Übungen zur Theorie B - Elektrodynamik und Relativitätstheorie
Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis zum 28.10.2011 in der Vorlesung

1. Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Der Winkels $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq 0$ wird mit Hilfe des Skalarprodukts durch

   $$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \tag{1}$$

   definiert. Beweise damit den Kosinussatz der euklidischen Geometrie.

   (b) Beweise mit Hilfe der Formel für das zweifache Vektorprodukt

   $$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \tag{2}$$

   die Jacobi-Identität

   $$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0\ . \tag{3}$$

   (c) Berechne mit Hilfe der zyklischen Symmetrie des Spatprodukts

   $$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{4}$$

   sowie der Formel für das zweifache Vektorprodukt das Skalarprodukt zweier Vektorprodukte

   $$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\ . \tag{5}$$

2. Die Länge einer Kurve $[0, 1] \ni s \mapsto \mathbf{r}(s)$ ist

   $$L = \int_0^1 ds \left| \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \right|\ . \tag{6}$$

   Zeige, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade ist.

3. Der Flächeninhalt eines durch $[0, 1]^2 \ni (s, t) \mapsto \mathbf{r}(s, t)$ beschriebenen Flächenstücks ist

   $$F = \int_0^1 ds \int_0^1 dt \left| \frac{\partial\mathbf{r}(s,t)}{\partial s} \times \frac{\partial\mathbf{r}(s,t)}{\partial t} \right| \tag{7}$$

   Berechne den Fächeninhalt der Halbsphäre $|r| = 1, z \geq 0$.

Übungen zur Theorie B - Elektrodynamik und Relativitätstheorie
Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis zum 4.11.2011 in der Vorlesung

4. Ein Mann läuft mit einer 10m langen Leiter in eine 5m lange Garage. Wie schnell muss er laufen, damit die Leiter für einen Moment in die Garage passt?

5. Eine Uhr wird eine Stunde lang mit der Geschwindigkeit $v = 100\text{km/h}$ bewegt und dabei nach einer Stunde an den Anfangsort zurückgebracht. Wie groß ist der Gangunterschied zu einer am Ort verbliebenen Uhr?

6. Im Gravitationsfeld der Erde beträgt die Eigenzeit für einen Beobachter, der sich auf der Weltlinie $(t, r(t), \theta(t), \varphi(t))$, $t_1 \leq t \leq t_2$ (in Kugelkoordinaten) bewegt,

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)}\ . \quad (8)$$

Bei einer Kreisbahn ($r = \text{const}$, $\theta = \frac{\pi}{2}, \dot{\varphi} = \text{const}$, $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$) beträgt die Umlaufzeit $T = t_2 - t_1 = 2\pi r^{3/2}(GM)^{-1/2}$ (wie beim 3. Keplerschen Gesetz). Berechne die Eigenzeit für einen Umlauf.

Übungen zur Theorie B - Elektrodynamik und Relativitätstheorie
Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis zum 11.11.2011 in der Vorlesung

7. Die Arbeit, die längs eines Weges γ, parametrisiert durch $\mathbf{r}(s)$, $s_1 \leq s \leq s_2$, in einem Kraftfeld $F(\mathbf{r})$ geleistet wird, ist

$$A(\gamma) \equiv \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} ds\, \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(s) \ . \tag{9}$$

Wie groß ist die Arbeit im Kraftfeld

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, 0) \tag{10}$$

auf einem Kreis in der x-y-Ebene mit Radius R um den Ursprung?

8. Der Strom, der durch ein Flächenstück S, parametrisiert durch $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$, fließt, ergibt sich aus der Stromdichte $\mathbf{j}$ durch

$$I(S) \equiv \int_S \mathbf{j} \cdot d^2\mathbf{r} = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} dv\, \mathbf{j} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \ . \tag{11}$$

Wie groß ist der Strom durch das von den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannte Parallelogramm, wenn die Stromdichte durch $\mathbf{j} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$ gegeben ist? Hierbei sind $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ konstante Vektoren.

