

Quantenfeldtheorie II
Sommersemester 2001

KLAUS FREDENHAGEN

II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
Kapitel I. Vielteilchensysteme in der Quantenmechanik	9
1. Der n-Teilchenraum	9
2. Der bosonische Fockraum	11
3. Der fermionische Fockraum	22
Kapitel II. Relativistische Einteilchensysteme	27
1. Die Poincaré-Gruppe	27
2. Poincaré-Symmetrie in der Quantenmechanik	30
3. Die Darstellungen der Poincaré-Gruppe	32
4. Relativistische Wellengleichungen	40
Kapitel III. Freie Felder	45
1. Das skalare Feld	45
2. Felder mit Spin; der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik	52
3. Das freie Dirac-Feld	56
4. Elektrodynamik	62
Kapitel IV. Wechselwirkungen	73
1. S-Matrix und Wirkungsquerschnitte	73
2. Die LSZ-Relationen	76
3. Kanonische Quantisierung	79
4. Pfadintegral	85
5. Zusammenhängende Funktionen	96
6. Einteilchenirreduzible Funktionen (Vertexfunktionen)	99
Literaturverzeichnis	105

KAPITEL IV

Wechselwirkungen

Wir haben in den ersten 3 Kapiteln den Fockraum, die relativistischen Wellengleichungen und die freien Felder kennen gelernt. Wir haben auch bereits gesehen, wie man ausgehend von den freien Feldern wechselwirkende Theorien konstruieren kann. Insbesondere haben wir die S-Matrix für eine raumzeitlich beschränkte Wechselwirkung eingeführt, haben die zeitgeordneten Produkte als die Taylorkoeffizienten der S-Matrix studiert und ihre kombinatorische Beschreibung durch Feynman-Graphen betrachtet. In diesem Kapitel wollen wir wechselwirkende Theorien von einem etwas allgemeineren Standpunkt aus untersuchen. Zunächst wollen wir die Wirkungsquerschnitte aus der S-Matrix berechnen. Danach werden die LSZ-Relationen besprochen, die den Zusammenhang zwischen S-Matrix-Elementen und zeitgeordneten Funktionen für wechselwirkende Theorien herstellen. Die Herleitung der LSZ-Relationen aus den Axiomen der allgemeinen Quantenfeldtheorie wird im 6. Kapitel erfolgen. In Kapitel IV sollen noch zwei allgemeine Quantisierungsmethoden behandelt werden: die kanonische Quantisierung, die auf der kanonischen Formulierung der klassischen Feldtheorie aufbaut, und die Methode der Pfadintegrale.

1. S-Matrix und Wirkungsquerschnitte

Auch in einer wechselwirkenden Theorie erwartet man, dass jeder Zustand zu asymptotischen Zeiten wie ein Zustand nicht wechselwirkender Teilchen aussieht. Diese Vermutung kann man in der folgenden Weise präzisieren: Sei \mathfrak{H} der Hilbertraum der Zustände der wechselwirkenden Theorie. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die Theorie nur ein einziges Teilchen beschreibt, das Spin 0 und Masse $m > 0$ hat. Sei \mathfrak{H}_0 der zugehörige Fockraum. Dann soll es unitäre Operatoren

$$W_{\pm} : \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}$$

geben, so dass die Vektoren $W_{\pm}\Phi$ zu Zeiten $t \rightarrow \pm\infty$ als Mehrteilchenzustände Φ interpretiert werden können. Die Abbildung

$$S = W_+^{-1}W_-$$

nennt man die S-Matrix. Wenn die Wechselwirkung Poincaré-invariant ist, so vertauscht S mit den Poincaré-Transformationen. Man hat versucht, Quantenfeldtheorie allein durch die S-Matrix zu beschreiben. Bei diesem Ansatz charakterisiert man die S-Matrix durch eine Reihe von

Eigenschaften, die die S-Matrix einer lokalen Quantenfeldtheorie besitzen sollte. Im allgemeinen reicht diese Charakterisierung nicht aus, um die S-Matrix fest zu legen. Fordert man aber, dass die Vielteilchenstreuung sich als eine Aufeinanderfolge von Zweiteilchenstreungen auffassen lässt (faktorisierende S-Matrizen), so erhält man in zwei Raumzeitdimensionen interessante Lösungen. In höheren Dimensionen gibt es allerdings nur die triviale Lösung.

In Experimenten wird in der Regel nicht direkt die S-Matrix bestimmt, sondern es werden die Wirkungsquerschnitte gemessen. Der Grund ist, dass bei einem Streuversuch der Stoßparameter eines Zweiteilchensystems im allgemeinen nicht genügend genau fest gelegt werden kann. Daher ist der einlaufende Zustand ein Gemisch über transversal zur Bewegungsrichtung verschobene Zustände. Sei $\Phi = a(f)^* a(g)^* \Omega$ ein einlaufender Zweiteilchenzustand mit normierten Einteilchenwellenfunktionen f und g , die disjunkten Träger haben. Sei β eine raumartige Ebene im Minkowskiraum, die die von Paaren $p \in \text{supp } f$ und $q \in \text{supp } g$ aufgespannten Ebenen nur im Ursprung schneidet. Dann ist die Dichtematrix des einlaufenden Zustands von der Form

$$\rho = \int_{\beta} d^2b \mu(b) |\Phi_b\rangle \langle \Phi_b|$$

mit $\Phi_b = a(U(b)f)^* a(g)^* \Omega$ und $\mu(b) \geq 0$, $\int_{\beta} d^2b \mu(b) = 1$.

Sei nun A eine translationsinvariante positive Observable, die auf den einlaufenden Zustand nicht anspricht,

$$\text{Tr } \rho A = 0 .$$

Dann werden die Erwartungswerte von A in den auslaufenden Zuständen $S\Phi_b$ schnell in b abfallen. Ist $\mu(b)$ im relevanten Bereich konstant, so bietet es sich an, die Normierungsbedingung an den einlaufenden Zustand aufzugeben und stattdessen den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{f,g,\beta}(A) = \int_{\beta} d^2b (S\Phi_b, AS\Phi_b)$$

einzuführen.

Wir definieren jetzt die T-Matrix durch $S = 1 + iT$. Dann gilt wegen $A\Phi_b = 0$

$$\sigma_{f,g,\beta}(A) = \int_{\beta} d^2b (\Phi_b, T^* A T \Phi_b) .$$

T und A sind nach Voraussetzung translationsinvariant. Daher sind die Matrixelemente von $T^* A T$ im Zweiteilchenraum von der Form

$$(a^*(p)a^*(q)\Omega, T^* A T a^*(p')a^*(q')\Omega) = \delta(p + q - p' - q') A_T(p, q, p', q') .$$

Bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts liefert die Integration über den Stoßparameter b einen zusätzlichen Faktor

$$(2\pi)^2 \delta((p - p')e_1) \delta((p - p')e_2)$$

mit einer Orthonormalbasis $\{e_1, e_2\}$ von β . Wir schließen, dass die Wirkungsquerschnitte diagonal in den Impulsen sind,

$$\sigma_{f,g,\beta}(A) = (2\pi)^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{d^3\mathbf{p}'}{2\omega(\mathbf{p}')} |f(p)|^2 |g(q)|^2 A_T(p, q, p, q) \left| \det \frac{\partial \alpha}{\partial (p, q)} \right|^{-1}.$$

Hierbei ist α für vorgegebenes $p, q \in H_m^+$ durch

$$\alpha(p', q') = ((p')^2 - m^2, (q')^2 - m^2, p' + q' - p - q, (p' - p)e_1, (p' - p)e_2)$$

definiert. Die Funktionaldeterminante von α an der Stelle $(p', q') = (p, q)$ ist $|\det(2p, 2q, e_1, e_2)|$. Für $\beta \perp p, q$ gilt

$$|\det(2p, 2q, e_1, e_2)| = 4\sqrt{(pq)^2 - m^4}.$$

Diesen Ausdruck nennt man den Flussfaktor.

Betrachten wir als Beispiel

$$A = |a^*(p_1) \dots a^*(p_n)\Omega\rangle \langle a^*(p_1) \dots a^*(p_n)\Omega|,$$

sodass die Impulse p, q, p_1, \dots, p_n , $p \in \text{supp } f, q \in \text{supp } g$, paarweise verschieden sind. A misst die Wahrscheinlichkeitsdichte für n Impulse,

$$(\Psi, A\Psi) = n! |\Psi_n(p_1, \dots, p_n)|^2.$$

Wir wählen einen einlaufenden Zustand mit scharfen Impulsen p und q und wählen die Ebene β senkrecht zu p und q . Da T translationsinvariant ist, sind seine Matrixelemente zwischen 2-Teilchen- und n -Teilchenzuständen von der Form

$$\begin{aligned} & (a^*(p_1) \dots a^*(p_n)\Omega, T a^*(p) a^*(q)\Omega) \\ &= \delta(p + q - \sum p_i) \mathcal{T}(p_1, \dots, p_n; p, q). \end{aligned}$$

mit der Streuamplitude \mathcal{T} . Daher ist

$$A_T(p, q, p, q) = \delta(p + q - \sum p_i) |\mathcal{T}(p_1, \dots, p_n; p, q)|^2.$$

Wir finden schließlich für den Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \sigma_{p,q \rightarrow p_1, \dots, p_n} &= (2\pi)^2 (4\sqrt{(pq)^2 - m^4})^{-1} \delta(p + q - \sum p_i) |\mathcal{T}(p_1, \dots, p_n; p, q)|^2. \end{aligned}$$

Als Beispiel betrachten wir die S-Matrix zur Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte $\frac{g}{n!} : \varphi^n :$ zur ersten Ordnung. Man findet

$$T = \frac{g}{n!} \int d^4x : \varphi^n(x) :$$

und damit für die Streuamplitude

$$\begin{aligned} & \delta(p + q - \sum p_i) \mathcal{T}(p_1, \dots, p_{n-2}; p, q) \\ &= \frac{g}{n!} \int d^4x \binom{n}{2} (a^*(p_1) \dots a^*(p_{n-2})\Omega, (a^*)^{n-2}(x) a(x)^2 a^*(p) a^*(q)\Omega) \\ &= g(2\pi)^{-3n/2} \int d^4x e^{-i(p+q-\sum p_i)x} \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{T}(p_1, \dots, p_{n-2}; p, q) = (2\pi)^{4-\frac{3n}{2}} g$$

Für den Wirkungsquerschnitt findet man

$$\sigma_{p,q \rightarrow p_1, \dots, p_{n-2}} = (2\pi)^{10-3n} g^2 (4\sqrt{(pq)^2 - m^4})^{-1} \delta(p + q - \sum p_i) .$$

Interessant ist das Verhalten des totalen Wirkungsquerschnitts

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{(n-2)!} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{2\omega(\mathbf{p}_1)} \cdots \frac{d^3 \mathbf{p}_{n-2}}{2\omega(\mathbf{p}_{n-2})} \sigma_{p,q \rightarrow p_1, \dots, p_{n-2}} .$$

Er ist offenbar nur von der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} , $s = (p + q)^2$ abhängig. Für Schwerpunktsenergien $\sqrt{s} \gg (n-2)m$ weit oberhalb der Schwelle für Teilchenerzeugung verhält er sich wie s^{n-4} .

2. Die LSZ-Relationen

In einer translationsinvarianten Theorie kann die S-Matrix nicht direkt in der Form

$$S = T e^{i \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^4 x}$$

geschrieben werden. Stattdessen kann man die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte mit einer Testfunktion g multiplizieren und die lokalen S-Matrizen

$$S(g) = T e^{i \int \mathcal{L}_{\text{int}} g d^4 x}$$

einführen. Anschließend kann man den adiabatischen Limes

$$S = \lim_{g \rightarrow 1} S(g)$$

betrachten. Bei dieser Definition bleibt aber offen, welche Eigenschaften der wechselwirkenden Theorie durch die S-Matrix beschrieben werden.

