

Übungen zur Thermodynamik Wintersemester 2010/2011

Abgabe bis zum 28.10.2010 in der Vorlesung

1. 1 Mol H_2 verbrennt bei konstanter Temperatur und konstantem Druck zu flüssigem H_2O . Bestimme die Differenz der Verbrennungswärmen bei 280 K und 290 K.

Hinweis: H_2 und O_2 können als ideale Gase behandelt werden mit $C_p = \frac{7}{2}Nk$. Die spezifische Wärmekapazität von H_2O kann als temperaturunabhängig angenommen werden.

2. Die thermische Zustandsgleichung eines Gases sei von der Form

$$F(p, V, T) = 0 .$$

Leite daraus eine Relation zwischen dem isobaren Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_p$, dem isochoren Spannungskoeffizienten $\beta = \frac{1}{p}(\frac{\partial p}{\partial T})_V$ und der isothermen Kompressibilität $\kappa = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial p})_T$ her. Wie können diese Koeffizienten experimentell bestimmt werden? (Skizze)

3. Bei einem Gas seien die Wärmekapazitäten C_p und C_V sowie die Richtung der Isotherme im p - V -Diagramm, $(\frac{\partial p}{\partial V})_T$ bekannt. Bestimme die Wärmekapazität C_λ für einen quasistatischen Prozess mit $dp = \lambda dV$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Übungen zur Thermodynamik Wintersemester 2010/2011

Abgabe bis zum 4.11.2010 in der Vorlesung

4. Der in einem Stirlingmotor ablaufende Kreisprozess kann näherungsweise als ein quasistatischer Kreisprozess aufgefasst werden, der aus zwei Isothermen und zwei Isochoren besteht. Berechne den Wirkungsgrad des Prozesses. Die Arbeitssubstanz sei ein von der Waalssches Gas.

Hinweis: Die einem van der Waalsschen Gas quasistatisch zugeführte Wärme hat in Abhängigkeit von der Teilchenzahl N , dem Volumen pro Teilchen v und der Temperatur T die Form

$$\delta Q = C_V dT + \frac{NkT}{v-b} dv .$$

(C_V kann als konstant angenommen werden.)

5. Bei einem Photonengas im thermischen Gleichgewicht gilt zwischen Druck p und Energiedichte u die Beziehung

$$p = \frac{1}{3}u .$$

u ist eine Funktion der Temperatur.

Zeige, dass u das Stephan-Boltzmann-Gesetz erfüllt,

$$u(T) = \sigma T^4$$

mit einer Konstanten σ .

Hinweis: Zeige zunächst mittels der Existenz der Zustandsgrößen E und S , dass sich $u = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T$ durch die thermische Zustandsgleichung ausdrücken lässt. Leite daraus eine Differentialgleichung für u her.

6. Zwei Systeme, die jeweils im Gleichgewicht sind, werden in thermischen Kontakt gebracht. Der Temperaturengleich erfolge quasistatisch. Beschreibe den ablaufenden Prozess als Weg im T_1 - T_2 -Diagramm und berechne den Verlauf der Entropiezunahme längs des Weges. Die isochoren Wärmekapazitäten der beiden Systeme seien als konstant angenommen.

Übungen zur Thermodynamik Wintersemester 2010/2011

Abgabe bis zum 11.11.2010 in der Vorlesung

7. Zeige, dass das Vorzeichen des isobaren Ausdehnungskoeffizienten darüber entscheidet, ob bei einem isothermen Prozess Wärme aufgenommen wird. Bei einem Carnot-Prozess zwischen der 6°C und der 2°C Isotherme von Wasser würde also nur Wärme aufgenommen, im Widerspruch zum 2. Hauptsatz. Wo steckt der Trugschluss?
8. Bestimme die Legendretransformierte

$$Lf(p) = \sup_x (xp - f(x))$$

der Funktion

$$f(x) = x^2 + |x| .$$

9. Bestimme für ein van der Waalsches Gas mit konstanter Wärmekapazität C_V die thermodynamischen Potentiale S (Entropie) und F (freie Energie) als Funktionen ihrer kanonischen Variablen.

