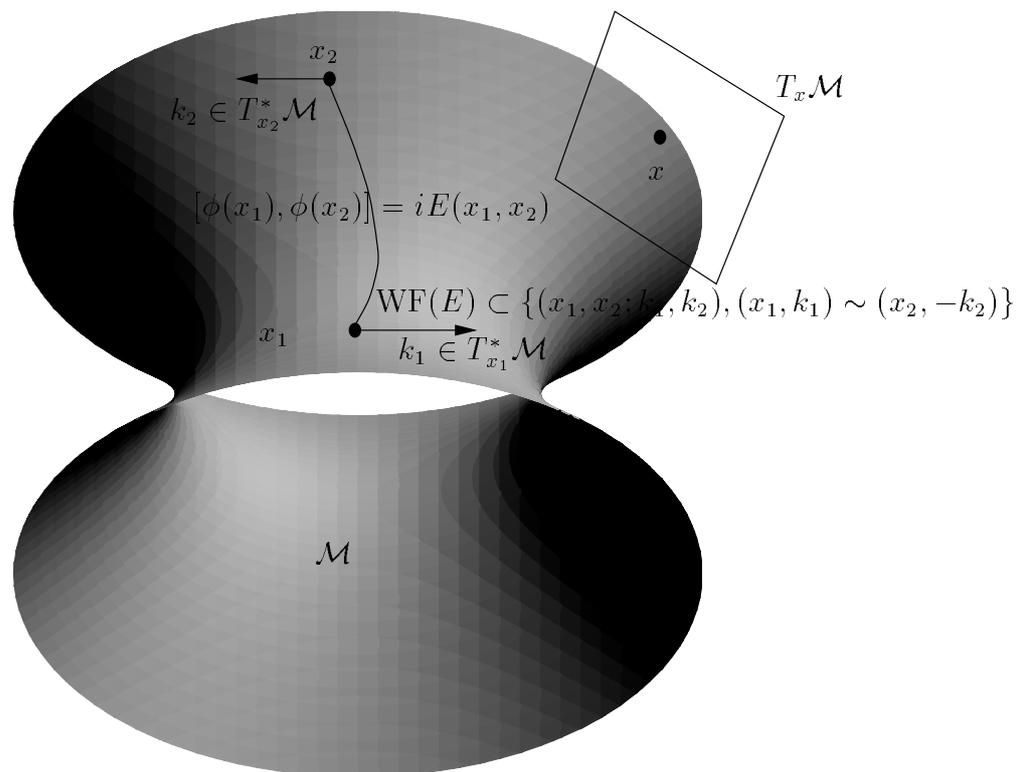


Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit

Sommersemester 1999

KLAUS FREDENHAGEN

II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg



Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung	5
Kapitel 2. Die mathematische Struktur der Raumzeit in der Allgemeinen Relativitätstheorie	9
Kapitel 3. Freie Quantenfelder; der Hawkingeffekt	23
Kapitel 4. Hadamard-Zustände und Wellenfrontmengen	41
Kapitel 5. Wickpolynome, Renormierung und wechselwirkende Felder	51
Literaturverzeichnis	67
Kapitel 6. Lösungen der Aufgaben	69

KAPITEL 1

Einleitung

Die Gravitation ist die einzige Wechselwirkung, die bis heute nicht mit den Prinzipien der Quantenphysik vereinbar ist. Für alle anderen Wechselwirkungen steht mit dem Rahmen der Quantenfeldtheorie ein im Prinzip konsistentes theoretisches Modell zur Verfügung, das experimentell gut getestet ist. Zwar gibt es auch im Rahmen der Quantenfeldtheorie sehr ernste ungelöste Grundlagenprobleme, wie etwa das Problem der Existenz nichttrivialer Theorien, aber die Probleme bei einer Quantenphysik der Gravitation sind deutlich schwerer. Man kann 3 hauptsächliche Schwierigkeiten benennen:

- Quanteneffekte der Gravitation sind experimentell nicht nachgewiesen worden. Dies ist konsistent mit den Größenordnungen: Setzt man $c = \hbar = 1$, so ist die Gravitationskonstante

$$G = (1,6 \cdot 10^{-33} \text{ cm})^2 \quad . \quad (1.1)$$

Die kleinsten Abstände, die in der heutigen Elementarteilchenphysik getestet werden, liegen in der Größenordnung von 10^{-17} cm . Bei diesen Abständen ist die Gravitationswechselwirkung der bekannten Elementarteilchen untereinander praktisch nicht meßbar. Durchaus meßbar ist aber die Wirkung eines „äußeren“ Gravitationsfeldes, d.h. die Wirkung des Gravitationsfeldes eines makroskopischen Körpers auf ein Elementarteilchen.

- Im Gegensatz zu allen anderen bekannten fundamentalen Wechselwirkungen ist die Kopplungskonstante der Gravitation dimensionsbehaftet (nachdem $c = \hbar = 1$ gesetzt worden ist). In der relativistischen Quantenfeldtheorie muß man neben den realen Prozessen auch alle sogenannten virtuellen Prozesse mitberücksichtigen. Bei diesen können beliebig kleine Abstände auftreten. Während bei der Elektrodynamik die Stärke der Wechselwirkung nahezu unabhängig von der Skala ist, wird die Gravitation bei kleinen Abständen sehr stark, so dass eine konsistente Übertragung des üblichen quantenfeldtheoretischen Programms bis heute nicht möglich war.
- Die Gravitation, in der Form der Allgemeinen Relativitätstheorie, ist eine Theorie der Raumzeit. Zu ihrer Interpretation werden klassische Begriffe verwandt, insbesondere Bahnkurven von Teilchen. In der Quantenfeldtheorie, auf der anderen Seite, spielt die vorgegebene Raumzeit eine wesentliche Rolle sowohl in der Formulierung der Theorie als auch in ihrer Interpretation.

