

Einführung in die Theoretische Physik II

Wintersemester 2007/2008

KLAUS FREDENHAGEN

II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

Literatur

- S. Großmann: Mathematischer Einführungskurs in die Physik
- M. Kallenrode. Rechenmethoden der Physik
- J. Honerkamp, H. Römer: Grundlagen der Klassischen Theoretischen Physik
- W. Nolting: Grundkurs: Theoretische Physik 3. Elektrodynamik
- K. Hellwig, B. Wegner: Mathematik und Theoretische Physik I

INHALTSVERZEICHNIS

1. Teilchen und Felder	4
2. Raum und Zeit in der speziellen Relativitätstheorie	5
3. Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale	14
4. Integralsätze	21
5. Differentielle Formulierung der Maxwell-Gleichungen	25
6. Krummlinige Koordinaten	35
7. Relativistische Geschwindigkeitsaddition	37
8. Komplexe Analysis (Funktionentheorie)	39
9. Fourier-Transformation	44
10. Greensche Funktionen	51
11. Distributionen	63

1. TEILCHEN UND FELDER

In der Mechanik denkt man sich die Materie aus kleinsten Teilchen, den Massepunkten, aufgebaut. Diese nehmen zu jeder Zeit t einen Punkt \vec{r} des 3-dimensionalen euklidischen Raums ein. Man studiert dann die Bewegung der Teilchen, nämlich ihre Bahnkurven $\vec{r}(t)$. Wichtige Größen für die Beschreibung der Bahnkurve sind die Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t)$$

und die Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) .$$

Die Bewegung des Teilchens wird durch die Newtonsche Bewegungsgleichung bestimmt,

$$\boxed{m \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)} , \quad (1.1)$$

sofern die Anfangswerte $\vec{r}(0)$ und $\vec{v}(0)$ gegeben sind. Hierzu muss das Kraftgesetz bekannt sein.

Z. B. gilt für die Gravitationskraft, die eine Masse der Größe M am Punkt \vec{R} ausübt

$$\vec{F}(\vec{r}) = -GmM \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} . \quad (1.2)$$

Die Mechanik führt so Kräfte auf Fernwirkungen zurück. Das Teilchen wird vom Vorhandensein einer Masse an einem anderen Ort beeinflusst. Anschaulich gesprochen, muss das Teilchen merken, wo diese Masse sich befindet. Dies hat man in der Physik immer als unbefriedigend empfunden.

Das Unbehagen an dem Konzept der Fernwirkung hat zur Formulierung des Nahwirkungsprinzips geführt. Danach sollen physikalische Systeme nur ihre unmittelbaren Nachbarn direkt beeinflussen können. Als Überträger der Kraft wird eine neue Größe postuliert, nämlich das Feld. Ein Feld ist eine Funktion auf dem Ortsraum. Wir kennen skalare Felder, wie die Dichte oder die Temperaturverteilung, und Vektorfelder, etwa das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit, das Gravitationsfeld und elektrische und magnetische Felder. Im obigen Beispiel ist $\vec{F}(\vec{r})$ das Kraftfeld, das die Bewegung des Teilchens bestimmt.

Es stellte sich dann heraus, dass die Felder eine selbständige Rolle spielen, die sich zum Beispiel in der Existenz elektromagnetischer Wellen zeigt. In der modernen Elementarteilchentheorie sind die Felder das grundlegende Konzept, aus dem die Teilchen abgeleitet werden.

Theme dieser Vorlesung ist das elektromagnetische Feld und die mathematischen Methoden, die zu seiner Beschreibung benötigt werden.

Die Gesetze des elektromagnetischen Feldes wurden erstmals von Maxwell (1862) vollständig angegeben. Ihre wichtigste Konsequenz ist die Existenz elektromagnetischer Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit $c = 299792458 \text{ms}^{-1}$ ausbreiten.

Eine große Überraschung war, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Bewegung des Bezugssystems ist, wie Michelson-Morley 1881 zeigten. Dies lässt sich mit Hilfe der speziellen Relativitätstheorie erklären, die von Einstein 1905 aufgestellt wurde.

2. RAUM UND ZEIT IN DER SPEZIELLEN RELATIVITÄTSTHEORIE

Unser Raum ist mit guter Genauigkeit ein 3-dimensionaler euklidischer Raum. Nach der Wahl eines Ursprungs O („origin“) kann ein beliebiger Punkt P durch einen Verschiebungsvektor \vec{r} beschrieben werden, der O nach P verschiebt. Ändert man den Ursprung zu O' und ist \vec{R} der Verschiebungsvektor von O' nach O , so ergibt sich die Verschiebung \vec{r}' von O' nach P als die Vektorsumme der beiden Verschiebungsvektoren \vec{r} und \vec{R} ,

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R} .$$

In einem kartesischen Koordinatensystem kann \vec{r} mit einem Tripel (x, y, z) reeller Zahlen identifiziert werden. Vektoraddition und Skalarmultiplikation erfolgen dann komponentenweise,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} ,$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} , \lambda \in \mathbb{R} .$$

Als weitere Struktur hat man einen Abstands begriff

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.1)$$

(Pythagoras), aus dem man das Skalarprodukt

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \frac{1}{2} (|\vec{r}_1 + \vec{r}_2|^2 - |\vec{r}_1|^2 - |\vec{r}_2|^2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (2.2)$$

ableiten kann. Der Winkel α zwischen \vec{r}_1 und \vec{r}_2 wird durch

$$\cos \alpha = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| |\vec{r}_2|}$$

definiert. Das Skalarprodukt hat die Eigenschaften

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 \quad (\text{Symmetrie}) , \quad (2.3)$$

$$\vec{r}_1 \cdot (\lambda \vec{r}_2 + \mu \vec{r}_3) = \lambda \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + \mu \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3 \quad (\text{Linearität}) , \quad (2.4)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = |\vec{r}|^2 > 0 \quad \text{für } \vec{r} \neq 0 \quad (\text{Positivität}) . \quad (2.5)$$

Wichtig ist ferner das Vektorprodukt, das in dieser Form nur in 3 Dimensionen existiert. Man ordnet dabei 2 Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 einen Vektor $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ zu, der senkrecht auf dem von \vec{r}_1 und \vec{r}_2 aufgespannten Parallelogramm steht und dessen Länge gerade die Fläche des Parallelogramms ist. Dabei wird die Orientierung einer Rechtsschraube gewählt: dreht man \vec{r}_1 innerhalb des Parallelogramms in die Richtung von \vec{r}_2 , so bewegt sich die Schraube in Richtung \vec{r} . Die Fläche des Parallelogramms ist

$$|\vec{r}| = |\vec{r}_1||\vec{r}_2| \sin \alpha .$$

In Komponenten gilt

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} . \quad (2.6)$$

Das Vektorprodukt ist also antisymmetrisch und linear.

Für das zweifache Vektorprodukt erhält man

$$\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3) \vec{r}_2 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) \vec{r}_3 . \quad (2.7)$$

Man entnimmt dieser Formel, dass das Kreuzprodukt nicht assoziativ ist. Stattdessen gilt die **Jacobi-Identität**

$$\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) + \vec{r}_2 \times (\vec{r}_3 \times \vec{r}_1) + \vec{r}_3 \times (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = 0 , \quad (2.8)$$

wie man durch Einsetzen der Formel für das zweifache Vektorprodukt leicht nachrechnet.

Das Volumen V eines Parallelepipeds („Spat“), der von den Vektoren \vec{r}_1, \vec{r}_2 und \vec{r}_3 aufgespannt wird, lässt sich mit Hilfe des **Spatprodukts** berechnen,

$$V = \vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) = \vec{r}_2 \cdot (\vec{r}_3 \times \vec{r}_1) = \vec{r}_3 \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} . \quad (2.9)$$

Hierbei ist die Determinante \det im n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n ein Funktional auf quadratischen Matrizen. Am einfachsten lässt es sich als multilineares Funktional auf den Spaltenvektoren der Matrix charakterisieren. Sind die n -Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ die Spaltenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix} .$$

Dann ist $\det(A) = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt:

- (i) Die Determinante erfüllt für jeden Spaltenvektor das Distributivgesetz,

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \lambda \vec{a}_i + \mu \vec{b}_i, \dots, \vec{a}_n) = \lambda \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) + \mu \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{b}_i, \dots, \vec{a}_n) . \quad (2.10)$$

- (ii) Vertauscht man zwei Spaltenvektoren, so ändert sich das Vorzeichen,

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) = -\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) . \quad (2.11)$$

- (iii) Die Determinante der n Einheitsvektoren ist 1,

$$\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1 \quad (2.12)$$

mit den Einheitsvektoren \vec{e}_i , die an der i -ten Stelle eine 1 haben und deren andere Komponenten verschwinden

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (i-teStelle)}$$

Wichtige Rechenregeln für die Determinante sind der Determinanten-Multiplikationssatz: Sind A und B zwei $n \times n$ -Matrizen, so ist die Determinante des Produkts gleich dem Produkt der Determinanten,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) , \quad (2.13)$$

sowie die Gleichheit der Determinanten einer Matrix A und ihrer Transponierten A^T ,

$$\det(A^T) = \det(A) , \quad (2.14)$$

mit der transponierten Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Wir wollen jetzt Bewegungen im Raum geometrisch beschreiben. Dazu fügen wir unserem Raum die Zeit als 4. Dimension hinzu. Die Bahn eines Massenpunktes wird dann eine Kurve im 4-dimensionalen Raum, eine sogenannte **Weltlinie**

$$(t, x(t), y(t), z(t)) .$$

Eine geradlinig gleichförmige Bewegung durch den Ursprung hat die Form

$$t(1, v_x, v_y, v_z)$$

mit dem konstanten Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y und v_z .

Wir stellen jetzt 2 Postulate auf:

Postulat I: Alle geradlinig gleichförmig bewegten Bezugssysteme (mit Geschwindigkeit $v < 1$) sind äquivalent.

Postulat II: Die Lichtgeschwindigkeit $c \equiv 1$ ist unabhängig von der Geschwindigkeit des (geradlinig gleichförmig) bewegten Bezugssystems.

Wir diskutieren diese Postulate für den Fall, dass es nur eine räumliche Dimension gibt. Zunächst geben wir eine Definition der Koordinaten, die ein gleichförmig bewegter Beobachter verwenden kann. Unser Beobachter hat eine Uhr und sendet zur Zeit t_1 ein Signal aus, das am Punkt P der Raumzeit reflektiert wird und zur Zeit t_2 vom Beobachter wieder empfangen wird. Dann ordnet er dem Punkt P die Zeitkoordinate $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ und die Raumkoordinate $x = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ zu.

Wir vergleichen jetzt die Uhren zweier Beobachter, die sich relativ zueinander bewegen. Dazu sendet der erste Beobachter in Zeitabständen T Signale aus, die der zweite Beobachter in Zeitabständen kT empfängt. Der Faktor k (der sogenannte Rotverschiebungsfaktor) soll bestimmt werden. Sendet Beobachter 2 Signale aus, so empfängt sie der erste Beobachter ebenfalls in Zeitabständen, die um denselben Faktor k verändert sind (Äquivalenz der Bezugssysteme). Seien die Beobachter zur Zeit $t = 0$ am selben Ort und bewege sich der zweite Beobachter mit Geschwindigkeit v , während der erste ruht. Zur Zeit T sendet der erste Beobachter ein Signal aus, das vom zweiten Beobachter nach seiner Uhr zur Zeit kT empfangen wird, sofort reflektiert wird und beim ersten Beobachter zur Zeit k^2T nach dessen Uhr erhalten wird.

Nach unserer Vorschrift zur Wahl der Koordinaten gibt Beobachter 1 dem Raumzeitpunkt der Reflexion die Koordinaten $t = \frac{1}{2}(1 + k^2)T$ und $x = \frac{1}{2}(k^2 - 1)T$. Da der zweite Beobachter sich mit Geschwindigkeit v bewegt, gilt $x = vt$. Also folgt

$$v = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \quad \text{und daher} \quad k = \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}} . \quad (2.15)$$

Vergleichen wir jetzt 3 Beobachter 1,2,3 mit k -Faktoren k_{12} , k_{23} und k_{13} , so treffen die Signale, die Beobachter 1 in Zeitabständen T absendet, in Zeitabständen $k_{12}T$ bei Beobachter 2 und in Zeitabständen $k_{13}T$ bei Beobachter 3 ein. Für Beobachter 3 ist das jedoch dasselbe, als wenn Beobachter 2 Signale in Zeitabständen $k_{12}T$ abgesendet hätte (für den Fall dass die Geschwindigkeit v_{13} von Beobachter 3 größer ist als die Geschwindigkeit $v_{12} > 0$ des zweiten Beobachters, beides bezogen auf Beobachter 1). Daher gilt

$$k_{13} = k_{12}k_{23} . \quad (2.16)$$

Also folgt für die Geschwindigkeiten (v_{23} ist die Geschwindigkeit von Beobachter 3, bezogen auf Beobachter 2)

$$v_{13} = \frac{k_{13}^2 - 1}{k_{13}^2 + 1} = \frac{k_{12}^2 k_{23}^2 - 1}{k_{12}^2 k_{23}^2 + 1} = \frac{\frac{(1+v_{12})(1+v_{23})}{(1-v_{12})(1-v_{23})} + 1}{\frac{(1+v_{12})(1+v_{23})}{(1-v_{12})(1-v_{23})} - 1} = \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + v_{12}v_{23}}. \quad (2.17)$$

Dies ist das relativistische **Additionstheorem** für Geschwindigkeiten. Für kleine Geschwindigkeiten $v \ll 1$ kann der Nenner durch 1 ersetzt werden, die Geschwindigkeiten addieren sich dann wie in der nicht-relativistischen Theorie. Geht aber z.B. v_{23} gegen 1 (die Lichtgeschwindigkeit), so auch v_{13} , die Lichtgeschwindigkeit ist also, wie gefordert, unabhängig vom Bezugssystem.

Eine wesentliche Einsicht Einsteins bestand darin, dass die Frage, ob 2 Ereignisse gleichzeitig stattfinden, vom Bezugssystem abhängt. Unabhängig vom Bezugssystem findet man (nach Wahl eines Ursprungs) die Einteilung der Raumzeit in drei Bereiche:

Zukunft: Die Zukunft besteht aus den Punkten der Raumzeit, die vom Ursprung aus mit einer Geschwindigkeit $v \leq 1$ erreicht werden können. Nur Ereignisse in der Zukunft können vom Ursprung aus beeinflusst werden.

Vergangenheit: Die Vergangenheit besteht aus den Punkten der Raumzeit, von denen aus der Ursprung mit einer Geschwindigkeit $v \leq 1$ erreicht werden kann. Nur Ereignisse in der Vergangenheit können am Ursprung bekannt sein.

raumartiges Gebiet: Alle anderen Raumzeitpunkte nennt man raumartig. Für jeden raumartigen Punkt gibt es ein Bezugssystem, für das dieser Punkt die gleiche Zeitkoordinate wie der Ursprung hat.

Wir wollen jetzt die **Eigenzeit** eines gleichförmig bewegten Beobachters berechnen. Seine Weltlinie sei $(t, x) = t(1, v)$ mit $0 < v < 1$, $t > 0$. Ein vom ruhenden System bei $x = 0$ ausgesandtes und am Punkt (t, x) reflektiertes Signal wird zur Zeit $t_1 = t - x$ abgeschickt und zur Zeit $t_2 = t + x$ wieder empfangen. Der bewegte Beobachter misst als Zeitpunkt, zu dem das Signal bei ihm eintrifft

$$\tau = kt_1 = k(t - x) = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} t(1-v) = t\sqrt{1-v^2} = \sqrt{t^2 - x^2}. \quad (2.18)$$

Diese Zeit nennt man die Eigenzeit. Die Eigenzeit ist unabhängig vom Bezugssystem. Denn ein zweiter Beobachter (mit Geschwindigkeit $0 < v' < v$), dessen Weltlinie ebenfalls durch den Ursprung geht, hätte dem Ereignis die Koordinaten (t', x') zugeordnet mit $t'_1 = t' - x'$ als Zeitpunkt, zu dem das Signal vom ruhenden System bei ihm eintrifft, und $t'_2 = t' + x'$ als Zeitpunkt, bei dem das reflektierte Signal bei ihm

durchläuft. Nach der Definition der k -Faktoren gilt

$$t'_1 = k't_1 \quad , \quad t_2 = k't'_2 \quad , \quad k' = \sqrt{\frac{1+v'}{1-v'}}$$

und damit

$$\tau^2 = t^2 - x^2 = t_1 t_2 = t'_1 t'_2 = t'^2 - x'^2 \quad . \quad (2.19)$$

Insbesondere ist die Eigenzeit also immer kleiner als die von einem anderen System aus gemessene Zeit (**Zeitdilatation**). Wir können jetzt die Koordinaten von einem ruhenden auf ein mit Geschwindigkeit v bewegtes System umrechnen. Eine solche Transformation nennt man **Lorentztransformation**. Wir finden

$$t' - x' = k(t - x) \quad , \quad t' + x' = k^{-1}(t + x)$$

mit $k = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$ und daher

$$\boxed{\begin{array}{l} t' = \gamma(t - vx) \\ x' = \gamma(-vt + x) \end{array}} \quad (2.20)$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{2}(k + k^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad . \quad (2.21)$$

Wir betrachten jetzt die mit dem Ursprung gleichzeitigen Raumzeitpunkte im System, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt. Per definitionem haben diese im gestrichenen Koordinatensystem die Zeitkoordinate $t' = 0$. Für die Koordinaten im ruhenden System ergibt sich

$$(t, x) = x(v, 1) \quad ,$$

in unserer 2-dimensionalen Raumzeit bilden die gleichzeitigen Punkte also eine Gerade, die sich durch Spiegelung der Weltlinie $(t, x) = t(1, v)$ des bewegten Beobachters am Lichtstrahl $(t, x) = t(1, 1)$ ergibt (für $v > 0$).

Wir können nun das Phänomen der **Längenkontraktion** diskutieren. Eine Stange der Länge L bewege sich mit der Geschwindigkeit v . Die Weltlinien von Anfangspunkt und Endpunkt seien im mitbewegten System die Geraden $x' = 0$ und $x' = L$. Im ruhenden System werden diese Geraden durch die Gleichungen $0 = \gamma(x - vt)$ und $L = \gamma(x - vt)$ beschrieben. Die x -Koordinaten der beiden Punkte unterscheiden sich zu gleichen Zeiten t des ruhenden Systems also um

$$\boxed{L' = \sqrt{1-v^2}L} \quad , \quad (2.22)$$

Die Länge erscheint daher vom ruhenden System aus gesehen um den Faktor $\sqrt{1-v^2}$ verkürzt.

Wir haben gesehen, dass Zeiten und Längen vom Bezugssystem abhängen. Dies ist der Grund für die Bezeichnung *Relativitätstheorie*. Leider

hat dieser Name zu unsinnigen Simplifizierungen geführt („alles ist relativ“). Tatsächlich gibt es aber auch invariante Größen: für zwei Ereignisse an den Raumzeitpunkten P_1, P_2 mit Koordinaten (t_1, x_1) und (t_2, x_2) ist die Größe

$$(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 \quad (2.23)$$

unabhängig vom Bezugssystem. Im Fall $(t_1 - t_2)^2 > (x_1 - x_2)^2$ ist die Größe das Quadrat der Eigenzeit τ eines gleichförmig bewegten Beobachters zwischen den Ereignissen P_1 und P_2 , im Fall $(t_1 - t_2)^2 < (x_1 - x_2)^2$ ist sie das negative Quadrat des Abstandes der beiden Punkte in einem Bezugssystem, in dem die beiden Ereignisse gleichzeitig sind.

Wir lassen jetzt die Einschränkung auf eine räumliche Dimension fallen. Ereignisse sind dann Punkte in einem 4-dimensionalen Raum, den wir nach Auszeichnung eines Ursprungs O , eines gleichförmig bewegten Beobachters A , dessen Weltlinie durch den Ursprung geht, sowie eines kartesischen Koordinatensystems in der zum Ursprung gleichzeitigen Punktmenge mit dem \mathbb{R}^4 identifizieren können,

$$P \mapsto x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{r}) . \quad (2.24)$$

In diesem Raum definieren wir die quadratische Form

$$x^2 := (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = t^2 - |\vec{r}|^2 . \quad (2.25)$$

Der \mathbb{R}^4 , versehen mit dieser quadratischen Form, heißt **Minkowski-raum**.