Übungen zur Thermodynamik
Wintersemester 2010/2011

Abgabe bis zum 18.11.2010 in der Vorlesung

10. (a) Zeige, dass die innere Energie eine konvexe Funktion ihrer natürlichen Variablen ist, falls die Entropie, bei festgehaltenem Volumen, eine strikt monoton wachsende Funktion der inneren Energie ist.
(b) Zeige, dass dann das Gibbsche Potential $G = E - TS + pV$ eine konkave Funktion ihrer natürlichen Variablen p und T ist.
11. Bei einem Tripelpunkt gasförmig-fest-flüssig einer reinen Substanz führt man der festen Phase eine Wärmemenge Q zu. Dabei vergrößert sich das Volumen um den Faktor λ . Die isobaren Übergangswärmen pro Teilchen seien gegeben, ebenso die Volumina pro Teilchen der 3 reinen Phasen.
Wieviele Teilchen gehen in die flüssige bzw. die gasförmige Phase?
Wann wird der Tripelpunkt verlassen?
12. Leite die Clausius-Clapeyron-Gleichung mit Hilfe eines Kreisprozesses zwischen benachbarten Isothermen her.

Übungen zur Thermodynamik
Wintersemester 2010/2011

Abgabe bis zum 25.11.2010 in der Vorlesung

13. Für die innere Energie eines hypothetischen Systems werde die folgende Entropieabhängigkeit postuliert (die anderen extensiven Zustandsgrößen sind konstant):

$$E = S^3 - S^2 + S, \quad S \geq 0.$$

- (a) Zeige, dass E strikt monoton wächst, aber nicht konvex ist.
 - (b) Konstruiere die konvexe Einhüllende \tilde{E} von E .
 - (c) Bestimme die Entropien und Energien der durch das thermodynamische Potential \tilde{E} beschriebenen reinen Phasen sowie die beim Phasenübergang herrschende Temperatur.
 - (d) Berechne die freie Energie als Funktion der Temperatur.
14. Für die Schallgeschwindigkeit c eines Gases gilt

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$$

mit der Massendichte ρ . Bestimme die Schallgeschwindigkeit eines van der Waals-Gases am kritischen Punkt.

15. Wie ändert sich der Dissoziationsgrad eines verdünnten Elektrolyten, wenn die Konzentration verringert wird?

Übungen zur Thermodynamik Wintersemester 2010/2011

Abgabe bis zum 16.12.2010 in der Vorlesung

16. Eine Höhle liege 10m unterhalb der Erdoberfläche. An der Erdoberfläche schwanke die Temperatur je nach Tageszeit nach der Formel

$$T = T_0 - T_1 \sin \omega t ,$$

mit $\omega = 2\pi/d$, $T_0 = 300K$, $T_1 = 10K$. $t = 0$ entspreche 8 Uhr morgens. Der Wärmeleitfähigkeitskoeffizient des Erdreichs sei $\lambda = 10^{-2}m^2/s$. Um wieviel Uhr ist es in der Höhle am wärmsten, und wie hoch ist die Temperatur um Mitternacht?

Hinweis: Man verwende die Wärmeleitungsgleichung für eine räumliche Dimension.

17. (a) Bestimme bei einem Spin- $\frac{1}{2}$ -System die Dichtematrizen der Eigenzustände der Paulimatrizen.
(b) Konstruiere die Dichtematrizen ρ_λ , $0 < \lambda < 1$ der konvexen Kombinationen der Eigenzustände von σ_1 und σ_2 zum Eigenwert +1 und bestimme ihre Eigenwerte und Eigenvektoren.
18. Der Zustand eines klassischen 1-dimensionalen harmonischen Oszillators mit Frequenz ω sei zur Zeit $t = 0$ gegeben durch die Phasenraum-dichte

$$\varrho(q, p) = Z^{-1} e^{-\alpha p^2 - \beta q^2} , \quad \alpha, \beta > 0 .$$

Bestimme die Phasenraum-dichte zur Zeit t und den Normierungsfaktor Z . Für welche Werte von α und β ist die Phasenraum-dichte zeitlich konstant?

Übungen zur Thermodynamik Wintersemester 2010/2011

Abgabe bis zum 6.1.2011 in der Vorlesung

19. Berechne für einen eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator die quadratische Unschärfe des Ortes im kanonischen Ensemble zur Temperatur T .
20. Sei ϱ die Dichtefunktion eines klassischen N -Teilchensystems mit Hamiltonfunktion

$$H(p, q) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{3N} p_i^2 + V(q)$$

im kanonischen Ensemble zur Temperatur T . Bestimme die mittlere Zahl der Teilchen mit Geschwindigkeiten $a < \sqrt{v_x^2 + v_y^2} < b$, $0 < a < b$.

21. Ein System von N wechselwirkungsfreien klassischen Teilchen befinde sich im Volumen V in einem mikrokanonischen Gleichgewichtszustand. Berechne den Erwartungswert der Teilchenzahl in einem Teilvolumen der Größe pV , $0 < p < 1$, sowie ihre mittlere quadratische Abweichung.