Lehmann, Symanzik und Zimmermann (LSZ) ist es 1954 gelungen, einen eleganten Ausdruck für die S-Matrix zu finden, der völlig im Rahmen der wechselwirkenden Theorie erklärt ist.

Ausgangspunkt ist (im einfachsten Fall) ein skalares Feld φ , das als operatorwertige Distribution in einem Hilbertraum \mathfrak{H} definiert ist, zusammen mit einer unitären, stark stetigen Darstellung U der Poincaré-Gruppe, die die Spektrumsbedingung erfüllt. Weiter soll es einen eindeutigen (bis auf eine Phase) Poincaré-invarianten Einheitsvektor geben. Das skalare Feld soll sich kovariant unter der Poincaré-Gruppe transformieren,

$$U(x, \Lambda) \varphi(y) U(x, \Lambda)^{-1} = \varphi(\Lambda y + x) .$$

Man nimmt jetzt an, dass es einen Teilraum $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ gibt, der zu der irreduziblen Darstellung der Poincaré-Gruppe mit Masse $m > 0$ und Spin $s = 0$ gehört, und dass es keine weiteren Zustände in \mathfrak{H} gibt, deren Massenspektrum m enthält. Unter diesen Voraussetzungen kann man mit Mitteln der Haag-Ruelle-Streutheorie zeigen, dass es isometrische

Abbildungen W_{\pm} vom Fockraum \mathfrak{H}_0 nach \mathfrak{H} gibt, die die jeweiligen Darstellungen der Poincaré-Gruppe verketteten.

Wir verlangen zusätzlich, dass das wechselwirkende Feld φ nichtverschwindende Matrixelemente zwischen Vakuum und Einteilchenraum besitzt. Wegen der Poincaré-Kovarianz sind diese von der Form

$$\langle p|\varphi(x)\Omega\rangle = (2\pi)^{-3/2}\sqrt{Z}e^{ipx}$$

mit einer Konstante $Z \neq 0$. Z nennt man die Wellenfunktionsrenormierung. Durch Umnormierung des Feldes kann sie gleich 1 gesetzt werden.

Man definiert jetzt freie Felder im Hilbertraum der wechselwirkenden Theorie durch

$$W_{\pm}\varphi_0(x) = \varphi_{\text{ein}}^{\text{aus}}(x)W_{\pm} ,$$

wobei φ_0 das freie Feld im Fockraum ist. Das wechselwirkende Feld strebt im folgende Sinn gegen das auslaufende ($t \rightarrow \infty$) beziehungsweise das einlaufende ($t \rightarrow -\infty$) Feld: Es gilt die LSZ-Asymptoten-Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (W_+\Phi, (\varphi(t, \mathbf{x}) - \varphi_{\text{ein}}^{\text{aus}}(t, \mathbf{x}))W_-\Psi) = 0 .$$

Hierbei sind Φ und Ψ aus dem dichten Unterraum mit endlicher Teilchenzahl, glatten Impulsraumwellenfunktionen mit kompaktem Träger und nicht zusammenfallenden Impulsen.

Sei nun f eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung, deren Cauchy-Daten kompakten Träger besitzen. Dann ist

$$\varphi_{\text{ein}}^{\text{aus}}(f) = \int d^3\mathbf{x} (\dot{\varphi}_{\text{ein}}^{\text{aus}}(t, \mathbf{x})f(t, \mathbf{x}) - \varphi_{\text{ein}}^{\text{aus}}(t, \mathbf{x})\dot{f}(t, \mathbf{x}))$$

unabhängig von t . Ersetzt man die freien Felder durch das wechselwirkende Feld, so erhält man einen zeitabhängigen Ausdruck, der für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen $\varphi_{\text{ein}}^{\text{aus}}$ strebt. Da φ nach Voraussetzung eine operatorwertige Distribution auf dem Minkowskiraum ist, ist nicht sicher, dass das Integral über den Raum zu einer scharfen Zeit existiert. Wir mitteln daher mit einer Testfunktion $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\int dt h(t) = 1$ über die Zeit,

$$\varphi_t(f, h) = \int d\tau h(\tau) \int d^3\mathbf{x} (\dot{\varphi}(t + \tau, \mathbf{x})f(t + \tau, \mathbf{x}) - h(t + \tau, \mathbf{x})\dot{f}(t + \tau, \mathbf{x}))$$

und finden

$$\begin{aligned} & (W_+\Phi, (\varphi_{\text{aus}}(f) - \varphi_{\text{ein}}(f))W_-\Psi) \\ &= \int dt \frac{d}{dt} (W_+\Phi, \varphi_t(f, h)W_-\Psi) . \end{aligned}$$

Wir nutzen aus, dass f eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi_t(f, h) &= \int d\tau h(\tau) \int d^3\mathbf{x} (\ddot{\varphi}(t + \tau, \mathbf{x})f(t + \tau, \mathbf{x}) - \varphi(t + \tau, \mathbf{x})\ddot{f}(t + \tau, \mathbf{x})) \\ &= \int d\tau h(\tau) \int d^3\mathbf{x} (\ddot{\varphi}(t + \tau, \mathbf{x})f(t + \tau, \mathbf{x}) - \varphi(t + \tau, \mathbf{x})(\Delta - m^2)f(t + \tau, \mathbf{x})) \\ &= \int d\tau h(\tau) \int d^3\mathbf{x} ((\square + m^2)\varphi(t + \tau, \mathbf{x}))f(t + \tau, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} &(W_+\Phi, (\varphi_{\text{aus}}(f) - \varphi_{\text{ein}}(f)W_-\Psi)) \\ &= \int d^4x f(x)(\square + m^2)(W_+\Phi, \varphi(x)W_-\Psi) . \end{aligned}$$

Wir führen jetzt zeitgeordnete Produkte des Feldes φ ein. Dies sind symmetrische operatorwertige Distributionen in mehreren Argumenten, die für zeitgeordnete Argumente mit dem Operatorprodukt übereinstimmen. Sie sind in der Regel nicht eindeutig; dies spielt aber im folgenden keine Rolle. Wir benutzen für zwei Funktionen f, g die Notation

$$f \overset{\leftrightarrow}{\partial}_t g = (\partial_t f)g - f\partial_t g .$$

Seien jetzt f_1, \dots, f_n Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung mit kompakt getragenen Cauchy-Daten. Wir setzen

$$\begin{aligned} &T(t_1, \dots, t_n) \\ &= \int d^{4n}x T(\varphi(x_1^0 + t_1, \mathbf{x}_1) \cdots \varphi(x_n^0 + t_n, \mathbf{x}_n) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{t_1} \cdots \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{t_n} \\ &f_1(x_1^0 + t_1, \mathbf{x}_1)h(x_1^0) \cdots f_n(x_n^0 + t_n, \mathbf{x}_n)h(x_n^0) . \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} T(t_1, \dots, t_n) \\ &= \int d^{4n}x h(x_1^0)f_1(x_1^0 + t_1, \mathbf{x}_1) \cdots h(x_n^0)f_n(x_n^0 + t_n, \mathbf{x}_n) \\ &(\square_1 + m^2) \cdots (\square_n + m^2) T\varphi(x_1^0 + t_1, \mathbf{x}_1) \cdots \varphi(x_n^0 + t_n, \mathbf{x}_n) , \end{aligned}$$

und für $t_{\pi(1)} + \text{supp } h > \cdots > t_{\pi(n)} + \text{supp } h$ erhalten wir

$$T(t_1, \dots, t_n) = \varphi_{t_{\pi(1)}}(f_{\pi(1)}, h) \cdots \varphi_{t_{\pi(n)}}(f_{\pi(n)}, h) .$$

Aus der Haag-Ruelle-Theorie folgt für Wellenfunktionen f_i mit nichtüberlappenden Geschwindigkeiten

$$\lim_{t_1, \dots, t_k \rightarrow \infty, t_{k+1}, \dots, t_n \rightarrow -\infty} (\Omega, T(t_1, \dots, t_n)\Omega) = \left(\prod_{i=1}^k \varphi_{\text{aus}}(f_i)^* \Omega, \prod_{j=k+1}^n \varphi_{\text{ein}}(f_j)\Omega \right) .$$

Seien f_1, \dots, f_k Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung mit negativer Energie, und seien f_{k+1}, \dots, f_n Lösungen mit positiver Energie. Dann

folgen die LSZ-Relationen

$$\begin{aligned} \int d^{4n}x f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) (\square_1 + m^2) \cdots (\square_n + m^2) (\Omega, T\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\Omega) \\ = \left(\prod_{i=1}^k \varphi_{\text{aus}}(f_i)^* \Omega, \prod_{j=k+1}^n \varphi_{\text{ein}}(f_j)\Omega \right) . \end{aligned}$$

Fouriertransformation ergibt

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (p_i^2 - m^2) \hat{t}_n(-p_1, \dots, -p_k, p_{k+1}, \dots, p_n) \upharpoonright_{(H_m^+)^n} \\ = N \left(\prod_{i=1}^k a_{\text{aus}}^*(p_i)\Omega, \prod_{j=k+1}^n a_{\text{ein}}^*(p_j)\Omega \right) . \end{aligned}$$

mit $N = i^n (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ und

$$\hat{t}_n(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^{-2n} \int d^{4n}x e^{-i \sum p_j x_j} (\Omega, T\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\Omega) .$$

Wir erkennen, dass die Fouriertransformierten der Erwartungswerte zeitgeordneter Produkte für jede Impulsvariable auf der Massenschale H_m^+ einen Pol der Form $(p^2 - m^2)^{-1}$ besitzen und dass die Koeffizienten gerade die S-Matrix-Elemente sind. Dies sind die berühmten LSZ-Relationen.

3. Kanonische Quantisierung

Ein Standardverfahren zur Definition von Quantenfeldtheorien ist die kanonische Quantisierung klassischer Feldtheorien. Hierbei geht man von der Lagrangeschen Formulierung der klassischen Feldtheorie aus. Wie in der klassischen Mechanik leitet man die Feldgleichungen aus dem Prinzip der stationären Wirkung ab. Sei \mathcal{L} eine Funktion, die von den Feldern und ihren ersten Ableitungen abhängt. Sei G ein kompaktes Gebiet der Raumzeit mit genügend glattem Rand ∂G . Dann soll das Funktional

$$S_G(\varphi) = \int_G d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

unter den Feldern mit gleichen Werten am Rand stationär sein (in der Regel minimal). Zur Auswertung dieser Bedingung betrachten wir ein Feld ψ , das am Rand von G verschwindet. Dann gilt nach Voraussetzung

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} S_G(\varphi + \varepsilon\psi) \Big|_{\varepsilon=0} .$$

Auswertung der Ableitung ergibt

$$0 = \int_G d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}(x) \psi(x) + \sum_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)}(x) \partial_\mu \psi(x) \right) .$$

Der zweite Term im Integranden kann in der Form

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)}(x) \psi(x) \right) - \left(\sum_{\mu} \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)}(x) \right) \psi(x) .$$

geschrieben werden. Der erste Term dabei ist eine Divergenz. Das Integral darüber verschwindet wegen des Verschwinden der Randwerte von ψ . Soll das verbleibende Integral für alle ψ verschwinden, so muss φ innerhalb von G die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \sum_{\mu} \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)}$$

erfüllen.