9. Eine Ortsbestimmung nach dem GPS-System beruht darauf, dass Eigenzeiten verschiedener Sender, deren Bahnen bekannt sind, durch Funksignale übermittelt werden. Ein Sender bewege sich auf der Weltlinie $(t, \mathbf{v}t)$, seine Eigenzeit sei vom Ursprung aus gerechnet. Welche Zeit wird an den Empfänger am Ort $\mathbf{r}$ zur Zeit t_0 übermittelt?

Übungen zur Theorie B - Elektrodynamik und Relativitätstheorie
Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis zum 18.11.2011 in der Vorlesung

10. Ein massives Teilchen bewegt sich in radialer Richtung in der Schwarzschild-Metrik nach innen. Nach welcher Eigenzeit hat es den Schwarzschildradius $r = 2m$ erreicht, wenn es bei $r = R > 2m$ mit Geschwindigkeit 0 gestartet ist?

11. Die δ-Funktion wird implizit definiert durch die Formel

$$\int dx \delta(x) f(x) = f(0) \ , \tag{12}$$

die n-te schwache Ableitung einer stetigen Funktion g durch

$$\int dx (\frac{d^n}{dx^n} g)(x) f(x) = (-1)^n \int dx g(x) \frac{d^n}{dx^n} f(x) \ . \tag{13}$$

Hierbei sollen diese Gleichungen für alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen f gelten, die außerhalb eines endlichen Intervalls verschwinden (sogenannte Testfunktionen).

Zeige, dass die Funktion $g(x) = x \ , \ x > 0 \ , \ g(x) = 0 \ , \ x \leq 0$ eine Lösung der (schwachen) Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} g(x) = \delta(x) \tag{14}$$

ist.

12. Berechne das im Unendlichen verschwindende elektrische Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(r)$ mit $\rho(r) = 0$ für $r > R$.

Übungen zur Theorie B - Elektrodynamik und Relativitätstheorie
Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis zum 25.11.2011 in der Vorlesung

13. Eine Punktladung liege auf der Flächennormalen im Abstand a über dem Mittelpunkt einer kreisförmigen Scheibe mit dem Radius r. Berechne den elektrischen Fluss durch die Scheibe.

14. In einer Kugel mit konstanter Ladungsdichte befindet sich ein kugelförmiger Hohlraum, dessen Mittelpunkt um den Vektor $\mathbf{a}$ gegenüber dem Mittelpunkt der großen Kugel verschoben ist. Bestimme das elektrische Feld im Hohlraum (das elektrische Feld im Unendlichen sei Null).

15. Finde eine Lösung der Laplacegleichung, die von dritter Ordnung in den kartesischen Koordinaten ist. Wie viele linear unabhängige Lösungen dieser Art gibt es?

Übungen zur Theorie B - Elektrodynamik und Relativitätstheorie
Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis zum 2.12.2011 in der Vorlesung

16. Bestimme diejenigen harmonischen Funktionen ψ, die sich als Produkte von Funktionen schreiben lassen, die jeweils nur von einer der kartesischen Koordinaten abhängen,

$$\psi(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)\ . \tag{15}$$

17. Bestimme die Greensche Funktion G_D mit Dirichletschen Randbedingungen für den eindimensionalen Laplaceoperator $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ auf dem Intervall $[0, 1]$.

18. Das elektrostatische Potential φ an der Oberfläche einer ladungsfreien Hohlkugel mit Radius R sei in Kugelkoordinaten gegeben durch

$$\varphi(r, \theta, \phi) = 1 + \cos\theta\ . \tag{16}$$

Bestimme das Potential und das elektrische Feld im Innern der Kugel.

Übungen zur Theorie B - Elektrodynamik und Relativitätstheorie
Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis zum 9.12.2011 in der Vorlesung

19. Eine Punktladung e befindet sich außerhalb einer leitenden geladenen Kugel mit Ladung $Q = e$. Berechne die auf die Punktladung wirkende Kraft und zeige, dass die Punktladung von der Kugel angezogen wird, wenn der Abstand von der Kugel genügend klein ist.