Weltlinien von Teilchen sind Kurven der Form $(t, \vec{r}(t))$ mit $|\frac{d\vec{r}}{dt}| \leq 1$. Wir wollen die Eigenzeit eines Teilchens, das sich nicht notwendig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, berechnen. Ist die Bewegung stückweise gleichförmig,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} \vec{v}_1 & , \quad 0 \leq t \leq t_1 , \\ \vec{v}_2 & , \quad t_1 \leq t \leq t_2 , \\ \dots & , \quad \dots \end{cases}$$

so addieren sich die Eigenzeiten, und wir erhalten

$$\tau = t_1 \sqrt{1 - |\vec{v}_1|^2} + (t_2 - t_1) \sqrt{1 - |\vec{v}_2|^2} + \dots .$$

Eine beliebige Weltlinie denken wir uns in kleine annähernd gerade Stücke zerlegt und erhalten im Limes beliebig feiner Unterteilung die allgemeine Formel für die Eigenzeit

$$\boxed{\tau = \int dt \sqrt{1 - \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2}} . \quad (2.26)$$

Beispiele:

Geradlinig gleichförmige Bewegung: Die Weltlinie ist $(t, \vec{r}(t)) = (t, t\vec{v})$ with $|\vec{v}| \leq 1$. Die Eigenzeit ist

$$\tau = \int_0^t dt' \sqrt{1 - |\vec{v}|^2} = t \sqrt{1 - |\vec{v}|^2} .$$

Gleichförmig beschleunigte Bewegung: Hier ist die Weltlinie gegeben durch $(t, \vec{r}(t)) = (t, \sqrt{t^2 + L^2}, 0, 0)$. Die Eigenzeit ergibt sich aus dem Integral

$$\tau = \int_0^t dt' \sqrt{1 - \frac{t'^2}{t'^2 + L^2}} = L \int_0^{\frac{t}{L}} dt' \frac{1}{\sqrt{t'^2 + 1}} .$$

Zur Berechnung machen wir die Substitution $t' = \sinh u$. Dann ist $dt' = \cosh u du$, $t'^2 + 1 = \cosh^2 u$ und u wird über das Intervall $[u_1, u_2]$ mit $u_1 = 0$ und $\sinh u_2 = \frac{t}{L}$ integriert. Also folgt $\tau = L \sinh^{-1} \frac{t}{L}$.

Anstatt die Weltlinie durch die Zeit in einem beliebig gewählten Bezugssystem zu parametrisieren, kann man auch die Eigenzeit als Parameter wählen (dies entspricht der Parametrisierung einer Kurve im euklidischen \mathbb{R}^n durch die Bogenlänge). Sei

$$x(\tau) = (t(\tau), \vec{r}(t(\tau)))$$

eine durch die Eigenzeit parametrisierte Weltlinie. Dann folgt für die Geschwindigkeit

$$u = \frac{dx}{d\tau}$$

immer die Beziehung

$$u^2 = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 1 . \quad (2.27)$$

Man nennt u die **Vierergeschwindigkeit**. Im ersten Beispiel ist $t(\tau) = \gamma\tau$, mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}}$, und damit $u = \gamma(1, \vec{v})$. Im zweiten Beispiel ist $t(\tau) = L \sinh \frac{\tau}{L}$ und $x(\tau) = L \cosh \frac{\tau}{L}$. Damit folgt für die Vierergeschwindigkeit

$$u = \left(\cosh \frac{\tau}{L}, \sinh \frac{\tau}{L}, 0, 0 \right) .$$

Wir können jetzt auch die Beschleunigung bezüglich der Eigenzeit berechnen. Sie ist

$$a = \frac{du}{d\tau} = \frac{1}{L} \left(\sinh \frac{\tau}{L}, \cosh \frac{\tau}{L}, 0, 0 \right) .$$

Während die Vierergeschwindigkeit immer zeitartig ist, ist die Beschleunigung immer raumartig. Im System des beschleunigten Beobachters ist ihr Betrag

$$\sqrt{-a^2} = \frac{1}{L} \quad (2.28)$$

Die Beschleunigung ist also, vom mitbewegten Beobachter aus gesehen, konstant.

Wir wollen die Gleichung $u^2 = 1$ physikalisch interpretieren. Dazu differenzieren wir sie nach der Zeit und erhalten

$$u_0 \dot{u}_0 = \vec{u} \cdot \dot{\vec{u}} ,$$

also

$$\dot{u}_0 = \dot{\vec{u}} \cdot \vec{v} \text{ mit } \vec{v} = \frac{\vec{u}}{u_0} .$$

Wir identifizieren jetzt $m_0 \vec{u}$ mit dem Impuls \vec{p} und $m_0 u_0$ mit der Energie E des Teilchens. Definieren wir die Kraft durch $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, so ergibt sich die bekannte Beziehung für die Leistung

$$\dot{E} = \vec{F} \cdot \vec{v} . \quad (2.29)$$

Wir nennen $p = (E, \vec{p})$ den **Viererimpuls** des Teilchens. Offenbar gilt

$$p^2 \equiv E^2 - |\vec{p}|^2 = m_0^2 u^2 = m_0^2 . \quad (2.30)$$

Zwischen Energie und Impuls besteht also die Beziehung

$$E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_0^2} = m_0 \sqrt{1 + \frac{|\vec{p}|^2}{m_0^2}} . \quad (2.31)$$

Für kleine Impulse gilt ($|\vec{p}| \ll m_0$)

$$E \approx m_0 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m_0} - \frac{1}{8} \frac{|\vec{p}|^4}{m_0^3} . \quad (2.32)$$

Die Geschwindigkeit ist

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E} . \quad (2.33)$$

Bei Reaktionen zwischen Elementarteilchen gilt der Erhaltungssatz

$$p_1 + \cdots + p_n = p'_1 + \cdots + p'_m , \quad (2.34)$$

die Summe der Viererimpulse der Teilchen $1, \dots, n$ vor dem Stoß ist also gleich der Summe der Viererimpulse der bei der Reaktion entstandenen Teilchen $1, \dots, m$. Dieser Satz tritt an die Stelle von Energie- und Impulserhaltungssatz der nichtrelativistischen Mechanik.

Die Größe

$$s = (p_1 + \cdots + p_n)^2 \quad (2.35)$$

ist unabhängig vom Lorentzsystem. Im Schwerpunktsystem ($\sum \vec{p}_i = 0$) ist s das Quadrat der Gesamtenergie. In jedem anderen Lorentzsystem ist die Energie größer, wie man aus der Gleichung

$$s^2 = \left(\sum E_i \right)^2 - \left| \sum \vec{p}_i \right|^2$$

sieht.

3. KURVEN-, FLÄCHEN- UND VOLUMENINTEGRALE

Bei der Untersuchung elektromagnetischer Wechselwirkungen spielen geometrische Beziehungen eine große Rolle. Betrachten wir z.B. die Coulombkraft zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2 , die sich an den Orten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 befinden,

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) .$$

Hierbei ist ϵ_0 eine Konstante, durch die bei Vorgabe von Längeneinheit und Kräfteinheit die Einheit der Ladung festgelegt wird. Im „Internationalen System“ (SI) setzt man

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi} \frac{C^2}{c^2 s^2 N}$$

und erhält so die Definition des Coulomb (C). Vom Standpunkt der Theorie ist es zweckmäßiger, $\epsilon_0 = 1$ zu setzen. Im sogenannten Gaußschen System setzt man $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$. Im folgenden setzen wir $\epsilon_0 = 1$.

Wir ersetzen jetzt die Fernwirkung zwischen den beiden Ladungen durch eine Nahwirkung, indem wir als Überträger der Kraft das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \frac{q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

eingeführen. Auf die Ladung 1 wirkt dann die Kraft

$$\vec{F} = q_1 \vec{E}(\vec{r}_1) .$$

Das elektrische Feld einer Punktladung zeigt zwei geometrische Eigenschaften: es ist radial nach außen gerichtet und seine Stärke nimmt mit dem Quadrat des Abstands ab. Multipliziert man den Betrag des Feldes im Abstand r mit der Oberfläche einer Kugel mit Radius r um die Punktladung, so ergibt sich

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = q_2 ,$$

das Kraftgesetz kann also als eine Strömung veranschaulicht werden, die radial von der Punktladung nach außen geht und sich dabei verdünnt.

Auch andere elektromagnetische Phänomene zeigen die enge Kopplung geometrischer und physikalischer Aspekte. Besonders bemerkenswert ist hierbei das Induktionsgesetz, nach dem in einer Leiterschleife, die ein veränderliches Magnetfeld umschließt, ein Strom induziert wird.

Diese Zusammenhänge machen es erforderlich, Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen zu studieren.

Beginnen wir mit der Definition einer **Kurve**. Eine Kurve γ im \mathbb{R}^3 ist eine stetige Abbildung $t \mapsto \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Wir wollen uns auf Kurven beschränken, die aus Teilstücken bestehen, die unendlich oft differenzierbar sind. $\dot{\vec{r}}$ ist der Tangentenvektor der Kurve; wenn der Parameter t als Zeit interpretiert wird, ist $\dot{\vec{r}}$ die Geschwindigkeit.

Wir definieren zunächst die **Länge** einer Kurve. Ist $\dot{\vec{r}}$ stückweise konstant, d.h. ist γ aus geraden Teilstücken zusammengesetzt, so gilt für die Länge der Kurve

$$L(\gamma) = (t_1 - a)|\dot{\vec{r}}_1| + (t_2 - t_1)|\dot{\vec{r}}_2| + \dots + (b - t_n)|\dot{\vec{r}}_{n+1}| .$$

Wie bei der Bestimmung der Eigenzeit denken wir uns eine allgemeine Kurve aus annähernd geradlinigen Stücken zusammengesetzt und definieren die Länge als

$$L(\gamma) = \int_a^b dt |\dot{\vec{r}}(t)| = \int_a^b dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} .$$

Die so definierte Länge hängt nicht von der Parametrisierung ab, d.h., anschaulich gesprochen, nicht von der Geschwindigkeit, mit der die Kurve durchlaufen wird. Denn sei $t = f(s)$ mit einer monoton wachsenden, stetig differenzierbaren Funktion f mit $f(c) = a$ und $f(d) = b$. Dann gilt nach der Substitutionsregel

$$L(\gamma) = \int_c^d ds \frac{df}{ds} |\dot{\vec{r}}(f(s))| = \int_c^d ds \left| \frac{d\vec{r}(f(s))}{ds} \right| .$$

Betrachten wir z.B. eine Kreislinie,

$$x(t) = R \cos t\omega , \quad y(t) = R \sin t\omega , \quad z = 0 , \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} ,$$

so gilt

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = R\omega \sqrt{\sin^2 t\omega + \cos^2 t\omega} = R\omega$$

und daher

$$L(\gamma) = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt R\omega = 2\pi R$$

unabhängig von ω . Bei einer Schraubenlinie

$$x(t) = R \cos t\omega , \quad y(t) = R \sin t\omega , \quad z(t) = vt , \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} ,$$

erhält man

$$L(\gamma) = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt \sqrt{R^2\omega^2 + v^2} = 2\pi \sqrt{R^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$$

($2\pi v/\omega$) ist die Ganghöhe der Schraubenlinie).

Als nächstes betrachten wir das **Linienintegral** eines Vektorfeldes. Sei \vec{C} ein Vektorfeld, dann wird das Linienintegral von \vec{C} längs einer Kurve γ durch

$$\int_{\gamma} \vec{C} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{C}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

erklärt.

Auch dieses Integral ist unabhängig von der Parametrisierung, wie man aus

$$\dot{\vec{r}}(t) dt = \frac{d\vec{r}(f(s))}{ds} ds$$

sieht. Im Gegensatz zur Länge einer Kurve hängt das Linienintegral aber davon ab, in welcher Richtung die Kurve durchlaufen wird. Ein Beispiel für ein Linienintegral ist die Arbeit, die in einem Kraftfeld geleistet wird.

Im elektrischen Feld definiert man die **Spannung** als das Linienintegral über einen Weg,

$$U(\gamma) = \int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} .$$

Im elektrostatischen Feld gilt, dass die Spannung für geschlossene Wege ($\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$) verschwindet. In diesem Fall kann man das **elektrostatische Potential** V einführen durch

$$V(\vec{r}) = V_0 + U(\gamma) ,$$

wobei V_0 das willkürlich gewählte Potential an einem Punkt \vec{r}_0 und γ ein Weg von \vec{r} nach \vec{r}_0 ist.

Die Beziehung zwischen Potential und elektrischem Feld

$$V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = \int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

für alle Wege γ von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 kann man auch differentiell formulieren. Dies ist das erste Beispiel für einen Integralsatz. Er beruht, wie alle Integralsätze, auf dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b dx F'(x) .$$

Sei γ ein Weg von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 mit Parametrisierung $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = \int_a^b dt \frac{dV(\vec{r}(t))}{dt} .$$

Die Ableitung berechnet man nach der Kettenregel zu

$$\frac{dV(\vec{r}(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} .$$

Wir führen jetzt das Vektorfeld

$$\text{grad } V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \equiv \nabla V$$

ein. $\text{grad } V$ nennt man den **Gradienten** (Steigung) von V . Das Tripel $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ nennt man den **Nabla-Operator**.

Der Gradient zeigt an, wie sich V ändert, wenn man sich von der Stelle \vec{r} zur Stelle $\vec{r} + d\vec{r}$ bewegt,

$$dV = V(\vec{r} + d\vec{r}) - V(\vec{r}) = \text{grad } V \cdot d\vec{r} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz .$$

Bewegt man sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} , so ist die Änderungsgeschwindigkeit von V

$$\frac{dV}{dt} = \text{grad } V \cdot \vec{v} = |\text{grad } V| |\vec{v}| \cos \theta$$

mit dem Winkel θ zwischen den beiden Vektoren $\text{grad } V$ und \vec{v} . Bei gleichem Betrag der Geschwindigkeit ändert sich V also am schnellsten, wenn \vec{v} in die Richtung von $\text{grad } V$ zeigt ($\theta = 0$).

Setzen wir die obigen Beziehungen in das Integral ein und vergleichen mit der Definition des Potentials, so folgt der Zusammenhang

$$\boxed{\vec{E} = -\text{grad } V} .$$

(Achtung: Vorzeichenkonvention!)

Z.B. ist das Potential einer Punktladung im Ursprung

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} .$$

Die x -Komponente des elektrischen Feldes ist dann

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{q}{4\pi} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{q}{4\pi} \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x = \frac{q}{4\pi} \frac{x}{|r|^3} .$$

Als nächstes geometrisches Objekt betrachten wir **Flächen**. Ein (parametrisiertes) Flächenstück S im \mathbb{R}^3 ist eine C^∞ -Abbildung

$$(s, t) \mapsto \vec{r}(s, t) , \quad (s, t) \in [a, b] \times [c, d] ,$$

sodass die Tangentenvektoren $\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}$ und $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ linear unabhängig sind. Diese Vektoren spannen die Tangentialebene an die Fläche im Punkt $\vec{r}(s, t)$ auf,

$$\left\{ \vec{r}(s, t) + u \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} + v \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}, \quad u, v \in \mathbb{R} \right\} .$$

Sind die Tangentenvektoren $\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}$ und $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ konstant, so handelt es sich bei S um ein Parallelogramm mit dem Flächeninhalt

$$F(S) = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| (b - a)(d - c) .$$

Den allgemeinen Fall denken wir uns wieder approximiert durch stückweis flache Teile. Im Grenzfall erhalten wir die allgemeine Formel für den Flächeninhalt

$$F(S) = \int_a^b ds \int_c^d dt \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| .$$

Wir überzeugen uns zunächst davon, dass die Formel unabhängig von der Parametrisierung ist. Seien s und t Funktionen anderer Parameter u, v . Dann gilt

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v}$$

und damit nach dem Distributivgesetz für das Vektorprodukt

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v} \right) .$$

Die Substitutionsformel für zweidimensionale Integrale lautet

$$\int_G ds dt f(s, t) = \int_{G'} du dv |\det J| f(s(u, v), t(u, v))$$

mit der Jacobimatrix (Funktionalmatrix)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u} \\ \frac{\partial s}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix}$$

und dem Urbild G' des Gebietes G unter der Parametertransformation,

$$G' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, (s(u, v), t(u, v)) \in G\} .$$

Setzt man diese Beziehungen in die Formel für den Flächeninhalt ein, so erkennt man, dass dieser von der gewählten Parametrisierung unabhängig ist.

Als Beispiel berechnen wir den Flächeninhalt einer Halbsphäre

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\} .$$

Wir parametrisieren sie durch Polarkoordinaten ihrer Projektion auf die x, y -Ebene. Es gilt

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \sqrt{R^2 - r^2}, \quad r \in [0, R], \quad \varphi \in [0, 2\pi] .$$

Für die Tangentenvektoren erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= \left(\cos \varphi, \sin \varphi, -\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0) . \end{aligned}$$

Diese beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander, der Betrag des Vektorproduktes ist daher das Produkt der Beträge der Faktoren

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2 - r^2}} r = \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}} .$$

Die Fläche der Halbsphäre ergibt sich also zu

$$F(S) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi R \left(-\sqrt{R^2 - r^2} \right) \Big|_{r=0}^{r=R} = 2\pi R^2 .$$

Wir kommen jetzt zum Begriff des **Flusses** eines Vektorfeldes durch ein Flächenstück S . Wir stellen uns dazu eine inkompressible Flüssigkeit vor und fragen nach der Flüssigkeitsmenge dM , die in der Zeit dT

durch den Querschnitt S strömt. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit am Punkt \vec{r} sei $\vec{v}(\vec{r})$. Offenbar gilt

$$dM = \rho dV$$

mit der Dichte ρ und dem Volumen dV des Gebietes

$$\{\vec{r}(s, t) + \vec{v}(\vec{r}(s, t))w, (s, t) \in [a, b] \times [c, d], 0 \leq w \leq dT\} .$$

Dieses Volumen berechnet sich zu

$$dV = \left(\int ds dt \vec{v} \cdot (\partial_s \vec{r} \times \partial_t \vec{r}) \right) dT \equiv \left(\int ds dt \det(\vec{v}, \partial_s \vec{r}, \partial_t \vec{r}) \right) dT .$$

Der Fluss durch S ergibt sich also zu

$$\Phi(S) = \frac{dM}{dT} = \rho \int ds dt \det(\vec{v}, \partial_s \vec{r}, \partial_t \vec{r}) .$$

Allgemein definieren wir den Fluss eines Vektorfeldes \vec{C} durch ein Flächenstück S durch

$$\int_S \vec{C} \cdot d^2 \vec{r} := \int_a^b ds \int_c^d dt \det(\vec{C}, \partial_s \vec{r}, \partial_t \vec{r}) .$$

Der Einheitsvektor

$$\vec{n} = \frac{\partial_s \vec{r} \times \partial_t \vec{r}}{|\partial_s \vec{r} \times \partial_t \vec{r}|}$$

steht senkrecht auf der Fläche und wird der Normalenvektor genannt. Mit dem Flächenelement

$$df = |\partial_s \vec{r} \times \partial_t \vec{r}| ds dt$$

kann daher der Fluss auch in der Form

$$\int_S \vec{C} \cdot d^2 \vec{r} = \int_S \vec{C} \cdot \vec{n} df$$

geschrieben werden.

Beispiel: Wir betrachten den Fluss des elektrischen Feldes \vec{E} einer Punktladung q im Ursprung durch das Flächenstück S ,

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi)(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$$

mit einer C^∞ -Funktion $r(\theta, \varphi)$ und $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$. Nach Definition ist

$$\vec{E} \cdot d^2 \vec{r} = \frac{q}{4\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \det\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \partial_\theta \vec{r}, \partial_\varphi \vec{r}\right) .$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_\theta \vec{r} &= \frac{\partial r}{\partial \theta} \vec{e}_r + r \vec{e}_\theta , \\ \partial_\varphi \vec{r} &= \frac{\partial r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + r \sin \theta \vec{e}_\varphi , \end{aligned}$$

mit den Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{e}_\theta = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).$$

Diese Vektoren bilden ein positiv orientiertes Dreibein und besitzen daher die Determinante

$$\det(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi) = 1.$$

Wir erhalten also für den Fluss

$$\int_S \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = \frac{q}{4\pi} \int_{S_0} d\theta d\varphi \sin \theta$$

mit $S_0 = [\theta_0, \theta_1] \times [\varphi_0, \varphi_1]$. Wir schließen, dass der Fluss unabhängig von der Wahl der Funktion $r(\theta, \varphi)$ ist und nur von der Projektion S_0 der Fläche S auf die Einheitskugel $r = 1$ abhängt. Das verbleibende Integral ist der Flächeninhalt des entsprechenden Stücks der Einheitskugel, also gleich dem Raumwinkel $\Omega(S)$, den S vom Ursprung aus gesehen einnimmt,

$$\int_S \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = \frac{q}{4\pi} \Omega(S).$$

Ist S die Oberfläche ∂G eines Gebietes G , das den Ursprung enthält, so ist der Raumwinkel $\Omega(S) = 4\pi$, und wir erhalten das Gaußsche Gesetz

$$\boxed{\int_{\partial G} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = Q(G)}.$$

Die Oberfläche eines Gebietes ist dabei immer so orientiert, dass der Normalenvektor nach außen zeigt. $Q(G)$ ist die Summe aller im Gebiet G enthaltenen Ladungen.