Sei z.B. $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{g}{4!} \varphi^4$, so ergibt sich

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi - \frac{g}{3!} \varphi^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)} = \partial^{\mu} \varphi .$$

Damit erhält man die Feldgleichung

$$(\square + m^2) \varphi = -\frac{g}{3!} \varphi^3 .$$

Als Ausgangspunkt der Quantisierung benutzt man die Hamiltonsche Formulierung. Hierzu wird die Zeitkoordinate ausgezeichnet, und man definiert die Lagrangefunktion L als das räumliche Integral der Lagrangedichte. Die kanonisch konjugierten Impulse ergeben sich zu

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}(\mathbf{x})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}(\mathbf{x}) .$$

Falls $\dot{\varphi}$ als Funktion von φ , $\vec{\partial} \varphi$ und π geschrieben werden kann, erhält man die Hamiltonfunktion als

$$H(\varphi, \pi) = \int d^3 \mathbf{x} h(\varphi(\mathbf{x}), \vec{\partial} \varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}))$$

mit der Hamiltondichte

$$h(\varphi, \partial \varphi, \pi) = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} .$$

Die Quantisierungsvorschrift besteht jetzt darin, φ und π durch operatorwertige Distributionen zu ersetzen, sodass die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})] &= 0 = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] \\ [\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] &= i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

erfüllt sind. Die Zeitentwicklung ist dann durch die Heisenberggleichung gegeben,

$$\dot{\varphi}(x) = i \int d^3 \mathbf{y} [h(\mathbf{y}), \varphi(x)] .$$

Die angegebene Vorschrift ist mit einigen Problemen belastet. Wir wollen das am Beispiel der φ^4 -Theorie genauer ansehen. In diesem Fall ist

$$\pi = \dot{\varphi} ,$$

und die Hamiltondichte ergibt sich zu

$$h = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}|\vec{\partial}\varphi|^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{g}{4!}\varphi^4 .$$

Die kanonischen Vertauschungsrelationen sind im Fockraum des freien Feldes zur Masse m realisiert. Um die Hamiltondichte dort einzuführen, kann man die Produkte der Felder durch Wickprodukte ersetzen. Die Definition des Hamiltonoperators als das räumliche Integral der Hamiltondichte ist aber nicht möglich. Es gilt der folgende Satz (Haagsches Theorem)

THEOREM IV.1. *Sei \mathfrak{H} der Fockraum eines freien Feldes φ_0 , und sei $U(\mathbf{x})$ der räumliche Translationsoperator. Sei φ eine operatorwertige Distribution mit den Eigenschaften*

- (i) $\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(0, \mathbf{x})$, $\dot{\varphi}(0, \mathbf{x}) = \dot{\varphi}_0(0, \mathbf{x})$.
- (ii) $U(\mathbf{x})\varphi(t, \mathbf{y})U(\mathbf{x})^{-1} = \varphi(t, \mathbf{y} + \mathbf{x})$.
- (iii) *Es existiert ein selbstadjungierter Operator H mit der Eigenschaft*

$$e^{itH}\varphi(0, \mathbf{x})e^{-itH} = \varphi(t, \mathbf{x}) .$$

Dann stimmt H bis auf eine additive Konstante mit dem Hamiltonoperator H_0 der freien Theorie überein, und $\varphi = \varphi_0$.

Beweisskizze nach [1]: Der Beweis beruht im wesentlichen darauf, dass das Vakuum Ω bis auf einen Faktor der einzige translationsinvariante Vektor in \mathfrak{H} ist. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass H mit den räumlichen Translationen vertauscht. Dann ist Ω ein Eigenvektor von H . Sei λ der zugehörige Eigenwert. Die mit räumlichen Testfunktionen verschmierten freien Felder $\varphi_0(0, f) = \int d^3\mathbf{x}f(\mathbf{x})\varphi_0(\mathbf{x})$ erzeugen aus Ω einen dichten Teilraum \mathfrak{D} . Auf \mathfrak{D} gilt:

$$\begin{aligned} (H - \lambda)\varphi_0(0, f_1) \cdots \varphi_0(0, f_n)\Omega &= (H - \lambda)\varphi(0, f_1) \cdots \varphi(0, f_n)\Omega \\ &= \sum_k \varphi(0, f_1) \cdots \dot{\varphi}(0, f_k) \cdots \varphi(0, f_n)\Omega \\ &= \sum_k \varphi_0(0, f_1) \cdots \dot{\varphi}_0(0, f_k) \cdots \varphi_0(0, f_n)\Omega \\ &= H_0\varphi_0(0, f_1) \cdots \varphi_0(0, f_n)\Omega . \end{aligned}$$

Also gilt $H = H_0 + \lambda$ auf \mathfrak{D} . Zur Vervollständigung des Beweises genügt es zu zeigen, dass H_0 auf \mathfrak{D} wesentlich selbstadjungiert ist. \square

Zur Vermeidung der Konsequenzen des Haagschen Theorems kann man versuchen, zunächst räumlich abgeschnittene Hamiltonoperatoren

$$H(g) = H_0 + \int d^3\mathbf{x}g(\mathbf{x})h(\mathbf{x})$$

mit einer Testfunktion g zu betrachten. Man erwartet dann wegen der durch die Lichtgeschwindigkeit begrenzten Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen, dass

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = e^{itH(g)}\varphi(0, \mathbf{x})e^{-itH(g)}$$

von g unabhängig ist, sofern g im Bereich $\{\mathbf{y}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < |t|\}$ identisch 1 ist. Auf diese Weise erhält man dann eine Konstruktion der Observablenalgebra der wechselwirkenden Theorie.

Um auch die Vakuumdarstellung der wechselwirkenden Theorie zu erhalten, kann man zunächst die Grundzustandsvektoren $\Omega(g)$ der lokal gestörten Hamiltonoperatoren $H(g)$ betrachten (falls diese existieren). Die Wightmanfunktionen der wechselwirkenden Theorie sucht man dann als Limes $g \rightarrow 1$ der Erwartungswerte

$$(\Omega(g), \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \Omega(g)) .$$

Mit dem Rekonstruktionstheorem gewinnt man schließlich den Vakuumhilbertraum der wechselwirkenden Theorie. Diese Idee ist von Glimm und Jaffe erfolgreich für die Konstruktion der φ^4 -Theorie in 2 Raumzeitdimensionen durchgeführt worden.

Wir wollen jetzt die kanonische Quantisierung der Elektrodynamik behandeln. Die Maxwellgleichungen lassen sich aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$$

mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ableiten. Hierbei ist j_μ ein erhaltener Strom, der von A_μ unabhängig ist. Es gilt nämlich

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -j_\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu},$$

und daher

$$j^\nu = \partial_\mu F^{\nu\mu} = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu .$$

Das Anfangswertproblem für das Vektorpotential ist durch die Maxwellgleichungen nicht wohldefiniert. Denn wenn A_μ eine Lösung ist, dann ist auch $A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ eine Lösung, wobei Λ eine beliebige Funktion ist (Eichfreiheit). Daher ist auch der Übergang zum Hamiltonformalismus nicht möglich. Formal sieht man das daran, dass die kanonisch konjugierten Impulse nicht unabhängig sind und dass eine Elimination der Zeitableitungen des Vektorpotentials nicht möglich ist. Die kanonisch konjugierten Impulse sind

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}_\mu)} = \begin{cases} 0 & , \quad \mu = 0 \\ -F^{0\mu} = E_\mu & , \quad \mu = 1, 2, 3 \end{cases} .$$

Man wählt den folgenden Ausweg. Man addiert zur Lagrangedichte einen Zusatzterm (Eichfixierung), sodass die modifizierte Feldgleichung

ein wohldefiniertes Anfangswertproblem besitzt. Eine solche Wahl ist $-\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2$ mit $\lambda \neq 0$. Die Feldgleichungen sind dann

$$\square A_\mu + (\lambda - 1)\partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = j_\mu .$$

Es folgt aus der Stromerhaltung

$$\square(\partial_\mu A^\mu) = 0 .$$

Daher ist $B := \partial_\mu A^\mu$ ein freies masseloses skalares Feld. Verschwindet B , so sind die modifizierten Feldgleichungen äquivalent zu den Maxwellgleichungen. Allerdings kann B nicht einfach gleich Null gesetzt werden, da es nichttriviale kanonische Vertauschungsrelationen besitzt.

Die kanonisch konjugierten Impulse sind

$$\pi_0 = -\lambda\partial_\mu A^\mu , \quad \pi_k = \partial_0 A_k - \partial_k A_0 .$$

Auflösen nach den Zeitableitungen von A_μ ergibt

$$\dot{A}_0 = \vec{\partial} \cdot \mathbf{A} - \lambda^{-1}\pi_0 , \quad \dot{A}_k = \pi_k + \partial_k A_0 .$$

Die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen zwischen A_μ und \dot{A}_μ ergeben sich zu

$$[A_\mu(0, \mathbf{x}), \dot{A}_\nu(0, \mathbf{y})] = -i(g_{\mu\nu} - (\lambda^{-1} - 1)g_{\mu 0}g_{\nu 0})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ,$$

und die zwischen \dot{A}_0 und \dot{A}_k zu

$$\begin{aligned} [\dot{A}_0(0, \mathbf{x}), \dot{A}_k(0, \mathbf{y})] &= [(\vec{\partial} \cdot \mathbf{A} - \lambda^{-1}\pi_0)(0, \mathbf{x}), (\pi_k + \partial_k A_0)(0, \mathbf{y})] \\ &= i(1 - \lambda^{-1})\partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \end{aligned}$$

Besonders einfach werden die Vertauschungsrelationen für $\lambda = 1$ (Feynman-Eichung). Ein anderer oft betrachteter Spezialfall ist $\lambda = \infty$ (Landau-Eichung).

Wir wollen im folgenden die Feynman-Eichung verwenden. Die Feldgleichung stimmt in diesem Fall mit der inhomogenen Wellengleichung überein. Wenn j_μ mit A_μ vertauscht, dann ist der Kommutator verschiedener Komponenten von A_μ eine Lösung der homogenen Wellengleichung. Da die Anfangsbedingungen durch die kanonischen Vertauschungsrelationen bestimmt sind, ergibt sich

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = -ig_{\mu\nu}D(x - y)$$

mit der Pauli-Jordan-Funktion D . Für das Feld B findet man

$$[B(x), A_\mu(y)] = -i\partial_\mu D(x - y) ,$$

daher implementiert $\int d^3\mathbf{x}B(t, \mathbf{x})\overset{\leftrightarrow}{\partial}_t\Lambda(t, \mathbf{x})$ mit einer Lösung Λ der Wellengleichung gerade eine infinitesimale Eichtransformation, die mit der Eichfixierung $\partial_\mu A^\mu = B$ verträglich ist. B kann also nicht identisch Null sein.

Wir können jetzt aber die Algebra \mathfrak{A}_0 der verschmierten Felder betrachten, die mit B vertauschen. Diese Algebra wird von $F_{\mu\nu}$ und B

erzeugt. In dieser Algebra erzeugt B ein nichttriviales Ideal I . Die Quotientenalgebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0/I$ ist dann die Observablenalgebra der Quantenelektrodynamik. Sie wird von den Feldern $F_{\mu\nu}$ erzeugt. Deren Vertauschungsrelationen und Feldgleichungen sind dieselben wie die aus Kapitel 3.

Wir wollen jetzt eine Hilbertraumdarstellung finden. Zuerst versuchen wir, eine Darstellung der Felder A_μ durch hermitesche Operatoren in einem Hilbertraum \mathfrak{K} zu konstruieren. \mathfrak{K} soll einen Vektor Ω enthalten, der das Vakuum beschreibt, und soll durch Anwendung der verschmierten Felder auf Ω erzeugt werden. Weiter soll es eine positive Energiedarstellung der Poincaré-Gruppe geben, die Ω invariant lässt und unter der sich A_μ kovariant transformiert,

$$U(x, \Lambda)A_\mu(y)U(x\Lambda)^{-1} = A_\nu(\Lambda y + x)\Lambda^\nu{}_\mu .$$

Aus diesen Bedingungen ergibt sich die Zweipunktfunktion zu

$$(\Omega, A_\mu(x)A_\nu(y)\Omega) = -g_{\mu\nu}D_+(x-y) .$$

Im Einteilchenraum

$$\mathfrak{K}_1 = \{A(f)\Omega, f = (f^\mu), f^\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)\}$$

erhält man das Skalarprodukt

$$(A(f)\Omega, A(f)\Omega) = - \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \overline{\hat{f}^\mu(p)} \hat{f}_\mu(p) .$$

Man erkennt, dass das Skalarprodukt in \mathfrak{K} nicht positiv definit sein kann, wenn A_0 hermitesch ist.