Seit einigen Jahren gibt es intensive Anstrengungen, zu einer Quantentheorie der Gravitation zu gelangen. Am bekanntesten ist die Stringtheorie, eine Theorie, bei der elementare Fäden miteinander wechselwirken und die im Niederenergiebereich sowohl die übliche Quantenfeldtheorie als auch die Relativitätstheorie enthalten soll. Ein anderer Zugang beruht auf der kanonischen Quantisierung der klassischen Gravitation. Hierbei kommt es auf die geschickte Wahl der kanonischen Variablen an. Am aussichtsreichsten erscheinen die sogenannten Ashtekarvariablen, in denen die Gravitation die Struktur einer Eichtheorie erhält, die den erfolgreichen Eichtheorien für die anderen Wechselwirkungen sehr ähnlich ist.

In dieser Vorlesung will ich nicht näher auf diese interessanten Ansätze eingehen. Stattdessen will ich mich auf die Approximation beschränken, daß die Gravitation dadurch berücksichtigt wird, daß die Quantenfelder in einer vorgegebenen gekrümmten Raumzeit leben. Diese Approximation sollte für den größten Teil der uns heute und in näherer Zukunft möglichen Experimente ausreichend sein. Sie hat den großen Vorteil, daß man mit wohlverstandenen Konzepten arbeiten kann. Sie ist aber alles andere als trivial. Dabei stellt sich heraus, daß das Hauptproblem die fehlende Translationsinvarianz ist. Die entwickelten Methoden sollten daher auch in anderen Anwendungen der Quantenfeldtheorie, etwa in der Festkörperphysik, von Interesse sein.

Der Plan der Vorlesung ist wie folgt: zunächst sollen Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie besprochen werden. Insbesondere sollen differentialgeometrische Begriffe wie Metrik, Paralleltransport und Krümmung eingeführt und an Beispielen aus der Relativitätstheorie erläutert werden. Danach sollen Quantenfelder, die sich unter dem Einfluß eines vorgegebenen Gravitationsfeldes entwickeln, studiert werden. Hierbei treten interessante neue Phänomene auf. Das prominenteste Beispiel dafür ist die Hawking-Strahlung schwarzer Löcher. An diesem Beispiel zeigt sich, daß es eine ausgezeichnete Klasse physikalischer Zustände gibt, die sogenannten Hadamardzustände, die dadurch gekennzeichnet sind, dass sie im kleinen wie das Vakuum aussehen. Vor einigen Jahren ist es Marek Radzikowski gelungen, diese Eigenschaft in einfacher Weise mathematisch zu formulieren, mit Hilfe der sogenannten Wellenfrontmengen. Dieser Begriff stammt aus der mikrolokalen Analysis, mit deren Hilfe man erfolgreich eine qualitative Theorie partieller Differentialgleichungen entwickelt hat. Ich werde eine kurze Einführung in diese mathematische Theorie geben.

Der zweite Teil der Vorlesung baut auf diesen Voraussetzungen auf. Es zeigt sich, daß sich viele Methoden aus der Quantenfeldtheorie unter Verwendung der mikrolokalen Analysis auf gekrümmte Raumzeiten übertragen lassen. So konnten damit erstmals andere als freie Felder auf gekrümmten Raumzeiten betrachtet werden. Wir werden zunächst die sogenannten Wickpolynome freier Felder konstruieren, danach werden wir die bei der Einführung wechselwirkender Felder erforderliche Renormierung besprechen. Am Ende steht die störungstheoretische Konstruktion wechselwirkender Felder.

Die Vorlesung baut auf den Vorlesungen Elektrodynamik und Quantenmechanik I auf. Kenntnisse aus der Relativitätstheorie und der Quantenfeldtheorie werden nicht vorausgesetzt. Tatsächlich eignet sich der übliche Begriffsapparat der Quantenfeldtheorie nicht gut für eine Übertragung auf gekrümmte Raumzeiten, da der Formalismus sehr stark von der Translationsinvarianz Gebrauch macht. Besser geeignet ist die algebraische Formulierung der Quantenfeldtheorie, wie man sie im Buch von Haag „Local Quantum Physics“ findet. Zum Thema der Vorlesung gibt es 3 Monographien: Birrell and Davies, Fulling, Wald. Insbesondere das Buch von Wald stellt eine gute Referenz für den ersten Teil der Vorlesung dar. Für den zweiten Teil der Vorlesung muß auf Originalliteratur verwiesen werden, insbesondere auf die gerade erschienene Arbeit von R. Brunetti und mir, „Microlocal analysis and interacting quantum field theories: renormalization on physical backgrounds“.

KAPITEL 2

Die mathematische Struktur der Raumzeit in der Allgemeinen Relativitätstheorie

Nach der klassischen Mechanik bewegt sich ein Massenpunkt unter dem Einfluss eines Gravitationspotentials $V(\mathbf{x})$ so, dass die Wirkung

$$S = \int_0^t dt' \left(\frac{1}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 - V(\mathbf{x}) \right) \quad (2.1)$$

minimal wird, bei festgehaltenem Anfangspunkt $\mathbf{x}(0)$ und Endpunkt $\mathbf{x}(t)$ (Prinzip der kleinsten Wirkung). Charakteristisch für die Gravitation ist, dass die Bewegung unabhängig von der Masse des Teilchens ist (Gleichheit von träger und schwerer Masse). Nach Einstein läßt sich das Prinzip der kleinsten Wirkung für die Bewegung im Gravitationsfeld geometrisch interpretieren. Dazu versieht man die Raumzeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ mit einer Metrik

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad . \quad (2.2)$$

In Abwesenheit von Gravitationsfeldern ist

$$g = \eta := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.3)$$

Hierbei sind x^1, x^2, x^3 räumliche kartesische Koordinaten, und die Metrik g ist auf den Hyperflächen $\{t\} \times \mathbb{R}^3$ das Negative der euklidischen Metrik. Die Koordinate x^0 beschreibt die Zeit. \mathbb{R}^4 , als affiner Raum, mit der Metrik $g = \eta$ heißt Minkowskiraum (Notation \mathbb{M}).