Als letztes betrachten wir **Volumenintegrale**. Wir parametrisieren ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ durch eine \mathcal{C}^∞ -Abbildung

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto \vec{r}(u_1, u_2, u_3), \quad u_i \in [a_i, b_i], \quad i = 1, 2, 3,$$

sodass an jedem Punkt die Tangentenvektoren $\partial_{u_i} \vec{r}, i = 1, 2, 3$ linear unabhängig sind. Wir können u_1, u_2, u_3 als Koordinaten von G ansehen. Sind die Tangentenvektoren konstant, so ist G ein Parallelepiped mit dem Volumen

$$V(G) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) |\det(\partial_{u_1} \vec{r}, \partial_{u_2} \vec{r}, \partial_{u_3} \vec{r})|.$$

Im allgemeinen Fall setzen wir

$$V(G) = \int_{a_1}^{b_1} du_1 \int_{a_2}^{b_2} du_2 \int_{a_3}^{b_3} du_3 |\det(\partial_{u_1} \vec{r}, \partial_{u_2} \vec{r}, \partial_{u_3} \vec{r})|$$

entsprechend der Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale.

Wir können auch für 3-dimensionale Gebiete eine Orientierung einführen und zwar durch das Vorzeichen der Determinante der Tangentenvektoren

$$\det(\partial_{u_1} \vec{r}, \partial_{u_2} \vec{r}, \partial_{u_3} \vec{r}).$$

Gebiete besitzen eine natürliche Orientierung, sie entspricht dem positiven Vorzeichen der Determinante.

Ein orientiertes Volumenintegral lässt sich durch

$$\int_G f d^3\vec{r} = \int_{G_0} du_1 du_2 du_3 f(\vec{r}(u_1, u_2, u_3)) \det(\partial_{u_1}\vec{r}, \partial_{u_2}\vec{r}, \partial_{u_3}\vec{r}) ,$$

einführen, mit $G_0 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

4. INTEGRALSÄTZE

Wir haben die beiden Grundgleichungen der Elektrostatik in der integralen Form kennen gelernt,

$$(1) \quad \int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 ,$$

γ geschlossener Weg,

$$(2) \quad \int_S \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = Q ,$$

S nach außen orientierte Oberfläche eines Gebiets $G \subset \mathbb{R}^3$, Q Ladung in G .

Für die Anwendungen bequemer ist eine differentielle Form dieser Grundgleichungen. Die erste Gleichung können wir dadurch erfüllen, dass wir ein Potential V einführen mit

$$V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = \int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

für jeden Weg γ von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 . Dann gilt

$$\vec{E} = -\text{grad } V \equiv -\nabla V = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right) ,$$

und \vec{E} erfüllt Gleichung (1).

Da die 2. partiellen Ableitungen von V symmetrisch sind, folgt

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial E_j}{\partial x_i} , \quad i, j = 1, 2, 3 .$$

Wir definieren die **Rotation** eines Vektorfeldes \vec{C} durch

$$\text{rot } \vec{C} \equiv \nabla \times \vec{C} = \left(\frac{\partial C_3}{\partial x_2} - \frac{\partial C_2}{\partial x_3}, \frac{\partial C_1}{\partial x_3} - \frac{\partial C_3}{\partial x_1}, \frac{\partial C_2}{\partial x_1} - \frac{\partial C_1}{\partial x_2} \right)$$

(in der englisch sprachigen Literatur wird die Bezeichnung $\text{curl } \vec{C}$ verwendet).

Offenbar ist

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

eine notwendige Bedingung für die Erfüllung von Gleichung (1).

Tatsächlich ist diese Bedingung auch hinreichend, Dies ist eine Konsequenz aus dem Stokeschen Satz, den wir jetzt besprechen wollen. Hierzu betrachten wir eine orientierte Fläche S , die γ als orientierten

Rand hat. Wenn wir die Fläche in Teilflächen S_1 und S_2 zerlegen, mit Rändern γ_1 und γ_2 , dann gilt

$$\int_{\gamma} \vec{C} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{C} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{C} \cdot d\vec{r},$$

da die Grenze zwischen S_1 und S_2 zweimal durchlaufen wird, einmal mit der Orientierung von S_1 und einmal mit der Orientierung von S_2 , und sich diese beiden Beiträge wegheben. Durch fortgesetzte Zerlegung in kleinere Flächenstücke können wir die Berechnung auf den Fall beschränken, dass S ein Flächenstück mit einer Parametrisierung

$$\vec{r}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ist. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{C} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 ds \left((\vec{C} \cdot \partial_s \vec{r})|_{t=0} - (\vec{C} \cdot \partial_s \vec{r})|_{t=1} \right) \\ &\quad + \int_0^1 dt \left((\vec{C} \cdot \partial_t \vec{r})|_{s=1} - (\vec{C} \cdot \partial_t \vec{r})|_{s=0} \right) \\ &= \int_0^1 ds \int_0^1 dt \left(-\frac{\partial}{\partial t} (\vec{C} \cdot \partial_s \vec{r}) + \frac{\partial}{\partial s} (\vec{C} \cdot \partial_t \vec{r}) \right). \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial}{\partial s} (\vec{C} \cdot \partial_t \vec{r}) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{C} \cdot \partial_s \vec{r}) = \frac{\partial \vec{C}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} + \vec{C} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s \partial t} - \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t \partial s} \right)}_{=0}.$$

Mit

$$\frac{\partial C_i}{\partial s} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial C_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial s}, \quad \frac{\partial C_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial C_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t}$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{C}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial C_i}{\partial s} \frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\partial C_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial C_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left(\frac{\partial C_i}{\partial x_j} - \frac{\partial C_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s} \right) \\ &= \text{rot } \vec{C} \cdot (\partial_s \vec{r} \times \partial_t \vec{r}). \end{aligned}$$

Wir erhalten damit den **Stokeschen Satz**

$$\boxed{\int_{\gamma} \vec{C} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot } \vec{C} \cdot d^2 \vec{r}}.$$

Hierbei ist γ der Rand der orientierten Fläche S .

Wir schließen aus dem Stokeschen Satz, dass die Wegunabhängigkeit der Spannung äquivalent zur Differentialgleichung

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = 0}$$

ist.

Ganz ähnlich können wir auch das Gaußsche Gesetz differentiell formulieren. Wir unterteilen dazu das betrachtete Gebiet G in Teilgebiete G_1 und G_2 . Für die Flüsse durch die Oberflächen gilt

$$\int_{\partial G} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = \int_{\partial G_1} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} + \int_{\partial G_2} \vec{E} \cdot d^2\vec{r},$$

da die Grenzfläche zwischen G_1 und G_2 in den beiden Integralen mit entgegengesetzten Vorzeichen auftaucht. Durch fortgesetzte Unterteilung können wir erreichen, dass wir nur noch Gebiete betrachten müssen, die eine Parametrisierung der Form

$$[0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u_1, u_2, u_3) \mapsto \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$$

zulassen, mit $\det\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right) > 0$. Der Rand $S = \partial G$ besteht aus den 6 Teilstücken S_i^ε , $i = 1, 2, 3$, $\varepsilon = 0, 1$, die den 6 Seitenflächen des Einheitswürfeld im u -Raum entsprechen. Z. B. wird S_1^1 durch $\vec{r}(1, u_2, u_3)$ parametrisiert, mit $(u_2, u_3) \in [0, 1]^2$.

Der Fluss durch S_1^1 ist

$$\int_{S_1^1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 \det(\vec{E}, \partial_{u_2}\vec{r}, \partial_{u_3}\vec{r}) \Big|_{u_1=1}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int_S \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = \sum_{k=1}^3 \left(\int_{S_k^1} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} + \int_{S_k^0} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} \right).$$

Der Beitrag zu $k = 1$ ist wegen der entgegengesetzten Orientierung in S_1^1 und S_1^0

$$\begin{aligned} \int_{S_1^1} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} + \int_{S_1^0} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} &= \int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 \det(\vec{E}, \partial_{u_2}\vec{r}, \partial_{u_3}\vec{r}) \Big|_{u_1=0}^{u_1=1} \\ &= \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 \frac{\partial}{\partial u_1} \det(\vec{E}, \partial_{u_2}\vec{r}, \partial_{u_3}\vec{r}), \end{aligned}$$

wobei wir wieder den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzt haben.

Für die anderen Seitenflächen ergeben sich entsprechende Formeln, wobei die Indizes $(1, 2, 3)$ zyklisch vertauscht werden. Wir finden

$$\int_S \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 \frac{\partial}{\partial u_i} \det(\vec{E}, \partial_{u_j}\vec{r}, \partial_{u_k}\vec{r}). \quad (4.1)$$

Hierbei ist ϵ_{ijk} das total antisymmetrische ϵ -Symbol, das durch $\epsilon_{123} = 1$ und $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}$, $i, j, k = 1, \dots, 3$ definiert ist.

Wir fassen die rechte Seite der Gleichung jetzt als ein Volumenintegral auf. Den fehlenden Faktor

$$v := \det \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right) \quad (4.2)$$

erhalten wir, indem wir den Integranden durch v dividieren. Wir erhalten so den **Gaußschen Integralsatz**

$$\boxed{\int_{\partial G} \vec{E} \cdot d^2 \vec{r} = \int_G d^3 \vec{r} \operatorname{div} \vec{E}} \quad (4.3)$$

mit

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{2v} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial u_i} \det(\vec{E}, \partial_{u_j} \vec{r}, \partial_{u_k} \vec{r}) . \quad (4.4)$$

Den Differentialoperator div nennt man die *Divergenz*. Er ordnet einem Vektorfeld ein skalares Feld zu. Er ist von der Wahl der Koordinaten u_1, u_2, u_3 unabhängig. Eine bequeme Formel für die Divergenz erhält man, wenn man das Vektorfeld als Linearkombination der Basisvektoren $\partial_{u_l} \vec{r}$, $l = 1, 2, 3$ darstellt. Seien E_l die Komponenten von \vec{E} in dieser Basis,

$$\vec{E} = \sum_{l=1}^3 E_l \partial_{u_l} \vec{r} . \quad (4.5)$$

Dann gilt

$$\det(\vec{E}, \partial_{u_j} \vec{r}, \partial_{u_k} \vec{r}) = E_l \epsilon_{ljk} v . \quad (4.6)$$

Mit

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk} = \delta_{il} \quad (4.7)$$

(hierbei ist δ_{il} das Kroneckersymbol, das durch $\delta_{il} = 1$ für $i = l$ und $\delta_{il} = 0$ für $i \neq l$ erklärt ist) folgt

$$\operatorname{div} \vec{E} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u_i} (v E_i) . \quad (4.8)$$

Insbesondere erhält man in kartesischen Koordinaten (x, y, z)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} . \quad (4.9)$$

Der Gaußsche Integralsatz gilt für alle Gebiete G , wobei ∂G die nach außen orientierte Oberfläche von G ist. Falls die Ladung kontinuierlich verteilt ist, erhalten wir die differentielle Form des Gaußschen Gesetzes

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \rho}$$

mit der Ladungsdichte ρ .

Für das elektrische Feld einer Punktladung im Ursprung gilt

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r},$$

wenn \vec{r} in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) ausgedrückt wird. Mit $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\vec{e}_\theta$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r \sin \theta \vec{e}_\varphi$ und $\det(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi) = 1$ folgt $v = r^2 \sin \theta$ und damit

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \frac{q}{4\pi} \sin \theta = 0.$$

Diese Rechnung gilt allerdings nur für $r \neq 0$, da die Kugelkoordinaten bei $r = 0$ singulär werden. Sie stimmt mit der Tatsache überein, dass die Ladungsdichte außerhalb des Ursprungs verschwindet.

5. DIFFERENTIELLE FORMULIERUNG DER MAXWELL-GLEICHUNGEN

Stokescher und Gaußscher Satz ermöglichen es, die Integralform der Maxwell-Gleichungen in eine äquivalente differentielle Form zu übersetzen.

Wir beginnen mit dem Induktionsgesetz. In integraler Form lautet es

$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d^2\vec{r} = 0.$$

für beliebige orientierbare Flächen mit (orientierter) Randkurve ∂S . Nach dem Stokeschen Satz ist dies äquivalent zur Differentialgleichung

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0. \quad (5.1)$$

Entsprechend ist das Gaußsche Gesetz in integraler Form

$$\int_{\partial G} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = \int_G \rho d^3\vec{r}$$

für alle Gebiete G mit nach außen orientierter Oberfläche ∂G nach dem Gaußschen Integralsatz der Differentialgleichung

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad (5.2)$$

äquivalent. Die Nichtexistenz magnetischer Ladungen wird durch die Differentialgleichung

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (5.3)$$

ausgedrückt. Schließlich ist das Ampère-Gesetz (mit Maxwellscher Ergänzung)

$$\int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{r} - \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = \int_S \vec{j} \cdot d^2\vec{r}$$

gleichbedeutend mit der Differentialgleichung

$$\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{j}. \quad (5.4)$$

Die Strategie zur Lösung wollen wir zunächst am elektrostatischen Fall diskutieren. In diesem gilt

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 .$$

Hieraus folgt die Existenz einer skalaren Funktion V , dem elektrostatischen Potential, mit der Eigenschaft $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$. Einsetzen in das Gaußsche Gesetz liefert die Poisson-Gleichung

$$\boxed{\Delta V = -\rho} \quad (5.5)$$

mit dem Laplace-Operator

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (5.6)$$

Wir kennen bereits das elektrostatische Potential einer Punktladung. Die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung ergibt sich hieraus durch Superposition,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} + V_0(\vec{r}) ,$$

wobei $V_0(\vec{r})$ eine beliebige Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (der Laplace-Gleichung)

$$\boxed{\Delta V_0 = 0} \quad (5.7)$$

ist. Lösungen der Laplace-Gleichung nennt man harmonische Funktionen. Beispiele sind

$$\begin{aligned} V_0 = 1 &\implies \vec{E} = 0 , \\ V_0 = \vec{a} \cdot \vec{r} &\implies \vec{E} = -\vec{a} , \\ V_0 = x^2 - y^2 &\implies \vec{E} = (-2x, 2y, 0) . \end{aligned}$$

Auffällig ist, dass keine dieser Lösungen im Unendlichen verschwindet. Tatsächlich ist die Nullfunktion die einzige harmonische Funktion, die im Unendlichen verschwindet.

Ähnlich wie die Gleichung $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ können wir auch die Gleichung $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ zur Definition eines Potentials benutzen. Denn sei \vec{A} ein Vektorfeld mit der Eigenschaft

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B} .$$

Dann gilt nach dem Stokeschen Satz für die Oberfläche eines Gebietes G

$$\int_{\partial G} \vec{B} \cdot d^2\vec{r} = \int_{\partial(\partial G)} \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0 ,$$

da der Rand einer geschlossenen Fläche leer ist.

Wir wollen jetzt zeigen, dass (ähnlich wie bei der Existenz des elektrostatischen Potentials) aus $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ die Existenz eines Vektorpotentials

\vec{A} mit $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$ folgt. Hierbei bestimmen wir zunächst das Linien-Integral von \vec{A} über eine beliebige Kurve γ . Für Randkurven einer orientierten Fläche muss wegen des Stokeschen Satzes gelten

$$\int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{B} \cdot d^2\vec{r}.$$

Wir ordnen jetzt jeder Kurve γ mit Parametrisierung $\vec{r}(t)$, $t \in [0, 1]$, die Fläche S mit Parametrisierung $\vec{r}(s, t) = s\vec{r}(t)$, $(s, t) \in [0, 1]^2$ zu und definieren

$$\int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{B} \cdot d^2\vec{r}.$$

Die Tangentenvektoren an S sind

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \vec{r}(t), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = s\dot{\vec{r}}(t).$$

Es folgt

$$\int_0^1 dt \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \int_0^1 ds \int_0^1 dt \vec{B}(s\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}(t) \times s\dot{\vec{r}}(t)).$$

Wir wenden die zyklische Vertauschungsregel für das Spatprodukt an und erhalten nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge für die rechte Seite

$$\int_0^1 dt \left(\int_0^1 ds s \vec{B}(s\vec{r}(t)) \times \vec{r}(t) \right) \cdot \dot{\vec{r}}(t).$$

Da die Gleichung für alle Wege γ gelten soll, folgt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_0^1 ds s \vec{B}(s\vec{r}) \times \vec{r}.$$

Wir überzeugen uns davon, dass \vec{A} die gewünschte Bedingung erfüllt. Dazu betrachten wir eine geschlossene Kurve γ . Die zugehörige wie oben konstruierte Fläche S besitzt γ als Randkurve ∂S , in Übereinstimmung mit der Bedingung an \vec{A} .

Sei nun S_1 eine andere Fläche, die ebenfalls γ als Randkurve besitzt. Dann bilden S und S_1 zusammen den Rand eines Gebietes G , wobei das eine Flächenstück nach außen und das andere nach innen orientiert ist. Also gilt

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot d^2\vec{r} = \int_S \vec{B} \cdot d^2\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r},$$

d.h. nach dem Stokeschen Satz ist

$$\int_{S_1} (\vec{B} - \text{rot } \vec{A}) \cdot d^2\vec{r} = 0$$

für beliebige Flächen S_1 , also löst \vec{A} das gestellte Problem.

Wir betrachten jetzt 3 Beispiele. Sei zunächst $\vec{B} = \text{const}$. Dann gilt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_0^1 ds s \vec{B} \times \vec{r} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}.$$

Als zweites Beispiel nehmen wir das Magnetfeld eines linienförmigen Stroms in z -Richtung. Das Magnetfeld ist

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{I}{2\pi r^2}(-y, x, 0)$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (wir verwenden die Konvention $\mu_0 = 1$). Dann folgt

$$\begin{aligned}\vec{A}(x, y, z) &= \frac{I}{2\pi} \int_0^1 ds s \frac{1}{(sr)^2}(-sy, sx, 0) \times (x, y, z) \\ &= \frac{I}{2\pi r^2}(xz, yz, -r^2) .\end{aligned}$$

Unser 3. Beispiel ist das Magnetfeld einer langen stromdurchflossenen zylindrischen Spule mit Radius R . Es ist gegeben durch

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} nI\vec{e}_z & , \quad x^2 + y^2 < R^2 \\ 0 & , \quad x^2 + y^2 \geq R^2 \end{cases}$$

mit der Zahl der Windungen pro Länge n . Wir berechnen das Vektorpotential außerhalb der Spule. Wir erhalten ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_0^{\frac{R}{r}} ds s nI \vec{e}_z \times \vec{r} = \frac{R^2}{2r^2} nI \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{r}}_{(-y, x, 0)} .$$

Wir stellen fest, dass das Vektorpotential außerhalb der Spule nicht verschwindet. Diese Tatsache hat interessante physikalische Auswirkungen (Aharonov-Bohm-Effekt). Bringt man nämlich Elektronenstrahlen, die rechts, bzw. links an der Spule vorbeifliegen, zur Interferenz, so hängt das Interferenzbild vom umschlossenen magnetischen Fluss ab, obwohl die Elektronen sich nur an Orten aufhalten, an denen das Magnetfeld gleich Null ist.

Das Vektorpotential hat also durchaus eine physikalische Bedeutung. Es ist allerdings durch das Magnetfeld \vec{B} nicht eindeutig bestimmt, so wie ja auch das elektrostatische Potential nicht eindeutig durch das elektrische Feld bestimmt ist. Während dort aber die Mehrdeutigkeit in einer Addition einer Lösung von $\text{grad } V = 0$, also einer Konstanten besteht, können wir beim Vektorpotential eine Lösung der Gleichung $\text{rot } \vec{A} = 0$ addieren; wie wir bereits wissen, sind dies genau die Gradienten skalarer Funktionen. Wir erhalten also die zu einem Magnetfeld zugehörigen Vektorpotentiale durch

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \text{grad } \Lambda$$

mit einem speziellen Vektorpotential (z.B. dem durch die oben beschriebene Konstruktion gewonnenen) und einer beliebigen Funktion Λ .

