

Übungen zur Theorie A - Quantenmechanik Sommersemester 2011

Abgabe bis zum 18.4.2011 in der Vorlesung

1. (a) Beweise mit Hilfe der Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (1)$$

die Additionstheoreme für $\cos$ und $\sin$.

- (b) Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) + a\frac{d}{dx}f(x) + bf(x) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

- (c) Beweise für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ die Schwarzsche Ungleichung

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2. \quad (3)$$

2. (a) Ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ wird um die Drehachse $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, $|\mathbf{n}| = 1$ um den Winkel ϕ gedreht. Berechne den gedrehten Vektor $\mathbf{a}' = R(\mathbf{n}, \phi)\mathbf{a}$.

- (b) Zeige, dass gilt

$$\frac{d}{d\phi} R(\mathbf{n}, \phi)\mathbf{a}|_{\phi=0} = \mathbf{n} \times \mathbf{a}. \quad (4)$$

3. Die vertikale Auslenkung einer schwingenden Saite der Länge L erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t, x) - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t, x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad a > 0 \quad (5)$$

zusammen mit der Randbedingung

$$f(t, 0) = f(t, L) = 0. \quad (6)$$

Bestimme die möglichen stehenden Wellen und die zugehörigen Frequenzen.

Übungen zur Theorie A - Quantenmechanik
Sommersemester 2011

Abgabe bis zum 27.4.2011 in der Vorlesung

4. Eine quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{C} \quad (7)$$

nimmt die folgenden Werte an:

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 7, \quad f(3) = 4. \quad (8)$$

Bestimme a , b und c .

5. Bestimme die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}A(t) = i[H, A(t)] \quad (9)$$

für eine (2×2) -Matrix-wertige Funktion $A(t)$ mit

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad E_1, E_2 \in \mathbb{R} \quad (10)$$

und der Anfangsbedingung

$$A(0) = \sigma_1. \quad (11)$$

6. Zeige, dass alle unitären (2×2) -Matrizen U (d.h. $U^*U = \mathbf{1}$) sich in der Form

$$U = a(b_0\mathbf{1} + i\mathbf{b} \cdot \vec{\sigma}), \quad a \in \mathbb{C}, \quad b_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \quad (12)$$

mit $|a| = 1$ und $b_0^2 + |\mathbf{b}|^2 = 1$ darstellen lassen.

Übungen zur Theorie A - Quantenmechanik Sommersemester 2011

Abgabe bis zum 2.5.2011 in der Vorlesung

7. (a) Gibt es von Null verschiedene Matrizen, deren Quadrat verschwindet?
(b) Kann eine solche Matrix hermitesch sein?
8. Das Ammoniak-Molekül NH_3 besteht aus drei Wasserstoffatomen, die ein gleichseitiges Dreieck bilden, und einem Stickstoffatom, für das es zwei energetisch ausgezeichnete Positionen gibt, je eine an der Spitze einer Pyramide über, bzw. unter dem Dreieck. Wegen der Spiegelsymmetrie sind die potentiellen Energien an beiden Positionen gleich. Es gibt aber eine nichtverschwindende Übergangswahrscheinlichkeit (Tunneleffekt) zwischen diesen Positionen. Der Hamiltonoperator kann näherungsweise durch die (2×2) -Matrix

$$H = \begin{pmatrix} E & \epsilon \\ \epsilon & E \end{pmatrix} \quad (13)$$

beschrieben werden.

- (a) Berechne die Energieeigenwerte und die entsprechenden Projektoren.
(b) Zur Zeit $t = 0$ sei das Stickstoffatom in einer der beiden Positionen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Atom zu einem späteren Zeitpunkt in der anderen Position zu finden?
9. Berechne die Eigenwerte der (3×3) -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (14)$$

Übungen zur Theorie A - Quantenmechanik Sommersemester 2011

Abgabe bis zum 9.5.2011 in der Vorlesung

10. Berechne die Eigenwerte, die Eigenprojektionen und die Eigenvektoren der (3×3) -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

11. Schematisch lässt sich die chemische Bindung zwischen zwei Atomen durch ein gemeinsames Elektron beschreiben, dessen Dynamik durch eine (2×2) -Matrix der Form

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & \epsilon \\ \bar{\epsilon} & E_2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

bestimmt ist. Hierbei bezeichnen die Diagonalelemente $E_1, E_2 \in \mathbb{R}$ die Energieniveaus des Elektrons in den einzelnen Atomen, während $\epsilon \in \mathbb{C}$ der Amplitude des Übergangs zwischen den Atomen entspricht. Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von H und zeige, dass der kleinste Eigenwert von H für $\epsilon \neq 0$ immer kleiner als E_1 und E_2 ist.