Gravitationsfelder werden nach Einstein durch eine Metrik $g \neq \eta$ beschrieben, die ebenfalls die Signatur $(+ - - -)$ besitzt. Bahnen physikalischer Teilchen $x(t)$ haben einen Tangentenvektor $\dot{x}(t)$, der zeit- oder lichtartig,

$$g(\dot{x}, \dot{x}) = \sum g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \geq 0 \quad , \quad (2.4)$$

und zukunftsgerichtet ist

$$\frac{dx^0}{dt} > 0 \quad . \quad (2.5)$$

$d\tau = \sqrt{g(\dot{x}, \dot{x})} dt$ interpretiert man als die Eigenzeit des Teilchens.

Setzt man jetzt $g_{00} = 1 + 2V$, wobei V so gewählt wird, dass es bei ∞ verschwindet, während alle anderen Komponenten von g ihre Minkowskiraumwerte behalten, so ist die Bahn maximaler Eigenzeit von a nach b durch das Maximum des Funktionals

$$\tau = \int_{a^0}^{b^0} dt \sqrt{1 + 2V - |\dot{\mathbf{x}}|^2} \quad (2.6)$$

gegeben, wobei über alle Bahnen der Form $x(t) = (t, \mathbf{x}(t))$ mit $\mathbf{x}(a^0) = \mathbf{a}$, $\mathbf{x}(b^0) = \mathbf{b}$ und $|\dot{\mathbf{x}}|^2 < 1 + 2V$ variiert wird. Für kleine Geschwindigkeiten und Potentiale gilt

$$\sqrt{1 + 2V - |\dot{\mathbf{x}}|^2} \approx 1 + V - \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 \quad , \quad (2.7)$$

die Bahnen maximaler Eigenzeit gehen in diesem Grenzfall also in die Bahnen minimaler Wirkung über.

Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie ist ein rotationssymmetrisches Gravitationsfeld ausserhalb der Massenverteilung durch die Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.8)$$

gegeben, wobei m als die Gesamtmasse interpretiert wird. Ist der Radius der Massenverteilung kleiner als der Schwarzschildradius $2m$, so wird die Metrik bei $r = 2m$ als Funktion von r singulär. Betrachten wir nun die räumliche Hyperfläche $t = 0$. Eine radiale Kurve vom Punkt $r = R$ zum Punkt $r = 2m$ hat die Länge

$$s = \int_{2m}^R dr \left(\sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \right)^{-1} = \sqrt{R(R-2m)} + m \ln \left(\frac{1}{m} (R - m + \sqrt{R(R-2m)}) \right) \quad . \quad (2.9)$$

Der Schwarzschildradius befindet sich also in endlichem räumlichen Abstand. Führen wir eine neue Koordinate $u = \sqrt{r - 2m}$ ein, so erhalten wir für die Metrik

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + 2m} dt^2 - (u^2 + 2m) 4du^2 - (u^2 + 2m)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad . \quad (2.10)$$

Wenn wir jetzt auch noch u durch $v = u\sqrt{8m}$ ersetzen, dann lassen sich die Hyperflächen $t = \text{const}$ mit der zu $v > 0$ gehörigen Teilmenge der folgenden schlauchförmigen Hyperfläche des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ identifizieren:

$$\mathcal{C} = \{(\mathbf{x}, v), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = \frac{v^2}{8m} + 2m\} \quad . \quad (2.11)$$

Der Schwarzschildradius entspricht $v = 0$. Dort besitzt \mathcal{C} seine dünnste Stelle, aber keine Singularität.

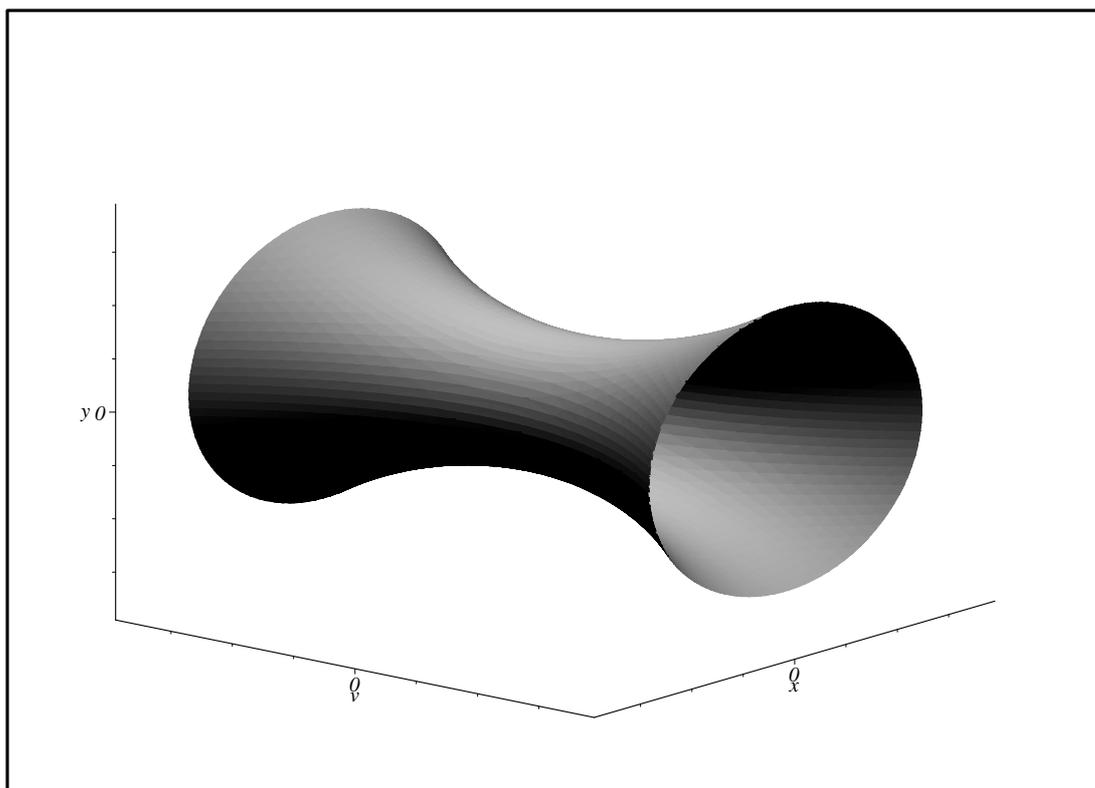


ABBILDUNG 1. Die Hyperflächen $t = \text{const}$. Wir unterdrücken die z -Komponente aus (2.11): $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{v^2}{8m} + 2m$. Die dünnste Stelle ($v=0$) misst den Schwarzschildradius $2m$.

