (5.10)$$

$$= \mathbf{m} \delta^3(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \text{grad} (\mathbf{m} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{x}|}) \quad (5.11)$$

Es unterscheidet sich also von dem entsprechenden elektrischen Feld eines elektrischen Dipols durch ein Vielfaches der Deltafunktion.  $\mathbf{B}$  ist der für große Abstände führende Anteil des magnetischen Feldes der Stromverteilung  $\mathbf{j}$ . Wir können auch eine Stromverteilung angeben, für die  $\mathbf{B}$  das exakte Magnetfeld ist, nämlich  $\mathbf{j}_\infty(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{m} \delta^3(\mathbf{x})$ . Diese Stromverteilung lässt sich als Grenzfall der skalierten Stromverteilungen  $\mathbf{j}_\lambda(\mathbf{y}) = \lambda^4 \mathbf{j}(\lambda\mathbf{y})$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  verstehen, d.h. für jedes Testvektorfeld

$\mathbf{f}$  gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}_\lambda(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{m} \cdot \text{rot } \mathbf{f}(0) \quad . \quad (5.12)$$

### 6. Dipol im äußeren magnetostatischen Feld

Auf einen magnetischen Dipol  $\mathbf{m}$  am Ort  $\mathbf{x}$  wirkt im magnetischen Feld  $\mathbf{B}$  eine Kraft und ein Drehmoment. Dem Dipol entspricht die Stromverteilung

$$\mathbf{j}(\mathbf{y}) = \text{rot }_{\mathbf{y}} \mathbf{m} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad . \quad (6.1)$$

Die auf den Dipol wirkende Kraft ist

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \times \mathbf{B}(\mathbf{y}) \\ &= \int d^3\mathbf{y} (\nabla_{\mathbf{y}} \times \mathbf{m} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \times \mathbf{B}(\mathbf{y}) \\ &= \int d^3\mathbf{y} (\mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \mathbf{m} - (\mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{m}) \nabla_{\mathbf{y}} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ &= (-\mathbf{m} \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \text{grad } (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}))) \\ &= \text{grad } (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})) \quad . \end{aligned} \quad (6.2)$$

Diese Kraft ist konservativ, das zugehörige Potential ist

$$V(\mathbf{x}) = (-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})) \quad . \quad (6.3)$$

Wie wir später sehen werden, ist dieses Potential auf Grund des Induktionsgesetzes nicht die Gesamtenergie des magnetischen Feldes. Für atomare Systeme, in denen sich das magnetische Moment nicht stetig ändern kann, beschreibt es aber die richtige Wechselwirkungsenergie zweier Dipole

$$V = -\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 \delta^3(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{m}_1 \cdot \nabla) (\mathbf{m}_2 \cdot \nabla) \frac{1}{|\mathbf{x}|} \quad , \quad (6.4)$$

wenn  $\mathbf{x}$  der Verbindungsvektor der beiden Dipole ist. Bis auf den Delta-funktionsanteil stimmt dieser Ausdruck mit dem entsprechenden Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie zweier elektrischer Dipole überein. In der Atomphysik wird der Deltafunktionsanteil z.B. in der Hyperfeinstruktur der s-Niveaus sichtbar (Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten von Kern und Elektron). Hierbei kommt es auf den rotationsinvarianten Anteil der Wechselwirkungsenergie an. Der rotationsinvariante Anteil von  $\partial_i \partial_j$  ist  $\frac{1}{3} \delta_{ij} \Delta$ , also ergibt sich für den rotationsinvarianten Anteil von  $V$

$$\bar{V} = -\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 \delta(\mathbf{x}) \frac{2}{3} \quad . \quad (6.5)$$

Beobachtet wird dieser Effekt in der astrophysikalischen 21cm-Linie.

Das auf eine Stromverteilung  $\mathbf{j}$  im Magnetfeld  $\mathbf{B}$  wirkende Drehmoment bezüglich des Ursprungs ist

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \int d^3\mathbf{y}(\mathbf{y} \times (\mathbf{j}(\mathbf{y}) \times \mathbf{B}(\mathbf{y}))) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{y} \{ \mathbf{y} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) - \mathbf{j} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{B}) \} \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{y} \{ \mathbf{y} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \mathbf{j} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{B}) \} \quad .\end{aligned}$$

Der erste Term ergibt nach der Jakobiidentität

$$\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{y}(\mathbf{y} \times \mathbf{j}(\mathbf{y})) \times \mathbf{B}(\mathbf{y}) \quad . \quad (6.6)$$

Im Limes punktförmiger Stromverteilungen wird dieser Term zu

$$\mathbf{m} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad , \quad (6.7)$$

also dem Ausdruck, den wir bei der Einführung des magnetischen Feldes bereits benutzt haben. Die  $i$ -Komponente des zweiten Terms ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum_{klmn} \int d^3\mathbf{y} (y_n j_k + y_k j_n) B_l \varepsilon_{klm} \varepsilon_{nmi} &= \frac{1}{2} \sum_{klmn} \int d^3\mathbf{y} \operatorname{div} (y_n y_k \mathbf{j}) B_l \varepsilon_{klm} \varepsilon_{nmi} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{klmn} \int d^3\mathbf{y} y_n y_k \mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} B_l \varepsilon_{klm} \varepsilon_{nmi} \quad (6.8)\end{aligned}$$

Im Limes punktförmiger Stromverteilungen am Ursprung verschwindet dieser Term. Sitzt das magnetische Moment am Punkt  $\mathbf{x}$ , so ergibt sich als Beitrag zum Drehmoment  $\mathbf{N} = \mathbf{x} \times \operatorname{grad}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}))$ .

## 7. Supraleiter

Oft ist die Stromverteilung nicht von vornherein bekannt, so dass das Magnetfeld nicht einfach durch Integration bestimmt werden kann. In magnetisierbaren Stoffen kann eine Magnetisierung  $\mathbf{M}$  (magnetisches Moment pro Volumen) vorliegen, mit einer Stromdichte

$$\mathbf{j}_m = \operatorname{rot} \mathbf{M} \quad . \quad (7.1)$$

Man spaltet den Strom dann auf in einen vorgegebenen Anteil  $\mathbf{j}_0$  und den Magnetisierungsstrom  $\mathbf{j}_m$  und schreibt das Durchflutungsgesetz in der Form

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B} - \mathbf{M}) = \mathbf{j}_0 \quad (7.2)$$

Mit  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$  nimmt es dann die Form

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 \quad (7.3)$$

an. Aus historischen Gründen wird  $\mathbf{H}$  manchmal als Magnetfeld bezeichnet, eine Konvention, an die wir uns nicht halten wollen.

An Grenzflächen, an denen  $\mathbf{j}_0$  verschwindet, sind die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{H}$  und die Normalkomponente von  $\mathbf{B}$  stetig. Zur

Lösung der statischen Grundgleichungen benötigt man zusätzliche Informationen über  $\mathbf{M}$ . In vielen Fällen lässt sich  $\mathbf{M}$  als lineare Funktion von  $\mathbf{B}$  schreiben,

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} = \chi(\mathbf{B} - \mathbf{M}), \text{ also } \mathbf{M} = \frac{\chi}{1 + \chi} \mathbf{B} \quad (7.4)$$

mit der magnetischen Suszeptibilität  $\chi$ .

Eine etwas andere Situation liegt beim Supraleiter vor. Supraleiter sind Stoffe (typischerweise Metalle, aber auch einige Keramiken bei tiefen Temperaturen), die durch den Meißner-Ochsenfeld-Effekt charakterisiert werden. Ein magnetisches Feld kann nur bis auf eine sehr kurze Distanz (die Eindringtiefe  $\Lambda$ ) in den Körper eindringen (typische Werte von  $\Lambda$  liegen zwischen 100 und 200 Angström).