Die 4 Komponenten in \mathfrak{K}_1 kann man als zeitartige, longitudinale und die beiden transversalen Photonen interpretieren (jeweils bezogen auf die Richtung des Impulses). Nur die transversalen Photonen entsprechen physikalischen Teilchen. Zur Elimination der unphysikalischen Freiheitsgrade verwenden wir das Feld B . Sei

$$\mathfrak{H}_0 = \{\Phi \in \mathfrak{K}, B(f)\Phi = 0 \text{ falls } \text{supp } \hat{f} \cap \overline{V_+} = \emptyset\} .$$

(Gupta-Bleuler-Bedingung). Dann gilt der folgende Satz:

THEOREM IV.2. $(\Phi, \Phi) \geq 0$ für $\Phi \in \mathfrak{H}_0$.

Beweis: Die n -Teilchenkomponente Φ_n von Φ ist eine symmetrische Funktion $\Phi_n^{\mu_1 \dots \mu_n}(p_1, \dots, p_n)$ mit $p_i \in \partial V_+$. Die Gupta-Bleuler-Bedingung besagt

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} p^\mu \hat{f}(-p) g_{\mu\mu_1} \Phi_n^{\mu_1 \dots \mu_n}(p, p_2, \dots, p_n) = 0 .$$

für alle f mit $\text{supp } \hat{f} \cap \overline{V_+} = \emptyset$. Also gilt

$$p_{\mu_1} \Phi_n^{\mu_1 \dots \mu_n}(p, p_2, \dots, p_n) = 0 .$$

für $p, \dots, p_n \in \partial\overline{V}_+$. Da $-g_{\mu\nu}$ auf dem orthogonalen Komplement eines lichtartigen Vektors $p \neq 0$ positiv semidefinit ist,

$$p^2 = 0, \quad qp = 0 \iff p_0 = \pm|\mathbf{p}|, \quad q_0 p_0 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p},$$

also unter Verwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$|\mathbf{q}|^2 \geq \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2}{|\mathbf{p}|^2} = (q_0)^2,$$

ist

$$(-1)^n \overline{\Phi_{n\mu_1 \dots \mu_n}(p_1, \dots, p_n)} \Phi_n^{\mu_1 \dots \mu_n}(p_1, p_2, \dots, p_n) \geq 0.$$

Dies ist aber gerade der Integrand, der bei der Berechnung des Skalarprodukts (Φ_n, Φ_n) auftritt. Also ist $(\Phi_n, \Phi_n) \geq 0$ für alle n und damit $(\Phi, \Phi) \geq 0$. \square

Sei \mathcal{N} der Nullraum des positiv semidefiniten Skalarprodukts auf \mathfrak{H}_0 ,

$$\mathcal{N} = \{\Phi \in \mathfrak{H}_0, (\Phi, \Phi) = 0\}.$$

Dann besitzt der Quotientenraum $\mathfrak{H}_0/\mathcal{N}$ ein positiv definites Skalarprodukt. Seine Vervollständigung nennen wir den physikalischen Hilbertraum \mathfrak{H} . Wir wollen jetzt zeigen, dass die Observablenalgebra \mathfrak{A} auf \mathfrak{H} durch Operatoren dargestellt werden kann. Die Algebra \mathfrak{A}_0 besteht nach Definition aus den Feldoperatoren, die mit B vertauschen. Daher lässt sie den Raum \mathfrak{H}_0 invariant. Auch der Nullraum ist invariant unter \mathfrak{A}_0 . Denn sei $\Phi \in \mathcal{N}$ und $C \in \mathfrak{A}_0$. Dann ist wegen der Hermitizität von B auch der adjungierte Operator $C^* \in \mathfrak{A}_0$. Damit folgt aus der Schwarzschen Ungleichung

$$(C\Phi, C\Phi) = (C^*C\Phi, \Phi) \leq \|C^*C\Phi\| \|\Phi\| = 0.$$

Also besitzt \mathfrak{A}_0 eine Darstellung auf dem physikalischen Hilbertraum \mathfrak{H} . Dabei wird das von B erzeugte Ideal auf Null abgebildet,

$$B(f)\Phi \in \mathcal{N}.$$

Damit erhalten wir die gewünschte Hilbertraumdarstellung der Observablenalgebra \mathfrak{H} . Sie stimmt mit der in Kapitel III konstruierten Darstellung überein. Im Gegensatz zu dieser lässt sich die Gupta-Bleuler-Methode auch auf den wechselwirkenden Fall übertragen. Eine ähnliche Methode gibt es für nichtabelsche Eichtheorien.

4. Pfadintegral

Eine andere Methode zur Definition von Quantenfeldtheorien ist die Methode der Pfadintegrale. Ursprünglich von Dirac vorgeschlagen, wurde sie von Feynman in seiner Doktorarbeit als eine alternative Formulierung der Quantentheorie entwickelt.

Wir erläutern die Methode zunächst am Beispiel eines quantenmechanischen Teilchens der Masse m , das sich in einer Raumdimension

unter dem Einfluss des Potentials $V(x)$ bewegt. Der Hamiltonoperator des Systems ist

$$H = H_0 + V \text{ mit } H_0 = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} .$$

Wenn $H_0 + V$ wesentlich selbstadjungiert ist (z.B. für V stetig und beschränkt), dann gilt nach der Trotter-Produkt-Formel

$$e^{-itH} \Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-i\frac{t}{n}H_0} e^{-i\frac{t}{n}V})^n \Phi , \quad \Phi \in L^2(\mathbb{R}) .$$

Für Testfunktionen $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ lässt sich die Wirkung des freien Zeitentwicklungsoperators e^{-itH_0} mittels Fourier-Transformation durch das folgende Integral beschreiben

$$\begin{aligned} (e^{-itH_0} \Phi)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int dp \int dy e^{ip(x-y)} e^{-it\frac{p^2}{2m}} \Phi(y) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi it}} \int dy e^{i\frac{m}{2} \frac{(x-y)^2}{t}} \Phi(y) \end{aligned}$$

mit

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi it}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi |t|}} e^{-i\frac{\pi}{4} \text{sign}(t)} .$$

Ist V unendlich oft differenzierbar mit polynomial beschränkten Ableitungen, so gilt für die Lösung der Schrödingergleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = (H\psi)(t, x)$$

mit Anfangswert $\psi(0, x) = \Phi(x)$ die Formel

$$\begin{aligned} \psi(t, y_0) &= (e^{-itH} \Phi)(y_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{mn}{2\pi it}} \right)^n \int dy_1 \cdots dy_n e^{i\frac{t}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{m}{2} \frac{(y_{k-1} - y_k)^2}{(t/n)^2} - V(y_k) \right)} \Phi(y_n) \end{aligned}$$

(Konvergenz im Sinne von $L^2(\mathbb{R})$). Der Exponent in der zweiten Zeile ist eine Riemann-Summe, die das Integral

$$i \int_0^t dt' \left(\frac{m}{2} \dot{y}^2 - V(y) \right) = iI$$

approximiert, wenn $y(t)$ eine Bahnkurve ist mit $y(k\frac{t}{n}) = y_k$. I ist hierbei die klassische Wirkung der Bahnkurve.

Diese Darstellung des Zeitentwicklungsoperators legt die folgende suggestive Deutung nahe: Die quantenmechanische Übergangsamplitude

$$\langle y | e^{-itH} | x \rangle := e^{-itH}(y, x)$$

ergibt sich als eine Superposition der Amplituden für alle möglichen Bahnen $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(t) = y$. Jede dieser Bahnen liefert einen Beitrag $e^{iI(\gamma)}$. Der führende Beitrag kommt von den

Bahnen in der Nähe eines stationären Punktes der Wirkung, also von Bahnen in der Nähe der klassischen Lösung.

Sei nun $\mathcal{W}_{x,y,t}$ die Menge der stetigen Bahnen $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(t) = y$. Wir schreiben

$$\langle y | e^{-itH} | x \rangle = \int_{\mathcal{W}_{x,y,t}} \mathcal{D}\gamma e^{iI(\gamma)} .$$

Hierbei soll

$$\mathcal{D}\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{mn}{2\pi it}} \right)^n d\gamma\left(\frac{t}{n}\right) \cdots d\gamma\left(\frac{n-1}{n}t\right)$$

das geeignet normierte Integral über alle Wege bedeuten.

Wenn es gelingt, dem Pfadintegral für $V = 0$ einen mathematisch präzisen Sinn zu geben, dann erhält man den Integranden für beliebiges V durch Multiplikation mit dem Faktor

$$e^{i \int_0^t dt' V(\gamma(t'))}$$

(Feynman-Kac-Formel). Sofern dieser Faktor integrierbar ist, hat man eine explizite Integraldarstellung für die Übergangsamplitude gefunden.

Bei dem Versuch, diese Ideen mathematisch zu präzisieren, bereitet der oszillatorische Charakter der Integrale Probleme. Leichter zu handhaben sind die Integralkerne der positiven Operatoren e^{-tH} , $t > 0$ (falls H nach unten beschränkt ist). Für $t > 0$ gilt

$$e^{-tH_0}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{2\pi t}} e^{-\frac{m}{2} \frac{(x-y)^2}{t}} .$$

Der Integralkern von e^{-tH_0} besitzt die folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} e^{-tH_0}(x, y) &> 0 , \\ \int dx e^{-tH_0}(x, y) &= 1 , \\ \int dy e^{-tH_0}(x, y) e^{-sH_0}(y, z) &= e^{-(t+s)H_0}(x, z) . \end{aligned}$$

Diese Eigenschaften kann man als eine wahrscheinlichkeitstheoretische Beschreibung der Diffusion interpretieren. Dabei deutet man $e^{-tH_0}(x, y)$ als die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, dass ein Teilchen durch Diffusion (mit der Diffusionskonstante $D = \frac{1}{2m}$) in der Zeit t von y nach x gelangt. Die zweite Gleichung ist die Normierung der Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen an irgendeinem Punkt ist, auf 1. Die dritte Eigenschaft charakterisiert einen Markov-Prozess.

In der Theorie der Brownschen Bewegung führt man auf $\mathcal{W}_{x,y,t}$ die Struktur eines Maßraums ein. Dabei muss man das System der messbaren Mengen auszeichnen. Hierzu sollen auf jeden Fall die sogenannten Zylindermengen gehören:

DEFINITION IV.1. Eine Zylindermenge $Z(t_1, \dots, t_n; B)$ ist die Menge der Wege γ mit $(\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)) \in B$, wobei B eine messbare Menge in \mathbb{R}^n ist und $0 < t_1 < \dots < t_n < t$ gilt.