Übungen zur Thermodynamik
Wintersemester 2010/2011

Abgabe bis zum 13.1.2011 in der Vorlesung

22. Ein Spin-1-System sei über ein magnetisches Moment an ein äußeres Magnetfeld gekoppelt. Berechne Zustandssumme, mittlere Energie, Wärmekapazität und mittleres magnetisches Moment als Funktionen von Temperatur und Magnetfeld.
23. Von einem Massenpunkt der Masse m , der sich kräftefrei in 3 Dimensionen bewegt, sei nur bekannt, dass er sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in einer Kugel mit Radius R_0 befindet und dass seine Energie kleiner als E_0 ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man den Massenpunkt zu größeren Zeiten ($t > 2R_0/v_{max}$) noch in der Kugel findet?
24. Zeige, dass in einem klassischen System im kanonischen Ensemble zur Temperatur $T > 0$ für zwei Phasenraumfunktionen f und g gilt:

$$\langle \{f, g\} - \frac{1}{T} f \{H, g\} \rangle = 0$$

(klassische KMS-Bedingung). Benutze diese Beziehung zum Beweis des Gleichverteilungssatzes für das kanonische Ensemble.

Hinweis: Nutze aus, dass das Phasenraumintegral einer Poissonklammer verschwindet.

Übungen zur Thermodynamik Wintersemester 2010/2011

Abgabe bis zum 20.1.2011 in der Vorlesung

25. Berechne für ein Gas aus N klassischen masselosen Teilchen die thermische und die kalorische Zustandsgleichung mit Hilfe des kanonischen Ensembles. Genügt das Gas dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz? (vergleiche mit Aufgabe 5.)
- Hinweis: Die Energie eines masselosen Teilchens mit Impuls \mathbf{p} beträgt $|\mathbf{p}|$ (Lichtgeschwindigkeit $c \equiv 1$).
26. Die Messungen der drei räumlichen Komponenten des Spins der Elektronen aus einer Elektronenquelle habe die Mittelwerte s_x, s_y, s_z ergeben. Welche Dichtematrix ρ beschreibt diesen Zustand? Unter welchen Bedingungen an die Werte s_x, s_y, s_z ist der Zustand rein? Zeige, dass ρ , wenn es nicht rein ist, die Dichtematrix eines kanonischen Ensembles für einen geeignet gewählten Hamilton-Operator ist, und bestimme die zugehörige Entropie.
27. Bei einem statistischen Experiment werde mit N gleichartigen Würfeln gewürfelt und nach jedem Wurf die Summe der geworfenen Augen registriert.
- Welcher Mittelwert ergibt sich für die Summe nach sehr vielen Würfeln? Wie groß ist die absolute und relative Streuung?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Hälfte der Würfel die 6 zeigt (für N gerade)?

Übungen zur Thermodynamik Wintersemester 2010/2011

Abgabe bis zum 27.1.2011 in der Vorlesung

28. Ein System von ungekoppelten Spin- $\frac{1}{2}$ -Systemen besitze den Hamiltonoperator

$$H = \frac{J}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_z(i) + 1) , J > 0 .$$

- (a) Bestimme die Zahl der linear unabhängigen Zustandsvektoren mit Energieeigenwert $E = nJ$, $n \in \mathbb{N}_0$.
 - (b) Bestimme die Temperatur $T(E)$ des kanonischen Ensembles, für das der Erwartungswert der Energie $E = nJ$ ist.
 - (c) Berechne die Entropie des kanonischen Ensembles mit Temperatur $T(E)$ und vergleiche sie mit der des mikrokanonischen Ensembles zur Energie E in Abhängigkeit von N .
29. Ein quantenmechanisches Vielteilchensystem bestehe aus ungekoppelten Bosonen, die die Energieeigenwerte

$$E_n = \ln p_n$$

annehmen, wobei p_n die n -te Primzahl darstellt. Zeige, dass die großkanonische Zustandssumme für Temperaturen $T < 1$ und verschwindendes chemisches Potential durch die Riemannsche ζ -Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} , \text{ Res} > 1$$

ausgedrückt werden kann.

30. Zeige, dass der Erwartungswert der Energie in einem kanonischen Gleichgewichtszustand eines quantenmechanischen Systems mit endlichdimensionalem Zustandsraum zu positiver Temperatur durch unitäre Transformationen nicht verkleinert werden kann,

$$\langle U H U^{-1} \rangle \geq \langle H \rangle .$$

(Sogenannte Passivität, interpretierbar als die Minimalitätseigenschaft der Energie bei reversiblen Prozessen.)

Hinweis: Rechne mit Matrizen in der Energiedarstellung und nutze die Ungleichung $x \geq 1 - e^{-x}$ (Beweis ?) für die Differenzen der Energieeigenwerte aus.