Betrachten wir den idealisierten Fall, dass die Eindringtiefe verschwindet. Dann verhalten sich Supraleiter bei magnetischen Feldern ähnlich wie Leiter bei elektrischen Feldern.

Sei das Gebiet  $V$  durch einen Supraleiter ausgefüllt. Dann gilt  $\mathbf{B} = 0$  innerhalb von  $V$ . Wegen

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j} \quad (7.5)$$

ist  $\mathbf{j} = 0$  innerhalb von  $V$ . Auf dem Rand  $\partial V$  gilt wegen  $\text{div } \mathbf{B} = 0$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.6)$$

mit dem Normaleneinheitsvektor von  $\partial V$ . Aus  $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j}$  folgt, dass bei nicht verschwindendem Magnetfeld außerhalb an der Oberfläche des Supraleiters ein Oberflächenstrom fließt. Es gilt

$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{j} \cdot d^2\mathbf{x} \quad (7.7)$$

für ein Flächenstück  $S$ . Wir wählen jetzt einen Weg  $\gamma$  auf  $\partial V$  mit Parametrisierung  $\mathbf{x}(s)$ ,  $s \in [0, 1]$ , und betrachten die Flächen

$$S_\varepsilon = \{\mathbf{x}(s) + u\mathbf{n}(\mathbf{x}(s)), (u, s) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, 1]\} \quad (7.8)$$

Der Strom  $\mathbf{j}$  ist auf  $\partial V$  konzentriert, er hängt daher mit der Flächenstromdichte  $\mathbf{g}$  in der folgenden Weise zusammen,

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \int_{\partial V} dF(\mathbf{y}) \mathbf{g}(\mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad (7.9)$$

wobei  $\mathbf{g}$  ein Vektorfeld auf  $\partial V$  ist, das tangential gerichtet ist. Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \mathbf{j} \cdot d^2\mathbf{x} = \int_\gamma \mathbf{g} \cdot (\mathbf{n} \times d\mathbf{x}) = \int_\gamma (\mathbf{g} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{x} \quad , \quad (7.10)$$

also gilt auf  $\partial V$

$$\mathbf{B} = \mathbf{g} \times \mathbf{n} \quad (7.11)$$

und wegen  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{B} = \mathbf{g} \quad . \quad (7.12)$$

Wir betrachten als einfaches Beispiel eine Kugel aus supraleitendem Material. Außerhalb der Kugel ist  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ . Es gibt daher eine skalare Funktion  $\varphi_m$  (das magnetische Potential) mit

$$\mathbf{B} = -\text{grad } \varphi_m \quad (7.13)$$

außerhalb der Kugel. Die Randbedingung auf der Kugel ist  $\partial_n \varphi_m = 0$ .  $\varphi_m$  ist eine Lösung der Laplacegleichung. Sie ist eindeutig bestimmt, wenn ihr Verhalten bei  $\infty$  bekannt ist.

Ist  $\mathbf{B} = 0$  bei  $\infty$ , so erfüllt  $\varphi_m = 0$  alle Bedingungen, also ist  $\mathbf{B} = 0$  überall und  $\mathbf{g} = 0$ . Geht  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_\infty = \text{const}$  für  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , so findet man eine Lösung in der folgenden Weise:

$$\varphi_1 = -\mathbf{B}_\infty \cdot \mathbf{x} = -B_\infty r \cos \theta \quad (7.14)$$

( $B_\infty = |\mathbf{B}_\infty|$ ,  $(r, \theta, \varphi)$  Kugelkoordinaten mit z-Achse in Richtung  $\mathbf{B}_\infty$ ) ist eine Lösung der Laplacegleichung mit den richtigen Randbedingungen bei  $\infty$ . Durch Spiegelung an der Sphäre  $\{|\mathbf{x}| = R\}$  erhält man eine Lösung der Laplacegleichung für  $\mathbf{x} \neq 0$ ,

$$\varphi_2 = -\mathbf{B}_\infty \cdot \mathbf{x} \left(\frac{R}{|\mathbf{x}|}\right)^3 = -B_\infty R^3 r^{-2} \cos \theta \quad (7.15)$$

die bei  $\infty$  verschwindet. Es gilt

$$\partial_n \varphi_1 = \frac{\partial}{\partial r} \varphi_1 = -B_\infty \cos \theta \quad (7.16)$$

und

$$\partial_n \varphi_2 = \frac{\partial}{\partial r} \varphi_2 = 2B_\infty \left(\frac{R}{r}\right)^3 \cos \theta \quad , \quad (7.17)$$

daher erfüllt

$$\varphi_m = \varphi_1 + \frac{1}{2} \varphi_2 \quad (7.18)$$

die geforderten Randbedingungen bei  $r = R$ . Das Magnetfeld ergibt sich zu

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_\infty + \frac{R^3}{2} \text{grad} \left( \mathbf{B}_\infty \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right) \quad . \quad (7.19)$$

Das Zusatzfeld ist also dasjenige eines magnetischen Dipols mit dem Moment

$$\mathbf{m} = -\frac{3}{2} V \mathbf{B}_\infty \quad , \quad (7.20)$$

wobei  $V$  das Volumen der Kugel bezeichnet. (Man vergleiche dieses Resultat mit dem elektrischen Dipolmoment, das ein asymptotisch konstantes elektrisches Feld in einer leitenden ungeladenen Kugel induziert,  $\mathbf{p} = -3V\mathbf{E}_\infty$  (Gleichung (5.48)).

Wir wollen nun die Flächenstromdichte berechnen. Es gilt

$$\mathbf{g} = \frac{3}{2R} (\mathbf{x} \times \mathbf{B}_\infty) \quad . \quad (7.21)$$

Wir wollen dieses Ergebnis mit dem Feld einer Kugel vom Radius  $R$  vergleichen, die mit der homogenen Flächenladungsdichte  $\sigma$  geladen

ist und sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse dreht. Der Oberflächenstrom ist dann (mit  $\vec{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$

$$\mathbf{g} = \sigma \vec{\omega} \times \mathbf{x} \quad . \quad (7.22)$$

Der Superstrom, der von  $\mathbf{B}_\infty$  induziert wird, besteht also in einer Rotation der zugehörigen Ladungsträger um die Richtung von  $\mathbf{B}_\infty$ . Der damit verbundene Drehimpuls ist

$$\mathbf{L} = \frac{2M}{e} \mathbf{m} \quad , \quad (7.23)$$

wobei  $M$  die Masse und  $e$  die Ladung der supraleitenden Ladungsträger sind. Da das äußere Magnetfeld aber keinen Drehimpuls auf die Kugel ausübt, muss in einer drehbar aufgehängten Kugel das Gitter der Metallionen in umgekehrter Richtung rotieren, damit der Gesamtdrehimpuls verschwindet. Dieser gyromagnetische Effekt konnte tatsächlich nachgewiesen werden (Einstein-de Haas-Effekt).

Wir wollen jetzt an einem Beispiel den von einem äußeren Strom in einem Supraleiter induzierten Oberflächenstrom diskutieren. Der Halbraum  $\{x > 0\}$  sei von einem Supraleiter ausgefüllt.  $\mathbf{j}$  sei eine stationäre Stromverteilung im Halbraum  $\{x < 0\}$ .