Die Änderung des Vektorpotentials durch Addition eines Gradienten nennt man eine **Eichtransformation**. Man kann das Vektorpotential durch zusätzliche Bedingungen festlegen (Eichungen). Eine oft verwendete Eichung ist die sogenannte Coulomb-Eichung $\text{div } \vec{A} = 0$.

Ausgehend von einem beliebigen Vektorpotential \vec{A}_0 findet man \vec{A} in der folgenden Weise: Es soll gelten

$$0 = \operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \vec{A}_0 + \operatorname{div} \operatorname{grad} \Lambda .$$

Mit $\operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta$ für skalare Funktionen ergibt sich, dass Λ die Poisson-Gleichung erfüllt,

$$\Delta \Lambda = -\operatorname{div} \vec{A}_0 .$$

Fällt $\operatorname{div} \vec{A}_0$ im Unendlichen schnell genug ab, so ist eine Lösung für Λ

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} \vec{A}_0(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' .$$

In der Magnetostatik gilt der folgende Zusammenhang zwischen Magnetfeld und Stromdichte ($\mu_0 \equiv 1$)

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j}}$$

(**Ampère-Gesetz**). Hieraus folgt

$$\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0 ,$$

also verschwindet der Strom, der aus einem beliebigen Gebiet G austritt,

$$\int_{\partial G} \vec{j} \cdot d^2\vec{r} = \int_G \operatorname{div} \vec{j} d^3\vec{r} = 0$$

(stationäre Stromverteilung). Setzen wir jetzt $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, so folgt

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{j} .$$

Wir wählen jetzt das Vektorpotential \vec{A} so, dass es die Coulomb-Eichbedingung $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ erfüllt. Dann gilt

$$(\operatorname{rot} \operatorname{rot} - \operatorname{grad} \operatorname{div}) \vec{A} = \vec{j} .$$

So wie $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ der Laplace-Operator für skalare Funktionen ist, so ist

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{rot} \operatorname{rot}$$

der Laplace-Operator für Vektorfelder. In kartesischen Koordinaten nämlich gilt nach den Regeln für das zweifache Vektorprodukt

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} ,$$

da die Differentialoperatoren grad , rot und div aber koordinatenunabhängig sind, können wir die Formel

$$\boxed{\Delta = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{rot} \operatorname{rot}}$$

als Definition des Laplace-Operators für Vektorfelder ansehen.

Die Lösung des Ampère-Gesetzes ist damit auf die Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta \vec{A} = \vec{j}$ zurückgeführt, die für eine im Endlichen konzentrierte Stromverteilung lautet

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

und es folgt für das Magnetfeld das **Biot-Savartsche Gesetz**

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \left(\vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right).$$

Im Fall einer linienförmigen Stromverteilung längs einer Kurve γ (Parametrisierung $\vec{r}'(t), t \in [0, 1]$) kann man das Volumenintegral über \vec{r}' durch ein Linienintegral ersetzen,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{\gamma} d\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} := \frac{I}{4\pi} \int_0^1 dt \frac{\dot{\vec{r}}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Nach den Spezialfällen der Elektro- und Magnetostatik wollen wir jetzt die vollen Maxwell-Gleichungen betrachten, zunächst aber nur für den Fall verschwindender Ladungs- und Stromdichte ($\rho = 0, \vec{j} = 0$). Die Gleichungen nehmen die folgende Form an:

$$\text{rot } \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \quad (1) \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{B} - \dot{\vec{E}} = 0 \quad (3) \quad \text{div } \vec{E} = 0 \quad (4).$$

Wir bilden jetzt die Rotation von Gleichung (1) und erhalten

$$\text{rot rot } \vec{E} + \text{rot } \dot{\vec{B}} = 0$$

Im zweiten Term vertauschen wir die Reihenfolge von Zeitableitung und Rotation und erhalten mithilfe von Gleichung (3)

$$\text{rot } \dot{\vec{B}} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}.$$

Nach der Definition des Laplace-Operators für Vektorfelder gilt

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}.$$

Benutzt man schließlich Gleichung (4), so folgt für \vec{E} die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \Delta \vec{E} = 0.$$

Dies ist die Wellengleichung mit Phasengeschwindigkeit $c = 1$. Eine analoge Rechnung ergibt, dass auch das magnetische Feld \vec{B} die Wellengleichung erfüllt.

Um Lösungen der Wellengleichung (zunächst für skalare Funktionen u) zu finden, machen wir den Ansatz

$$u(t, \vec{r}) = u_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t).$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt die Bedingung

$$\omega^2 = |\vec{k}|^2 .$$

Man nennt \vec{k} den Wellenzahlvektor. Er hängt mit der Wellenlänge λ durch

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

zusammen. ω nennt man die Kreisfrequenz. Die Frequenz ν ist dann $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

Man kann zeigen, dass jede Lösung der Wellengleichung als Überlagerung ebener Wellen dargestellt werden kann.

Für die homogenen Maxwell-Gleichungen machen wir nun den Ansatz

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, \vec{r}) &= \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \vec{B}(t, \vec{r}) &= \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)\end{aligned}$$

mit $\omega = |\vec{k}|$ und konstanten Vektoren \vec{E}_0 und \vec{B}_0 . δ berücksichtigt eine eventuelle Phasenverschiebung zwischen elektrischem und magnetischem Feld.

Wir setzen diesen Ansatz in die Maxwell-Gleichungen ein. Aus Gleichung (4) folgt mit

$$\operatorname{div} \vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot \operatorname{grad} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \vec{E}_0 \cdot \vec{k} (-\sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) ,$$

dass $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$ ist. Das elektrische Feld steht also senkrecht auf dem Wellenzahlvektor (transversale Welle). Dasselbe gilt für das magnetische Feld aufgrund von Gleichung (2).

Benutzen wir schließlich das Induktionsgesetz (Gleichung (1)), so ergibt sich aus

$$\operatorname{rot} \vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 \times \operatorname{grad} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \vec{E}_0 \times \vec{k} (-\sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$$

und

$$\dot{\vec{B}}(t, \vec{r}) = \vec{B}_0 \omega (-\sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)) ,$$

dass $\delta = 0$ ist, elektrisches und magnetisches Feld schwingen also gleichzeitig, und dass

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{E}_0$$

gilt. Elektrisches und magnetisches Feld sind also gleich groß (in SI-Einheiten ist $|\vec{B}|c = |\vec{E}|$) und stehen senkrecht aufeinander, sodass \vec{k} , \vec{E} und \vec{B} ein Rechtssystem bilden (Rechte-Hand-Regel).

Wir wollen uns nun mit dem allgemeinen Fall beschäftigen, in dem ρ und \vec{j} beliebig vorgegeben sind. Wir gehen dabei ähnlich vor, wie im statischen Fall. Unser Ausgangspunkt ist die Gleichung $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. Wir nutzen aus, dass diese Gleichung die Existenz eines Vektorpotentials \vec{A} mit $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$ zur Folge hat. Wir setzen diese Beziehung in das

Induktionsgesetz ein, vertauschen die Reihenfolge von Rotation und Zeitableitung und erhalten

$$\operatorname{rot}(\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0 .$$

Wir schließen, dass es eine skalare Funktion V gibt mit $\operatorname{grad} V = -(\vec{E} + \dot{\vec{A}})$. V entspricht formal dem elektrostatischen Potential, hat aber wegen seiner Abhängigkeit vom Vektorpotential keine unmittelbare physikalische Bedeutung.

Wir können jetzt \vec{E} und \vec{B} durch die Potentiale V und \vec{A} ausdrücken und in die verbleibenden Maxwell-Gleichungen einsetzen. Allerdings sind die dabei entstehenden Gleichungen für V und \vec{A} etwas unübersichtlich.

Um sie zu vereinfachen, nutzen wir aus, dass die Potentiale durch das elektromagnetische Feld nicht eindeutig bestimmt sind. Sei nämlich Λ eine beliebige Funktion von t und \vec{r} . Wenn wir \vec{A} durch $\vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda$ und V durch $V - \dot{\Lambda}$ ersetzen (Eichtransformation), so ergibt sich für das elektromagnetische Feld

$$\vec{B} = \operatorname{rot}(\vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda) = \operatorname{rot} \vec{A}$$

wegen $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Lambda = 0$ und

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}(V - \dot{\Lambda}) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda) = -\operatorname{grad} V - \dot{\vec{A}}$$

wegen $\operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \Lambda$.

Welche Eichung man wählt, ist eine Frage der Bequemlichkeit. Eine beliebte Eichung, die wir bereits bei der Magnetostatik kennen gelernt haben, ist die Coulomb-Eichung $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Geht man mit diesem Ansatz in das Gaußsche Gesetz $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, so verschwindet der Beitrag des Vektorpotentials, und V erfüllt wie in der Elektrostatik die Poisson-Gleichung $\Delta V = -\rho$. Etwas irritierend ist, dass die Lösung

$$V(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(t, \vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} ,$$

von der Ladungsverteilung zur selben Zeit abhängt, obwohl nach den Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie eine instantane Informationsübermittlung nicht möglich ist. Es besteht aber kein Widerspruch, da das Potential V nicht direkt messbar ist.

Setzen wir den gefundenen Ausdruck für V in die verbleibende Maxwell-Gleichung ein, so erhalten wir schließlich für \vec{A} die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \vec{j}_{\text{tr}} ,$$

wobei der sogenannte transversale Strom \vec{j}_{tr} durch

$$\vec{j}_{\text{tr}}(t, \vec{r}) = \vec{j}(t, \vec{r}) + \operatorname{grad} \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

definiert ist. (Wir haben hierbei die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

ausgenutzt. Diese Gleichung ist eine Konsequenz der Maxwell-Gleichungen und drückt die Erhaltung der elektrischen Ladung in differentieller Form aus.)

Die Coulomb-Eichung hat den Nachteil, dass sie von der Wahl eines Bezugssystems abhängt. Um die Lorentz-Invarianz der Theorie ausnutzen zu können, ist daher eine andere Eichung praktischer, die sogenannte Lorenzeichung. Bei dieser setzt man

$$\operatorname{div} \vec{A} + \dot{V} = 0 .$$

Setzt man diese Bedingung in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen ein, so erhält man die inhomogenen Wellengleichungen

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} V - \Delta V = \rho$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \vec{j} .$$

für die Potentiale. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung ist eine Summe aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist die retardierte Lösung. Für das skalare Potential hat sie die Form

$$V(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 \vec{r}' \frac{\rho(t - |\vec{r} - \vec{r}'|, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} .$$

Das Potential zur Zeit t hängt hierbei von der Ladungsdichte zur retardierten Zeit $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|$ ab. Die Zeitverzögerung ist genau die Zeit, die das Licht braucht, um vom Punkt \vec{r}' zum Punkt \vec{r} zu gelangen.

Wir müssen noch überprüfen, ob die Lorenz-Bedingung an die Potentiale immer erfüllbar ist. Seien \vec{A}_0 und V_0 beliebig. Wir suchen eine skalare Funktion $\Lambda(t, \vec{r})$ sodass $\vec{A} = \vec{A}_0 + \operatorname{grad} \Lambda$ und $V = V_0 - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda$ die Lorenzbedingung erfüllen. Λ muss also der Gleichung

$$0 = \operatorname{div} \vec{A} + \dot{V} = \operatorname{div} \vec{A}_0 + \dot{V}_0 + \Delta \Lambda - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda$$

genügen, ist also eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit inhomogenem Term $\operatorname{div} \vec{A}_0 + \dot{V}_0$.

Aus den retardierten Potentialen gewinnt man die retardierten Lösungen der Maxwell-Gleichungen durch

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = -\operatorname{grad} V(t, \vec{r}) - \dot{\vec{A}}(t, \vec{r}) \quad (5.8)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int d^3 \vec{r}' \left(\frac{\rho(t_{\text{ret}}, \vec{r}') \vec{e}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{\dot{\rho}(t_{\text{ret}}, \vec{r}') \vec{e} - \dot{\vec{j}}(t_{\text{ret}}, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (5.9)$$

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(t, \vec{r}) \quad (5.10)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \left(\frac{\vec{j}(t_{\text{ret}}, \vec{r}') \times \vec{e}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{\dot{\vec{j}}(t_{\text{ret}}, \vec{r}') \times \vec{e}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (5.11)$$

mit der retardierten Zeit $t_{\text{ret}} = t - |\vec{r} - \vec{r}'|$ und dem Einheitsvektor

$$\vec{e} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\text{grad}_{\vec{r}} t_{\text{ret}} .$$

Bemerkenswert ist hier, dass zu dem Term, der wie (Abstand)⁻² abfällt und bis auf die Ersetzung der Zeit durch die retardierte Zeit mit dem entsprechenden statischen Ausdruck übereinstimmt, ein neuer Term hinzukommt, der nur wie (Abstand)⁻¹ abfällt. Den ersten Term nennt man das Nahfeld, den zweiten das Fernfeld. Das Fernfeld kommt wegen der nichttrivialen Orts- und Zeitabhängigkeit der retardierten Zeit zustande. Das Fernfeld ist verantwortlich für die Möglichkeit, elektromagnetische Energie über große Abstände hinweg zu übertragen.

Wie im Eingangskapitel über spezielle Relativitätstheorie erwähnt, ist die Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem unabhängig. Die Maxwellgleichungen gelten daher genauso in einem gleichförmig bewegten Bezugssystem. Dabei transformieren sich allerdings elektrische und magnetische Felder untereinander, ebenso Stromdichte und Ladungsdichte.

Wir betrachten eine Lorentztransformation auf ein System, das sich mit Geschwindigkeit \vec{v} bewegt ($|\vec{v}| < c \equiv 1$). Sei $a = (a_0, \vec{a})$ ein beliebiger Vierervektor. a transformiert sich unter der Lorentztransformation zu $a' = (a'_0, \vec{a}')$ mit

$$a'_0 = \gamma a_0 - \gamma \vec{v} \cdot \vec{a} , \quad \vec{a}' = \gamma \vec{a}_{\parallel} - \gamma \vec{v} a_0 + \vec{a}_{\perp}$$

mit $\gamma = (1 - |\vec{v}|^2)^{-\frac{1}{2}}$ und der Zerlegung von $\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$ in Anteile parallel und senkrecht zu \vec{v} . Sei $x(\tau)$ die durch die Eigenzeit parametrisierte Weltlinie eines elektrisch geladenen Teilchens mit Ladung e und Masse m , das sich zur Zeit $\tau = 0$ am Ursprung mit Geschwindigkeit \vec{v} (bezogen auf das ruhende System) bewegt. Die Bewegung des Teilchens wird durch ein elektromagnetisches Feld (\vec{E}, \vec{B}) beeinflusst. Die an dem Teilchen wirkende Leistung ist $P = \frac{d}{dt} m\gamma = e\vec{E} \cdot \vec{v}$, die Kraft ist $\vec{K} = \frac{d}{dt} m\gamma \vec{v} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Umgerechnet auf die Eigenzeit ergibt sich (mit $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} m\gamma &= e\gamma \vec{E} \cdot \vec{v} , \\ \frac{d}{d\tau} m\gamma \vec{v} &= e\gamma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) . \end{aligned}$$

Bezüglich des mit Geschwindigkeit \vec{v} bewegten Systems ruht das Teilchen und spürt daher nur das elektrische Feld \vec{E}' im bewegten System. Die auf die Eigenzeit bezogene Kraft $\gamma \vec{K}$ (mit γP als 0-Komponente)

transformiert sich wie ein Vierervektor. Die Leistung im bewegten System verschwindet, für die Kraft ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{K}' &= e(\gamma^2 \vec{E}_{\parallel} - \gamma^2 \vec{v}(\vec{E} \cdot \vec{v}) + \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B})) \\ &= e(\vec{E}_{\parallel} + \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B})) .\end{aligned}$$

also folgt für das elektrische Feld im bewegten System

$$\vec{E}' = \vec{E}_{\parallel} + \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) . \quad (5.12)$$

Entsprechend gilt für das magnetische Feld im bewegten System

$$\vec{B}' = \vec{B}_{\parallel} + \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{E}) . \quad (5.13)$$

6. KRUMMLINIGE KOORDINATEN

In vielen Anwendungen benutzt man spezielle Koordinatensysteme, die dem Problem besonders gut angepasst sind; die wichtigsten sind die kartesischen, die Kugel- und die Zylinderkoordinaten. Da die Differentialoperatoren der Vektoranalysis Gradient, Rotation und Divergenz eine geometrische Bedeutung haben, lassen sie sich in beliebige Koordinatensysteme übertragen.

Sei (u_1, u_2, u_3) ein solches Koordinatensystem mit

$$v \equiv \det \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right) > 0 .$$

Der Laplaceoperator auf skalaren Funktionen ist $\Delta = \text{div grad}$. Für die Divergenz haben wir bereits einen in allen Koordinatensystemen gültigen Ausdruck gefunden,

$$\text{div } \vec{C} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} (v C^i) ,$$

wobei die C^i die Koeffizienten von \vec{C} in der Basis $\left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right\}$ sind. Zur Berechnung des Laplace-Operators in den Koordinaten u_i müssen wir daher den Gradienten einer skalaren Funktion f als Linearkombination dieser Basisvektoren darstellen. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \text{grad } f \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^3 (\text{grad } f)^j \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right) .$$

Die aus den Skalarprodukten $g_{ji} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ gebildete Matrix

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

nent man den metrischen Tensor. Fassen wir $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ als Spaltenvektor auf, so gilt

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right)^T \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} ,$$

wobei der obere Index T die transponierte Matrix bezeichnet. Wir können daher G als Produkt zweier Matrizen schreiben,

$$G = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right)^T \\ \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right)^T \\ \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \end{pmatrix} .$$

Die erste Matrix auf der rechten Seite ist die transponierte der zweiten, also haben beide dieselbe Determinante, nämlich v . Wir schließen, dass $g \equiv \det G = v^2$ ist. Insbesondere ist die Matrix G invertierbar. Die Matrixelemente der inversen Matrix G^{-1} bezeichnet man durch g^{ij} . Für die Koeffizienten des Gradienten finden wir daher den Ausdruck

$$(\text{grad } f)^j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial u_i} g^{ij} .$$

Damit erhalten wir die Formel für den Laplace-Operator in den Koordinaten u_i

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) .$$

In Kugelkoordinaten z.B. gilt $g_{rr} = \partial_r \vec{r} \cdot \partial_r \vec{r} = 1$, $g_{r\theta} = g_{r\varphi} = g_{\theta\varphi} = 0$, $g_{\theta\theta} = \partial_\theta \vec{r} \cdot \partial_\theta \vec{r} = r^2$, $g_{\varphi\varphi} = \partial_\varphi \vec{r} \cdot \partial_\varphi \vec{r} = r^2 \sin^2 \theta$, also

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

und

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} .$$

Für $v = \sqrt{g} = \sqrt{\det G}$ ergibt sich $r^2 \sin \theta$, und wir finden die Formel für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) .$$

In Zylinderkoordinaten finden wir $g_{rr} = 1$, $g_{\varphi\varphi} = r^2$, $g_{zz} = 1$, $g_{r\varphi} = g_{rz} = g_{\varphi z} = 0$, also

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{g} = r,$$

und damit

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

7. RELATIVISTISCHE GESCHWINDIGKEITSADDITION

Wir kennen bereits die relativistische Geschwindigkeitsaddition für parallele Geschwindigkeiten. Diese ergibt sich aus der Multiplikatitivität der Rotverschiebungsfaktoren $k(v) = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$ zu

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}.$$

Bei nicht parallelen Geschwindigkeiten ist die Geschwindigkeitsaddition komplizierter. Im nichtrelativistischen Fall addieren sich die Geschwindigkeiten vektoriell. Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ die Geschwindigkeiten dreier gleichförmig bewegter Beobachter, so ergibt sich die Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_{32} = \vec{v}_3 - \vec{v}_2$ aus den Relativgeschwindigkeiten $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ und $\vec{v}_{31} = \vec{v}_3 - \vec{v}_1$ zu

$$\vec{v}_{32} = \vec{v}_{31} - \vec{v}_{21}.$$

Für die Beträge gilt

$$v_{32}^2 = v_{31}^2 + v_{21}^2 - \cos \alpha v_{31} v_{21},$$

wobei α der eingeschlossene Winkel zwischen den Vektoren \vec{v}_{31} und \vec{v}_{21} ist,

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v}_{31} \cdot \vec{v}_{21}}{v_{31} v_{21}}.$$

Dies ist nichts anderes als der Kosinussatz der euklidischen Geometrie.