Wir sehen an diesem Beispiel, dass es vorkommen kann, dass Singularitäten von der Wahl eines Koordinatensystems abhängen. Dieser Sachverhalt ist uns natürlich bereits von den Kugelkoordinaten wohlvertraut (Singularitäten bei $r = 0$ und bei $\theta = 0$).

Ein Grundprinzip der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die allgemeine Kovarianz, d.h. die Unabhängigkeit physikalischer Aussagen von der Wahl eines (zulässigen) Koordinatensystems. Hierbei sind alle Koordinatensysteme zulässig, die keine künstlichen Singularitäten erzeugen.

In modernen mathematischen Begriffen bedeutet das, dass die Raumzeit eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. In jedem genügend kleinen Gebiet lassen sich Koordinaten finden, durch die die Punkte der Raumzeit mit Elementen von \mathbb{R}^4 identifiziert werden. Die Wahl dieser Koordinaten ist aber in hohem Maße willkürlich.

Was ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit? Wir betrachten einen topologischen Raum \mathcal{M} , d.h. eine Menge \mathcal{M} , in der ein System von Teilmengen, das System der offenen Mengen, ausgezeichnet ist, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) \mathcal{M} und \emptyset sind offen.
- (ii) Die Vereinigung von offenen Mengen ist offen.
- (iii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Eine Umgebung \mathcal{V} eines Punktes $p \in \mathcal{M}$ ist eine Teilmenge von \mathcal{M} , für die es eine offene Menge \mathcal{O} gibt mit $p \in \mathcal{O} \subset \mathcal{V}$. Wir setzen jetzt voraus, dass je zwei verschiedene Punkte $p, q \in \mathcal{M}$ disjunkte Umgebungen besitzen. Einen topologischen Raum mit dieser Eigenschaft nennt man einen Hausdorffraum. Um Pathologien auszuschließen, wollen wir weiter annehmen, dass unser Raum parakompakt ist. Damit ist das folgende gemeint. Sei \mathbf{V} ein System offener Mengen, das \mathcal{M} überdeckt, d.h. jeder Punkt von \mathcal{M} liegt in mindestens einer Menge aus \mathbf{V} . Dann gibt es eine lokal endliche Verfeinerung von \mathbf{V} , d.h. ein System von offenen Mengen \mathbf{U} , das \mathcal{M} überdeckt, so dass jeder Punkt nur in endlich vielen Mengen aus \mathbf{U} liegt und so dass jede Menge aus \mathbf{U} in einer Menge aus \mathbf{V} enthalten ist.

Ein auf einer offenen Menge \mathcal{O} erklärtes Koordinatensystem (eine Karte) ist eine homöomorphe (d.h. bijektive und zusammen mit der Umkehrabbildung stetige) Abbildung φ von \mathcal{O} auf eine offene Menge $\varphi(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^d$. Zwei Karten φ_i auf offenen Mengen \mathcal{O}_i , $i = 1, 2$, heissen kompatibel, wenn $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \upharpoonright_{\varphi_2(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2)}$ nebst seiner Umkehrabbildung unendlich oft differenzierbar ist. Eine Überdeckung mit paarweise kompatiblen Karten nennt man einen Atlas.

Damit können wir jetzt eine differenzierbare Mannigfaltigkeit definieren als einen parakompakten Hausdorffraum mit einem Atlas. Die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist vollständig enthalten in der Algebra der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\mathcal{E}(\mathcal{M})$. Hierbei heisst eine Funktion f unendlich oft differenzierbar, wenn für alle Karten (φ, \mathcal{O}) die Funktionen $f \circ \varphi^{-1}$ unendlich oft differenzierbar sind.

Eine glatte Kurve ist eine stetige Abbildung γ eines Intervalls der reellen Achse in die Mannigfaltigkeit, so dass $f \circ \gamma$ für jede Funktion $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$ unendlich oft differenzierbar ist. Der Tangentenvektor $\dot{\gamma} = X$ an eine Kurve γ im Punkt $x = \gamma(t)$ kann mit dem Operator $X : \mathcal{E}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{C}$, $Xf = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t)$ identifiziert werden. Aufgrund der Produktregel besitzt X die Eigenschaft einer Derivation,

$$X(fg) = X(f)g(x) + f(x)X(g) \quad . \quad (2.12)$$

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass alle linearen Abbildungen $X : \mathcal{E}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{C}$, die Gleichung (2.12) erfüllen, als Tangentenvektoren von Kurven durch x auftreten.