Man kann dann das sogenannte Wiener-Integral über Zylindermengen erklären durch

$$\int_{Z(t_1, \dots, t_n; B)} dW_{xy}^t = \int_B dy_1 \cdots dy_n e^{-H_0(t-t_n)}(y - y_n) \cdots e^{-H_0 t_1}(y_1 - x) .$$

Es gilt nun der folgende Satz:

THEOREM IV.3. Sei V stetig und nach unten beschränkt, und sei $H = H_0 + V$ wesentlich selbstadjungiert. Dann ist die Funktion $e^{-\int_0^t dt' V(\gamma(t'))}$ auf $\mathcal{W}_{x,y,t}$ bezüglich des Wiener-Maßes integrierbar, und es gilt die Feynman-Kac-Formel

$$(e^{-tH})(y, x) = \int dW_{xy}^t e^{-\int_0^t dt' V(\gamma(t'))} .$$

Beweis: Nach der Trotter-Produkt-Formel gilt

$$(e^{-tH})(y, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{mn}{2\pi t}} \right)^n \int dy_1 \cdots dy_n e^{-\frac{t}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{m}{2} \frac{(y_{k-1} - y_k)^2}{(t/n)^2} + V(y_k) \right)} .$$

Nach der Definition des Wiener-Maßes ist die rechte Seite der Limes $n \rightarrow \infty$ der Wiener-Integrale

$$\int dW_{xy}^t e^{-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{t}{n} V(\gamma(\frac{kt}{n}))}$$

über die Zylinderfunktionen

$$\gamma \rightarrow e^{-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{t}{n} V(\gamma(\frac{kt}{n}))}$$

Diese Funktionen konvergieren punktweise gegen $e^{-\int_0^t dt' V(\gamma(t'))}$. Wegen der unteren Schranke an V sind sie gleichmäßig durch eine Konstante beschränkt. Nach dem Satz über die dominierte Konvergenz ist die Limesfunktion daher integrierbar, und das Integral stimmt mit dem Limes der Integrale über die approximierenden Zylinderfunktionen überein. \square

Aus diesem Satz folgt insbesondere, dass der Integrialkern von e^{-tH} positiv ist. Daraus ergibt sich, dass auch die Grundzustandsfunktion Ω (falls es sie gibt) positiv sein muss. Man erhält sie durch die folgende Formel:

THEOREM IV.4. Sei $\Omega_0 \in L^2(\mathbb{R})$ positiv. Dann ist

$$\Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tH} \Omega_0 \|e^{-tH} \Omega_0\|^{-1} ,$$

falls der Limes existiert, der bis auf einen Phasenfaktor eindeutige Grundzustand von H . Wenn der Limes nicht existiert, besitzt H keinen Grundzustand.

Hieraus erhält man die folgende Formel für den Erwartungswert eines Produkts von Funktionen f_i des Ortsoperators zu verschiedenen (imaginären) Zeiten

$$(\Omega, e^{t_1 H} f_1(x) e^{-t_1 H} \dots e^{t_n H} f_n(x) e^{-t_n H} \Omega) = \int d\mu(\gamma) f_1(\gamma(t_1)) \dots f_n(\gamma(t_n)) .$$

Hierbei ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Raum aller Wege $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Es ergibt sich als Limes $t \rightarrow \infty$ der Maße

$$Z(t)^{-1} dx \Omega_0(x) dy \Omega_0(y) dW_{yx}^{-t,t} e^{-\int_{-t}^t d\ell V(\gamma(\ell))}$$

mit einem Normierungsfaktor $Z(t)$. Bemerkenswert an dieser Formel ist, dass man die Grundzustandswellenfunktion Ω nicht zur Berechnung der Erwartungswerte benötigt.

Wir wollen jetzt entsprechende Formeln für die Feldtheorie gewinnen. Dazu konstruieren wir zunächst die Schrödingerdarstellung des freien Skalarfeldes. An die Stelle der Ortsoperatoren treten jetzt die Zeit-Null-Felder $\varphi(0, \mathbf{x})$. Als Wertebereich der Felder betrachten wir den Raum der temperierten reellwertigen Distributionen $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Wir suchen ein Maß μ auf diesem Raum, sodass der Fockraum mit $L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3), d\mu)$ identifiziert werden kann. Ein Vektor Φ des Fockraums ist dann eine Funktion auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\int |\Phi(T)|^2 d\mu(T) = \|\Phi\|^2 .$$

Die mit Testfunktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ verschmierten Zeit-Null-Felder wirken als Multiplikationsoperatoren,

$$(\varphi(0, f)\Phi)(T) = T(f)\Phi(T) .$$

Zur Durchführung dieses Programms betrachten wir die von den Operatoren $e^{i\varphi(0,f)}$ erzeugte Algebra

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)} c_f e^{i\varphi(0,f)}, c_f \in \mathbb{C}, c_f \neq 0 \text{ nur für endlich viele } f \right\}$$

Jedes Element C dieser Algebra definiert über

$$C(T) = \sum_f c_f e^{iT(f)}$$

eine stetige beschränkte Funktion auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, und das punktweise Produkt dieser Funktionen entspricht dem Produkt der Operatoren,

$$(C_1 C_2)(T) = C_1(T) C_2(T) .$$

Ein Maß auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ kann jetzt dadurch charakterisiert werden, dass es ein lineares Funktional auf dieser Funktionenalgebra beschreibt,

$$\int d\mu(T) C(T) = \mu(C) .$$

In unserem Fall bietet sich als lineares Funktional der Vakuumerwartungswert an,

$$\mu(C) = (\Omega, C\Omega) .$$

Das zugehörige Maß beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Konfigurationen T des Zeit-Null-Feldes im Vakuum.

Bei dieser Beschreibung des Maßes gibt man seine Fourier-Transformierte an,

$$\chi(f) := \hat{\mu}(f) = \mu(e^{i\varphi(0,f)}) = \int d\mu(T) e^{iT(f)} .$$

Wegen der Positivität des Skalarproduktes im Fockraum (äquivalent zur Positivität des Maßes) besitzt χ (die sogenannte charakteristische Funktion des Maßes) die Eigenschaft

$$\sum_{f,g} \chi(f-g) c_f \overline{c_g} \geq 0 .$$

Umgekehrt ist jede stetige Funktion auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, die die obige Positivitätseigenschaft besitzt, die Fourier-Transformierte eines Maßes auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ (Minlos-Theorem).

In unserem Fall ist

$$\chi(f) = e^{-\frac{1}{2}(f, \frac{1}{2\omega}f)}$$

mit

$$\frac{1}{2\omega}f(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{y} \Delta_+(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) .$$

Maße, deren Fourier-Transformierte Exponentiale einer positiven quadratischen Form sind, nennt man Gaußsche-Maße. Die quadratische Form ist die Kovarianz des Maßes,

$$\int d\mu(T) T(\mathbf{x}) T(\mathbf{y}) = (\Omega, \varphi(0, \mathbf{x}) \varphi(0, \mathbf{y}) \Omega) = \Delta_+(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) .$$

Gaußsche Maße über \mathbb{R}^n werden durch eine positiv semidefinite $n \times n$ -Matrix K charakterisiert,

$$\int d\mu_K(x) x_i x_j = K_{ij}$$

$$\int d\mu_K e^{i(x,y)} = e^{-\frac{1}{2}(y, Ky)} .$$

Falls K invertierbar ist, berechnet man durch inverse Fourier-Transformation

$$d\mu_K(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det(K)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x, K^{-1}x)} d^n x .$$

Im unendlich dimensionalen Fall gibt es kein Lebesgue-Maß, die obige Faktorisierung des Gauß-Maßes verliert daher ihren Sinn. Das Gauß-Maß selber ist aber auch im unendlich dimensionalen Fall wohldefiniert.

Gaußsche Maße lassen sich mit Hilfe ihrer charakteristischen Funktion leicht auf unendlich dimensionalen Räumen erklären. Sie besitzen aber einige Eigenschaften, die im endlich dimensionalen Fall nicht auftreten können.

Der allgemeine Fall ist der folgende. Wir betrachten einen reellen separablen Prä-Hilbert-Raum \mathfrak{D} . Auf \mathfrak{D} betrachten wir die stetige Funktion positiven Typs

$$\chi(f) = e^{-\frac{1}{2}(f,f)} .$$

Sei \mathfrak{D}' der Raum der (nicht notwendig stetigen) linearen Funktionale auf \mathfrak{D} . Wir definieren ein Maß μ auf \mathfrak{D}' als lineares Funktional auf der Algebra der Funktionen $l \rightarrow \sum c_l e^{il(f)}$ mit Hilfe der charakteristischen Funktion. Die wichtige Frage ist jetzt, auf welchen Funktionalen das Maß konzentriert ist. Es gilt der folgende Satz:

THEOREM IV.5. *Die Menge der stetigen Funktionale hat das Maß Null.*

Beweis: Sei $\|l\| := \sup_{\|f\|=1} |l(f)|$. Wir definieren die Funktion

$$F(l) = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda}{2}\|l\|^2} & , \quad \|l\| < \infty \\ 0 & , \quad \|l\| = \infty \end{cases}$$

($\lambda > 0$). Wir wollen zeigen, dass $\int d\mu(l)F(l) = 0$ ist. Dies bedeutet, dass die Menge der stetigen Funktionale (d.h. der Funktionale mit endlicher Norm) das Maß Null hat.

Wir wählen ein Orthonormalsystem (f_k) in \mathfrak{D} und setzen

$$F_n(l) = e^{-\frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^n l(f_k)^2} .$$

Es gilt

$$F(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(l) , \quad F_n(l) \leq 1 .$$

F ist also punktweiser Limes einer gleichmäßig beschränkten Folge von Zylinderfunktionen und daher integrierbar, und es gilt

$$\int d\mu(l)F(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int d\mu(l)F_n(l) .$$

Das Integral von F_n ist aber das Integral des Gaußschen Maßes

$$(2\pi)^{-n/2} \int d^n x e^{-\frac{1+\lambda}{2}\sum_{k=1}^n x_k^2} = (1+\lambda)^{-n/2} .$$

Hieraus folgt die Behauptung. \square

Mit Hilfe dieses Satzes zeigt man z.B. für das Wiener-Integral, dass die Menge der differenzierbaren Wege Maß Null hat. Mit einer Modifikation des obigen Arguments zeigt man, dass, falls \mathfrak{D} ein Hilbertraum ist, für jeden Hilbert-Schmidt-Operator A auf \mathfrak{D} die Menge der linearen Funktionale l , für die lA nicht stetig ist, eine Menge vom Maß 0

ist. Auf diese Weise kann man zeigen, dass das Wiener-Integral auf den stetigen Wegen konzentriert ist.

Im Fall von $\mathfrak{D} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ und einem im Sinne der Schwartz-Raum-Topologie stetigen Skalarprodukt kann man zeigen, dass das Gaußsche Maß auf dem Raum der temperierten Distributionen konzentriert ist.