12. Das Benzolmolekül C_6H_6 besteht aus 6 Kohlenstoffatomen, die an den Ecken eines gleichmäßigen Sechsecks sitzen, und je einem Wasserstoffatom an jedem Kohlenstoffatom. Denkt man sich die einfache Bindung zwischen den Atomen durch je ein gemeinsames Elektronenpaar realisiert, so bleiben 6 Valenzelektronen übrig. Die potentielle Energie eines dieser Valenzelektronen hat Minima an den Ecken des Sechsecks. Näherungsweise wird seine Dynamik durch die (6×6) -Matrix

$$H = \begin{pmatrix} E & \epsilon & 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ \epsilon & E & \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & E & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & E & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & E & \epsilon \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 & \epsilon & E \end{pmatrix} \quad (17)$$

beschrieben ($E, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon < 0$). Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von H .

Hinweis: Zeige, dass sich H in der Form

$$H = E\mathbf{1} + \epsilon U + \epsilon U^* \quad (18)$$

b.w.

schreiben lässt, mit U unitär. Zeige dann, dass $U^6 = \mathbf{1}$ ist und dass die Eigenvektoren von U auch Eigenvektoren von H sind.

Übungen zur Theorie A - Quantenmechanik Sommersemester 2011

Abgabe bis zum 16.5..2011 in der Vorlesung

13. Ein Operator, der mit seinem Adjungierten vertauscht, wird normal genannt. Zeige, dass ein normaler Operator eine Spektraldarstellung mit komplexen Eigenwerten besitzt.

14. Zeige, dass es keine endlichen Matrizen A, B gibt, die die kanonische Vertauschungsrelation

$$[A, B] = i\mathbf{1} \quad (19)$$

erfüllen.

15. Das K^0 -Meson hat Parität $P = -1$ und Strangeness $S = 1$. Unter Ladungskonjugation C geht es in sein Antiteilchen $\overline{K}^0$ über mit Parität $P = -1$ und Strangeness $S = -1$. Die schwache Wechselwirkung kann die Strangeness ändern, ist aber näherungsweise invariant unter CP . Wir beschreiben das System durch (2×2) -Matrizen mit $P = -\mathbf{1}$, $C = \sigma_1$ und $S = \sigma_3$. Das K^0 -Meson ist instabil, deshalb beschreiben wir seine Zeitentwicklung durch eine nichthermitesche Matrix H . Da angenommen werden kann, dass CP erhalten ist, soll H mit CP kommutieren. Der antihermitesche Anteil $\frac{1}{2i}(H - H^*)$ von H soll nur negative Eigenwerte Γ_1 und Γ_2 haben. Die zugehörigen Eigenvektoren werden nach ihrer Lebensdauer als K_{short} und K_{long} bezeichnet.

- (a) Bestimme die allgemeinste Form von H .
- (b) Zeige, dass H normal ist, und bestimme seine Eigenvektoren und Eigenwerte.
- (c) Nach der Schrödingergleichung erfüllt der Zustandsvektor (im Schrödingerbild) die Gleichung

$$i \frac{d}{dt} \Psi(t) = H \Psi(t) . \quad (20)$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das K^0 -Meson nach der Zeit t noch nicht zerfallen ist?

Übungen zur Theorie A - Quantenmechanik
Sommersemester 2011

Abgabe bis zum 23.5.2011 in der Vorlesung

16. Zeige, dass die Matrizen

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

die Drehimpulsvertauschungsrelationen erfüllen, und bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von S_3 .

17. Berechne den Zeitentwicklungsoperator für den Hamiltonoperator

$$H = S_3 \quad (22)$$

mit S_3 aus (21).