Bemerkenswert ist nun, dass sich die relativistische Geschwindigkeitsaddition aus dem entsprechenden Satz der hyperbolischen Geometrie ergibt. Ersetzt man nämlich die Geschwindigkeiten \vec{v} durch die Vierergeschwindigkeiten

$$u = \gamma(1, \vec{v}),$$

so gilt

$$u^2 := u_0^2 - \vec{u} \cdot \vec{u} = \gamma^2(1 - \vec{v} \cdot \vec{v}) = 1,$$

die Vierergeschwindigkeiten liegen also auf einem Hyperboloiden im Minkowskiraum. Der Abstand zweier Punkte auf diesem Hyperboloid (gemessen mit der Minkowskiraummetrik) ist gerade die Rapidität

$$\theta = \text{Artanh } v,$$

wenn v der Betrag der Relativgeschwindigkeit ist, bezogen auf das Ruh-system eines Punktes. Es folgt

$$\cosh \theta = \sqrt{\frac{1}{1 - \tanh^2 \theta}} = \sqrt{\frac{1}{1 - v^2}} = \gamma .$$

Wir drücken jetzt γ durch Minkowskiraumskalarprodukte der Vierervektoren aus. Seien u_1, u_2 zwei Vierergeschwindigkeiten. Im Ruhssystem von u_1 gilt $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = \gamma_{21}(1, \vec{v}_{21})$. Also ist

$$\gamma_{21} = u_2 u_1 .$$

Das Minkowskiraumskalarprodukt der beiden Vierergeschwindigkeiten auf der rechten Seite ist aber von der Wahl des Bezugssystem un-abhängig. Also gilt für den Abstand θ_{21} von u_1 und u_2

$$\cosh \theta_{21} = u_2 u_1 .$$

Sei u_3 die Vierergeschwindigkeit eines dritten Beobachters. Wir ver-binden die 3 Punkte auf dem Hyperboloiden durch Geodäten (Kur-ven kürzester Länge) und erhalten so ein Dreieck mit Seitenlängen $\theta_{21}, \theta_{31}, \theta_{32}$ auf dem Hyperboloiden. Um die Länge θ_{32} der dritten Seite zu berechnen, benötigen wir neben den Längen der beiden anderen Sei-ten wie beim Kosinussatz der euklidischen Geometrie den eingeschlos-senen Winkel α zwischen den beiden bekannten Seiten. Im Ruhssystem von u_1 gilt

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v}_{21} \cdot \vec{v}_{31}}{v_{21} v_{31}} .$$

Wieder drücken wir die rechte Seite mit Hilfe der Skalarprodukte der Vierervektoren aus. Es gilt

$$\frac{(u_2 u_1)(u_3 u_1) - u_3 u_2}{\sqrt{(u_2 u_1)^2 - 1} \sqrt{(u_3 u_1)^2 - 1}} = \frac{\gamma_{21} \gamma_{31} \vec{v}_{21} \cdot \vec{v}_{31}}{\sqrt{\gamma_{21}^2 - 1} \sqrt{\gamma_{31}^2 - 1}} = \frac{\vec{v}_{21} \cdot \vec{v}_{31}}{v_{21} v_{31}} ,$$

wobei wir die Beziehung $v = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$ ausgenutzt haben. Wir erhalten den Kosinussatz der hyperbolischen Geometrie

$$\cosh \theta_{32} = \cosh \theta_{21} \cosh \theta_{31} - \cos \alpha \sinh \theta_{21} \sinh \theta_{31} . \quad (7.1)$$

Für kleine θ gilt $\cosh \theta \approx 1 + \frac{\theta^2}{2}$, $\sinh \theta \approx \theta$ und man findet den Kosinussatz der euklidischen Geometrie.

Umgerechnet auf die Relativgeschwindigkeiten bedeutet der Kosi-nussatz der hyperbolischen Geometrie

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v_{32}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{21}^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - v_{31}^2}} (1 - \cos \alpha v_{21} v_{31}) .$$

Auflösung nach v_{32} ergibt

$$v_{32} = \frac{\sqrt{v_{21}^2 + v_{31}^2 - 2 \cos \alpha v_{21} v_{31} - \sin^2 \alpha v_{21}^2 v_{31}^2}}{1 - \cos \alpha v_{21} v_{31}} . \quad (7.2)$$

Für $\alpha = 0, \pi$ reduziert sich die Formel auf das Additionstheorem für parallele Geschwindigkeiten. Für orthogonale Geschwindigkeiten ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) findet man die bemerkenswerte Formel

$$v_{32}^2 = v_{21}^2 + v_{31}^2 - v_{21}^2 v_{31}^2 .$$

8. KOMPLEXE ANALYSIS (FUNKTIONENTHEORIE)

Wir haben die Vektoranalysis bisher vor allem für den 3-dimensionalen Raum diskutiert, dabei allerdings bemerkt, dass viele Beziehungen sich für beliebige Dimensionen formulieren lassen. Am besten geeignet für eine solche Formulierung ist die Theorie der Differentialformen, für die allerdings auf die Vorlesung Mathematik für Physiker verwiesen werden muss. Wir wollen uns im folgenden auf den Spezialfall des 2-dimensionalen Raums \mathbb{R}^2 beschränken.

Punkte im \mathbb{R}^2 können durch komplexe Zahlen beschrieben werden,

$$\mathbb{R}^2 \ni \vec{r} = (x, y) \mapsto x + iy = z \in \mathbb{C} .$$

Aus der komplexen Zahl z lassen sich die reellen Koordinaten durch Bildung von Real- und Imaginärteil zurückgewinnen,

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} z := \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y &= \operatorname{Im} z := \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{aligned}$$

mit der komplexen Konjugation $x + iy = z \mapsto \bar{z} = x - iy$.

Die komplexen Zahlen bilden einen Körper; dabei entspricht die Addition der Vektoraddition im \mathbb{R}^2 ,

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) ,$$

und die Multiplikation

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

ist mit dem Skalarprodukt und einer 2-dimensionalen Version des Vektorprodukts verwandt,

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= \operatorname{Re} \bar{z}_1 z_2 , \\ (x_1, y_1) \times (x_2, y_2) &\equiv x_1 y_2 - x_2 y_1 = \operatorname{Im} \bar{z}_1 z_2 . \end{aligned}$$

Von besonderem Interesse ist die komplexe Kombination der partiellen Ableitungen

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)} .$$

Sie hängt mit den vektoranalytischen Begriffen Divergenz und (2-dimensionaler) Rotation durch

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f_1, f_2) &= 2 \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial z} (f_1 + if_2) \\ \nabla \times (f_1, f_2) &= 2 \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial z} (f_1 + if_2) . \end{aligned}$$

zusammen. Die Notation $\frac{\partial}{\partial z}$ ist dabei nicht nur symbolisch; tatsächlich kann die partielle Ableitung nach z als Limes der komplexen Differenzenquotienten erhalten werden,

$$\frac{\partial}{\partial z} f = \lim_{z' \rightarrow z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z},$$

unter der Voraussetzung, dass gilt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0,$$

mit dem konjugierten Differentialoperator

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Denn falls der Limes der komplexen Differenzenquotienten existiert, kann man die Differenz $z' - z$ reell wählen und findet

$$\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{\partial}{\partial x} f,$$

wählt man die Differenz hingegen imaginär, so findet man

$$\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} f.$$

Zerlegt man f in Realteil f_1 und Imaginärteil f_2 , so ergeben sich die **Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} f_1 = \frac{\partial}{\partial y} f_2, \quad \frac{\partial}{\partial x} f_2 = -\frac{\partial}{\partial y} f_1}.$$

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, für die der Limes der komplexen Differenzenquotienten existiert, nennt man komplex differenzierbar oder **holomorph**. Eine holomorphe Funktion entspricht einem Vektorfeld auf dem \mathbb{R}^2 , das die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen erfüllt.

Wir differenzieren jetzt die erste der Cauchy-Riemann-Gleichungen nach x , die zweite nach y , nutzen die Symmetrie der zweiten Ableitungen aus und erhalten die Gleichung

$$\Delta f_1 = 0$$

mit dem 2-dimensionalen Laplace-Operator Δ . Entsprechend finden wir die Gleichung

$$\Delta f_2 = 0.$$

Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen sind also harmonische Funktionen auf dem \mathbb{R}^2 . Wie harmonische Funktionen sind daher auch holomorphe Funktionen in einem Gebiet G durch ihre Werte auf dem Rand des Gebietes bestimmt.

Wir führen jetzt das komplexe Kurvenintegral ein. Sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in \mathbb{C} mit Parametrisierung $z(t)$, $t \in [0, 1]$.

Dann wird das komplexe Kurvenintegral einer stetigen komplexwertigen Funktion f über γ durch

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 dt f(z) \dot{z}$$

erklärt. Es folgt unmittelbar aus der Substitutionsregel für eindimensionale Integrale, dass das Kurvenintegral unabhängig von der Wahl der Parametrisierung der Kurve ist, solange die Kurve in derselben Richtung durchlaufen wird. Kehrt man die Richtung um, so erhält das Kurvenintegral einen Faktor -1 .

Das komplexe Kurvenintegral hängt eng mit dem Linienintegral von Vektorfeldern zusammen. Es gilt

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 (f_1 \dot{x} - f_2 \dot{y}) = \int_{\gamma} (f_1, -f_2) \cdot d\vec{r}$$

sowie

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 (f_1 \dot{y} + f_2 \dot{x}) = \int_{\gamma} (f_2, f_1) \cdot d\vec{r}.$$

Sei nun γ geschlossen und umrande ein Gebiet G im positiven Sinn. Dann folgt aus dem Stokeschen Satz

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_G dx dy \left(\frac{\partial}{\partial x} (-f_2 + i f_1) - \frac{\partial}{\partial y} (f_1 + i f_2) \right).$$

Nach der Definition der partiellen Ableitung nach \bar{z} ist der Integrand auf der rechten Seite gleich $2i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. Führen wir das komplexe Volumenelement

$$d\bar{z} dz = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} dx dy = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} dx dy = 2i dx dy$$

ein, so erhält man schließlich den Stokeschen Satz für komplexe Kurvenintegrale,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_G \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} dz.$$

Inbesondere gilt für in G holomorphe Funktionen f

$$\boxed{\int_{\gamma} f(z) dz = 0}$$

(Cauchyscher Integralsatz). Dieser Satz ist einer der wichtigsten Sätze der Mathematik und spielt auch in der Physik an sehr vielen Stellen eine bedeutende Rolle.

Beispiele für holomorphe Funktionen sind leicht anzugeben. Denn natürlich ist die Funktion $f = z$ komplex differenzierbar, und Summen und Produkte komplex differenzierbarer Funktionen sind komplex

differenzierbar, also alle Polynome

$$f(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

Weiter sind Potenzreihen im Bereich, in dem sie absolut konvergieren,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < R = (\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$$

komplex differenzierbar. Typische Beispiele sind die Exponentialfunktion

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (R = \infty)$$

und die Funktion

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (R = 1).$$

Tatsächlich sind alle holomorphen Funktionen in der Umgebung eines Punktes durch Potenzreihen darstellbar,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R,$$

und die Koeffizienten a_n ergeben sich aus den n -ten Ableitungen,

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(z_0).$$

(Für holomorphe Funktionen schreibt man $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{df}{dz}$, da die partielle Ableitung nach \bar{z} verschwindet.)

Durch Real- und Imaginärteilbildung von holomorphen Funktionen findet man sofort Beispiele harmonischer Funktionen auf dem \mathbb{R}^2 . Zum Beispiel ist die Funktion

$$f(x, y) = \operatorname{Re} z^n = \operatorname{Re} r^n e^{in\varphi} = r^n \cos n\varphi$$

harmonisch, wie man (für $r \neq 0$) direkt in Polarkoordinaten nachrechnet,

$$\Delta f = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) f = (n^2 - n^2) r^{n-2} \cos n\varphi = 0.$$

Die Funktion $\frac{1}{z}$ ist bei $z = 0$ natürlich nicht holomorph. Sie hat aber die folgende bemerkenswerte Eigenschaft,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

falls γ den Nullpunkt einmal entgegen dem Uhrzeigersinn umläuft. Dies sieht man sofort für konzentrische Kreislinien γ (Parametrisierung $z(t) = re^{i2\pi t}$, $t \in [0, 1]$),

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^1 dt \frac{r2\pi i e^{i2\pi t}}{re^{i2\pi t}} = 2\pi i .$$

Ist nun γ eine beliebige Kurve, die den Nullpunkt einmal umläuft, dann wählen wir eine konzentrische Kreislinie γ_r mit genügend kleinem Radius r , sodass γ und γ_r ein ringförmiges Gebiet umranden, in dem die Funktion $\frac{1}{z}$ holomorph ist. Dann folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = 2\pi i .$$

Wir nutzen dieses Resultat jetzt aus, um eine holomorphe Funktion f durch ihre Randwerte darzustellen. Es gilt nämlich

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z') dz'}{z' - z} ,$$

falls γ den Punkt z einmal im positiven Sinn umläuft (**Cauchysche Integralformel**). Denn wie vorher können wir γ durch eine konzentrische Kreislinie γ_r ersetzen (mit Parametrisierung $z'(t) = z + re^{i2\pi t}$), ohne den Wert des Integrals zu verändern. Für die rechte Seite ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^1 dt \frac{f(z + re^{i2\pi t}) 2\pi i r e^{i2\pi t}}{re^{i2\pi t}} = \int_0^1 dt f(z + re^{i2\pi t}) .$$

Im Limes $r \rightarrow 0$ erhält man die Cauchysche Integralformel.

Eine unmittelbare Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel ist, dass holomorphe Funktionen unendlich oft komplex differenzierbar sind, mit der n -ten Ableitung

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z') dz'}{(z' - z)^{n+1}} ,$$

wobei γ wie vorher eine Kurve ist, die den Punkt z einmal im positiven Sinn umläuft.

Als Anwendung berechnen wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ikx} .$$

Im Fall $k = 0$ findet man das Integral durch den folgenden Trick. Sei

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

Dann ist

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} ,$$

kann also als Integral im \mathbb{R}^2 aufgefasst werden. Wir führen jetzt Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ ein. Für das Volumenelement gilt

$$dx dy = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} dr d\varphi = r dr d\varphi ,$$

damit folgt für I^2

$$I^2 = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi r e^{-\frac{r^2}{2}} = 2\pi \left(-e^{-\frac{r^2}{2}} \right) \Big|_0^\infty = 2\pi ,$$

also gilt $I = \sqrt{2\pi}$.

Wir fassen jetzt das Integral über x als komplexes Kurvenintegral der Funktion

$$f(z) = e^{-\frac{z^2}{2}} e^{ikz}$$

über die reelle Achse, als Weg in der komplexen Ebene betrachtet, auf. Wir substituieren $z' = z - ik$ und erhalten das Integral von $f(z' - ik) = e^{-\frac{z'^2}{2}} e^{-\frac{k^2}{2}}$ über einen Weg γ_k parallel zur reellen Achse (Parametrisierung $z'(t) = t - ik$, $t \in (-\infty, \infty)$). Da f holomorph ist, kann der Integrationsweg in der komplexen Ebene deformiert werden, ohne den Wert des Kurvenintegrals zu ändern. Wir ersetzen daher γ_k durch einen Weg γ_k^L , $L > 0$, der für $t \in [-L, L]$ vom Weg γ_k abweicht, indem er zunächst in imaginärer Richtung zur reellen Achse geht, auf dieser bis zur Stelle $x = L$ verläuft und anschließend wieder parallel zur imaginären Achse zum Weg γ_k zurück kehrt. Im Limes $L \rightarrow \infty$ bleibt allein der Beitrag des Integrals über die reelle Achse übrig; dieser ist nach der vorangegangenen Rechnung $\sqrt{2\pi} e^{-\frac{k^2}{2}}$. Wir erhalten also das bemerkenswerte Ergebnis

$$\int dx e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ikx} = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{k^2}{2}} .$$

9. FOURIER-TRANSFORMATION

Ein wesentliches Hilfsmittel bei der Behandlung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist die Fourier-Transformation. Dabei zerlegt man eine gegebene Funktion f in eine kontinuierliche Superposition von Exponentialfunktionen,

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dk e^{ikx} \hat{f}(k) ,$$

mit einer Funktion \hat{f} , der sogenannten Fourier-Transformierten von f . Wir haben bereits gesehen, dass man die Gaußsche Glockenfunktion in dieser Weise schreiben kann,

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dk e^{ikx} e^{-\frac{k^2}{2}} .$$

Der große Vorteil einer solchen Darstellung liegt darin, dass Differentiation von f bei den Fourier-Transformierten dem Übergang von $\hat{f}(k)$ zu $ik\hat{f}(k)$ entspricht,

$$\frac{d}{dx}f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dk e^{ikx} ik\hat{f}(k) ,$$

unter der Voraussetzung, dass Integration und Differentiation vertauscht werden können. Eine lineare Differentialgleichung für f ergibt dann eine lineare Gleichung für \hat{f} . Betrachten wir z.B. die inhomogene Schwingungsgleichung ($\gamma, \omega_0 > 0$)

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f .$$

Wir schreiben $x(t)$ und $f(t)$ als Fourier-Integrale bezüglich der (Kreis-)Frequenz ω ,

$$x(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int d\omega e^{i\omega t} \hat{x}(\omega) ,$$

$$f(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int d\omega e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) .$$

und finden die Gleichung für die Fourier-Transformierten

$$((i\omega)^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) \hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega) .$$

Da der Faktor, mit dem \hat{x} multipliziert wird, für kein reelles ω verschwindet, erhalten wir als Lösung für die Fourier-Transformierte

$$\hat{x}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{(i\omega)^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} .$$

Für $x(t)$ ergibt sich daraus

$$x(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int d\omega e^{i\omega t} \frac{\hat{f}(\omega)}{(i\omega)^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} .$$

Um diese Methode anwenden zu können, müssen wir daher 2 Probleme lösen:

- (i) Welche Funktionen lassen sich als Fourier-Integrale darstellen?
- (ii) Wie berechnet man die Fourier-Transformierte?

Wir beschränken uns zunächst auf Fourier-Transformierte, die unendlich oft differenzierbar sind und die, ebenso wie alle ihre Ableitungen, schneller als jede Potenz bei ∞ verschwinden. Diese Funktionen bilden den sogenannten Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^n \frac{d^m}{dx^m} f(x) \right| < \infty \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N}_0 \right\} .$$

Ist $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so auch f . Es gilt nämlich

$$xf(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dk x e^{ikx} \hat{f}(k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dk \frac{1}{i} \left(\frac{d}{dk} e^{ikx} \right) \hat{f}(k) .$$

Mit partieller Integration und der Tatsache, dass $\hat{f}(k)$ im Limes $k \rightarrow \pm\infty$ gegen Null geht, folgt

$$xf(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dk e^{ikx} i \frac{d}{dk} \hat{f}(k) .$$

Mehrfache Anwendung zusammen mit der Formel für die Fourier-Transformierte einer Ableitung ergibt

$$x^n \frac{d^m}{dx^m} f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dk e^{ikx} i^{n+m} \frac{d^n}{dk^n} k^m \hat{f}(k) .$$

Das Supremum der linken Seite lässt sich abschätzen durch

$$\sup_x \left| x^n \frac{d^m}{dx^m} f(x) \right| \leq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\int dk \frac{1}{1+k^2}}_{=\pi} \sup_k \left| (1+k^2) \frac{d^n}{dk^n} k^m \hat{f}(k) \right| .$$

Das Supremum auf der rechten Seite ist für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ endlich, wie man aus der Produktregel und der Tatsache, dass \hat{f} im Schwartzraum liegt, erkennt; also ist f selbst eine Schwartzfunktion.