Die Menge der Tangentenvektoren an einem Punkt x bildet einen Vektorraum, den Tangentialraum $T_x\mathcal{M}$. Tangentialräume an verschiedenen Punkten lassen sich in der Regel nicht miteinander identifizieren. Man bildet daher die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} \{x\} \times T_x\mathcal{M} \quad , \quad (2.13)$$

das sogenannte Tangentialbündel. Die Tangentialräume nennt man die Fasern des Bündels. Innerhalb einer Karte (φ, \mathcal{O}) bilden die partiellen Ableitungen $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

nach den Koordinaten x^μ eine Basis des Tangentialraums, $X = X^\mu \partial_\mu$. Dadurch erhält man eine bijektive Abbildung $\varphi_* : T\mathcal{O} \rightarrow \varphi(\mathcal{O}) \times \mathbb{R}^d$, die auf jeder Faser ein Isomorphismus des Tangentialraums in den \mathbb{R}^d ist. Das System dieser Abbildungen ist ein Atlas auf $T\mathcal{M}$, so dass ein Bündel wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Zu jedem Vektorraum V kann man den sogenannten Dualraum V^* bilden, das ist die Menge der linearen Funktionale $k : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation. Im endlichdimensionalen Fall ist der Dualraum isomorph zum ursprünglichen Raum. Da es aber in der Regel keinen ausgezeichneten Isomorphismus gibt, macht es Sinn, beide Räume zu unterscheiden. Den Dualraum des Tangentialraums nennt man den Kotangentialraum (Bezeichnung $T_x^*\mathcal{M}$), die disjunkte Vereinigung nennt man das Kotangentialbündel (Bezeichnung $T^*\mathcal{M}$). Beispiele für Kotangentialvektoren sind die Differentiale von Funktionen, $df(X) := Xf$. Innerhalb einer Karte (φ, \mathcal{O}) sind die Koordinaten x^μ (die Komponenten von φ) C^∞ -Funktionen. Für ihre Differentiale gilt:

$$dx^\mu(X) = X^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}(x^\mu) = X^\mu \quad (2.14)$$

Daraus folgt

$$df(X) = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu(X) \quad (2.15)$$

d.h. $f = \frac{\partial}{\partial x^\mu} f dx^\mu$. Die Differentiale der Koordinaten bilden also eine Basis des Kotangentialraums.

Die besprochenen differentialgeometrischen Begriffe treten z. B. in der Theoretischen Mechanik auf. So ist der Konfigurationsraum eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die durch verallgemeinerte Koordinaten q_i beschrieben wird. Geschwindigkeiten \dot{q} lassen sich als Tangentialvektoren interpretieren, und die Lagrangefunktion ist eine Funktion auf dem Tangentialbündel. Der Phasenraum wird mit dem Kotangentialbündel identifiziert, wobei die Abbildung $T\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$, $(q, \dot{q}) \mapsto (q, p)$ durch

$$p(v) = \frac{d}{d\varepsilon} L(q, \dot{q} + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0} \quad (2.16)$$

mit $v \in T_q M$ erklärt wird.

Eine Metrik g auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist gegeben durch eine nicht entartete symmetrische Bilinearform g_x auf jedem Tangentialraum $T_x(M)$, so dass g_x bezüglich x unendlich oft differenzierbar ist. Ist g_x positiv definit, so spricht man von einem Riemannschen Raum. In einem solchen Raum kann man den Abstand zweier Punkte durch das Infimum der Kurvenlängen

$$l = \int dt \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} \quad (2.17)$$

definieren, Dies gibt der Mannigfaltigkeit die Struktur eines metrischen Raums. Die Euler-Lagrange-Gleichungen dieses Variationsproblems sind die sogenannten Geodätengleichungen.

AUFGABE 2.1. Bestimme die Geodäten auf der Fläche $t^2 - x^2 - y^2 = 1$ im 3-dimensionalen Minkowskiraum.

Sei γ eine Geodäte, d.h. eine Kurve minimaler Länge zwischen hinreichend nahe beieinander liegenden Punkten. Da die Länge der Kurve unabhängig von der Parametrisierung ist, können wir die Weglänge als Parameter wählen, so dass $\sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} = 1$. Wir betrachten jetzt in einem Koordinatensystem die Kurven $x_h(t) = x(t) + h(t)$ mit $h(0) = h(l) = 0$, wobei $x(t)$ die gesuchte Geodäte ist. Wir erhalten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\rho} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad (2.18)$$

Aufgrund der Annahme über die Parametrisierung vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \quad (2.19)$$

mit den Christoffelsymbolen

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\rho\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\rho} g_{\nu\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\nu\rho} \right) \quad (2.20)$$

Die Christoffelsymbole definieren einen sogenannten Zusammenhang (englisch „connection“) auf dem Tangentialbündel, das heisst, sie liefern eine Möglichkeit, Tangentenvektoren an benachbarten Punkten miteinander zu vergleichen. Der oben angegebene Zusammenhang heisst Levi-Civita-Zusammenhang.

Allgemein ist ein Zusammenhang auf dem Tangentialbündel durch die Angabe einer kovarianten Ableitung ∇ festgelegt. Sei X ein glattes Vektorfeld, d.h. eine unendlich oft differenzierbare Abbildung von \mathcal{M} in das Tangentialbündel, so dass $X(x) \in T_x \mathcal{M}$ für alle $x \in \mathcal{M}$. Dann ist ∇X für jedes x eine lineare Abbildung des Tangentialraums am Punkt x . Es gilt die kovariante Produktregel mit $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$

$$(\nabla f X)(Y) = df(Y)X + f(\nabla X)(Y) \quad . \quad (2.21)$$

Man schreibt oft $\nabla X(Y) = \nabla_Y X$.

Der Levi-Civita-Zusammenhang ist eindeutig charakterisiert durch die Forderung, dass die Metrik kovariant konstant ist,

$$dg(X, Y)(Z) = g(\nabla X(Z), Y) + g(X, \nabla Y(Z)) \quad (2.22)$$

und durch die Bedingung der Torsionsfreiheit,

$$\nabla X(Y) - \nabla Y(X) + [X, Y] = 0 \quad . \quad (2.23)$$

Hierbei ist der Kommutator $[\cdot, \cdot] \in T_x \mathcal{M}$ wie folgt definiert:

$$[X, Y] := [X^\mu \partial_\mu, Y^\nu \partial_\nu] = X^\mu (\partial_\mu Y^\nu) \partial_\nu - Y^\nu (\partial_\nu X^\mu) \partial_\mu \quad . \quad (2.24)$$

Zum Beweis bilden wir die Kombination

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) &= \\ &\stackrel{(2.22)}{=} g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y X, Z) + \\ &\quad + g(X, \nabla_Y Z) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\ &\stackrel{(2.23)}{=} 2g((\nabla_X Y, Z) - g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) + g(X, [Y, Z])) \quad . \end{aligned}$$

Da Z beliebig und g nicht entartet ist, ist $\nabla_X Y$ eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt auch, wenn die Torsion nicht verschwindet. In Koordinaten ist

$$\nabla \partial_\mu (\partial_\nu) = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda \quad . \quad (2.25)$$

Torsionsfreiheit bedeutet Symmetrie der Christoffelsymbole in den beiden unteren Indizes.