18. Bei der Kernfusion im Innern der Sonne entstehen Elektroneneutrinos ν_e . Obwohl diese wegen ihrer schwachen Wechselwirkung die Sonne nahezu ungestört durchdringen können, kann auf der Erde nur ein kleiner Teil dieser Neutrinos nachgewiesen werden. Dieser Effekt wird durch Neutrinooszillationen erklärt. Im einfachsten Fall ist das Elektroneneutrino eine Superposition zweier Neutrinosorten ν_1 und ν_2 mit Massen m_1 , bzw. m_2 ,

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle, \quad (23)$$

mit dem Mischungswinkel θ . Für relativistische Neutrinos ν mit Masse m und Impuls p , $pc \gg mc^2$ ist der Hamiltonoperator näherungsweise gegeben durch

$$H|\nu\rangle = (pc + \frac{m^2c^3}{2p})|\nu\rangle. \quad (24)$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, im Abstand R von der Sonne ein in der Sonne erzeugtes Elektroneneutrino zu finden (als Funktion von θ , p und der Massen der Neutrinos ν_1 und ν_2)? (Die Geschwindigkeit der Neutrinos kann gleich der Lichtgeschwindigkeit gesetzt werden.)

Übungen zur Theorie A - Quantenmechanik Sommersemester 2011

Abgabe bis zum 30.5.2011 in der Vorlesung

19. Die Messungen der drei räumlichen Komponenten des Spins der Elektronen aus einer Elektronenquelle habe die Mittelwerte s_x, s_y, s_z ergeben. Welche Dichtematrix ρ beschreibt diesen Zustand? Unter welchen Bedingungen an die Werte s_x, s_y, s_z ist der Zustand rein?
20. Zeige, dass ein Operator auf einem komplexen Hilbertraum genau dann hermitisch ist, wenn alle seine Erwartungswerte reell sind.
21. Das Butadienmolekül C_4H_6 besteht aus einer Kette von 4 Kohlenstoffatomen. An den Enden der Kette sind zwei Wasserstoffatome, an den inneren Kohlenstoffatomen je ein Wasserstoffatom gebunden. Die 9 einfachen Bindungen des Moleküls nehmen 18 der 22 Valenzelektronen auf, die verbleibenden 4 verteilen sich auf die ganze Kette. Die Dynamik eines dieser Elektronen wird näherungsweise durch den Hamiltonoperator

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} E & \epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & E & \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon & E & \epsilon \\ 0 & 0 & \epsilon & E \end{pmatrix} \quad (25)$$

beschrieben, mit der Energie E bei Aufenthalt an einem der Kohlenstoffatome und dem Hüpfparameter $\epsilon < 0$. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von H .

Übungen zur Theorie A - Quantenmechanik Sommersemester 2011

Abgabe bis zum 6.6.2011 in der Vorlesung

22. Der Hamiltonoperator eines aus zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Systemen zusammengesetzten Systems sei

$$H = a\sigma_x \otimes \sigma_x + b\sigma_y \otimes \sigma_y + c\sigma_z \otimes \sigma_z, \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

- (a) Zeige, dass die Summanden von H miteinander vertauschen.
 - (b) Bestimme die Eigenwerte und die gemeinsamen Eigenvektoren dieser drei Operatoren.
 - (c) Berechne die Eigenwerte von H .
23. Zeige, dass eine Dichtematrix ρ genau dann einen reinen Zustand beschreibt, wenn sie die Gleichung $\rho^2 = \rho$ erfüllt.
24. Bei einer ebenen elektromagnetischen Welle durchläuft der Vektor des elektrischen Feldes an jedem Punkt des Raumes eine Ellipse, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht. Wir interpretieren diese Ellipse als den Polarisationszustand eines Photons. Er wird charakterisiert durch zwei Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^3$ in Richtung der beiden Halbachsen, die aufeinander und auf dem Wellenzahlvektor senkrecht stehen. Wir fassen $\mathbf{e} := \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$ als Element des $\mathbb{C}^2$ auf. Ein linearer Polarisator in Richtung ϕ wirkt auf $\mathbf{e}$ als (2×2) -Matrix

$$P_\phi = \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi \\ \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \phi \end{pmatrix} \quad (27)$$

- (a) Zeige, dass P_ϕ ein Projektor ist.
- (b) Wie lässt sich dieser Projektor durch die Pauli-Matrizen ausdrücken?