Beispiele für Elemente von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sind die Funktionen $f(x) = p(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ mit einem Polynom p . Ebenfalls in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt $f(x) = e^{-\sqrt{x^2+1}}$, nicht aber $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Für $f(x) = p(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ können wir sofort die Fourier-Transformierte angeben, nämlich

$$\hat{f}(k) = p\left(i \frac{d}{dk}\right) e^{-\frac{k^2}{2}} .$$

Hierbei ist ein Polynom im Ableitungsoperator $\frac{d}{dk}$ so zu verstehen, dass Potenzen der wiederholten Differentiation entsprechen. Ist z.B. $p(x) = 1 + x^2$, so ist $p\left(i \frac{d}{dk}\right) = 1 - \frac{d^2}{dk^2}$. In analoger Weise erkennt man, dass die Fourier-Transformierte von $f(x) = p\left(\frac{d}{dx}\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\hat{f}(k) = p(ik) e^{-\frac{k^2}{2}}$$

ist. Diese Beziehungen legen die folgende Vermutung für eine Formel zur Berechnung der Fourier-Transformierten nahe,

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dx e^{-ikx} f(x)$$

(Umkehrformel). Zum Beweis benutzen wir das folgende Lemma:

Lemma 9.1. Seien $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und sei

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dk e^{ikx} \hat{f}(k) ,$$

$$g(k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dx e^{ikx} \hat{g}(x) .$$

Dann gilt für alle $u \in \mathbb{R}$

$$\int dx f(x) \hat{g}(x) e^{-ixu} = \int dy \hat{f}(y+u) g(y) .$$

Beweis des Lemmas: Es gilt

$$\int dx f(x) \hat{g}(x) e^{-ixu} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dx \int dk e^{i(k-u)x} \hat{f}(k) \hat{g}(x) .$$

Wir vertauschen die Reihenfolge der Integrationen und führen die x -Integration zuerst aus. Dies ergibt das Integral

$$\int dk \hat{f}(k) g(k-u) .$$

Die Substitution $y = k - u$ liefert jetzt das gewünschte Ergebnis. \square

Beweis der Umkehrformel: Setze $\hat{g}_\varepsilon(k) = \hat{g}(\varepsilon k)$ und

$$g_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dk e^{ikx} \hat{g}(\varepsilon k)$$

($\varepsilon > 0$). Wir substituieren $k' = \varepsilon k$, $dk' = \varepsilon dk$ und finden

$$g_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dk' \frac{1}{\varepsilon} e^{i\frac{k'x}{\varepsilon}} \hat{g}(k') = \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) .$$

Wir ersetzen im Lemma g durch g_ε und erhalten

$$\int dx f(x) \hat{g}(\varepsilon x) e^{-ixu} = \int dy \hat{f}(y+u) g\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\varepsilon} .$$

Auf der rechten Seite substituieren wir $y' = \frac{y}{\varepsilon}$, $dy = \varepsilon dy'$ und finden

$$\int dx f(x) \hat{g}(\varepsilon x) e^{-ixu} = \int dy' \hat{f}(u + \varepsilon y') g(y') .$$

Wir lassen jetzt ε gegen Null gehen. Dann strebt die rechte Seite gegen

$$\hat{f}(u) \int dy' g(y') ,$$

die linke Seite gegen

$$\hat{g}(0) \int dx f(x) e^{-ixu} .$$

Wählen wir z.B. $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, so ist $\int dy' g(y') = \sqrt{2\pi}$ und $\hat{g}(0) = 1$. Also folgt die **Umkehrformel** für die Fourier-Transformation

$$\boxed{\hat{f}(k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dx e^{-ikx} f(x) .}$$

Insbesondere ist jede Funktion aus dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ Fourier-Transformierte einer Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. \square

Wir erkennen, dass die Fourier-Transformation ist eine bijektive Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nach $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist. Diese Eigenschaft macht den Schwartzraum für Anwendungen in der Physik besonders gut geeignet.

Die Formel für die Fouriertransformation ist natürlich auch für allgemeinere Funktionen sinnvoll. So kann man für jede absolut integrierbare Funktion f ,

$$\int dx |f(x)| < \infty ,$$

die Fouriertransformierte \hat{f} durch die angegebene Formel erklären. Allerdings kann es dann passieren, dass die Fouriertransformierte selbst nicht absolut integrierbar ist, sodass die Darstellung von f als Fourierintegral nicht wohldefiniert ist. Wir betrachten das folgende Beispiel:

Sei $f(x)$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[-1, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \leq 1 , \\ 0 & , \quad |x| > 1 . \end{cases}$$

Dann ist

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 dx e^{-ikx} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k} .$$

Die Funktion \hat{f} ist nicht absolut integrierbar. Wir interpretieren daher das Integral in der Fourierdarstellung von f als uneigentliches Integral und untersuchen, ob der Limes der Integrale

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-K}^K \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k} e^{ikx} dk$$

für $K \rightarrow \infty$ existiert und die Funktion $f(x)$ darstellt.

Wir betrachten zunächst den Fall $x = 0$. Das Integral $\int_{-K}^K dk \frac{\sin k}{k}$ kann als Kurvenintegral in der komplexen Ebene aufgefasst werden. Wir nutzen aus, dass der Integrand symmetrisch und bei Null stetig ist und erhalten

$$\int_{-K}^K dk \frac{\sin k}{k} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} 2 \int_{\varepsilon}^K \frac{\sin k}{k} dk .$$

Weiter gilt

$$\int_{\varepsilon}^K \frac{2 \sin k}{k} dk = -i \int_{\varepsilon}^K \frac{e^{ik} - e^{-ik}}{k} dk = \left(\int_{-K}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^K \right) \frac{(-i)e^{ik}}{k} dk .$$

Wir können die beiden Wegstücke durch 2 Halbkreise γ_K und γ_{ε} in der oberen Halbebene zu einem geschlossenen Weg ergänzen. Die Funktion $\frac{e^{iz}}{z}$ ist im Inneren des umschlossenen Gebietes holomorph, daher gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{\varepsilon}^K \frac{2 \sin k}{k} dk - \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{(-i)e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_K} \frac{(-i)e^{iz}}{z} dz = 0 .$$

Der Beitrag des Integrals über den Halbkreis γ_K strebt im Limes $K \rightarrow \infty$ gegen Null. Beim Integral über den Halbkreis γ_{ε} kann man im Limes

$\varepsilon \rightarrow 0$ die Exponentialfunktion durch 1 ersetzen. Wir erhalten daher im Limes $K \rightarrow \infty$ das Ergebnis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin k}{k} dk = \pi .$$

Wir können das Fourier-Integral jetzt auch für andere Werte von x ausrechnen. Es gilt nach den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned} \int_{-K}^K \frac{\sin k}{k} e^{ikx} dk &= \int_{-K}^K \frac{\sin k}{k} (\cos kx + i \sin kx) dk \\ &= \int_{-K}^K (\sin k(1+x) + \sin k(1-x) + i \cos k(x-1) - i \cos k(x+1)) \frac{dk}{2k} . \end{aligned}$$

Die Beiträge mit dem Kosinus verschwinden, weil der Integrand antisymmetrisch ist. Zur Berechnung der verbleibenden Terme benutzen wir, dass nach der vorangegangenen Rechnung gilt

$$\int dk \frac{\sin ak}{k} = \begin{cases} \int dk \frac{\sin k}{k} = \pi & , \quad a > 0, \\ - \int dk \frac{\sin k}{k} = -\pi & , \quad a < 0, \\ 0 & , \quad a = 0. \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$\int dk \frac{\sin k}{k} e^{ikx} = \begin{cases} \pi & , \quad -1 < x < 1, \\ 0 & , \quad |x| > 1, \\ \frac{\pi}{2} & , \quad |x| = 1. \end{cases}$$

Wir finden also schließlich, dass die charakteristische Funktion des Intervalls $(-1, 1)$ im Sinne uneigentlicher Integrale für $|x| \neq 1$ durch ein Fourierintegral dargestellt werden kann. An den Unstetigkeitsstellen $x = \pm 1$ der Funktion tritt jedoch das sogenannte Gibbsche Phänomen auf, nach dem das Fourier-Integral an diesen Stellen gerade den Mittelwert zwischen dem rechten und linken Grenzwert der Funktion annimmt.

Wir wollen jetzt das eingangs erwähnte Beispiel der erzwungenen Schwingungen genauer betrachten. Die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f \tag{9.1}$$

besitzt als inhomogene lineare Differentialgleichung die allgemeine Lösung

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) ,$$

wobei $x_0(t)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ($f \equiv 0$) und $x_1(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Wir nehmen an, dass $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, und suchen eine Lösung $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Lösungen der homogenen Gleichung findet man durch den Ansatz

$$x_0(t) = Ae^{i\omega t}$$

mit $A \in \mathbb{C}$. Einsetzen in die homogene Differentialgleichung ergibt die folgende quadratische Gleichung für ω ,

$$(i\omega)^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0 .$$

Die Lösungen sind für $\frac{\gamma^2}{4} < \omega_0^2$

$$\omega_{1,2} = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} .$$

Also ergibt sich als Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x_0(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(A e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t} + B e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t} \right) ,$$

d.h. eine Schwingung mit Frequenz $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ und exponentiell abklingender Amplitude (für $\gamma > 0$) (Schwingfall).

Im Fall $\frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$ fallen die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung zusammen, sodass der obige Ansatz nur eine einparametrische Schar von Lösungen liefert. Eine weitere Lösung in diesem Fall ist

$$x_0(t) = B t e^{-\frac{\gamma}{2}t} ,$$

wie man durch Einsetzen leicht verifiziert. Die allgemeine Lösung lautet in diesem Fall

$$x_0(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

(aperiodischer Grenzfall).

Es bleibt der Fall $\frac{\gamma^2}{4} > \omega_0^2$. In diesem Fall sind die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\omega_{1,2} = i \left(\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \right) ,$$

also ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x_0(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(A e^{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}t} + B e^{-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}t} \right) .$$

Für große Zeiten verschwindet der 2. Anteil. Der erste Anteil fällt exponentiell ab,

$$x_0(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}(1 - \sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{\gamma^2}})t}$$

Für $\gamma \gg 2\omega_0$ approximieren wir die Wurzel durch $(1 - \frac{2\omega_0^2}{\gamma^2})$ und finden das asymptotische Verhalten

$$x_0(t) \approx A e^{-\frac{\omega_0^2}{\gamma}t}$$

(Kriechfall).

In jedem Fall wächst die Lösung für $t \rightarrow -\infty$ exponentiell an und liegt daher nicht im Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Also besitzt die inhomogene

Gleichung höchstens eine Lösung im Schwartzraum. Ihre Fouriertransformierte erfüllt die Gleichung

$$[(-\omega^2) + i\omega\gamma + \omega_0^2]\hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

mit der Lösung

$$\hat{x}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)} .$$

Die Nullstellen des Nenners sind gerade die vorher bestimmten Lösungen der quadratischen Gleichung. Keine dieser Lösungen ist reell (für $\gamma > 0$), daher ist \hat{x} unendlich oft differenzierbar und liegt also im Schwartzraum. Die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen Schwingungsgleichung im Schwartzraum lässt sich folglich als Fourierintegral schreiben, wie eingangs vermutet.

10. GREENSCHE FUNKTIONEN

10.1. Schwingungsgleichung. Wir setzen die Definition der Fouriertransformierten von f ein und erhalten nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int dt' \int d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} f(t') .$$

Wir führen jetzt die sogenannte Greensche Funktion der Differentialgleichung ein durch

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} .$$

Dann lautet die Lösung

$$x(t) = \int dt' G(t-t')f(t') .$$

Wenn die Greensche Funktion bekannt ist, kann also die Lösung für jede beliebige äußere Störung f durch ein Integral berechnet werden.

Wir berechnen G zunächst für $t < 0$. Wir fassen das Integral in der Definition von G als komplexes Kurvenintegral über die reelle Achse auf. Da der Integrand in der unteren Halbebene ($\text{Im } z < 0$) holomorph ist, können wir nach dem Cauchyschen Integralsatz den Integrationsweg durch den folgenden Weg ersetzen, ohne den Wert des Integrals zu ändern. Wir wählen ein $R > 0$, das später gegen ∞ gehen soll, und setzen den Weg aus den folgenden Stücken zusammen: Zunächst bleiben wir auf der reellen Achse, starten bei $-\infty$ und gehen bis zum Punkt $-R$. Wir nennen diesen Teil des Weges γ_1 und parametrisieren ihn durch $z(s) = s, s \in (\infty, -R]$. Dort verlassen wir die reelle Achse und gehen parallel zur imaginären Achse bis zum Punkt $-R - iR$. Dieses Teilstück nennen wir γ_2 und parametrisieren es durch $z(s) = -R - is, s \in [0, R]$. Danach soll der Weg (Teilstück γ_3) parallel zur reellen Achse bis zum Punkt $-R + iR$ verlaufen. An diesem

Punkt geht der Weg (Teilstück γ_4) parallel zur imaginären Achse wieder zurück zur reellen Achse (Parametrisierung $z(s) = R + is, s \in [-R, 0]$). Das letzte Stück des Weges (Teilstück γ_5) verläuft dann wieder auf der reellen Achse (Parametrisierung $z(s) = s, s \in [R, \infty)$). Man zeigt jetzt, dass das Integral über jedes Teilstück im Limes $R \rightarrow \infty$ verschwindet. Wir wollen als Beispiel das Integral über γ_2 studieren.

Nach Definition des komplexen Kurvenintegrals gilt für jede stetige Funktion f

$$\int_{\gamma_2} dz f(z) = \int_0^R ds (-i) f(-R - is) .$$

In unserem Fall ist

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{izt}}{(z - \omega_1)(z - \omega_2)} .$$

Der Betrag des Integrals über s ist kleiner gleich dem Integral über den Betrag des Integranden; es gelten die Ungleichungen

$$|e^{-i(R+is)t}| = e^{st}$$

und (für $R > \omega_0$)

$$|-R - is - \omega_1| | -R - is - \omega_2| \geq (R - \omega_0)^2 .$$

Der Betrag des Integrals über γ_2 ist also kleiner gleich

$$\frac{1}{2\pi(R - \omega_0)^2} \int_0^R ds e^{st} .$$

Für $t < 0$ gilt

$$\int_0^R ds e^{st} = \frac{1}{t} (e^{Rt} - 1) \leq \frac{1}{|t|} .$$

Wir erkennen, dass das Integral im Limes $R \rightarrow \infty$ verschwindet.

Mit ähnlichen Argumenten zeigt man auch das Verschwinden der Integrale über die anderen Teilstücke des Weges im Limes $R \rightarrow \infty$. Also folgt, dass die Greensche Funktion für $t < 0$ identisch Null ist. Dies ist im Einklang mit unserer Erwartung, dass die Schwingung erst nach der Anregung einsetzen kann.

Für $t > 0$ können wir eine ähnliche Überlegung durchführen, nur dass wir jetzt in die obere Halbebene ($\text{Im } z > 0$) ausweichen müssen, damit die Integrale über die Teilstücke im Limes $R \rightarrow \infty$ verschwinden. Es gibt aber die Komplikation, dass die zu integrierende Funktion an den Nullstellen des Nenners ω_1 und ω_2 nicht holomorph ist. Um trotzdem den Cauchyschen Integralsatz anwenden zu können, modifizieren wir unseren Weg so, dass er diese beiden Punkte nicht einschließt. Dazu verlassen wir am Punkt iR den Weg, gehen (im Schwingfall) entlang der imaginären Achse zum Punkt $i\frac{\gamma}{2}$, von dort parallel zur reellen Achse bis nahe an den Punkt $\omega_1 = i\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$, umrunden diesen auf einem kleinen Kreis entgegen dem Uhrzeigersinn, gehen anschließend

parallel zur reellen Achse bis nahe an den Punkt ω_2 , umrunden auch diesen, kehren zurück zum Punkt $i\frac{\gamma}{2}$ und von dort zum Punkt iR . Die Teile des Weges, die einmal hin und einmal zurück durchlaufen werden, tragen zum Integral nicht bei, da die entsprechenden Kurvenintegrale sich wegheben. Es bleiben im Limes $R \rightarrow \infty$ lediglich die Integrale über die beiden kreisförmigen Wege um die Punkte ω_1 und ω_2 übrig.

Es gilt also

$$G(t) = -i \sum_{j=1}^2 \operatorname{res}_{\omega_j} \frac{e^{izt}}{(z - \omega_1)(z - \omega_2)}$$

mit den sogenannten Residuen einer (bis auf eine diskrete Punktmenge) holomorphen Funktion f

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dz f(z) ,$$

mit einem Weg γ , der den Punkt z_0 einmal positiv umrundet und außer z_0 keinen Punkt umschließt, an dem f nicht holomorph ist.

In unserem Fall wählen wir Kreise mit genügend kleinem Radius ρ um die Nullstellen des Nenners. Für ω_1 ist der Weg durch $z(s) = \omega_1 + \rho e^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$ parametrisiert. Mit $\dot{z}(s) = i\rho e^{is}$ erhalten wir für das Residuum bei ω_1

$$\operatorname{res}_{\omega_1} \frac{e^{izt}}{(z - \omega_1)(z - \omega_2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} ds i\rho e^{is} \frac{e^{i(\omega_1 + \rho e^{is})t}}{\rho e^{is}(\omega_1 - \omega_2 + \rho e^{is})} .$$

Das Integral ist unabhängig von ρ , der Integrand konvergiert im Limes $\rho \rightarrow 0$ gegen

$$\frac{e^{i\omega_1 t}}{\omega_1 - \omega_2} .$$

Also gilt

$$\operatorname{res}_{\omega_1} \frac{e^{izt}}{(z - \omega_1)(z - \omega_2)} = \frac{e^{i\omega_1 t}}{\omega_1 - \omega_2} .$$

Entsprechend folgt für das Residuum bei ω_2

$$\operatorname{res}_{\omega_2} \frac{e^{izt}}{(z - \omega_1)(z - \omega_2)} = \frac{e^{i\omega_2 t}}{\omega_2 - \omega_1} .$$

Wir erhalten also das Ergebnis für $G(t)$ für $t > 0$

$$G(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \frac{\sin \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}t}}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} .$$

Die Rechnung für den Kriechfall ist im wesentlichen gleich und liefert

$$G(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \frac{\sinh \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2 t}}{\sqrt{\frac{\gamma^2 - \omega_0^2}{4}}} .$$

Im aperiodischen Grenzfall fallen die beiden Nullstellen des Nenners zusammen ($\omega_1 = \omega_2 = i\frac{\gamma}{2}$), daher ist die Berechnung des Residuums etwas anders. Es gilt

$$\operatorname{res}_{i\frac{\gamma}{2}} \frac{e^{izt}}{(z - i\frac{\gamma}{2})^2} = \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{2\pi i} \int_0^{2\pi} ds i \rho e^{is} \frac{e^{i\rho e^{is}t}}{\rho^2 e^{i2s}}.$$

Wir ersetzen jetzt im Integranden $e^{i\rho e^{is}t}$ durch $1 + (e^{i\rho e^{is}t} - 1)$. Das Integral über den ersten Term verschwindet. Der zweite Term hat die Form eines Differenzenquotienten der Funktion $f(z) = e^{izt}$ und konvergiert im Limes $\rho \rightarrow 0$ gegen die Ableitung von f an der Stelle $z = 0$. Wir erhalten als Ergebnis

$$G(t) = t e^{-\frac{\gamma}{2}t}.$$

Die Greensche Funktion beschreibt den Einfluss einer Störung auf das schwingende System. Wir wollen den Grenzfall einer Störung berechnen, die zu einem scharfen Zeitpunkt $t = 0$ stattfindet. Dazu gehen wir von einer Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ aus mit $\int dt f(t) = p$. p ist der auf das System übertragene Impuls. Wir definieren jetzt für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die skalierten Funktionen

$$f_n(t) = n f(nt).$$

Auch die skalierten Funktionen übertragen den Impuls p ,

$$\int dt f_n(t) = \int dt n f(nt) = \int dt' f(t') = p,$$

wobei wir im letzten Schritt die Variablensubstitution $t' = nt$, $dt' = ndt$ gemacht haben. f_n ist aber für große Werte von n viel stärker als f um die Zeit $t = 0$ konzentriert, tatsächlich gilt für $t \neq 0$

$$f_n(t) = n f(nt) = t^{-1} t' f(t') \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$, da f nach Voraussetzung schneller als jede Potenz bei unendlich verschwindet. Der Grenzwert der Folge f_n ist das p -fache der sogenannten Diracschen Delta-Funktion $\delta(t)$, die man sich anschaulich als eine Funktion vorstellt, die außerhalb des Nullpunkts verschwindet, dort einen unendlich großen Wert annimmt, sodass das Integral $\int dt \delta(t) = 1$ ist.

Von Dirac eingeführt, wurde die Delta-Funktion zu einem wichtigen Hilfsmittel in der Physik. Sie ist aber keine Funktion im üblichen Sinne. Ihre präzise mathematische Definition wurde erst etwa 20 Jahre später durch Schwartz in seiner Theorie der Distributionen (auch verallgemeinerte Funktionen genannt) gegeben.