Wir haben den Fockraum als den L^2 -Raum eines Gaußschen Maßes mit Kovarianz $\frac{1}{2\omega}$ über $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ dargestellt. Die Zeit-Null-Felder wirken als Multiplikationsoperatoren, und der Vakuumvektor entspricht der Funktion $\Omega(T) = 1$. Es bleiben die kanonisch konjugierten Impulse zu bestimmen. Diese wirken als Funktionalableitungen zuzüglich eines Terms, der durch die fehlende Translationsinvarianz des Gaußschen Maßes verursacht wird. Man berechnet für $C \in \mathcal{A}$

$$(\pi(0, f)C)(T) = (\pi(0, f)C\Omega)(T) = ([\pi(0, f), C]\Omega)(T) + C(\pi(0, f)\Omega)(T) .$$

Der Kommutator berechnet sich aus den kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[\pi(0, f), C] = \frac{1}{i} \int d^3\mathbf{x} \frac{\delta C}{\delta \varphi(0, \mathbf{x})} f(\mathbf{x}) .$$

Die Wirkung auf dem Vakuum bestimmt sich aus

$$\pi(0, f)\Omega = \dot{\varphi}(0, f)\Omega = iH_0\varphi(0, f)\Omega = i\varphi(0, \omega f)\Omega .$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir den Integralkern von e^{-tH_0} berechnen. Wir fassen ihn zunächst als Distribution in zwei Variablen auf,

$$\int (e^{-tH_0})(T, T') d\mu(T) d\mu(T') \overline{\Phi(T)} \Psi(T') := (\Phi, e^{-H_0} \Psi) .$$

Deren Fourier-Transformation ist

$$(\Omega, e^{i\varphi(0, f)} e^{-tH_0} e^{i\varphi(0, g)} \Omega) = e^{-\frac{1}{2}(f, \frac{1}{2\omega} f)} e^{-\frac{1}{2}(g, \frac{1}{2\omega} g)} e^{-\left(f, \frac{e^{-t\omega}}{2\omega} g\right)} .$$

Diese ist eine Funktion positiven Typs und daher die charakteristische Funktion eines Maßes. In Analogie zur Theorie der Brownschen Bewegung fassen wir dieses Maß als die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines durch H_0 beschriebenen Diffusionsprozesses auf. Sie gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass eine Bahn von Feldkonfigurationen $T_{t'}$ zur Zeit t den Wert T' und zur Zeit 0 den Wert T hat. Entsprechend definieren wir auch die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Feldkonfigurationen zu Zeiten $t_1 > \dots > t_n$ mit charakteristischer Funktion

$$\exp \left(-\frac{1}{2} \sum_j (f_j, \frac{1}{2\omega} f_j) - \sum_{j < k} (f_j, \frac{e^{-(t_j - t_k)\omega}}{2\omega} f_k) \right) .$$

Der Übergang zu kontinuierlichen Zeiten kann in der folgenden Weise gemacht werden. Sei $f(x^0, \mathbf{x}) = \sum_k f_k(\mathbf{x}) \delta(x^0 - t_k)$. Dann ist die in

der charakteristischen Funktion auftretende quadratische Form gegeben durch

$$(f, S_2 f) = \int d^4 x f(x) S_2(x-y) f(y)$$

mit der 2-Punkt-Schwingerfunktion

$$S_2(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4 p \frac{e^{ipx}}{|p|^2 + m^2} .$$

Die 2-Punkt-Schwingerfunktion ergibt sich aus dem Feynmanpropagator, indem man p_0 durch ip_0 und x_0 durch ix_0 ersetzt („Wick-Rotation“). Für $x_0 = 0$ stimmt sie mit Δ_+ überein. Sie ist analytisch für $x \neq 0$ mit einer analytischen Fortsetzung in ein Gebiet des \mathbb{C}^4 . Wir wissen bereits, dass Δ_+ Randwert einer analytischen Funktion ist; diese analytische Funktion ist die 2-Punkt-Schwingerfunktion.

Das Gaußsche Maß mit der 2-Punkt-Schwingerfunktion als Kovarianz definiert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung μ_0 auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$. Jeder Testfunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ wird eine Zufallsvariable $\varphi(f)$ zugeordnet durch

$$\varphi(f)(T) = T(f) , T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4) .$$

Man nennt φ das euklidische freie massive Skalarfeld. Seine Korrelationsfunktionen nennt man die Schwingerfunktionen. S_2 ist die Greensche Funktion des Operators $-\Delta + m^2$. Wir stellen uns daher μ_0 vor als

$$d\mu_0 = Z^{-1} e^{-I_E(\varphi)} D\varphi$$

mit der euklidischen Wirkung

$$I_E(\varphi) = \int d^4 x \frac{1}{2} ((\partial\varphi)^2 + m^2 \varphi^2)$$

und dem Integral über alle Feldkonfigurationen $D\varphi = \prod_x d\varphi(x)$. Bei einer Gitterapproximation des euklidischen Feldes kann man diese Formel direkt verwenden. Im Kontinuum ist diese Formel nur heuristisch, da das Lebesgue-Integral $D\varphi$ nicht existiert und zudem der Integrand mit Wahrscheinlichkeit 1 gleich Null ist.

Wechselwirkende euklidische Feldtheorien gewinnt man formal aus der Feynman-Kac-Formel. Für das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß setzt man an

$$d\mu(\varphi) = Z^{-1} e^{-\int d^4 x V(\varphi(x))} d\mu_0(\varphi) .$$

Allerdings ist im Gegensatz zur Quantenmechanik die Funktion $e^{-\int V}$ in der Regel nicht integrierbar. Im Falle einer translationsinvarianten Wechselwirkung ist dies eine euklidische Version des Haagschen Theorems. Multipliziert man V mit einer Testfunktion $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$, so gilt in

2 Dimensionen, dass für nach unten beschränkte Polynome V die Funktion $e^{-\int gV}$ integrierbar ist. Man erhält so eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_g auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Diese besitzt für $g \rightarrow 1$ Limespunkte, die als wechselwirkende euklidische Feldtheorien aufgefasst werden können. Durch analytische Fortsetzung der Korrelationsfunktionen erhält man dann die Wightman-Funktionen eines wechselwirkenden Quantenfeldes.

Die euklidische Wirkung ist der statische Anteil der Energie eines klassischen skalaren Feldes in 4 Raumdimensionen. Das oben definierte Maß kann daher als der Zustand eines klassischen statistischen Systems statischer Feldkonfigurationen angesehen werden, wobei \hbar die Rolle der Temperatur spielt. Diese Beziehung zwischen statistischer Mechanik und klassischer statistischer Mechanik ermöglicht es, Resultate, die in einem Bereich erhalten worden sind, in den anderen zu übertragen. Ein Beispiel ist der Begriff des Phasenübergangs, der aus der statistischen Mechanik stammt und in der Quantenfeldtheorie auf plötzliche Änderungen in Abhängigkeit von den Kopplungskonstanten angewandt wird.

Bei der Definition wechselwirkender euklidischer Theorien treten ähnliche Probleme auf, wie wir sie schon bei dem Versuch der Definition wechselwirkender Quantenfeldtheorien angetroffen haben. Eines dieser Probleme ist die Definition von Potenzen der Felder. Da φ Werte im Raum der temperierten Distributionen annimmt, ist ein Ausdruck der Form $\varphi(x)^n$ nicht wohldefiniert. Wir versuchen daher, euklidische Wick-Potenzen $: \varphi(x)^n :$ zu definieren. Dazu betrachten wir zunächst die Struktur der Schwinger-Funktionen. Es gilt

$$\begin{aligned} S_n(x_1, \dots, x_n) &:= \int d\mu_0 \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ ungerade} , \\ \sum_{\text{Paarungen}} \prod_{\text{Paare}} S_2(x_i, x_j) & , \quad n \text{ gerade} . \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Formel ist völlig analog zu den Formeln für die zeitgeordneten Funktionen des freien Feldes, wobei S_2 an die Stelle des Feynman-Propagators tritt. Von der Formel für die Wightman-Funktionen des freien Feldes unterscheidet sie sich dadurch, dass dort die Paare in der Reihenfolge ihrer Indizes geordnet werden, in Übereinstimmung mit der Tatsache, dass die Wightman-2-Punkt-Funktion $\Delta_+(x-y)$ des freien Feldes nicht symmetrisch unter Vertauschung von x und y ist. Wir können daher dieselben kombinatorischen Formeln verwenden, die bequemer Weise mit Hilfe von Graphen beschrieben werden. Sei ähnlich wie dort $\mathcal{G}(n)$ die Menge der Graphen G mit Vertizes $v \in \{1, \dots, n\}$ und ungerichteten Linien $l \in K(G)$, die jeweils 2 Vertizes verbinden (äußere Linien werden hier nicht zugelassen), sodass jeder Vertex v

Randpunkt genau einer Linie l ist, in Zeichen $v \in \partial l$. Dann ist

$$\int d\mu_0 \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) = \sum_{G \in \mathcal{G}} \prod_{l \in K(G)} S_2(\{x_v, v \in \partial l\}) .$$

Die Korrelationsfunktionen für Wick-Polynome ergeben sich formal durch die Identifizierung bestimmter Vertizes, wobei die entsprechenden Linien weggelassen werden. Sei $\mathcal{G}(n_1, \dots, n_k)$ die Menge der Graphen G mit Vertizes $\{1, \dots, k\}$ und ungerichteten Linien l , sodass der Vertex i Randpunkt von genau n_i Linien ist. Wir definieren die Wick-Polynome zunächst als Linearformen auf dem Raum der Polynome durch

$$\int d\mu_0 \frac{\varphi(x)^n}{n!} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_k) = \sum_{G \in \mathcal{G}(n_1, \dots, n_k)} \prod_{l \in K(G)} S_2(\{x_v, v \in \partial l\}) .$$

Für nicht zusammen fallende Punkte x_1, \dots, x_k können auch die Korrelationsfunktionen der Wick-Polynome angegeben werden,

$$\int d\mu_0 \prod_i \frac{\varphi(x_i)^{n_i}}{n_i!} = \sum_{G \in \mathcal{G}(n_1, \dots, n_k)} \prod_{i < j} \frac{S_2(x_i - x_j)^{l_{ij}}}{l_{ij}!} ,$$

wobei l_{ij} die Zahl der Linien zwischen den Vertizes i und j ist. In der störungstheoretischen Renormierung euklidischer Feldtheorien konstruiert man die Fortsetzung der Korrelationsfunktionen zu überall definierten Distributionen. Allerdings ist es in der Regel nicht möglich, diese Fortsetzungen als Korrelationsfunktionen eines euklidischen Feldes anzusehen, d.h. insbesondere, dass $:\varphi^n : (f)$ keine Zufallsvariable ist.

Betrachten wir als Beispiel das euklidische freie Feld in 3 Dimensionen. In diesem Fall ist die Schwingerfunktion gegeben durch

$$S_2(x) = \frac{e^{-m|x|}}{4\pi|x|} .$$

Die 2-Punkt-Korrelationsfunktionen der n -ten Wick-Potenz sind daher für $n > 2$ nicht mehr integrierbar. Für $n = 2$ aber ergibt sich

$$\int d\mu_0 |:\varphi^2 : (f)|^2 = \int d^6(x, y) \overline{f(x)} f(y) S_2(x - y)^2 < \infty ,$$

$:\varphi^2 : (f)$ ist also quadratintegrierbar. Im Fall $n > 2$ divergiert das entsprechende Integral, und für die renormierten 2-Punktfunktionen ist das Ergebnis nicht notwendig positiv, sodass es nicht als Erwartungswert eines Wahrscheinlichkeitsmaßes aufgefasst werden kann.

5. Zusammenhängende Funktionen

Bei der Entwicklung der Terme der Störungstheorie nach Graphen kann man die Graphen in Zusammenhangskomponenten zerlegen. Die dem Graphen entsprechende Distribution ist das Tensorprodukt der zu den Komponenten gehörigen Distributionen, daher reicht es aus, sich auf die zusammenhängenden Graphen zu beschränken. Tatsächlich ist die Zerlegung von Korrelationsfunktionen nach zusammenhängenden Anteilen unabhängig von der Störungstheorie definiert und kann insbesondere auch für die wechselwirkenden Theorien durchgeführt werden.

Sei ω ein lineares Funktional über einer (nicht notwendig kommutativen) unitalen Algebra \mathcal{A} mit der Normierungsbedingung $\omega(1) = 1$. Wir denken dabei z.B. an das Wightmanfunktional über der Tensoralgebra der Testfunktionen,

$$\omega(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = (\Omega, \varphi(f_1) \cdots \varphi(f_n) \Omega) ,$$

oder an das System der zeitgeordneten Funktionen als Funktional über der symmetrischen Tensoralgebra der Testfunktionen,

$$\omega(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = (\Omega, T\varphi(f_1) \cdots \varphi(f_n) \Omega) .$$

Eine weitere Möglichkeit sind Wahrscheinlichkeitsmaße, aufgefasst als lineare Funktionale auf der Algebra der Zufallsvariablen, die jeder Zufallsvariable ihren Erwartungswert zuordnen.