Mit Hilfe eines Zusammenhangs kann man erklären, wie Tangentialvektoren entlang einer Kurve parallel transportiert werden sollen. Sei γ eine Kurve durch x und $X \in T_x \mathcal{M}$. Dann ist $X(\gamma(t))$ der Paralleltransport von X entlang von γ , falls es eine Lösung der Differentialgleichung

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X(\gamma(t)) = 0 \quad (2.26)$$

ist mit der Anfangsbedingung $X(x) = X$.

In der Raumzeit der Relativitätstheorie ist die Metrik nicht positiv definit, sondern hat die Signatur $(+ - - -)$. Solche Mannigfaltigkeiten nennt man oft Lorentzmannigfaltigkeiten. In ihnen gibt es zwar keinen Abstands begriff, aber der Levi-Civita-Zusammenhang ist wohldefiniert, und Geodäten sind durch die Geodätengleichung

$$\nabla_{\dot{\gamma}} (\dot{\gamma}) = 0 \quad (2.27)$$

bestimmt.

Der Tangentialraum an jedem Punkt ist isomorph zum Minkowskiraum, so dass Begriffe wie zeitartig ($g(X, X) > 0$), lichtartig ($g(X, X) = 0$) und raumartig ($g(X, X) < 0$) eingeführt werden können (s. Abbildung 2). Die Menge der zeitartigen Vektoren zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten. Wenn es ein Vektorfeld X gibt mit $g(X, X) = 1$ auf ganz \mathcal{M} , dann können wir die Zusammenhangskomponente von $X(x)$ den Vorwärtslichtkegel nennen. Lorentzmannigfaltigkeiten mit dieser Eigenschaft nennt man zeitorientierbar. Kurven, deren Tangentenvektor zeit- oder lichtartig sind, nennt man kausal. Kausalen Kurven kann man eine wohldefinierte

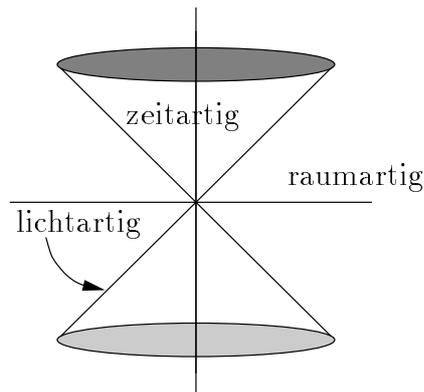


ABBILDUNG 2. Zeit-, licht- und raumartige Punkte, relativ zum Ursprung.

Länge zuordnen, die als Eigenzeit interpretiert wird. Zeitartige Geodäten sind kausale Kurven maximaler Eigenzeit innerhalb genügend kleiner offener Mengen.

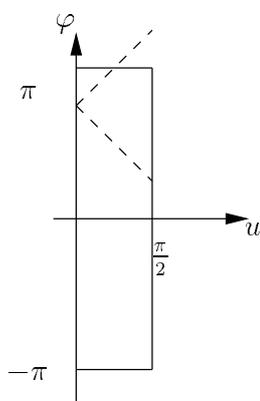


ABBILDUNG 3. Die Lichtstrahlen (gestr. Linie) treffen nicht die Cauchyfläche $\varphi = 0$.

Ein wichtiger Begriff für Lorentzmannigfaltigkeiten ist der einer Cauchyfläche. Darunter versteht man eine Untermannigfaltigkeit, deren Tangentialräume raumartig sind und die von jeder nicht verlängerbaren kausalen Kurve genau einmal getroffen wird. Im Minkowskiraum sind die Hyperbenen $t = \text{const}$ Beispiele für Cauchyflächen. Der Hyperboloid $x^2 = 1$ aber ist zwar raumartig, doch es gibt lichtartige Kurven, die ihn nicht schneiden; er ist also keine Cauchyfläche. Lorentzmannigfaltigkeiten mit einer Cauchyfläche nennt man global hyperbolisch. Sie sind diffeomorph zu $\mathbb{R} \times \Sigma$ mit Cauchyflächen $\{t\} \times \Sigma$. Ein berühmtes Beispiel für eine nicht global hyperbolische Raumzeit ist der Anti-de-Sitter-Raum. Diesen Raum kann man darstellen als die Hyperfläche $r^2 - \rho^2 = 1$ im $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ mit der Metrik

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 - (d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2)) \quad , \quad (2.28)$$

wobei wir im ersten Faktor Polarkoordinaten (r, φ) und im zweiten Faktor Kugelkoordinaten (ρ, θ, ψ) eingeführt haben. Wir setzen $\rho = \tan u$, $u \in (0, \frac{\pi}{2})$ und erhalten auf dem Anti-de-Sitter-Raum die Metrik

$$ds^2 = (1 + \tan^2 u)(d\varphi^2 - du^2) - \tan^2 u(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2) \quad . \quad (2.29)$$

Man erkennt, dass die Kurven $\varphi \pm u = \text{const}$, $\theta, \psi = \text{const}$, lichtartig sind, aber nicht alle die Fläche $\varphi = 0$ schneiden. Problem: Zeige, dass es keine Cauchyfläche gibt.