Während die Folge der Funktionen (f_n) nicht im üblichen Sinn gegen eine von Null verschiedene Funktion konvergiert, haben die erzeugten Schwingungen einen wohldefinierten Limes. Sei

$$x_n(t) = \int dt' G(t - t') f_n(t')$$

die vom Kraftstoß f_n erzeugte Schwingung. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \int dt' G(t-t') f_n(t') \\ &= \int dt' G(t-t') n f(nt') \\ &= \int dt'' G\left(t - \frac{t''}{n}\right) f(t'') \\ &\rightarrow G(t) \int dt'' f(t'') = G(t)p . \end{aligned}$$

$G(t)$ beschreibt also die Reaktion des Systems, das sich vorher in Ruhe befunden hat, auf einen Kraftstoß der Stärke 1 zur Zeit $t = 0$.

10.2. Poissongleichung. Als ein zweites Beispiel betrachten wir die Poisson-Gleichung

$$\boxed{\Delta V = -\rho .}$$

Wir schreiben V und ρ als 3-dimensionale Fourier-Integrale

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{V}(\vec{k}) , \\ \rho(\vec{r}) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\rho}(\vec{k}) , \end{aligned}$$

und setzen diese in die Poisson-Gleichung ein. Der Laplace-Operator angewandt auf V wird unter dem Integralzeichen zur Multiplikation mit $-|\vec{k}|^2$, daher erfüllen die Fourier-Transformierten die Gleichung

$$|\vec{k}|^2 \hat{V}(\vec{k}) = \hat{\rho}(\vec{k}) .$$

Wir können also die Lösung der Poisson-Gleichung sofort angeben,

$$V(\vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{\hat{\rho}(\vec{k})}{|\vec{k}|^2} .$$

Solange $\hat{\rho}$ stetig ist, ist die Division durch $|\vec{k}|^2$ unproblematisch, wie man am einfachsten durch den Übergang zu Kugelkoordinaten (k, θ, φ) im \vec{k} -Raum erkennt,

$$\int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{\hat{\rho}(\vec{k})}{|\vec{k}|^2} = \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi k^2 \sin\theta e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{\hat{\rho}(k, \theta, \varphi)}{k^2} .$$

Der Faktor k^2 im Nenner kürzt sich gegen den Faktor k^2 im Volumenelement für Kugelkoordinaten.

Wir setzen in der Formel für die Lösung für V jetzt die Definition der Fourier-Transformierten ein und erhalten

$$V(\vec{r}) = (2\pi)^{-3} \int d^3\vec{k} \int d^3\vec{r}' \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}}{|\vec{k}|^2} \rho(\vec{r}') .$$

Wie vorher bei der erzwungenen Schwingung soll jetzt die Integrationsreihenfolge vertauscht werden. Hier ist allerdings Vorsicht geboten, da das Integral über \vec{k} vor der \vec{r}' -Integration nicht absolut konvergiert. Wir setzen daher

$$V(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' G(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}')$$

mit der Greenschen Funktion der Poissongleichung

$$G(\vec{r}) = (2\pi)^{-3} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{|\vec{k}| < K} d^3\vec{k} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{|\vec{k}|^2} .$$

In Kugelkoordinaten ergibt sich

$$G(\vec{r}) = (2\pi)^{-3} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta e^{ikr \cos \theta} ,$$

wobei die z -Achse in Richtung von \vec{r} gelegt wurde ($r = |\vec{r}|$).

Der Integrand hängt nicht von φ ab, daher kann die Integration über φ sofort ausgeführt werden und liefert einen Faktor 2π . Bei der θ -Integration machen wir die Substitution $w = \cos \theta$, $dw = -\sin \theta d\theta$, $w \in [-1, 1]$ und erhalten

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ikr \cos \theta} = \int_{-1}^1 dw e^{ikrw} = \frac{2 \sin kr}{kr} .$$

Wir haben bereits gesehen, dass im Sinne uneigentlicher Integrale gilt

$$\int_0^\infty dk \frac{\sin kr}{k} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{\sin kr}{k} = \frac{\pi}{2}$$

Also erhalten wir als Greensche Funktion

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}|}$$

und damit die bereits benutzte Formel für die Lösung der Poisson-Gleichung

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Die Greensche Funktion selbst ist das Potential einer Punktladung der Stärke 1 am Ursprung.

10.3. Helmholtzgleichung. Als ein weiteres Beispiel untersuchen wir die Wellengleichung bei fest vorgegebener Frequenz $\omega \neq 0$. Die Zeitableitung kann dann durch Multiplikation mit $i\omega$ ersetzt werden, und wir erhalten die **Helmholtz-Gleichung**

$$\boxed{-(\Delta + \omega^2)u(\vec{r}) = f(\vec{r}) .}$$

Wie bei der Poisson-Gleichung gehen wir über zu der entsprechenden Gleichung für die Fourier-Transformierten

$$(|\vec{k}|^2 - \omega^2)\hat{u}(\vec{k}) = \hat{f}(\vec{k}) .$$

In diesem Fall kann man aber die Gleichung nicht nach $\hat{u}(\vec{k})$ auflösen, da $|\vec{k}|^2 - \omega^2$ auf der ganzen Kugelschale $|\vec{k}| = |\omega|$ verschwindet und daher das Fourier-Integral für u nicht wohldefiniert ist. Wir wählen deshalb ein $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \neq 0$ und setzen

$$\hat{u}_\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hat{f}(\vec{k})}{|\vec{k}|^2 - (\omega + i\varepsilon)^2}.$$

\hat{u}_ε ist integrabel. Wir definieren

$$u_\varepsilon(\vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\vec{k} \frac{\hat{f}(\vec{k})}{|\vec{k}|^2 - (\omega + i\varepsilon)^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Wir erwarten, dass wir im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung erhalten. Es gilt nämlich

$$-(\Delta + \omega^2)u_\varepsilon = f + (-2i\varepsilon\omega + \varepsilon^2)u_\varepsilon.$$

Wir berechnen ähnlich wie bei der Poisson-Gleichung die Greensche Funktion G_ε ,

$$G_\varepsilon(\vec{r}) = (2\pi)^{-3} \int d^3\vec{k} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{|\vec{k}|^2 - (\omega + i\varepsilon)^2}.$$

Nach Übergang zu Kugelkoordinaten und Ausführung der Winkelintegrationen ergibt sich

$$G_\varepsilon(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk \frac{k \sin kr}{k^2 - (\omega + i\varepsilon)^2}.$$

Wir gehen jetzt genauso vor wie bei der Berechnung des Integrals über $\frac{\sin k}{k}$ und schreiben G_ε als komplexes Kurvenintegral über die reelle Achse,

$$G_\varepsilon(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2 i r} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k e^{ikr}}{k^2 - (\omega + i\varepsilon)^2}.$$

Wir möchten dieses Integral wieder mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes berechnen. Um die Abfalleigenschaften des Integranden auszunutzen, deformieren wir den Weg in die obere Halbebene. Dabei müssen wir die dort liegenden Nullstellen umgehen.

Für $\varepsilon > 0$ liegt die Nullstelle $k = \omega + i\varepsilon$ in der oberen Halbebene. Die Greensche Funktion lässt sich daher durch das Residuum an dieser Stelle berechnen,

$$G_\varepsilon(\vec{r}) = \frac{2\pi i}{4\pi^2 i r} \operatorname{res}_{\omega+i\varepsilon} \frac{z e^{izr}}{(z - (\omega + i\varepsilon))(z + \omega + i\varepsilon)}.$$

Das Residuum ist

$$\operatorname{res}_{\omega+i\varepsilon} \frac{z e^{izr}}{((z - (\omega + i\varepsilon))(z + \omega + i\varepsilon))} = \frac{1}{2} e^{i(\omega+i\varepsilon)r},$$

also folgt für $\varepsilon > 0$

$$G_\varepsilon(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r} e^{i(\omega+i\varepsilon)r} .$$

Im Limes $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0$ erhalten wir die Greensche Funktion

$$G_+(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r} e^{i\omega r} .$$

Für $\varepsilon < 0$ kann man analog vorgehen und findet im Limes $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon < 0$ die Greensche Funktion

$$G_-(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-i\omega r} .$$

Wir haben also zwei verschiedene Lösungen der Helmholtz-Gleichung gefunden,

$$u_\pm(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{e^{\pm i\omega|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} f(\vec{r}') .$$

Beide Lösungen sind Überlagerungen von Kugelwellen, die mit der Amplitude $f(\vec{r}')$ vom Punkt \vec{r}' ausgehen. Die Greenschen Funktionen selbst beschreiben die von einer punktförmigen Quelle ausgehende Kugelwelle.

Die Lösungen der Helmholtz-Gleichung sehen sehr ähnlich aus wie die Lösungen der Poisson-Gleichung. Es gibt aber gravierende Unterschiede im Verhalten bei großen Abständen. Vergleichen wir als Beispiel das elektrische Feld eines statischen Dipols mit dem eines mit der Frequenz ω schwingenden Dipols. Im statischen Fall fällt das elektrische Feld wie die zweite Ableitung des Coulomb-Potentials einer Punktladung ab,

$$|\vec{E}| \sim \frac{d^2}{dr^2} \frac{1}{r} \sim \frac{1}{r^3} .$$

Im Fall einer endlichen Frequenz ω gilt

$$|\vec{E}| \sim \frac{d^2}{dr^2} \frac{e^{i\omega r}}{r} = \left(\frac{2}{r^3} - \frac{2i\omega}{r^2} - \frac{\omega^2}{r} \right) e^{i\omega r} .$$

Die Wellenlänge ist $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$. Für $r \ll \lambda$ ist das Feld bis auf den oszillierenden Faktor im wesentlichen gleich dem statischen Feld. Für Abstände $r \gg \lambda$ aber überwiegt der letzte Term, das sogenannte Fernfeld, das nur wie $\frac{1}{r}$ abfällt.

Was ist der physikalische Unterschied zwischen den beiden Lösungen u_\pm ? Um dies zu verstehen, stellen wir eine zeitabhängige Quelle als Fourier-Integral über reine Frequenzen dar,

$$f(t, \vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int d\omega e^{i\omega t} f_\omega(\vec{r})$$

und suchen eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u(t, \vec{r}) = f(t, \vec{r}) .$$

Für jede reine Frequenz erhalten wir eine Lösung der Helmholtz-Gleichung. Für u erhalten wir die beiden Lösungen

$$u_{\pm}(t, \vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{4\pi} \int d\omega \int d^3\vec{r}' \frac{e^{\pm i\omega|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{i\omega t} f_{\omega}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{f(t \pm |\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$

Man nennt $t \pm |\vec{r}-\vec{r}'|$ die avancierte, bzw. retardierte Zeit. Es ist die Zeit, zu der ein zur Zeit t am Punkt \vec{r} abgesandtes Signal am Punkt \vec{r}' eintrifft (avancierte Zeit), bzw. die Zeit, zu der ein Signal am Punkt \vec{r}' abgesandt werden muss, damit es zur Zeit t im Punkt \vec{r} eintrifft (retardierte Zeit). Sucht man Lösungen u , die vor dem Einsetzen der Störung verschwinden, so muss man die retardierte Lösung wählen. Dieser Fall liegt bei Strahlungsvorgängen in der klassischen Physik meist vor.

10.4. Homogene Wellengleichung. Als nächstes Problem wenden wir uns der Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = 0$$

zu. Für die Lösung machen wir den Ansatz

$$u(t, \vec{r}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{u}(t, \vec{k})$$

und finden die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}(t, \vec{k}) + |\vec{k}|^2 \hat{u}(t, \vec{k}) = 0,$$

d.h. wir erhalten für jeden Wert des Wellenzahlvektors \vec{k} eine harmonische Schwingungsgleichung. Die allgemeine Lösung lässt sich mit Hilfe der Anfangswerte zur Zeit $t = 0$ ausdrücken,

$$\hat{u}(t, \vec{k}) = \hat{u}_0(\vec{k}) \cos |\vec{k}|t + \hat{v}_0(\vec{k}) \frac{\sin |\vec{k}|t}{|\vec{k}|}.$$

Hierbei ist \hat{u}_0 die Fourier-Transformierte der Funktion $u_0(\vec{r}) = u(0, \vec{r})$, der Wellenfunktion u zur Zeit $t = 0$, und \hat{v}_0 ist die Fourier-Transformierte der Funktion $v_0(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial t} u(0, \vec{r})$, d.h. der Zeitableitung der Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$. Man nennt u_0 und v_0 die Cauchy-Daten der Wellenfunktion. Für jede Vorgabe der Cauchy-Daten erhält man also eine eindeutige Lösung der Wellengleichung. Vorausgesetzt werden muss dabei, dass sowohl die Fourier-Transformation als auch die Umkehrtransformation wohldefiniert sind, dies ist für $u_0, v_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ erfüllt.

Wir wollen jetzt einen etwas expliziteren Ausdruck für u ableiten. Setzen wir die Definition der Fourier-Transformierten in die Formel für u ein, so erhalten wir

$$u(t, \vec{r}) = (2\pi)^{-3} \int d^3\vec{r}' \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \left(u_0(\vec{r}') \cos |\vec{k}|t + v_0(\vec{r}') \frac{\sin |\vec{k}|t}{|\vec{k}|} \right).$$

Wir setzen $\vec{r} - \vec{r}' = \vec{R}$, führen im \vec{k} -Raum Kugelkoordinaten k, θ, φ ein (mit Nordpol $\theta = 0$ in Richtung von \vec{R}), substituieren $w = \cos \theta$, führen die φ -Integration aus und finden

$$u(t, \vec{r}) = (2\pi)^{-2} \int d^3 \vec{R} \int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^1 dw e^{ik|\vec{R}|w} \left(u_0(\vec{r} - \vec{R}) \cos kt + v_0(\vec{r} - \vec{R}) \frac{\sin kt}{k} \right).$$

Mit

$$\int_{-1}^1 dw e^{ik|\vec{r}|w} = \frac{2 \sin k|\vec{R}|}{k|\vec{R}|}$$

und $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin kt}{k} = \cos kt$ folgt

$$u(t, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \int d^3 \vec{R} \frac{1}{|\vec{R}|} \left(u_0(\vec{r} - \vec{R}) \frac{\partial}{\partial t} + v_0(\vec{r} - \vec{R}) \right) \sin kt \sin k|\vec{R}|.$$

Wir führen jetzt auch bei der \vec{R} -Integration Kugelkoordinaten R, θ, φ ein. Wir definieren den Mittelwert einer Funktion f von \vec{r} über eine Sphäre mit Radius R um den Punkt \vec{r} durch

$$M_R f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(\vec{r} - R(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)).$$

Da der Integrand der k -Integration gerade ist, können wir das Integral über k von 0 nach ∞ durch die Hälfte des Integrals von $-\infty$ nach ∞ ersetzen. Aus dem Additionstheorem folgt

$$\sin kt \sin kR = \frac{1}{2}(\cos k(t - R) - \cos k(t + R)).$$

Einsetzen ergibt

$$u(t, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk \int_0^\infty dR (R M_R u_0(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial t} + R M_R v_0(\vec{r})) (\cos k(t - R) - \cos k(t + R)).$$

Wir substituieren im Term mit $\cos k(t + R)$ die Variable R durch $-R$. Die Variable läuft dann von $-\infty$ bis 0, und wir erhalten

$$u(t, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk \int_{-\infty}^\infty dR (R M_{|R|} u_0(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial t} + R M_R v_0(\vec{r})) \cos k(t - R).$$

Setzen wir jetzt noch $\cos k(t - R) = \frac{1}{2}(e^{ik(t-R)} + e^{-ik(t-R)})$ ein, so erkennen wir, dass es sich bei der zweifachen Integration um Hintereinanderausführung von Fourier-Transformation und inverser Fourier-Transformation handelt (die Ableitung nach der Zeit kann nach der Integration ausgeführt werden). Sind u_0 und v_0 Schwartz-Funktionen, so auch die Funktionen $R \mapsto R M_{|R|} u_0(\vec{r})$ und $R \mapsto R M_{|R|} v_0(\vec{r})$ für jeden Wert von \vec{r} . Daher sind alle Operationen wohldefiniert, und wir erhalten die allgemeine Lösung des Cauchy-Problems für die Wellengleichung

$$u(t, \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial t} t M_{|t|} u_0(\vec{r}) + t M_{|t|} v_0(\vec{r}).$$

Wir sehen insbesondere, dass die Lösung zur Zeit t am Punkt \vec{r} nur von den Anfangsdaten auf der Kugeloberfläche mit Radius $|t|$ um den Punkt \vec{r} abhängt. Die Welle breitet sich also genau mit der Geschwindigkeit $c = 1$ aus. Dass es keine Ausbreitung mit Geschwindigkeiten größer als c gibt, gilt auch für andere relativistische Gleichungen, wie die Dirac-Gleichung oder die Klein-Gordon-Gleichung. Hingegen ist die Ausbreitung mit der exakten Lichtgeschwindigkeit eine Ausnahme. Sie gilt z. B. nicht für die Wellengleichung in Räumen mit geradzahlgiger Dimension.

10.5. Ausbreitung von Wellen in Hohlleitern. Bei der Ausbreitung ebener Wellen in Hohlleitern haben wir gesehen, dass die Komponenten des Wellenzahlvektors in transversaler Richtung quantisiert sein müssen, damit die Randbedingungen erfüllt werden können. Betrachten wir als ein einfaches Beispiel die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle zwischen zwei parallelen leitenden Ebenen mit Abstand a . Dann ist die transversale Komponente des Wellenzahlvektors

$$k_{\perp} = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N},$$

und die Frequenz ω der Welle muss mindestens $c\frac{n\pi}{a}$ sein (im folgenden wieder $c \equiv 1$). Kleinere Werte für ω führen zu imaginären Werten für die zu den Grenzflächen parallelen Komponenten \vec{k}_{\parallel} von \vec{k} und damit zu exponentiell gedämpften Wellen.

Die Gruppengeschwindigkeit der Welle beträgt

$$v_{\text{gr}} = \left| \nabla_{\vec{k}_{\parallel}} \omega \right| = \frac{k_{\parallel}}{\sqrt{k_{\parallel}^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}} = \sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2}{a^2\omega^2}},$$

ist also kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Dies gilt aber nur für Frequenzen oberhalb der oben angegebenen Schranke. Für kleinere Frequenzen ergeben sich imaginäre Gruppengeschwindigkeiten, deren Interpretation unklar ist. Dieser Sachverhalt hat vor etwa 10 Jahren zu größerer Verwirrung Anlass gegeben, und auch heute noch erscheinen Artikel, die bei der Ausbreitung derartiger Wellen von Überlichtgeschwindigkeiten sprechen und eine Verletzung der speziellen Relativitätstheorie postulieren.

Günther Nimtz, ein Physiker der Universität Köln, hat Experimente durchgeführt, die als Nachweis von Überlichtgeschwindigkeiten bei sogenannten Tunneldurchgängen interpretiert worden sind. Diese Experimente sind viel diskutiert worden, sowohl in der wissenschaftlichen Literatur als auch in der Öffentlichkeit. Bei dieser Diskussion zeigt sich, dass der Begriff der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle keineswegs unproblematisch ist.

Wir wollen zunächst einmal die Wellengleichung für die gewählte Anordnung lösen. Dabei betrachten wir der Einfachheit halber skalare Wellenfunktionen und nehmen an, dass diese am Rand verschwinden.

Wir nehmen weiter an, dass die Quelle punktförmig ist und zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet wird. Die Randflächen sollen bei $x = -\frac{a}{2}$ und $x = \frac{a}{2}$, liegen, die Quelle liege bei $x = y = z = 0$ und sei durch eine Funktion g beschrieben mit $g(t) = 0$ für $t < 0$. Ohne Randbedingungen ergibt sich als retardierte Lösung

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{g(t - r)}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Eine Randbedingung bei $x = \frac{a}{2}$ kann wie bei der Methode der Spiegel-ladungen durch eine gespiegelte Quelle bei $x = a, y = z = 0$ berücksichtigt werden. Bezieht man auch die zweite Randbedingung ein, so erhält man unendlich viele Spiegelquellen an den Orten $x = na, y = z = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, so dass die Quellen mit geradem n gleich und die mit ungeradem n entgegengesetzt gleich senden. Setzen wir $r_n = \sqrt{(x - na)^2 + y^2 + z^2}$ so erhalten wir für die retardierte Lösung zwischen den Platten

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{g(t - r_n)}{r_n}.$$

Da g nach Voraussetzung für negative t verschwindet, tragen zur Zeit t nur die endlich vielen Quellen mit $r_n < t$ zur Summe bei.