Wegen des Meißner-Ochsenfeld-Effekts verschwindet das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  für  $x > 0$ . Da die Normalkomponente  $-B_x$  an der Oberfläche stetig ist, gilt  $B_x = 0$  für  $x = 0$ . Diese Bedingung ist automatisch erfüllt, wenn das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  an der Oberfläche in  $x$ -Richtung zeigt.

In Analogie zur Methode der Spiegelladungen in der Elektrostatik machen wir den Ansatz, dass das von den Oberflächenströmen erzeugte Vektorpotential im linken Halbraum durch einen Spiegelstrom im rechten Halbraum erzeugt werden kann. Sei  $S$  die Spiegelung an der Ebene  $x = 0$ . Dann setzen wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y}) - S\mathbf{j}(S\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad , \quad x_1 > 0 \quad . \quad (7.24)$$

$\mathbf{A}$  erfüllt die Gleichungen  $\Delta \mathbf{A} = -\mathbf{j}$  und  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  im Halbraum  $x_1 < 0$ . Auf der Fläche  $x_1 = 0$  gilt wegen  $S\mathbf{x} = \mathbf{x}$ , dass  $S\mathbf{A} = -\mathbf{A}$  ist.  $\mathbf{A}$  zeigt daher in  $x$ -Richtung, und  $B_x$  verschwindet. Das Magnetfeld an der Oberfläche ist also wie gefordert tangential gerichtet. Man findet

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} (\mathbf{j}(\mathbf{y}) - S\mathbf{j}(S\mathbf{y})) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} [\mathbf{j}(\mathbf{y}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})] \quad , \quad (7.25)$$

wobei  $[\mathbf{a}]$  die Projektion von  $\mathbf{a}$  auf die  $y$ - $z$ -Ebene bezeichnet,

$$[\mathbf{a}] = -\mathbf{e}_x \times (\mathbf{e}_x \times \mathbf{a}) \quad . \quad (7.26)$$

Der induzierte Oberflächenstrom ist

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (-\mathbf{e}_x \times \mathbf{B}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} (y_1 \mathbf{j}(\mathbf{y}) + j_1(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \quad . \quad (7.27)$$

Betrachten wir als Beispiel einen linienförmigen Strom  $I$ , der im Abstand  $d$  von der Grenzfläche in die  $y$ -Richtung fließt. Dann fließt auch  $\mathbf{g}$  in die  $y$ -Richtung. Man erhält

$$g_2(\mathbf{x}) = -\frac{Id}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds (d^2 + \delta^2 + s^2)^{-\frac{3}{2}} \quad , \quad (7.28)$$

wenn  $\sqrt{d^2 + \delta^2}$  der Abstand zwischen  $\mathbf{x}$  und dem Stromfaden ist. Wir setzen  $s = \sqrt{d^2 + \delta^2}u$  und finden

$$g_2(\mathbf{x}) = -\frac{Id}{2\pi(d^2 + \delta^2)} \int_{-\infty}^{\infty} du (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}} \quad . \quad (7.29)$$

Das Integral berechnen wir mit der Substitution  $u = \tan \alpha$ . Dann ist  $du = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$  und  $1 + u^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ . Folglich erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} du (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \cos \alpha = 2 \quad , \quad (7.30)$$

und damit

$$g_2(\mathbf{x}) = -\frac{Id}{\pi(d^2 + \delta^2)} \quad . \quad (7.31)$$

Der insgesamt induzierte Strom ist

$$I_{\text{ind}} = -I \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta \frac{d}{d^2 + \delta^2} = -I \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha = -I \quad , \quad (7.32)$$

wobei wir  $\delta = d \tan \alpha$  substituiert haben. Der induzierte Strom ist also dem erzeugenden Strom entgegengesetzt gleich. Insbesondere stößt ein Supraleiter also einen anderen Stromkreis ab.

## KAPITEL V

### Maxwellgleichungen

#### 1. Das Faradaysche Induktionsgesetz

1831 entdeckte Faraday das Induktionsgesetz: ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld erzeugt in einem geschlossenen Leiter einen Strom. Ursache dieses Stroms ist ein elektrisches Feld. Ist  $\gamma$  die Leiterschleife, so ergibt sich quantitativ

$$\int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = -k'' \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d^2\mathbf{x} \quad , \quad (1.1)$$

wenn  $\gamma$  die Fläche  $S$  im positiven Sinne umrandet. Die im Induktionsgesetz auftretende Konstante  $k''$  lässt sich durch die bereits bekannten Konstanten ausdrücken. Dies kann man in der folgenden Weise einsehen.

Wir betrachten ein Magnetfeld, dessen Zeitabhängigkeit durch

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x} + \mathbf{v}t) \quad (1.2)$$

gegeben ist, etwa indem sich die erzeugende Stromverteilung mit der konstanten Geschwindigkeit  $-\mathbf{v}$  bewegt. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d^2\mathbf{x} = \int_S (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 \cdot d^2\mathbf{x} \quad . \quad (1.3)$$

Mit  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 = (\nabla \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{v} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)$  und  $\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0$  folgt

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d^2\mathbf{x} = - \int_{\partial S} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot d\mathbf{x} \quad . \quad (1.4)$$

$\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$  ist aber gerade die Kraft, die auf eine Einheitsladung wirkt, die sich im Magnetfeld  $\mathbf{B}_0$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt. Nach den Gesetzen der klassischen Mechanik bleibt die Kraft gleich, wenn man in ein anderes Inertialsystem geht (Galilei-Invarianz). Im System, in dem die Ladung ruht und das Magnetfeld sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $-\mathbf{v}$  bewegt, interpretieren wir die Kraft  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$  als elektrisches Feld  $\mathbf{E}$  und erhalten daher einen Spezialfall des Induktionsgesetzes mit  $k'' = 1$ .

Wir werden später sehen, dass die Galilei-Invarianz in der Elektrodynamik nicht gilt, so dass die obige Argumentation nicht ganz überzeugend ist. Die Galilei-Invarianz gilt aber im Limes kleiner Geschwindigkeiten; dies reicht aus, um die Konstante  $k''$  zu fixieren.

Die differentielle Form des Induktionsgesetzes lautet

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0 \quad . \quad (1.5)$$

Man kann diese Gleichungen in ähnlicher Weise wie die statischen Gleichungen verstehen, indem man zu einer vierdimensionalen Beschreibung übergeht, in der die Zeit die vierte Dimension ist. Wir werden später darauf zurückkommen.

## 2. Maxwell'sche Ergänzung

Aus dem Ampèreschen Durchflutungsgesetz

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j} \quad (2.1)$$

folgt  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ . Andererseits gilt wegen der Erhaltung der elektrischen Ladung die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \quad . \quad (2.2)$$

Das Ampèresche Durchflutungsgesetz kann also bei zeitlich veränderlicher Ladungsdichte nicht mehr richtig sein. Nach dem Gaußschen Gesetz ist

$$\rho = \operatorname{div} \mathbf{E} \quad , \quad (2.3)$$

also gilt

$$\operatorname{div} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) = 0 \quad . \quad (2.4)$$

Maxwell veränderte daher das Ampèresche Durchflutungsgesetz, indem er auf der rechten Seite den sogenannten Verschiebungsstrom  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$  hinzufügte (Maxwell'sche Ergänzung). Damit erhält man

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \mathbf{j} \quad . \quad (2.5)$$

Um uns eine Vorstellung von der Größenordnung der Maxwell'schen Ergänzung machen zu können, betrachten wir die folgende Situation: ein homogenes elektrisches Feld im Innern eines Zylinders mit Radius  $r$  werde gleichmäßig in der Zeit  $t$  von 0 auf  $E$  gesteigert. Das dadurch am Rand des Zylinders verursachte Magnetfeld hat die Stärke

$$B = \frac{r}{2t} E \quad . \quad (2.6)$$

Auf eine Punktladung  $e$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $v$  parallel zur Zylinderachse bewegt, wirkt daher die Lorentzkraft mit der Stärke

$$evB = eEv \frac{r}{2t} \quad . \quad (2.7)$$

Solange  $v$  und  $\frac{r}{2t}$  klein gegen die Lichtgeschwindigkeit  $c = 1$  sind, ist diese Kraft klein gegen die elektrische Kraft  $eE$ . Ein direkter Nachweis des Verschiebungsstroms ist daher schwierig. Wir werden aber sehen, dass dieser Zusatzterm verantwortlich für das Auftreten elektromagnetischer Wellen ist.