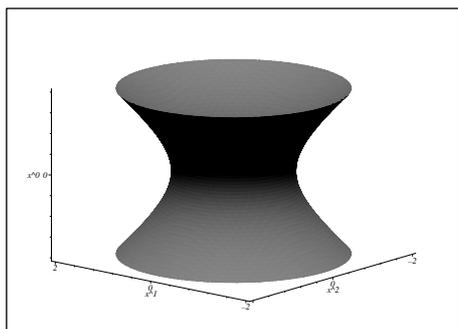


ABBILDUNG 4. De-Sitter-Raum in 3 kartesischen Koordinaten

Eine andere wichtige Raumzeit ist der de-Sitter-Raum. Er kann als die Hyperfläche $x^2 = -1$ im 5-dimensionalen Minkowskiraum dargestellt werden. Die Metrik ist

$$ds^2 = \frac{1}{1+t^2} dt^2 - (1+t^2) d\Omega^2 \quad (2.30)$$

mit der Metrik $d\Omega^2$ der 3-dimensionalen Sphäre S^3 . Wählt man als neue Zeitkoordinate $\tau = \arctan t$, so ergibt sich

$$ds^2 = (1 + \tan^2 \tau)(d\tau^2 - d\Omega^2) \quad (2.31)$$

Kurven der Form $(\tau, \gamma(\tau))$ mit einer Kurve γ auf S^3 mit $|\dot{\gamma}| \leq 1$ sind kausal. Man erkennt, dass alle Hyperflächen $\tau = \text{const}$ Cauchyflächen sind.

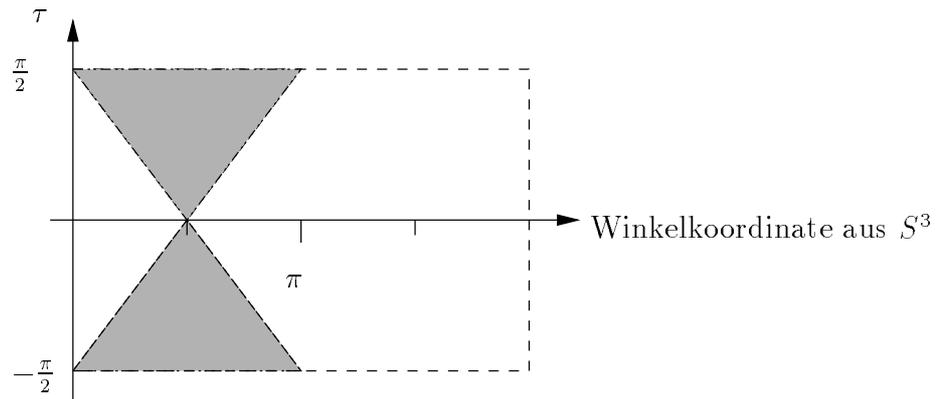


ABBILDUNG 5. Lichtkegel im de-Sitter-Raum. Offensichtlich existieren Teile des Universums, die nicht entdeckt werden können.

AUFGABE 2.2. Bestimme die zeitartigen Geodäten im de-Sitterraum.

Wenn man versucht, eine offene Teilmenge der Mannigfaltigkeit isometrisch auf eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^d mit konstanter Metrik abzubilden, gibt es eine Obstruktion, die von Karten der Erdoberfläche her wohlbekannt ist: die Krümmung. Sie wird durch den Riemannschen Krümmungstensor beschrieben. Dieser gibt den Kommutator zweier partieller kovarianter Ableitungen an. Setzen wir $\nabla_\mu X := \nabla X(\partial_\mu)$, so ist $R(\partial_\mu, \partial_\nu) = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$. $R(\partial_\mu, \partial_\nu)$ ist für jedes x eine lineare Abbildung des Tangentialraums $T_x\mathcal{M}$. Für zwei beliebige Vektorfelder X, Y gilt

$$R(X, Y) = X^\mu Y^\nu R(\partial_\mu, \partial_\nu) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} \quad . \quad (2.32)$$

Bezüglich der Metrik ist diese Abbildung antisymmetrisch,

$$g(R(\partial_\mu, \partial_\nu)X, Y) + g(X, R(\partial_\mu, \partial_\nu)Y) = 0 \quad , \quad (2.33)$$

gehört also zur Liealgebra der orthogonalen Gruppe zu g .

Wir wollen jetzt die Einsteinsche Idee, dass die Bewegung unter dem Einfluss eines Gravitationsfelds als Bewegung auf Geodäten aufgefasst werden kann, genauer untersuchen. Insbesondere interessiert uns der Zusammenhang zwischen der Verteilung der Massen und der Metrik der Raumzeit.

Betrachten wir zunächst die Newtonsche Gravitation. Ein Massenpunkt am Punkt \mathbf{x} ist einer von seiner Masse unabhängigen Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ausgesetzt. Das Gravitationsfeld \mathbf{g} erfüllt die Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = -4\pi\rho \quad (2.34)$$

mit der Massendichte ρ (wir haben die Gravitationskonstante gleich 1 gesetzt). Diese Gleichung lässt sich geometrisch interpretieren. Sei G ein Gebiet des \mathbb{R}^3 . Wir betrachten die Bewegung der Punkte von G unter der Differentialgleichung $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}$ mit der Anfangsgeschwindigkeit Null. Wir erhalten $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + O(t^3)$.

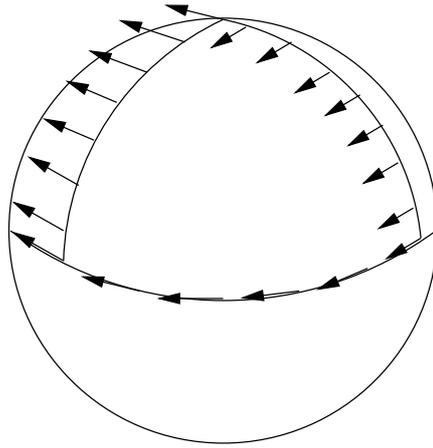


ABBILDUNG 6. Parallelverschiebung eines Vektors längs Geodäten auf der Kugel. Wir starten am Nordpol, verschieben längs des 90'ten Längengrades, dann längs des Äquators und längs des 0'ten Längengrades zurück. Die Drehung des Vektors ist eine Folge der Krümmung.