Wir wollen zunächst annehmen, dass ω eine Entwicklung nach Graphen besitzt,

$$\omega(A_1 \cdots A_n) = \sum_{G \in \mathcal{G}} \omega_G(A_1, \dots, A_n) ,$$

wobei ω_G für jeden Graphen G ein multilineares Funktional auf \mathcal{A} ist, das faktorisiert, wenn der Graph sich in unverbundene Untergraphen zerlegen lässt. Wir können jeden Graphen in seine Zusammenhangskomponenten zerlegen. Dabei wird die Menge der Vertizes in disjunkte nichtleere Teilmengen zerlegt,

$$\{1, \dots, n\} = I_1 \cup \dots \cup I_k , \quad I_j \cap I_l = \emptyset \text{ für } j \neq l .$$

Eine solche Zerlegung nennt man eine Partition, und wir bezeichnen die Menge der Partitionen von $\{1, \dots, n\}$ mit $\text{Part}(\{1, \dots, n\})$. Wir können jetzt zunächst eine Partition festhalten und nur über diejenigen Graphen summieren, deren Zerlegung in Komponenten die gegebene Partition der Menge der Vertizes ergibt, und anschließend über alle Partitionen summieren. Sei

$$\omega_c(A_1, \dots, A_n) = \sum_{G \in \mathcal{G}_c} \omega_G(A_1, \dots, A_n) ,$$

wobei $\mathcal{G}_c \subset \mathcal{G}$ die Teilmenge der zusammenhängenden Graphen bezeichnet. Dann gilt

$$\omega(A_1 \dots A_n) = \sum_{P \in \text{Part}(\{1, \dots, n\})} \prod_{I \in P} \omega_c(A_i, i \in I) . \quad (\text{IV.1})$$

Wir benutzen diese Formel jetzt auch im Fall, in dem keine Entwicklung nach Graphen gegeben ist, und betrachten sie als eine implizite Definition der zusammenhängenden Funktionen ω_c als multilinearen Funktionalen auf \mathcal{A} . Tatsächlich lässt sich die obige Gleichung nach den zusammenhängenden Funktionen auflösen, z.B. gilt $\omega_c(A) = \omega(A)$, $\omega_c(A_1, A_2) = \omega(A_1 A_2) - \omega(A_1)\omega(A_2)$, und es gilt die Rekursionsrelation

$$\omega_c(A_1, \dots, A_n) = \omega(A_1 \cdots A_n) - \sum_{\sharp(P) > 1} \prod_{I \in P} \omega_c(A_i, i \in I) ,$$

wobei $\sharp(P)$ die Zahl der Elemente der Partition P angibt.

Es gibt auch geschlossene Formeln für die zusammenhängenden Funktionen. Multilineare Funktionalen auf Vektorräumen lassen sich immer als lineare Funktionalen auf dem Tensorprodukt der Vektorräume auffassen. In unserem Fall betrachten wir die Algebra \mathcal{A} als Vektorraum. Die zusammenhängenden Funktionen bilden ein System multilinearer Abbildungen und lassen sich formal als ein lineares Funktional auf der Tensoralgebra

$$T\mathcal{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^{\otimes n}$$

auffassen (mit $\omega_c(1) = 0$). Auf der Menge der linearen Funktionalen auf $T\mathcal{A}$ kann das folgende assoziative Produkt eingeführt werden,

$$(FG)(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} F(\bigotimes_{i \in I} A_i) G(\bigotimes_{j \in I^c} A_j) , \quad (\text{IV.2})$$

wobei I^c das Komplement von I in $\{1, \dots, n\}$ bezeichnet. Das Einselement für dieses Produkt ist das lineare Funktional

$$1(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) = \delta_{n0} .$$

Die definierende Gleichung (IV.1) für die zusammenhängenden Funktionen lässt sich mit Hilfe dieses Produkts in der folgenden Form schreiben,

$$\omega m = e^{\omega_c} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_c^n}{n!} . \quad (\text{IV.3})$$

(Hierbei haben wir die Multiplikation in der Algebra \mathcal{A} zur Definition einer linearen Abbildung

$$m : \begin{cases} T\mathcal{A} & \rightarrow \mathcal{A} \\ A_1 \otimes \cdots \otimes A_n & \mapsto A_1 \cdots A_n \end{cases}$$

benutzt.) Denn es gilt

$$\omega_c^k(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) = \sum_{I_1, \dots, I_k \subset \{1, \dots, n\}} \prod_j \omega_c(\bigotimes_{i \in I_j} A_j) .$$

Hierbei sind die Indexmengen paarweise disjunkt, und ihre Vereinigung ergibt $\{1, \dots, n\}$. Die Beiträge der leeren Mengen verschwinden wegen $\omega_c(1) = 0$, daher wird über alle Permutationen $P \in \text{Part}(\{1, \dots, n\})$ summiert. Jede Partition tritt $k!$ mal auf, entsprechend der Anzahl der Nummerierungsmöglichkeiten der Indexmengen. Nach Division durch $k!$ und Summation über k ergibt sich Gleichung (IV.1).

Aus (IV.3) erhält man durch Umkehrung der Potenzreihe der Exponentialfunktion die gesuchte geschlossene Formel für die zusammenhängenden Funktionen,

$$\omega_c = \log \omega m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (\omega m - 1)^k . \quad (\text{IV.4})$$

Die angegebene Reihe konvergiert, da $(\omega m - 1)(1) = 0$. Ausgeschrieben ergibt sich

$$\omega_c(A_1, \dots, A_n) = \sum_{P \in \text{Part}(\{1, \dots, n\})} (-1)^{\sharp(P)} (\sharp(P) - 1)! \prod_{I \in P} \omega(\prod_{i \in I} A_i) .$$

Wir wollen die Formel anwenden auf Elemente der Form

$$\exp_{\otimes} A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{\otimes k} , \quad A \in \mathcal{A} .$$

Wertet man lineare Funktionale auf $T\mathcal{A}$ auf diesen Elementen aus, so geht das Produkt der Funktionale in das Produkt der Werte über,

$$(FG)(\exp_{\otimes} A) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F(A^{\otimes k}) G(A^{\otimes(n-k)}) = F(\exp_{\otimes} A) G(\exp_{\otimes} A) .$$

Daher gilt

$$\omega_c(\exp_{\otimes} A) = \log(\omega(e^A)) .$$

(Wir haben dabei benutzt, dass $m(\exp_{\otimes} A) = e^A$ gilt.)

Bei diesen Formeln ist zu beachten, dass über die Konvergenz der auftretenden Reihen nichts gesagt wird. Stattdessen werden sie im Sinne formaler Potenzreihen in A interpretiert.

Für die charakteristische Funktion des Wahrscheinlichkeitsmaßes der wechselwirkenden Theorie ergibt sich damit

$$\chi(f) = \frac{\mu_0(e^{i\varphi(f)} e^{-fV})}{\mu_0(e^{-fV})} = e^{(\mu_0)_c((\exp_{\otimes} i\varphi(f) - 1) \exp_{\otimes}(-fV))} .$$

Setzen wir $V = (g/4!) : \varphi^4 :$, so erhalten wir für die zusammenhängenden Korrelationsfunktionen die folgende Entwicklung nach Graphen,

$$\mu_c(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-g)^k}{k!} \int d^{4k}(x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) \sum_{G \in \mathcal{G}_c(n \times 1, k \times 4)} \prod_{1 \leq i < j \leq n+k} \frac{S_2(x_i - x_j)^{l_{ij}}}{l_{ij}!}. \quad (\text{IV.5})$$

In dieser Entwicklung nennen wir die ersten n Vertizes, über die nicht integriert wird, äußere Vertizes, und die anderen innere Vertizes.

Praktisch dieselbe Formel gilt für die zusammenhängenden zeitgeordneten Funktionen der φ^4 -Theorie. Man ersetzt lediglich $-g$ durch ig und S_2 durch $i\Delta_F$. Aus diesen kann man dann nach den LSZ-Relationen die zusammenhängenden S-Matrix-Elemente bestimmen.

Es gibt noch eine andere Formel, mit der sich die zusammenhängende n -Punkt-Funktion berechnen lässt. Für die 2-Punkt-Funktion gilt

$$\omega_c(A_1, A_2) = \frac{1}{2}(\omega \otimes \omega)(\tilde{A}_1 \tilde{A}_2)$$

mit $\tilde{A} = A \otimes 1 - 1 \otimes A$, wobei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ als Algebra aufgefasst wird mit dem Produkt

$$(A_1 \otimes A_2)(B_1 \otimes B_2) = A_1 B_1 \otimes A_2 B_2.$$

Entsprechend findet man für die n -Punkt-Funktion

$$\omega_c(A_1, \dots, A_n) = \frac{1}{n} \omega^{\otimes n}(\tilde{A}_1 \cdots \tilde{A}_n) \quad (\text{IV.6})$$

mit

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^n e^{2\pi i(k-1)/n} 1 \otimes \cdots \underset{k\text{-te Stelle}}{A} \otimes \cdots 1. \quad (\text{IV.7})$$

Diese Formel ist vor allem dann nützlich, wenn man Positivitätseigenschaften von ω verwenden will (ω_c ist i.a. kein positives Funktional). Ist z.B. ω ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ , so kann $(\omega_c)_n$ mit Hilfe des Produktmaßes $\mu \times \cdots \times \mu$ berechnet werden.

6. Einteilchenirreduzible Funktionen (Vertexfunktionen)

Die Korrelationsfunktionen einer translationsinvarianten Theorie hängen nur von den relativen Koordinaten ab. Dies führt zu einer weiteren Faktorisierungseigenschaft. Sei G ein Graph, der aus zwei Untergraphen G_1 und G_2 besteht, die durch eine Linie l_0 miteinander verbunden sind. Seien S_{G_1} und S_{G_2} die jeweiligen Beiträge zur Schwingerfunktion. Dann gilt

$$S_G(x_i, i \in V(G)) = S_{G_1}(x_i, i \in V(G_1)) S_2(x_j, j \in \partial l_0) S_{G_2}(x_i, i \in V(G_2)).$$

Diese Formel bleibt sinnvoll, auch wenn die Faktoren Distributionen sind. Denn seien v_1, v_2 die Endpunkte der Linie l_0 in den Graphen G_1 ,

bzw. G_2 . Dann hängen wegen der angenommenen Translationsinvarianz S_{G_1} nur von den Relativkoordinaten $y_i = x_i - x_{v_1}$, $i \in V(G_1) \setminus \{v_1\}$ und S_{G_2} nur von den Relativkoordinaten $y_i = x_i - x_{v_2}$, $i \in V(G_2) \setminus \{v_2\}$ ab. Zusammen mit $y_{l_0} = x_{v_1} - x_{v_2}$ erhält man ein System unabhängiger Relativkoordinaten, und man erkennt, dass das obige Produkt ein Tensorprodukt ist.

Wir zerlegen daher zusammenhängende Graphen nach sogenannten einteilchenirreduziblen (1PI) (besser: einlinienirreduziblen) Untergraphen. Hierbei heißt ein zusammenhängender Graph 1PI, wenn er nicht durch Weglassen einer Linie in Zusammenhangskomponenten zerfällt.

Zur Durchführung dieser Zerlegung führen wir zunächst eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Vertizes ein. Wir nennen die Vertizes i und j des Graphen G stark verbunden, wenn sie in jedem durch Weglassen einer Linie aus G entstandenen Graphen durch einen Weg verbunden sind. Jede Äquivalenzklasse stark verbundener Vertizes bildet zusammen mit ihren inneren Linien einen maximalen 1PI-Untergraphen. Zieht man die maximalen 1PI-Untergraphen zu einem Vertex zusammen, so bleibt ein Baumgraph („tree“) (d.h. ein Graph ohne Schleifen („loops“)) übrig.

Wir nehmen im folgenden an, dass der Beitrag aller Graphen mit einem äußeren Vertex verschwindet. Dies bedeutet, dass die Einpunkt-Funktion Null ist. Wir können daher die 1PI-Graphen mit einer äußeren Linie weglassen.