### 3. Maxwellgleichungen; die Wellengleichung

Wir haben jetzt das folgende Gleichungssystem für die Elektrodynamik gefunden:

$$(i) \quad \text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0$$

$$(ii) \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$(iii) \quad \text{div } \mathbf{E} = \rho$$

$$(iv) \quad \text{rot } \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \mathbf{j}$$

Diese 4 Gleichungen nennt man die Maxwellgleichungen. Sie bilden die Grundlage für die gesamte Elektrodynamik.

Einen ersten Eindruck über die Aussagekraft dieser Gleichungen gewinnt man, indem man die erste Gleichung nach der Zeit differenziert,

$$0 = \text{rot } \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} \quad . \quad (3.1)$$

Einsetzen der vierten Gleichung ergibt

$$0 = \text{rot rot } \mathbf{B} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} - \text{rot } \mathbf{j} \quad . \quad (3.2)$$

Mit  $\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}$  und  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  folgt

$$\square \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{j} \quad (3.3)$$

mit dem d'Alembert-Operator  $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ . Diese Gleichung ist die inhomogene Wellengleichung. Eine entsprechende Rechnung führt für das elektrische Feld auf die inhomogene Wellengleichung

$$\square \mathbf{E} = -(\text{grad } \rho + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}) \quad . \quad (3.4)$$

Die zugehörigen homogenen Gleichungen besitzen nichttriviale Lösungen, die elektromagnetischen Wellen. Der Nachweis dieser Wellen durch Hertz lieferte die entscheidende Bestätigung für die Maxwellgleichungen.

### 4. Potentiale und Eichtransformationen

Die Maxwellgleichungen stellen ein System von 8 gekoppelten linearen partiellen Differentialgleichungen dar. Um sie bei vorgegebenen Strom- und Ladungsdichte zu lösen, kann man folgendermaßen vorgehen. Zunächst betrachtet man die beiden homogenen Gleichungen. Aus  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  folgt die Existenz eines Vektorpotentials  $\mathbf{A}$  mit

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad . \quad (4.1)$$

Setzt man diesen Ausdruck für  $\mathbf{B}$  in das Induktionsgesetz ein, so erhält man

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = 0 \quad . \quad (4.2)$$

Also gibt es wie im statischen Fall ein skalares Potential  $\varphi$  mit

$$-\operatorname{grad} \varphi = \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \quad . \quad (4.3)$$

Sind  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  beliebig vorgegeben, so lösen  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}$  und  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  die homogenen Maxwellgleichungen. Die vierkomponentige Größe  $(\varphi, \mathbf{A})$  nennt man das elektromagnetische Potential.

Wir setzen die gefundenen Ausdrücke für das elektromagnetische Feld  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  in die beiden inhomogenen Maxwellgleichungen ein und erhalten

$$-\Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = \rho \quad , \quad (4.4)$$

und mit  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$

$$-\Delta \mathbf{A} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} \varphi \right) = \mathbf{j} \quad . \quad (4.5)$$

Die Wahl der Potentiale ist nicht eindeutig durch die elektromagnetischen Felder bestimmt. Ersetzt man  $\mathbf{A}$  durch  $\mathbf{A} + \operatorname{grad} \Lambda$  und  $\varphi$  durch  $\varphi - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda$  mit einer skalaren Funktion  $\Lambda(t, \mathbf{x})$ , so ergeben sich dieselben Felder. Transformationen dieser Art nennt man Eichtransformationen.

Man kann die Eichfreiheit dazu benutzen, die Gleichungen für die Potentiale zu vereinfachen. Eine beliebte Eichung ist die Lorentzeichung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} \varphi = 0 \quad . \quad (4.6)$$

In diesem Fall erhält man 4 entkoppelte inhomogene Wellengleichungen,

$$\square \mathbf{A} = \mathbf{j} \quad (4.7)$$

und

$$\square \varphi = \rho \quad . \quad (4.8)$$

Man erreicht die Lorentzeichung in der folgenden Weise. Sei  $(\varphi, \mathbf{A})$  ein beliebig vorgegebenes elektromagnetisches Potential. Gesucht wird eine skalare Funktion  $\Lambda$ , so dass

$$(\varphi', \mathbf{A}') = \left( \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda, \mathbf{A} + \operatorname{grad} \Lambda \right) \quad (4.9)$$

die Lorentzeichung erfüllt. Dies bedeutet, dass  $\Lambda$  die inhomogene Wellengleichung

$$\square \Lambda = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} \varphi \quad (4.10)$$

erfüllen muss.

## KAPITEL VI

### Elektromagnetische Wellen

#### 1. Die homogene Wellengleichung

Die Gleichung

$$\square u = 0 \quad , \quad \square = \partial^\mu \partial_\mu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (1.1)$$

nennt man Wellengleichung. Spezielle Lösungen dieser Gleichung sind die ebenen Wellen

$$u(t, \mathbf{x}) = f(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \quad (1.2)$$

mit einer glatten Funktion  $f$  und einem Einheitsvektor  $\mathbf{n}$ . Diese Lösungen sind zu einer festen Zeit  $t$  auf den Ebenen senkrecht zu  $\mathbf{n}$  konstant. Die Ebenen mit konstantem  $u$  bewegen sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{n}$ . Ein Spezialfall ebener Wellen sind die monochromatischen ebenen Wellen

$$u(t, \mathbf{x}) = e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad , \quad (1.3)$$

mit dem Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$  und der Frequenz  $\omega$ . Die Wellengleichung impliziert die Dispersionsrelation  $|\mathbf{k}|^2 = \omega^2$ .

Ähnlich wie in der Mechanik wollen wir jetzt das Anfangswertproblem untersuchen. Da die Wellengleichung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit ist, erwarten wir, dass die Lösung bestimmt wird durch Angabe von  $u$  und seiner Zeitableitung zur Zeit  $t = 0$ . Man nennt  $u_0(\mathbf{x}) := u(0, \mathbf{x})$  und  $v_0(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial t} u(0, \mathbf{x})$  die Cauchydaten von  $u$  und fragt, für welche vorgegebenen Cauchydaten eine zugehörige Lösung der Wellengleichung existiert und eindeutig bestimmt ist (Cauchyproblem).