Übungen zur Theorie A - Quantenmechanik
Sommersemester 2011

Abgabe bis zum 20.6.2011 in der Vorlesung

25. Berechne die Fouriertransformierten

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (28)$$

der folgenden Funktionen:

- (a) $f(x) = e^{-m|x|}$, $m > 0$
 - (b) $f(x) = 1$, $|x| < R$, $f(x) = 0$, $|x| \geq R$
 - (c) $f(x) = |x|$, $|x| < R$, $f(x) = 0$, $|x| \geq R$.
26. Sei $\Phi^{(n)}(x) = \sin n\pi x$, $x \in [0, 1]$ eine Familie von Vektoren aus dem Hilbertraum $L^2([0, 1])$.
- (a) Berechne die Skalarprodukte $\langle \Phi^{(n)}, \Phi^{(m)} \rangle$.
 - (b) Berechne die Skalarprodukte $\Psi_k := \langle \Phi^{(k)}, \Psi \rangle$ für die Funktionen $\Psi(x) = 1$ und $\Psi(x) = \cos \pi x$.
 - (c) Zeige, dass die beiden Folgen $(\Psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ quadratsummabel sind.
27. Die Grundzustandswellenfunktion des Wasserstoffatoms ist

$$\Phi(\mathbf{x}) = N e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{a}} , \quad a \text{ Bohrscher Radius} , N > 0 .$$

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält sich das Teilchen im Inneren einer Kugel mit Radius R um den Ursprung auf?
- (b) Wie groß ist der Erwartungswert von $|\mathbf{x}|^n$, $n \in \mathbb{N}$?
- (c) Wie groß ist der Erwartungswert der kinetischen Energie?

Übungen zur Theorie A - Quantenmechanik Sommersemester 2011

Abgabe bis zum 27.6.2011 in der Vorlesung

28. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren des Vernichtungsoperators

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right) \quad (29)$$

auf $L^2(\mathbb{R})$ und berechne das Skalarprodukt zwischen den Eigenvektoren. Warum müssen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten nicht orthogonal sein?

29. Die Grundzustandswellenfunktion eines Elektrons im Feld eines Kerns mit Kernladungszahl Z ist

$$\psi_Z(\mathbf{x}) = N_Z e^{-\frac{|\mathbf{x}|Z}{a}}, \quad a \text{ Bohrscher Radius.} \quad (30)$$

mit einem Normierungsfaktor $N_Z > 0$. Ein Elektron befinde sich im Grundzustand eines Tritiumkerns. Dieser zerfällt durch β -Zerfall in He^3 . Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Elektron nach dem Zerfall im Grundzustand des Heliumkerns?

30. Ein geladenes Teilchen der Masse m und der Ladung e bewege sich in einer Ebene unter dem Einfluss eines konstanten Magnetfeldes $\mathbf{B}$, das senkrecht auf der Ebene steht.

- (a) Berechne mit Hilfe der Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ die klassische Bewegung des Teilchens.
- (b) Der Hamiltonoperator für die Bewegung des Teilchens in der Ebene ist

$$H = \frac{1}{2m} \left(\left(p_1 - \frac{1}{2}ex_2B_3\right)^2 + \left(p_2 + \frac{1}{2}ex_1B_3\right)^2 \right). \quad (31)$$

Löse die Heisenberggleichung und bestimme das Spektrum von H .

Probeklausur zur Theorie A
Sommersemester 2011

Mittwoch, 6.7.2011, Seminarraum 4

Bewertung: Jede richtige Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. 12 Punkte entsprechen 100%.

1. Sei H eine hermitesche $(n \times n)$ -Matrix.
 - (a) Zeige, dass die Erwartungswerte von H reell sind.
 - (b) Zeige, dass die Eigenwerte von H reell sind.
 - (c) Zeige, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind.
2. Berechne die Eigenwerte und Eigenprojektionen der (3×3) -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (32)$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im Zustand $\Phi = (1, 0, 0)^T$ den größten Eigenwert von A zu messen?

3. Zeige, dass die Komponenten des Drehimpulsoperators $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ die Vertauschungsrelation

$$[L_1, L_2] = iL_3 \quad (33)$$

erfüllen. Zeige, dass daraus folgt, dass der Erwartungswert von L_3 in einem Eigenzustand von L_1 verschwindet.

4. Sei a ein Operator, der mit seinem adjungierten a^* die Vertauschungsrelation $[a, a^*] = 1$ erfüllt, und sei Φ ein Eigenvektor von a zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Berechne den Erwartungswert und die Varianz des Teilchenzahloperators $N = a^*a$.