Im Fall, dass nur zwei äußere Vertizes vorkommen (dies sind die Graphen, die zur Zwei-Punkt-Funktion beitragen), besitzt der sich ergebende Baumgraph dann keine Verzweigungen, und an den Vertizes der Ordnung 2 sitzen 1PI-Untergraphen, die durch 2 Linien mit dem übrigen Graph verbunden sind. Wir integrieren jetzt über alle Vertizes eines solchen 1PI-Graphen, an denen keine äußere Linie ansetzt, und summieren über die Beiträge aller 1PI-Graphen mit 2 äußeren Linien. Wir erhalten eine Funktion $\Sigma(x, y)$ (im Fall, dass die äußeren Linien am selben Vertex ankommen, multiplizieren wir den entstehenden Beitrag mit $\delta(x - y)$). Die störungstheoretische Formel für die zusammenhängende Zwei-Punkt-Funktion G_2 der wechselwirkenden Theorie lautet nun

$$G_2(x, y) = S_2(x - y) + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^{4n} z S_2(x - z_1) \Sigma(z_1, z_2) S_2(z_2 - z_3) \cdots \Sigma(z_{n-1}, z_n) S_2(z_n - y) . \quad (\text{IV.8})$$

Wir betrachten jetzt die Funktionen G_2 , Σ und S_2 als Integralkerne von Operatoren in $L^2(\mathbb{R}^4)$. Dann lautet die Entwicklung in Gleichung

(IV.8)

$$G_2 = \sum_{n=0}^{\infty} S_2(\Sigma S_2)^n .$$

Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit dem Limes

$$G_2 = (-\Delta + m^2 - \Sigma)^{-1} .$$

Man nennt Σ den Selbstenergieanteil (m^2 wird durch $m^2 - \Sigma$ ersetzt).

Sei entsprechend $\Gamma_n(x_1, \dots, x_n)$ die Summe aller Beiträge von 1PI-Graphen mit n äußeren Linien, $n > 2$. Man nennt Γ_n die n -Punkt-Vertex-Funktion. Man kann jetzt alle zusammenhängenden n -Punkt-Funktionen G_n (auch Greensche Funktionen genannt) durch die Vertex-Funktionen und die zusammenhängende 2-Punkt-Funktion ausdrücken. Sei \mathcal{T}_n die Menge der Baumgraphen T , die n Randvertizes $1, \dots, n$ und eine beliebige (endliche) Anzahl von inneren Vertizes $v \in V_i(T)$ mit $n_v > 2$ anstoßenden Linien haben. Da die Zahl der Linien eines Baumgraphen um 1 kleiner ist als die Zahl seiner Linien $l \in K(T)$, jede Linie aber zwei Vertizes verbindet, ergibt sich die Gleichung

$$2\sharp(K(T)) = n + \sum_{v \in V_i(T)} n_v = 2(n + \sharp(V_i(T)) - 1) ,$$

also

$$\sum_v (n_v - 2) = n - 2 .$$

Jeder innere Vertex v wird durch n_v Hilfs-Vertizes $v_i, i = 1, \dots, n_v$ ersetzt. Wir schreiben $y_v = (y_{v_1}, \dots, y_{v_{n_v}})$ und $y_{\partial l} = (y_i, i \in \partial l)$. Dann gilt

$$G_n = \sum_{T \in \mathcal{T}_n} G_T$$

mit

$$G_T(y_1, \dots, y_n) = \int \prod_{v \in V_i(T)} (d^{4n_v} y_v \Gamma_{n_v}(y_v)) \prod_{l \in K(T)} G_2(y_{\partial l}) . \quad (\text{IV.9})$$

Auch die Vertex-Funktionen lassen sich unabhängig von der ursprünglichen Entwicklung nach Graphen definieren. Dabei setzen wir $\Gamma_2 = -G_2^{-1}$ (im Sinne von Operatoren), $\Gamma_1 = 0$ (wir beschränken uns auf den Fall, dass $G_1 = 0$ gilt) und $\Gamma_0 = 0$.

Wir betrachten zunächst ein scheinbar völlig anderes Problem. Sei $\phi(x; j)$ der Erwartungswert des Feldes $\varphi(x)$ unter Einschaltung eines zusätzlichen Wechselwirkungsterm $-\varphi(j) = -\int d^4x \varphi(x) j(x)$ mit einer Testfunktion j ,

$$\phi(x; j) = \mu_j(\varphi(x)) = \frac{\mu(\varphi(x) e^{\varphi(j)})}{\mu(e^{\varphi(j)})} = \frac{\delta}{\delta j(x)} G(j)$$

mit der erzeugenden Funktion der zusammenhängenden Funktionen $G(j) = \log \mu(\epsilon^{\varphi(j)})$,

$$G(j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} G_n(j^{\otimes n}) .$$

Wir suchen jetzt die sogenannte effektive Wirkung, d.h. ein Funktional Γ auf dem Raum der klassischen Feldkonfigurationen, das ϕ als stationären Punkt besitzt. Wir setzen

$$\Gamma(\phi) = \sup_j (\phi(j) - G(j)) .$$

Falls das Supremum angenommen wird und G dort differenzierbar ist, liegt es bei $\phi = \frac{\delta G}{\delta j}$. Γ ist die Legendre-Transformierte von G . Umgekehrt ist

$$G(j) = \sup_{\phi} (\phi(j) - \Gamma(\phi)) .$$

die Legendre-Transformierte von Γ (falls G konvex ist). Das Supremum liegt bei $j = \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi}$. Man erkennt, dass $\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi} : \phi \rightarrow j$ die Umkehrabbildung von $\frac{\delta G}{\delta j} : j \rightarrow \phi$ ist.

Das Inverse einer Potenzreihe in einer Variable ist die sogenannte Bürmann-Lagrange-Reihe. Hier haben wir eine unendlich dimensionale Version dieser Formel zu finden. Wir zeigen, dass die Vertexfunktionen Γ_n bis auf ein Vorzeichen die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von Γ sind.

Sei

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \phi) = \frac{\delta^n \Gamma(\phi)}{\delta \phi(x_1) \cdots \delta \phi(x_n)}$$

und

$$G_n(x_1, \dots, x_n; j) = \frac{\delta^n G(j)}{\delta j(x_1) \cdots \delta j(x_n)} .$$

Aus $\phi(x) = G_1(x, j)$ folgt

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta j(y)} = G_2(x, y; j) .$$

Also ergibt sich aus der Kettenregel

$$\frac{\delta \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \phi(j))}{\delta j(y)} = \int dx_{n+1} \Gamma^{(n+1)}(x_1, \dots, x_{n+1}; \phi(j)) G_2(x_{n+1}, y; j) .$$

Damit findet man

$$\delta(x - y) = \frac{\delta j(x)}{\delta j(y)} = \int dz \Gamma^{(2)}(x, z; \phi(j)) G_2(z, y; j) .$$

Als Integralkern ist $\Gamma^{(2)}$ also das Inverse von G_2 .

Wir differenzieren diese Gleichung jetzt nach j und erhalten

$$0 = \int dz (dz' \Gamma^{(3)}(x, z, z'; \phi(j)) G_2(z, y; j) G_2(z', y'; j) + \Gamma^{(2)}(x, z; \phi(j)) G_3(x, y, y'; j)) .$$

Auflösung nach G_3 liefert

$$G_3(y, y', y''; j) = - \int dz dz' dz'' G_2(y, z; j) G_2(y', z'; j) G_2(y'', z''; j) \Gamma^{(3)}(z, z', z''; \phi(j)) .$$

Dies ist gerade die Formel für die Entwicklung von G_3 nach 1PI-Funktionen, wenn man $\Gamma_3 = -\Gamma^{(3)}$ setzt.

Wir nehmen jetzt an, dass die Formel IV.9 mit $\Gamma_n = -\Gamma^{(n)}$ bis zur Ordnung n gilt, und differenzieren sie nach j .

Wir erhalten

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x; j) = \\ \sum_T \left(\int \prod_v dy_v \left(\prod_v \Gamma_{n_v}(y_v; \phi(j)) \sum_l G_3(y_{\partial l}, x; j) \prod_{l' \neq l} G_2(y_{\partial l'}; j) + \right. \right. \\ \left. \left. \int dz \sum_v \Gamma_{n_v+1}(y_v, z; \phi(j)) G_2(z, x; j) \prod_{v' \neq v} \Gamma_{n_{v'}}(y_{n_{v'}}; \phi(j)) \prod_l G_2(y_{\partial l}; j) \right) \right) . \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt die Darstellung von G_3 durch Γ_3 und G_2 ein, so folgt die Behauptung aus der Tatsache, dass jeder Baumgraph mit Randpunkten $1, \dots, n+1$ und inneren Vertizes der Ordnung größer als 2 aus einem mit Randpunkten $1, \dots, n$ dadurch hervorgeht, dass der Punkt $n+1$ entweder mit einer Linie (dabei entsteht ein neuer 3-er Vertex, dies entspricht der ersten Summe in der obigen Formel) oder mit einem inneren Vertex verbunden wird (2. Teil der Summe).

Ein Nebenergebnis der abgeleiteten Beziehung ist, dass eine bis auf Vorzeichen gleiche Entwicklung der Vertexfunktionen nach zusammenhängenden Funktionen existiert. (Man ersetzt G_n durch $-\Gamma_n$ und Γ_n durch $-G_n$.)

Die obigen Beziehungen gelten unabhängig davon, ob die Theorie translationsinvariant ist. Falls die zusammenhängenden Funktionen aber nur von den Relativkoordinaten abhängen, bietet sich eine Impulsraumdarstellung an. Es gilt dann für die Fourier-transformierten n -Punktfunktionen die Darstellung

$$\hat{G}_n(p_1, \dots, p_n) = \delta(\sum p_i) g_n(p_1, \dots, p_n)$$

und

$$\hat{\Gamma}_n(p_1, \dots, p_n) = \delta(\sum p_i) \gamma_n(p_1, \dots, p_n) ,$$

wobei g_n und γ_n nur auf der Hyperfläche $\sum p_i = 0$ definiert sind. Setzt man diese Ausdrücke in Gleichung (IV.9) ein, so können wegen der δ -Funktionen alle Integrationen ausgeführt werden. Es bleiben lediglich die äußeren Impulse an den Randvertizes mit der Bedingung $\sum p_i = 0$

zurück. Alle Impulse an den inneren Vertizes sind durch die Randimpulse eindeutig festgelegt. Wir erhalten

$$g_n(p_1, \dots, p_n) = \sum_T \prod_l g_2(p_{\partial l}) \prod_v \gamma_{n_v}(p_v). \quad (\text{IV.10})$$

Wenden wir jetzt die LSZ-Relationen zur Berechnung der S-Matrix an, so müssen wir zunächst beachten, dass der Beitrag der Selbstenergie $\hat{\Sigma}(p, q) = \delta(p + q)\sigma(p)$ die Masse des Teilchens verschieben kann. Sind die Greenschen Funktionen Lorentz-invariant, so ist σ eine Funktion von p^2 . Ist $p^2 = M^2$ eine einfache Nullstelle von $p^2 - m^2 - \sigma(p) = 0$, so interpretieren wir M als die Masse des wechselwirkenden Teilchens. Nach den LSZ-Relationen erhalten wir die S-Matrix-Elemente, indem wir die Fourier-transformierten Greenschen Funktionen mit $p_i^2 - M^2$ für jeden äußeren Vertex multiplizieren und anschließend die äußeren Impulse auf die Massenschale $p_i^2 = M^2$ setzen. Auf der Massenschale gilt

$$(p^2 - M^2)g_2(p, -p) = \text{const.}$$

Der Beitrag der zusammenhängenden Funktion zur S-Matrix berechnet sich also (bis auf einen Normierungsfaktor) aus der Entwicklung (IV.10) nach den Vertexfunktionen, wobei alle äußeren Linien weggelassen werden („Amputation der äußeren Beine“).

Literaturverzeichnis

- [1] L. Streit, Nuovo Cimento **62A**, 673 (1969)