Betrachten wir zunächst Lösungen der Form

$$u(t, \mathbf{x}) = f(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (1.4)$$

$f$  erfüllt dann die Differentialgleichung

$$f'' + |\mathbf{k}|^2 f = 0 \quad (1.5)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$f(t) = f(0) \cos |\mathbf{k}|t + \frac{f'(0)}{|\mathbf{k}|} \sin |\mathbf{k}|t \quad . \quad (1.6)$$

Durch Superposition dieser Lösungen können wir das Cauchyproblem auch für Anfangsbedingungen der Form

$$u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\mathbf{k} \tilde{u}_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(0, \mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\mathbf{k} \tilde{v}_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad , \quad (1.8)$$

(Überlagerung ebener monochromatischer Wellen) lösen. Es gilt

$$u(t, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\mathbf{k} \left( \tilde{u}_0(\mathbf{k}) \cos |\mathbf{k}|t + \frac{\tilde{v}_0(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} \sin |\mathbf{k}|t \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad . \quad (1.9)$$

Seien nun  $u_0, v_0$  beliebig vorgegebene Anfangsbedingungen. Mit den Fouriertransformierten

$$\tilde{u}_0(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\mathbf{x} u_0(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad , \quad (1.10)$$

$$\tilde{v}_0(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\mathbf{x} v_0(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad , \quad (1.11)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} u(t, \mathbf{x}) &= (2\pi)^{-3} \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{y} \left( u_0(\mathbf{y}) \cos |\mathbf{k}|t + v_0(\mathbf{y}) \frac{\sin |\mathbf{k}|t}{|\mathbf{k}|} \right) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ &= \int d^3\mathbf{y} \left[ \frac{\partial}{\partial t} D(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) u_0(\mathbf{y}) + D(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) v_0(\mathbf{y}) \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

mit

$$D(t, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3} \int d^3\mathbf{k} \frac{\sin |\mathbf{k}|t}{|\mathbf{k}|} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (1.13)$$

$$= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} (\delta(t - |\mathbf{x}|) - \delta(t + |\mathbf{x}|)) \quad . \quad (1.14)$$

Das Faltungsintegral mit  $D$  lässt sich in der folgenden Weise berechnen. Wir wählen Kugelkoordinaten mit Mittelpunkt  $\mathbf{x}$  und finden für  $t > 0$

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{y} D(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) u_0(\mathbf{y}) &= \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{4\pi r} \delta(t-r) u_0(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_r) \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi u_0(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_r) \quad . \end{aligned} \quad (1.15)$$

Für  $t < 0$  ergibt sich dieselbe Formel.

Nennt man den Mittelwert einer Funktion  $h(\mathbf{x})$  über eine Kugel vom Radius  $r$  um den Punkt  $\mathbf{x}$

$$(M_r h)(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^2} \int dF h(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \quad , \quad |\mathbf{y}| = r \quad , \quad (1.16)$$

so lässt sich die Lösung  $u$  durch die Anfangsbedingungen  $u_0, v_0$  in der folgenden Form ausdrücken :

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} (tM_{|t}u_0)(\mathbf{x}) + (tM_{|t}v_0)(\mathbf{x}) \quad . \quad (1.17)$$

$u(t, \mathbf{x})$  ist also unabhängig von den Werten von  $u_0$  und  $v_0$  außerhalb der Oberfläche der Kugel mit dem Radius  $|t|$ .

Eine besonders einfache Lösung des Anfangswertproblems erhält man, wenn  $u_0$  und  $v_0$  harmonische Funktionen sind. Sie stimmen dann mit ihren Mittelwerten  $M_r u_0$  und  $M_r v_0$  überein, und man findet

$$u(t, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + tv_0(\mathbf{x}) \quad . \quad (1.18)$$

Wendet man die gefundenen Ausdrücke auf die Maxwell'schen Gleichungen mit  $\rho, \mathbf{j} = 0$  an, so folgt

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{y} \left[ \frac{\partial}{\partial t} D(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{E}(0, \mathbf{y}) + D(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(0, \mathbf{y}) \right], \quad (1.19)$$

und entsprechend für  $\mathbf{B}$ . Wegen der Maxwellgleichungen sind die Anfangsbedingungen nicht frei wählbar, sondern müssen die Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad (1.20)$$

zur Zeit  $t = 0$  erfüllen. Geben wir  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  zur Zeit  $t = 0$  divergenzfrei vor, so sind  $\dot{\mathbf{E}}$  und  $\dot{\mathbf{B}}$  dadurch bereits festgelegt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t & \operatorname{rot} \\ -\operatorname{rot} & \partial_t \end{pmatrix} \int d^3\mathbf{y} D(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \begin{pmatrix} \mathbf{E}(0, \mathbf{y}) \\ \mathbf{B}(0, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \quad . \quad (1.21)$$

## 2. Die inhomogene Wellengleichung; retardierte Potentiale

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\square u = w \quad (2.1)$$

erhält man, indem man eine spezielle Lösung aufsucht und dann die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung dazu addiert. Wir suchen eine Lösung, die zur Zeit  $t = 0$  verschwindet. Eine solche Lösung ist eindeutig bestimmt. Sie ist gegeben durch

$$u(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \int_0^t ds u_s(t, \mathbf{x}) & , \quad t > 0 \\ 0 & \\ -\int_t^0 ds u_s(t, \mathbf{x}) & , \quad t < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

wobei  $u_s(t, \mathbf{x})$  die Lösung der homogenen Wellengleichung ist mit den Anfangsbedingungen

$$u_s(s, \mathbf{x}) = 0 \quad , \quad \partial_t u_s(s, \mathbf{x}) = w(s, \mathbf{x}) \quad . \quad (2.3)$$

Tatsächlich gilt für  $t > 0$

$$\partial_t u(t, \mathbf{x}) = \underbrace{u_t(t, \mathbf{x})}_{=0} + \int_0^t ds \partial_t u_s(t, \mathbf{x}) \quad , \quad (2.4)$$

$$\partial_t^2 u(t, \mathbf{x}) = \partial_t u_t(t, \mathbf{x}) + \int_0^t ds \partial_t^2 u_s(t, \mathbf{x}) \quad (2.5)$$

$$= w(t, \mathbf{x}) + \int_0^t ds \Delta u_s(t, \mathbf{x}) \quad (2.6)$$

$$= w(t, \mathbf{x}) + \Delta u(t, \mathbf{x}) \quad . \quad (2.7)$$

Die Anfangswerte können statt zur Zeit  $t = 0$  auch zu anderen Zeiten vorgegeben werden. Von besonderem Interesse ist der Fall, dass die Lösung für  $t \rightarrow -\infty$  verschwindet. In diesem Fall lassen wir nur Quellterme  $w$  zu, die für genügend frühe Zeiten gleich Null sind. Wir erhalten

$$u(t, \mathbf{x}) = \int ds \int d^3 \mathbf{y} D_{\text{ret}}(t - s, \mathbf{x} - \mathbf{y}) w(s, \mathbf{y}) \quad (2.8)$$

mit der retardierten Greenschen Funktion

$$D_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(t - |\mathbf{x}|) \quad . \quad (2.9)$$

Es gilt

$$D_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (2.10)$$

für  $t \neq |\mathbf{x}|$  und

$$\square D_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = \delta(t) \delta^3(\mathbf{x}) \quad . \quad (2.11)$$

Eine andere Greensche Funktion ist die avancierte Greensche Funktion

$$D_{\text{av}}(t, \mathbf{x}) = D_{\text{ret}}(-t, -\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(t + |\mathbf{x}|) \quad . \quad (2.12)$$

Die Differenz der beiden ist die schon behandelte Funktion

$$D = D_{\text{ret}} - D_{\text{av}} \quad . \quad (2.13)$$

$D$  ist eine Lösung der homogenen Wellengleichung. Da eine Lösung der homogenen Wellengleichung durch ihre Anfangswerte zu einer beliebigen Zeit festgelegt wird, ist  $D_{\text{ret}}$  die einzige Greensche Funktion, die außerhalb des Vorwärtskegels

$$\bar{V}_+ = \{(t, \mathbf{x}) \mid |\mathbf{x}| \leq t\} \quad (2.14)$$

verschwindet.