20. Berechne die elektrostatischen Energien einer geladenen leitenden Kugel und einer homogen geladenen Kugel.

21. Sei V ein offenes Gebiet des $\mathbb{R}^3$, das den Ursprung nicht enthält, und sei ψ eine in V harmonische Funktion Sei $V' = \{\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} | \mathbf{x} \in V\}$. Zeige, dass die Funktion

$$\psi'(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}\psi(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}) \tag{17}$$

in V' harmonisch ist.

Hinweis: In Kugelkoordinaten ist der Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \tag{18}$$

Übungen zur Theorie B - Elektrodynamik und Relativitätstheorie
Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis zum 16.12.2011 in der Vorlesung

22. Berechne die Kraft pro Länge zwischen 2 parallelen geradlinigen unendlich langen Leitern, in denen stationäre Ströme fließen.

23. Eine homogen geladene Kugel rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse. Berechne die entstehende Stromdichte $\mathbf{j}$ und zeige, dass $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ ist.

24. Ein stationärer Strom fließe in einer unendlich langen zylinderförmigen dichtgewickelten Spule mit n Windungen pro Längeneinheit. Beschreibe die Stromdichte als eine Distribution, die außerhalb des Zylindermantels verschwindet.

Übungen zur Theorie B - Elektrodynamik und Relativitätstheorie
Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis zum 23.12.2011 in der Vorlesung

25. Ein Magnetfeld sei gegeben durch

$$\mathbf{B}(x,y,z) = (0,0,f(x,y)) \tag{19}$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion f. Zeige, dass $\mathbf{B}$ die Gleichungen der Magnetostatik erfüllt, und bestimme die zugehörige Stromdichte.

26. Ein konstanter Strom I fließe entlang der z-Achse. Außerhalb der z-Achse gilt $\operatorname{rot}\mathbf{B} = 0$. Zeige, dass sich $\mathbf{B}$ außerhalb der Halbebene $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0 \text{ und } x \leq 0\}$ als Gradient einer skalaren Funktion φ_m (des *magnetischen Potentials*) schreiben lässt, und berechne den Sprung von φ_m an der Halbebene.

27. Sei P ein homogenes Polynom n-ter Ordnung in den kartesischen Koordinaten, das die Laplace-Gleichung $\Delta P = 0$ erfüllt. In Kugelkoordinaten ist der Winkelanteil des Laplace-Operators

$$\Delta_S = \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) . \tag{20}$$

Zeige, dass P die Eigenwertgleichung

$$\Delta_S P = aP \tag{21}$$

für ein $a \in \mathbb{R}$ erfüllt und berechne a.

Hinweis: Verwende die Formel für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten aus Aufgabe 21.

Übungen zur Theorie B - Elektrodynamik und Relativitätstheorie
Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis zum 13.1.2012 in der Vorlesung

28. Im Inneren eines realen Supraleiters erfüllt das Magnetfeld die Gleichung
$$\Delta\mathbf{B} = \Lambda^{-2}\mathbf{B} \tag{22}$$
mit der Eindringtiefe $\Lambda > 0$, am Rand ist es stetig. Ein Supraleiter fülle den Halbraum $z \leq 0$ aus. Außerhalb des Supraleiters sei das Magnetfeld konstant und zeige in x-Richtung. Berechne das Magnetfeld und die Stromdichte im Supraleiter (unter der Randbedingung, dass das Magnetfeld für $z \to -\infty$ verschwindet.).

29. Eine Kugel sei homogen magnetisiert. Bestimme das erzeugte Magnetfeld.

30. Ein linienförmiger Leiter der Masse m in der Form eines Quadrates der Seitenlänge a schwebe waagerecht in der Höhe h über einem idealen Supraleiter (Eindringtiefe $\Lambda = 0$) mit unendlich ausgedehnter waagerechter Oberfläche. Welcher Strom fließt im Leiter?