Wir sehen der Lösung unmittelbar das folgende an: Die Front der Welle bewegt sich genau mit Lichtgeschwindigkeit. Nach dem Eintreffen der ersten Signals treffen die Signale der Spiegelquellen ein. Diese entsprechen den an den Grenzflächen reflektierten Wellen. Da sie wechselne Vorzeichen haben, kommt es typischer Weise zu destruktiver Interferenz, d.h. das Signal wird schwächer. Lässt man einen Wellenberg durch die Anordnung laufen, so wird die Stirnseite des Berges nahezu ungehindert durchgelassen, während die hinteren Teile gedämpft werden. Das Maximum des Wellenberges verschiebt sich dabei nach vorne und die Geschwindigkeit des Maximums wird dadurch größer als die Lichtgeschwindigkeit. Der gemessene Effekt ist vollkommen in Einklang mit der allgemeinen Theorie und kann leider nicht zur überlichtschnellen Kommunikation genutzt werden.

Wir wählen jetzt $g(t) = e^{i\omega t}$ für $t > 0$ und fragen, unter welchen Bedingungen es nicht zu destruktiver Interferenz kommt. Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn der Wegunterschied $r_{n+1} - r_n$ benachbarter Quellen ein Vielfaches von $\lambda/2$ beträgt. Es gilt (für $a \ll r$)

$$r_{n+1} - r_n \approx \frac{(2n+1)a^2}{2r_n} \approx \frac{na^2}{r_n}.$$

Wegen $r_n < |n|a$ ist die Bedingung für konstruktive Interferenz nur erfüllbar, wenn $a > \lambda/2$ ist. Mit $\lambda = 2\pi/\omega$ ist das genau die schon eingangs erwähnte Bedingung für die Mindestfrequenz, unterhalb derer der Wellenleiter nicht durchlässig ist.

Falls ω oberhalb dieser Schranke liegt, können wir aus dieser Überlegung die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ermitteln. Die Geschwindigkeit v der Welle ergibt sich aus dem Weg r_n , den die n -mal reflektierte Welle zurücklegen muss, wobei n die natürliche Zahl ist, die sich aus der Gleichung für konstruktive Interferenz ergibt,

$$v = \frac{r}{r_n} .$$

Wir berechnen in der Näherung $a \ll r$

$$\frac{\pi^2}{\omega^2} = \frac{n^2 a^4}{r^2 + n^2 a^2}$$

also

$$n^2 = \frac{\frac{\pi^2}{\omega^2} r^2}{a^2 (a^2 - \frac{\pi^2}{\omega^2})} .$$

Damit findet man für v

$$v = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 + n^2 a^2}} = \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{a^2 \omega^2}} .$$

Dies ist genau die Gruppengeschwindigkeit für die Welle, mit $k_{\perp} = \frac{\pi}{a}$. Die Gruppengeschwindigkeiten für Wellen mit größerem transversalen Wellenzahlvektor entsprechen reflektierten Wellen mit Wegunterschieden, die Vielfache von $\lambda/2$ betragen.

11. DISTRIBUTIONEN

Wir haben in vielen Fällen die Annahme benutzt, dass die in der Physik auftretenden Funktionen wie z.B. die elektromagnetischen Felder oder die Ladungsdichte genügend oft differenzierbar sind, und wir haben gesehen, dass mathematisch eine besonders angenehme Situation vorliegt, wenn die jeweiligen Funktionen im Schwartzraum liegen.

Offensichtlich ist diese Annahme aber in vielen Fällen verletzt (elektrisches Feld einer Punktladung, elektrisches Feld an Grenzflächen, Ladungsdichte einer Punktladung, ...). Diese singulären Stellen direkt zu studieren, hat sich als wenig ertragreich herausgestellt. es gibt aber eine andere Methode, die auf Ideen von Physikern zurückgeht (vor allem Dirac) und die gut 20 Jahre später von Mathematikern (Schwartz) zu einer mathematischen Theorie ausgebaut worden ist, nämlich die Theorie der Distributionen.

Wir starten mit der differentiellen Formulierung des Gaußschen Gesetzes

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho .$$

Wenn wir dieses Gesetz auf das elektrische Feld einer Punktladung q anwenden wollen, müssen wir mit unseren bisherigen Methoden den

Ort der Punktladung (\vec{r}_0) herausnehmen und finden

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0, \quad \vec{r} \neq \vec{r}_0 \\ \int_{\partial G} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} &= q, \quad \vec{r}_0 \in G. \end{aligned}$$

Es stellt sich die Frage, ob man auch einer Punktladung eine Ladungsdichte zuordnen kann. Diese muss offenbar die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= 0, \quad \vec{r} \neq \vec{r}_0 \\ \int_G d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) &= q, \quad \vec{r}_0 \in G. \end{aligned}$$

Aproximativ kann man eine solche Ladungsdichte durch eine Funktion ρ_R beschreiben, die nur in einer kleinen Umgebung des Nullpunkts von Null verschieden ist, etwa

$$\rho_R(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & , \quad |\vec{r} - \vec{r}_0| > R, \\ \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} & , \quad |\vec{r} - \vec{r}_0| \leq R. \end{cases}$$

Da physikalisch der Fall eines sehr kleinen Radius von der Punktförmigkeit nicht unterschieden werden kann, scheint dies zunächst ein akzeptabler Ausweg zu sein. Allerdings tritt hier das folgende Problem auf: man hat einen Parameter R eingeführt, der nicht direkt messbar ist. Die wichtige Frage ist, ob die beobachtbaren Phänomene von der Wahl von R abhängen, oder ob sie (für genügend kleine R) davon unabhängig werden. Dies ist die Frage nach der Konvergenz der Ladungsdichten ρ_R (und der daraus berechneten Felder) im Limes $R \rightarrow 0$.

Auf den ersten Blick sieht die Lage schlecht aus. Denn für jede integrierbare Funktion ρ mit $\rho(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \neq \vec{r}_0$ gilt

$$\int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) = 0.$$

Die Vorstellung der Physiker, dass im Ausgleich dafür der Wert an der Stelle $\vec{r} = \vec{r}_0$ derart gegen ∞ geht, dass der Gesamtwert des Integrals gleich der vorgegebenen Ladung q ist, hat bei Mathematikern zunächst Kopfschütteln ausgelöst; denn bei der üblichen Integraldefinition tragen einzelne Unendlichkeitsstellen nicht zum Wert des Integrals bei.

Wir wollen das Problem zunächst in 1 Dimension diskutieren. Wir suchen eine Funktion (die Diracsche δ -Funktion) mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0, \quad x \neq 0, \\ \int dx \delta(x) &= 1. \end{aligned}$$

Wir ignorieren für den Augenblick, dass es eine solche Funktion nicht geben kann, und fragen nach dem Wert des Integrals

$$\int dx \delta(x) \varphi(x) =: \langle \delta, \varphi \rangle$$

für eine Schwartzfunktion φ . Man nennt φ eine Testfunktion. Da δ nach Voraussetzung außerhalb des Nullpunktes verschwindet, gilt für jedes $\epsilon > 0$

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \delta(x) \varphi(x) .$$

Wir schreiben

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda} \varphi(\lambda x) = \varphi(0) + x \int_0^1 d\lambda \varphi'(\lambda x)$$

und setzen

$$\psi(x) = \int_0^1 d\lambda \varphi'(\lambda x) .$$

ψ ist eine unendlich oft differenzierbare ("glatte"), beschränkte Funktion. Wir erhalten

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \underbrace{\int dx \delta(x)}_{=1} + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \delta(x) x \psi(x) .$$

Wir nehmen jetzt zusätzlich an, dass gilt

$$\left| \int dx \delta(x) g(x) \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$$

für beschränkte glatte Funktionen g . (Dies würde gelten, wenn δ eine positive, integrierbare Funktion wäre.) Dann folgt

$$\left| \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \delta(x) x \psi(x) \right| \leq \epsilon \sup |\psi| .$$

Im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ ergibt sich

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) .$$

Die entscheidende Idee ist jetzt, δ nicht mehr als Funktion aufzufassen, sondern als ein Funktional

$$\delta : \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto \varphi(0) , \end{cases} \quad (11.1)$$

das jeder Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ihren Wert an der Stelle 0 zuordnet.

Das Funktional δ ist linear,

$$\langle \delta, \lambda \varphi + \mu \psi \rangle = \lambda \varphi(0) + \mu \psi(0) = \lambda \langle \delta, \varphi \rangle + \mu \langle \delta, \psi \rangle , \quad (11.2)$$

und erfüllt die Abschätzung

$$|\langle \delta, \varphi \rangle| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| . \quad (11.3)$$

Eine Fülle weiterer linearer Funktionale liefern die integrierbaren Funktionen f durch

$$\langle f, \varphi \rangle := \int dx f(x) \varphi(x) . \quad (11.4)$$

Auch diese erfüllen die Abschätzung

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \sup_{y \in \mathbb{R}} |\varphi(y)| \quad (11.5)$$

für eine geeignete Konstante c (z.B. $c = \int dx |f(x)|$). Diese Abschätzung gestattet die folgende Stetigkeitsaussage: Sei φ_n eine Folge von Schwartzfunktionen, die gleichmäßig gegen eine Schwartzfunktion φ konvergiert. Dann gilt:

$$|\langle f, \varphi_n \rangle - \langle f, \varphi \rangle| = |\langle f, \varphi_n - \varphi \rangle| \leq c \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$.

Ähnlich der 1-dimensionalen Deltafunktion können wir die 3-dimensionale Deltafunktion δ^3 durch

$$\langle \delta^3, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad (11.6)$$

als lineares Funktional auf dem Schwartzraum in 3 Dimensionen erklären. Damit haben wir die Antwort auf die eingangs gestellte Frage gewonnen: die Ladungsdichte einer Punktladung am Ort \vec{r}_0 ist in intuitiver Schreibweise $\rho(\vec{r}) = q \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Präzise bedeutet dies

$$\langle \rho, \varphi \rangle = q \varphi(\vec{r}_0) . \quad (11.7)$$

Betrachten wir z.B. das elektrostatische Potential einer Punktladung: für eine allgemeine Ladungsdichte haben wir

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 \vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} .$$

Setzen wir $\rho(\vec{r}) = q \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$ ein, so folgt

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|} .$$

(Wir haben hier allerdings ignoriert, dass $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ keine Schwartzfunktion ist, insbesondere ist das Potential an der Stelle $\vec{r} = \vec{r}_0$ undefiniert.)

Verblüffender Weise kann man sogar die Ableitungen der δ -Funktion definieren. Wir betrachten zunächst den Differenzenquotienten

$$\frac{\delta(x+a) - \delta(x)}{a} =: \delta^{[a]}(x) .$$

Dieser beschreibt das lineare Funktional

$$\langle \delta^{[a]}, \varphi \rangle = \frac{1}{a} \int dx (\delta(x+a) - \delta(x)) \varphi(x) = \frac{1}{a} (\varphi(-a) - \varphi(0)) .$$

Im Limes $a \rightarrow 0$ findet man das lineare Funktional

$$\langle \delta', \varphi \rangle = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi(-a) - \varphi(0)}{a} = -\varphi'(0) .$$

δ' kann als die Ableitung der δ -Funktion aufgefasst werden. Wie die δ -Funktion verschwindet δ' außerhalb des Nullpunkts.

Die Methode, die wir zur Definition der Ableitung benutzt haben, lässt sich auch auf lokal integrierbare Funktionen, die nicht schneller als eine Potenz anwachsen, ausdehnen. Wir setzen für die n -te Ableitung

$$\langle f^{(n)}, \varphi \rangle := (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)} \rangle = (-1)^n \int dx f(x) \varphi^{(n)}(x) .$$

Falls f n -mal stetig differenzierbar ist mit polynomial beschränkten Ableitungen, folgt diese Formel mit Hilfe n -maliger partieller Integration (die Randterme verschwinden wegen des schnellen Abfalls der Testfunktion und ihrer Ableitungen). Für allgemeinere Funktionen stellt diese Formel eine Definition der Ableitung dar (Ableitung im Sinne von Distributionen oder auch schwache Ableitung genannt).

Betrachten wir als Beispiel die Funktion (Heaviside-Funktion)

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 , \\ 0 & , \quad x \leq 0 . \end{cases}$$

Diese Funktion ist an der Stelle $x = 0$ unstetig und dort daher auch nicht differenzierbar. Im Sinne von Distributionen aber gilt

$$\langle \Theta', \varphi \rangle = -\langle \Theta, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty dx \varphi'(x) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle , \quad (11.8)$$

also erhalten wir die bemerkenswerte Formel

$$\Theta' = \delta .$$

Mit diesen Hilfsmitteln können wir jetzt die differentielle Formulierung des Gaußschen Gesetzes auch für Punktladungen angeben. Es gilt nämlich für das elektrische Feld einer Punktladung am Ursprung

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{r} (\operatorname{div} \frac{q\vec{r}}{4\pi|\vec{r}|^3}) \varphi(\vec{r}) &= - \int d^3\vec{r} \frac{q\vec{r}}{4\pi|\vec{r}|^3} \cdot \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) = \\ &= -\frac{q}{4\pi} \int_0^\infty dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \frac{r}{r^3} \frac{d}{dr} \varphi(r, \theta, \phi) = q\varphi(0) \end{aligned}$$

also gilt im Sinne von Distributionen

$$\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{4\pi|\vec{r}|^3} = \delta^3(\vec{r}) .$$

Ähnlich können wir auch beim Ampèregesetz vorgehen. Wir erinnern uns daran, dass das Magnetfeld eines linienförmigen Stroms I entlang der z -Achse durch

$$\vec{B} = \frac{I}{2\pi r^2} (-y, x, 0) , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

gegeben ist. Wir berechnen jetzt $\text{rot } \vec{B}$ im Sinne von Distributionen. Für die x -Komponente gilt

$$\begin{aligned} \langle (\text{rot } \vec{B})_x, \varphi \rangle &= \langle \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right), \varphi \rangle = -\langle B_z, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle + \langle B_y, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rangle \\ &= \int dx dy dz \frac{Ix}{2\pi r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = \int dx dy \frac{Ix}{2\pi r^2} \varphi(x, y, z) \Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} = 0, \end{aligned}$$

also ist $(\text{rot } \vec{B})_x = 0$. Eine entsprechende Rechnung liefert auch $(\text{rot } \vec{B})_y = 0$. Für die z -Komponente berechnet man

$$\begin{aligned} \langle (\text{rot } \vec{B})_z, \varphi \rangle &= \langle \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right), \varphi \rangle = -\langle B_y, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle + \langle B_x, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle \\ &= -\frac{I}{2\pi} \int dx dy dz \frac{1}{r^2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi(x, y, z) \end{aligned}$$

Wir führen Zylinderkoordinaten ein und benutzen die Identität

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi = r \frac{\partial}{\partial r} \varphi.$$

Dann folgt

$$\langle (\text{rot } \vec{B})_z, \varphi \rangle = -\frac{I}{2\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^\infty dz r \frac{1}{r^2} r \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r \cos \phi, r \sin \phi, z) = I \int dz \varphi(0, 0, z),$$

also gilt im Sinne von Distributionen

$$\text{rot } \frac{1}{r^2} (-y, x, 0) = (0, 0, \delta(x)\delta(y)).$$

Die Stromdichte des linienförmigen Stroms ist

$$\vec{j}(x, y, z) = I(0, 0, \delta(x)\delta(y)).$$

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir das elektrische Feld in einem Plattenkondensator. Zwischen den beiden Platten (bei $z = 0$ und $z = d$) ist das elektrische Feld

$$\vec{E} = (0, 0, E_z)$$

mit konstantem E_z , außerhalb ist es gleich Null. Am Innenrand der Platten gibt es eine Flächenladungsdichte

$$\sigma_\pm = \pm E_z = \pm \sigma.$$

Das Gaußsche Gesetz im Sinne von Distributionen ergibt

$$\langle \text{div } \vec{E}, \varphi \rangle = -\langle \vec{E}, \text{grad } \varphi \rangle = -E_z \int dx dy (\varphi(x, y, d) - \varphi(x, y, 0))$$

also mit $E_z = \sigma$

$$\text{div } E = \sigma(\delta(z) - \delta(z - d)).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung beschreibt also die Ladungsdichte ρ , die der vorliegenden Flächenladung entspricht.

Interessant ist auch der Fall eines Dipols. Das elektrostatische Potential eines Paares entgegengesetzt geladener Punktladungen an den Punkten \vec{a} und 0 ist in großem Abstand

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{1}{|r|} \right) \approx -\frac{q\vec{a}}{4\pi} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\vec{r}|}.$$

Die zu dieser asymptotischen Form gehörende Ladungsdichte ρ ist

$$\rho = -\Delta \left(-\frac{q\vec{a}}{4\pi} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\vec{r}|} \right) = \frac{q\vec{a}}{4\pi} \cdot \text{grad} \Delta \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{q\vec{a}}{4\pi} \cdot \text{grad} (-4\pi\delta^3) = -q\vec{a} \cdot \text{grad} \delta^3.$$

Dies ist die Formel für die Ladungsdichte eines punktförmigen Dipols mit Dipolmoment $q\vec{a}$.

Nach diesen Beispielen geben wir jetzt die allgemeine Definition einer (temperierten) Distribution:

Definition 11.1. Eine temperierte Distribution t ist ein lineares Funktional $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$, das eine Abschätzung der Form

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c \sum_{n \leq N, m \leq M} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^n \frac{d^m}{dx^m} \varphi(x) \right|$$

für geeignete $c > 0$, $N, M \in \mathbb{N}_0$, gestattet.

Beispiele für Distributionen sind die δ -Funktion und ihre Ableitungen, aber auch alle stetigen Funktionen f , die nicht schneller als eine Potenz anwachsen, sowie alle ihre Ableitungen. Die Ableitung T' einer Distribution T ist allgemein definiert durch

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle.$$

Offenbar ist T' ein lineares Funktional, das die für eine temperierte Distribution geforderte Ungleichung erfüllt. Wir schließen, dass Distributionen unendlich oft differenzierbar sind.

Es gilt der folgende Satz:

Satz 11.1. Jede temperierte Distribution ist die Ableitung einer stetigen Funktion, die nicht schneller als eine Potenz anwächst.

Zum Beispiel ist die δ -Funktion die zweite Ableitung der stetigen Funktion

$$x_+(x) = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

Wir können Distributionen mit Funktionen f multiplizieren, die unendlich oft differenzierbar sind und die selbst sowie alle ihren Ableitungen polynomial beschränkt sind. Man setzt dann

$$\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$$

und nutzt aus, dass $f\varphi$ wieder eine Schwartzfunktion ist.

Distributionen kann man aber in der Regel nicht miteinander multiplizieren. Daher lassen sich nichtlineare Differentialgleichungen meist

nicht mit Hilfe von Distributionen formulieren. Lineare Differentialgleichungen jedoch, wie z.B. die Maxwellgleichungen, eignen sich sehr gut für eine Behandlung mit Distributionen, wie wir bereits an einigen Beispielen gesehen haben. Bemerkenswerter Weise besitzen temperierte Distributionen wohldefinierte Fouriertransformierte, die ihrerseits temperierte Distributionen sind. Schreibt man nämlich formal den Ausdruck für eine Fouriertransformierte einer Distribution auf, so erhält man

$$\int dk \hat{T}(k) \varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \int dx T(x) e^{-ikx} \varphi(k) = \int dx T(x) \hat{\varphi}(x) .$$

Wir nutzen aus, dass die Fouriertransformation den Schwartzraum in sich abbildet und definieren die Fouriertransformierte einer temperierten Distribution durch

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle .$$

Als Beispiel berechnen wir die Fouriertransformierte der δ -Funktion. Es gilt

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \varphi(k)$$

d.h. die Fouriertransformierte der δ -Funktion ist die konstante Funktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Für die Fouriertransformierte der Ableitung der δ -Funktion gilt

$$\hat{\delta}'(k) = \frac{-ik}{\sqrt{2\pi}} .$$

Die Rücktransformation der Fouriertransformation für die δ -Funktion liefert die bemerkenswerte Formel

$$\int dx e^{ikx} = 2\pi \delta(k) .$$

Diese Gleichung ist als eine Identität zwischen Distributionen zu verstehen. Es gilt nämlich

$$\int dx \langle e^{ikx}, \varphi \rangle = \int dx \int dk e^{ikx} \varphi(k) = \int dx \sqrt{2\pi} \hat{\varphi}(-x) = 2\pi \varphi(0) = 2\pi \langle \delta, \varphi \rangle .$$