Wir können jetzt sofort die sogenannten retardierten Potentiale angeben. Ist  $(\rho, \mathbf{j})$  eine Ladungs- und Stromverteilung, so gilt für die retardierten Potentiale (in der Lorentzzeichnung)

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) &= \int dt' d^3\mathbf{y} D_{\text{ret}}(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(t', \mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dt' d^3\mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta((t - t') - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \rho(t', \mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(t_{\text{ret}}, \mathbf{y})\end{aligned}\quad (2.15)$$

und

$$\mathbf{A}_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mathbf{j}(t_{\text{ret}}, \mathbf{y}) \quad . \quad (2.16)$$

mit der retardierten Zeit  $t_{\text{ret}} = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ . Die retardierten elektromagnetischen Potentiale (und damit auch das retardierte elektromagnetische Feld) hängen also von den Ladungs- und Stromdichten zur retardierten Zeit ab.

Als Beispiel betrachten wir einen zeitabhängigen, punktförmigen elektrischen Dipol  $\mathbf{p}(t)$  am Ort  $\mathbf{x} = 0$  (Hertzscher Dipol). Die zugehörige Ladungsdichte ist

$$\rho(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{p}(t) \cdot \text{grad} \delta^3(\mathbf{x}) \quad , \quad (2.17)$$

der zugehörige Strom

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{p}}(t) \delta^3(\mathbf{x}) \quad . \quad (2.18)$$

Damit erhält man für das retardierte Vektorpotential

$$\mathbf{A}_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \dot{\mathbf{p}}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \delta^3(\mathbf{y}) \quad (2.19)$$

$$= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \dot{\mathbf{p}}(t - |\mathbf{x}|) = \frac{1}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}(t_{\text{ret}}) \quad (2.20)$$

und für das zugehörige magnetische Feld

$$\mathbf{B}_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = \text{rot} \mathbf{A}_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left( \dot{\mathbf{p}}(t_{\text{ret}}) \times \frac{\mathbf{n}}{r^2} + \ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{ret}}) \times \frac{\mathbf{n}}{r} \right) \quad (2.22)$$

mit  $r = |\mathbf{x}|$  und  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{r}$ . Der erste Term ist das sogenannte Nahfeld, das bei kleinen Abständen überwiegt. Den zweiten Term nennt man das Fernfeld. Dies ist das eigentliche Strahlungsfeld. Es ist proportional zu  $\ddot{\mathbf{p}}$  und fällt nur wie  $\frac{1}{r}$  ab. Zur Bestimmung des elektrischen Feldes

berechnen wir zunächst das skalare Potential,

$$\varphi_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mathbf{p}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \cdot \text{grad} \delta^3(\mathbf{y}) \quad (2.23)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \text{div}_{\mathbf{y}} \left( \frac{\mathbf{p}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \delta^3(\mathbf{y}) \quad (2.24)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \text{div} \frac{\mathbf{p}(t - |\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \quad (2.25)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{p}(t - |\mathbf{x}|) \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \dot{\mathbf{p}}(t - |\mathbf{x}|) \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} \right) \quad (2.26)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{p}(t_{\text{ret}}) \cdot \mathbf{n}}{r^2} + \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_{\text{ret}}) \cdot \mathbf{n}}{r} \right) \quad (2.27)$$

Das elektrische Feld ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) &= -\text{grad} \varphi_{\text{ret}} - \dot{\mathbf{A}}_{\text{ret}} \quad (2.28) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{p}}{r^3} + \frac{3\mathbf{n}(\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n}) - \dot{\mathbf{p}}}{r^2} - \frac{\ddot{\mathbf{p}} - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{p}})\mathbf{n}}{r} \right) \quad (2.29) \end{aligned}$$

Wieder gibt es einen Anteil  $\mathbf{E}_{\text{Fern}}$ , der nur wie  $\frac{1}{r}$  abfällt und daher bei großen Abständen dominiert.

Um den mit dieser Welle verbundenen Energietransport zu berechnen, nutzen wir den Poyntingschen Satz aus. Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist

$$u = \frac{1}{2} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2), \quad (2.30)$$

die Energiestromdichte wird durch den Poyntingvektor  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  beschrieben. Aus den Maxwellgleichungen folgt

$$\dot{u} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \text{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \text{div} (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (2.31)$$

die Energiedichte ändert sich also durch Erzeugung Joulscher Wärme (der Term  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ ) und durch den Fluss des Poyntingvektors (Poyntingscher Satz).

Für den Poyntingvektor gilt (für große  $r$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E}_{\text{Fern}} \times \mathbf{B}_{\text{Fern}} = -\frac{1}{16\pi^2 r^2} (\ddot{\mathbf{p}} - (\ddot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \times (\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}) \\ &= -\frac{1}{16\pi^2 r^2} ((\ddot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n})\dot{\mathbf{p}} - |\dot{\mathbf{p}}|^2 \mathbf{n} - (\ddot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n})\dot{\mathbf{p}} + (\ddot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n}) \\ &= -\frac{1}{16\pi^2 r^2} ((\ddot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n})^2 - |\dot{\mathbf{p}}|^2) \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{16\pi^2 r^2} |\dot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \vartheta \mathbf{n}, \quad \cos \vartheta = \frac{\ddot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n}}{|\ddot{\mathbf{p}}|}. \quad (2.32) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der abgestrahlten Leistung berechnen wir den Energiefluss durch eine Kugelschale um den Ursprung mit Radius  $r$ , im

Grenzfall großer  $r$ , so dass nur der Beitrag der Fernfelder berücksichtigt werden muss.

$$P = \int_{|\mathbf{x}|=r} \mathbf{S} \cdot d^2\mathbf{x} = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{8\pi} \int_{-1}^1 dw(1-w^2) = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{6\pi} . \quad (2.33)$$

Wenn der Dipol mit der Frequenz  $\omega$  schwingt

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \cos \omega t \quad , \quad (2.34)$$

dann ergibt sich

$$P(t) = \frac{1}{6\pi} |\mathbf{p}_0|^2 \omega^4 \cos^2 \omega t_{ret} . \quad (2.35)$$

### 3. Polarisation

Ebene monochromatische elektromagnetische Wellen haben die Form

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \text{Re} (\mathbf{e} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \quad , \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \text{Re} (\mathbf{b} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \quad (3.1)$$

mit  $\omega^2 = |\mathbf{k}|^2$  und  $\mathbf{e}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^3$ . Wegen der Maxwellgleichungen gelten für  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{b}$  die Bedingungen

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{e} = \omega \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{k} \times \mathbf{b} = -\omega \mathbf{e} \quad (3.3)$$

und damit  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b} = 0$ . Die Vektoren  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  und  $\mathbf{k}$  bilden also ein orthogonales, positiv orientiertes Dreibein. Die Energiedichte ist

$$u = \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 = |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2} (|\mathbf{e}|^2 + \text{Re} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) e^{2i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}) \quad . \quad (3.4)$$

Die Energiestromdichte ist

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} |\mathbf{E}|^2 = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} u \quad . \quad (3.5)$$

Die zeitliche Abhängigkeit der Richtung des elektrischen Feldes wird durch den komplexen Vektor  $\mathbf{e}$  charakterisiert. Ist  $\mathbf{e}$  ein Vielfaches eines reellen Vektors, so zeigt  $\mathbf{E}$  immer in dieselbe Richtung; die Welle heißt linear polarisiert. Sind Realteil und Imaginärteil von  $\mathbf{e}$  senkrecht zueinander und von gleichem Betrag, so beschreibt  $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$  für festes  $\mathbf{x}$  einen Kreis mit Radius  $\frac{1}{\sqrt{2}}|\mathbf{e}|$  (zirkular polarisiert). Im allgemeinen Fall beschreibt  $\mathbf{E}$  eine Ellipse. Wir wählen  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} e^{-2i\alpha} \geq 0 \quad . \quad (3.6)$$

Dann hat  $\mathbf{e}_0 = e^{-i\alpha} \mathbf{e}$  die Eigenschaft

$$\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 \geq 0 \quad . \quad (3.7)$$

Sei  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^3$ . Dann folgt  $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$ . Es gilt

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \text{Re} \mathbf{e}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \alpha)} \quad (3.8)$$

$$= \mathbf{e}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \alpha) - \mathbf{e}_2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \alpha) \quad , (3.9)$$

d.h.  $\mathbf{E}$  beschreibt eine Ellipse in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{k}$  mit den Halbachsen  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$ . Ist  $\mathbf{e}_2 = 0$ , so ist  $\mathbf{E}$  linear polarisiert. Ist  $|\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_1|$ , so hat man zirkular polarisiertes Licht (linkszirkular für  $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{k} > 0$ ). Man kann den Polarisationszustand einer Welle durch die sogenannte Polarisationsmatrix charakterisieren. Sei  $\mathbf{k}$  o.B.d.A. ein Vektor in positiver z-Richtung. Dann betrachtet man die Matrix

$$\rho = \frac{1}{|\mathbf{e}|^2} \begin{pmatrix} e_x \bar{e}_x & e_x \bar{e}_y \\ e_y \bar{e}_x & e_y \bar{e}_y \end{pmatrix}$$

mit  $\mathbf{e} = (e_x, e_y, 0)$ .

Die Matrix  $\rho$  hat die Eigenschaften

$$\text{Tr}\rho = 1 \quad , \quad \det\rho = 0 \quad , \quad \rho = \rho^* \quad , \quad (3.10)$$

sie kann parametrisiert werden durch

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 + i\xi_2 \\ \xi_1 - i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix} \quad , \quad (3.11)$$

$\xi_i \in \mathbb{R}$ ,  $\sum \xi_i^2 = 1$ .  $\xi_2 = 0$  bedeutet lineare Polarisation,  $\xi_2 = \pm 1$  zirkulare Polarisation. Zur Bestimmung der Koeffizienten  $\xi_i$  misst man die mittleren relativen Intensitäten der linear und zirkular polarisierten Komponenten, etwa durch einen Linearpolarisator und ein  $\lambda/4$ -Plättchen. Steht der Linearpolarisator mit Winkel  $\phi$  zur  $x$ -Achse, so hat das durchgelassene elektrische Feld den Amplitudenvektor

$$\mathbf{e}' = P_\phi \mathbf{e}$$

mit dem Projektor auf die Richtung von  $\phi$

$$P_\phi = \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi \\ \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi \end{pmatrix} \quad .$$

Die relative Intensität  $I(\phi) = \frac{|\mathbf{e}'|^2}{|\mathbf{e}|^2}$  ergibt sich dann zu

$$I(\phi) = \text{Tr}\rho P_\phi = \frac{1}{2}(1 + \xi_3 \cos 2\phi + \xi_1 \sin 2\phi) \quad . \quad (3.12)$$

Die zirkular polarisierten Komponenten kann man mit dem folgenden Verfahren herausprojizieren: Ein  $\lambda/4$ -Plättchen wird so in den Strahl gebracht, dass die optische Weglänge der  $y$ -Komponente des elektrischen Feldes sich gerade um  $\lambda/4$  (mit der Wellenlänge  $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ ) von derjenigen der  $x$ -Komponente unterscheidet. Danach tritt der Strahl durch einen Linearpolarisator in Richtung  $\phi = \pm\pi/4$ . Der jetzt linear polarisierte Strahl wird durch ein gegenüber dem ersten Plättchen um  $\pi/2$  verdrehten  $\lambda/4$ -Plättchen wieder zirkular polarisiert. Bis auf eine für die mittlere Intensität irrelevante Phase ergibt sich für den Amplitudenvektor des elektrischen Feldes hinter dem Projektor

$$\mathbf{e}' = U^* P_{\pm\pi/4} U \mathbf{e} \quad (3.13)$$

mit der unitären Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} ,$$

die die Wirkung des  $\lambda/4$ -Plättchens beschreibt. Die relativen Intensitäten der zirkular polarisierten Komponenten sind

$$I_{\pm} = \text{Tr} \rho U^* P_{\pm\pi/4} U = \frac{1}{2}(1 \pm \xi_2) . \quad (3.14)$$

Ist eine Welle nicht strikt monochromatisch, so kann man sie näherungsweise durch einen zeitabhängigen Vektor  $\mathbf{e}(t)$  beschreiben. Im Zeitmittel erhält man eine Polarisationsmatrix

$$\bar{\rho} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^T \rho(t) |\mathbf{e}(t)|^2 dt}{\int_{-T}^T |\mathbf{e}(t)|^2 dt} . \quad (3.15)$$

$\bar{\rho}$  ist hermitesch mit Spur 1, aber i.a. ist  $\det \bar{\rho} \neq 0$ ,

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 + i\xi_2 \\ \xi_1 - i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

mit  $\sum \xi_i^2 < 1$ . Eine solche gemischte Polarisationsmatrix lässt sich immer als Mischung zweier reiner Polarisationsmatrizen ausdrücken. Diese Zerlegung ist jedoch nicht eindeutig.

*Beispiel:* Wir betrachten die Überlagerung zweier monochromatischer ebener Wellen mit derselben Ausbreitungsrichtung, deren Frequenz sich um  $\delta \ll \omega$  unterscheidet. Das elektrische Feld an einem bestimmten Punkt kann dann durch einen zeitabhängigen Amplitudenvektor der Form  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{e} + \mathbf{f}e^{i\delta t}$  beschrieben werden. In der zeitlich gemittelten Polarisationsmatrix verschwinden die gemischten Terme, und wir erhalten die konvexe Kombination

$$\bar{\rho} = \alpha \rho_{\mathbf{e}} + \beta \rho_{\mathbf{f}} \quad (3.17)$$

mit

$$\alpha = \frac{|\mathbf{e}|^2}{|\mathbf{e}|^2 + |\mathbf{f}|^2} , \quad \beta = \frac{|\mathbf{f}|^2}{|\mathbf{e}|^2 + |\mathbf{f}|^2} \quad (3.18)$$

und den Polarisationsmatrizen  $\rho_{\mathbf{e}}, \rho_{\mathbf{f}}$  der beiden monochromatischen Wellen.

#### 4. Reflexion und Brechung

In einem nichtleitendem Medium können die Ladungen sich nicht frei bewegen, sie können aber durch ein elektrisches Feld aus ihrer Ruhelage abgelenkt werden. Ist das Material elektrisch neutral, so bilden sich auf diese Weise kleine Dipole. Wir beschreiben die so erzeugte Ladungsverteilung durch die Materiepolarisation  $\mathbf{P}$ , die mit der Ladungsverteilung durch

$$\text{div } \mathbf{P} = -\rho \quad (4.1)$$

zusammenhängt.  $\mathbf{P}$  kann als Dipoldichte interpretiert werden. In vielen Materialien kann der Zusammenhang zwischen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{E}$  durch den Ansatz

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = \int dt' \chi(t - t') \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \quad (4.2)$$

beschrieben werden. Hierbei ist  $\chi$  eine Funktion, die für negative Argumente verschwindet; die Polarisation setzt also erst nach der Einschaltung des elektrischen Feldes ein. Nach Fouriertransformation in der Zeit erhält man

$$\hat{\mathbf{P}}(\omega, \mathbf{x}) = \hat{\chi}(\omega) \hat{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{x}) . \quad (4.3)$$

Mit der frequenzabhängiger Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega)$  und  $\mu \equiv 1$  nehmen die Maxwellgleichungen für Felder mit der Zeitabhängigkeit  $e^{-i\omega t}$  die Form an ( $\omega \neq 0$ )

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = -i\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E} \quad . \quad (4.4)$$

Die Gleichungen  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  und  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  sind eine Konsequenz. Lösungen findet man durch den Ansatz

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \varepsilon(\omega) \omega^2 \quad . \quad (4.5)$$

Hierbei sind

$$\mathbf{e}, \mathbf{k} \in \mathbb{C}^3 \quad , \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad . \quad (4.6)$$

Wir betrachten jetzt eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ . Wir suchen Lösungen der Maxwellgleichungen mit den Grenzbedingungen, dass die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  stetig sind. Wir geben  $\omega$  und die Tangentialkomponente  $\mathbf{k}_t$  von  $\mathbf{k}$  vor,  $\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{n} = 0$ ,  $\mathbf{k}_t \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{n}$  Normalenvektor der Grenzfläche (zeigt von 2 nach 1). Dann gilt für die Normalkomponente  $k_\perp$  von  $\mathbf{k}$ ,  $k_\perp = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}$

$$k_\perp^2 = \varepsilon \omega^2 - |\mathbf{k}_t|^2 \quad . \quad (4.7)$$

Wir wollen annehmen, dass  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für den Einfallswinkel  $\alpha$ ,

$$\sin^2 \alpha = \frac{|\mathbf{k}_t|^2}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} = \frac{|\mathbf{k}_t|^2}{\varepsilon(\omega) \omega^2} \quad , \quad (4.8)$$

d.h. für die beiden möglichen Richtungen in den Gebieten 1 bzw. 2 ist  $\sin^2 \alpha$  gleich (Reflexionssatz), und für die Richtungen in verschiedene Gebiete gilt das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_2} = \frac{\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_1(\omega)} = \frac{n_2^2}{n_1^2} \quad , \quad n = \sqrt{\varepsilon} \quad . \quad (4.9)$$

In jedem der beiden Gebiete gibt es vier linear unabhängige Lösungen, entsprechend den beiden Werten für  $k_\perp$  und den beiden unabhängigen Polarisationen. Wir betrachten den Fall, dass eine Welle aus dem Gebiet 1 auf die Grenzfläche trifft. Dann gibt es im Gebiet 2 nur die auslaufende Welle, die u.U. auch exponentiell gedämpft sein kann,  $k_\perp > 0$

oder  $\text{Im } k_{\perp} > 0$ . Um die Grenzbedingungen zu erfüllen, muss dann im Gebiet 1 auch das andere Vorzeichen von  $k_{\perp}$  auftreten, als reflektierte Welle.

Wie zerlegen unsere einlaufende Welle in den in der Einfallsebene (aufgespannt von  $\mathbf{k}_t$  und  $\mathbf{n}$ ) linear polarisierten Anteil (p-polarisiert) und den dazu senkrecht polarisierten Anteil (s-polarisiert). Für den s-polarisierten Anteil gilt ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e} = 0$ )

$$\mathbf{e}_{ein} + \mathbf{e}_{refl} = \mathbf{e}_{trans} \quad (\text{Stetigkeit von } \mathbf{E}_t) \quad (4.10)$$

$$k_{\perp ein} (\mathbf{e}_{ein} - \mathbf{e}_{refl}) = k_{\perp trans} \mathbf{e}_{trans} \quad (\text{Stetigkeit von } \mathbf{B}_t) \quad (4.11)$$

und damit

$$(k_{\perp trans} + k_{\perp ein}) \mathbf{e}_{refl} = -(k_{\perp trans} - k_{\perp ein}) \mathbf{e}_{ein} \quad . \quad (4.12)$$

Mit  $k_{\perp ein} = n_1 \cos \alpha_1$  ,  $k_{\perp trans} = n_2 \cos \alpha_2$  folgt

$$\mathbf{e}_{refl} = r_{\perp} \mathbf{e}_{ein} \quad . \quad (4.13)$$

mit dem Reflexionskoeffizienten

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} \quad (4.14)$$

$$= \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \quad . \quad (4.15)$$

Für den p-polarisierten Anteil erhält man entsprechend

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} \quad (4.16)$$

$$= \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_2} = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad . \quad (4.17)$$

Ist  $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ , so steht der reflektierte Strahl senkrecht auf dem gebrochenen. In diesem Fall verschwindet  $r_{\parallel}$ ; der reflektierte Strahl ist daher s-polarisiert. Der zugehörige Winkel  $\alpha_1$  heißt Brewsterwinkel  $\alpha_B$ ,

$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} \quad . \quad (4.18)$$

$|r_{\perp}|^2$  und  $|r_{\parallel}|^2$  sind die reflektierten Intensitäten im Zeitmittel, relativ zur einfallenden Intensität.

Ist  $n_2 < n_1$ , so ist  $\alpha_2$  für  $\alpha_1 > \alpha_g = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$  imaginär. Dann ist auch  $k_{\perp trans}$  imaginär, und die Welle fällt im Medium 2 exponentiell ab. Es gilt  $|r_{\perp}|^2 = |r_{\parallel}|^2 = 1$  (Totalreflexion).

Eine hübsche Anwendung des Brechungsgesetzes ist die Erklärung des Regenbogens. Wir betrachten den Strahlengang eines Lichtstrahls durch einen kugelförmigen Wassertropfen. Der Strahl treffe mit dem Winkel  $\alpha$  zur Normalen auf den Tropfen auf, Nach dem Brechungsgesetz tritt er mit dem Winkel  $\beta$  in den Tropfen ein,

$$n_{\text{Luft}} \sin \alpha = n_{\text{Wasser}} \sin \beta \quad , \quad (4.19)$$

wird einmal an der Innenseite reflektiert (wieder mit dem Winkel  $\beta$  zur Normalen) und tritt beim nächsten Auftreffen auf die Grenzfläche aus (mit Außenwinkel  $\alpha$ ). Insgesamt wird der Strahl um

$$\gamma = \pi - 4\beta + 2\alpha \quad (4.20)$$

abgelenkt. Sind die Winkel  $\alpha$  gleich verteilt (wie im Fall der Sonneneinstrahlung) so liegt das Reflexionsmaximum an der Stelle, an der  $\frac{d\gamma}{d\alpha}$  verschwindet. Es gilt

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = -4\frac{d\beta}{d\alpha} + 2. \quad (4.21)$$

Differenziert man das Brechungsgesetz nach  $\alpha$ , so findet man

$$n_{\text{Luft}} \cos \alpha = n_{\text{Wasser}} \cos \beta \frac{d\beta}{d\alpha}. \quad (4.22)$$

Einsetzen ergibt die Gleichung

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{3}(4 - n^2), \quad n = \frac{n_{\text{Wasser}}}{n_{\text{Luft}}} \quad (4.23)$$

Hieraus bestimmt man erst  $\alpha$ , dann  $\beta$  und schließlich  $\gamma$ . Da der Brechungsindex von der Frequenz abhängt, sind die Richtungen der maximalen Intensität für verschiedene Farben etwas verschieden. Ein Bogen wird sichtbar, da das System um den Lichtstrahl mit Winkel  $\alpha = 0$  kreissymmetrisch ist.