Das Volumen von G ändert sich unter dieser Transformation nach $\text{Vol}(G_t) = \text{Vol}(G) - \frac{1}{2}t^2 \int_G 4\pi\rho + O(t^3)$. Wir vergleichen jetzt diese Volumenänderung mit derjenigen, die bei einer Bewegung auf Geodäten auftritt. Sei γ_{x_0} eine Geodäte mit einem zukunftsgerichteten normierten Tangentenvektor V am Punkt x_0 . Die Geodäten am Punkt x_0 mit Tangentenvektoren Z , die senkrecht zu V gerichtet sind, spannen eine 3-dimensionale raumartige Fläche G auf. Wir setzen V auf dieser Fläche durch Paralleltransport entlang dieser Geodäten fort und betrachten die Geodäten γ_x , die durch den Punkt x gehen und dort den Tangentenvektor $V(x)$ besitzen. Wir wollen jetzt das (3-dimensionale) Volumen der Menge

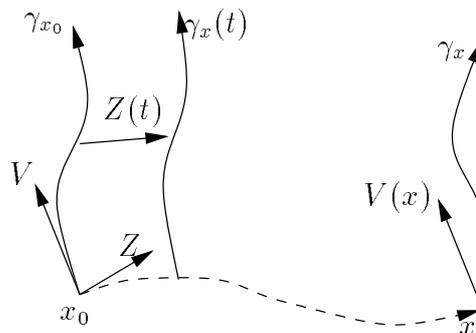


ABBILDUNG 7. Z ist orthogonal zu V , $V(x)$ Paralleltransport von V entlang der Geodäten durch x_0 mit Tangentenvektor Z . γ_x ist die Geodäte durch x mit Tangentenvektor $V(x)$.

$G_t = \{\gamma_x(t), x \in G\}$ untersuchen. Dazu betrachten wir eine infinitesimale Umgebung von x_0 , die durch $\{Z \in T_{x_0}\mathcal{M}, g(V, Z) = 0, |g(Z, Z)| < 1\}$ beschrieben

wird. Das in einer Umgebung von γ_{x_0} gegebene Vektorfeld V erzeugt eine 1-Parametergruppe von Diffeomorphismen, dadurch wird Z zu einem Vektorfeld auf γ_{x_0} . Es gilt $\nabla_Z(V)(x_0) = 0$, $[V, Z] = 0$. Weiter gilt

$$\nabla_V^2 Z = \nabla_V \nabla_Z V = [\nabla_V, \nabla_Z]V = R(V, Z)V \quad . \quad (2.35)$$

Diese Gleichung nennt man die Jacobi-Gleichung oder die Gleichung der geodätischen Deviation. Sie beschreibt, wie sich der Abstand zweier ursprünglich paralleler Geodäten verändert. Das Volumen ändert sich dann um den Faktor $1 - \frac{1}{2}t^2 R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + O(t^3)$ mit dem Riccitenor

$$R_{\mu\nu} = \langle dx^\lambda, R(\partial_\lambda, \partial_\mu)\partial_\nu \rangle \quad . \quad (2.36)$$

Vergleich mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz ergibt

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 4\pi\rho \quad , \quad (2.37)$$

wenn ρ die Energiedichte im Ruhssystem von γ ist. Um zu einer Gleichung zu gelangen, die unabhängig vom Bezugssystem ist, bietet es sich an, ρ als die Komponente des Energieimpulstensors

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu \quad (2.38)$$

in Richtung von V anzusehen. Hierbei ist V das Geschwindigkeitsfeld, und es wirken außer der Gravitation keine Kräfte zwischen den Massenpunkten („Staub“). Wegen

$$\rho = T_\mu{}^\mu = T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \quad (2.39)$$

legt Gleichung (2.37) die Beziehung zwischen Ricci-Tensor und Energieimpulstensor noch nicht fest. Doch der Energieimpulstensor ist kovariant erhalten,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (2.40)$$

während der Riccitenor die kovariante Divergenz

$$\nabla_\mu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla^\nu R \quad (2.41)$$

besitzt, mit der skalaren Krümmung $R = R_\mu{}^\mu$. Als einzige lineare Beziehung bleibt daher die Einsteingleichung

$$R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \quad (2.42)$$

mit $T = T_\mu{}^\mu$. Man kann zur Einstein-Gleichung noch einen inhomogenen Term $\Lambda g_{\mu\nu}$ hinzufügen. Dieser sogenannte kosmologische Term ist von Einstein eingeführt worden, um die Stabilitätseigenschaften seiner Gleichung zu verbessern. Aktuelle Messungen ergeben für Λ einen kleinen, aber von Null verschiedenen Wert.

Die einfachsten Raumzeiten sind diejenigen mit konstanter Krümmung. In ihnen gilt

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{12}R(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \quad . \quad (2.43)$$

Beispiele für Raumzeiten mit konstanter Krümmung sind der Minkowskiraum ($R = 0$), der Anti-de-Sitterraum ($R > 0$) und der de-Sitterraum ($R < 0$). Der Energieimpulstensor muss dort die Form haben

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{32\pi}Rg_{\mu\nu} \quad . \quad (2.44)$$

Für eine ideale Flüssigkeit gilt

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)V_\mu V_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (2.45)$$

mit der Energiedichte ρ und dem Druck p . Konstante Krümmung ist also nur möglich, wenn $\rho + p = 0$.

Relevanter für die Kosmologie sind Raumzeiten, in denen die räumlichen Schnitte konstante Krümmung haben. Sie sind von der Form $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$ mit einer Metrik

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 h_{ij} dx^i dx^j \quad , \quad (2.46)$$

wobei h eine Riemannsche (d.h. positiv definite) Metrik auf der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit Σ ist, so dass die Krümmung von Σ konstant ist. Man spricht von Robertson-Walker-Raumzeiten oder auch vom Friedmann-Universum. Beispiele für 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung sind die 3-Sphäre S^3 (Krümmungsskalar $k > 0$), der euklidische Raum \mathbb{R}^3 ($k = 0$) und der hyperbolische Raum $H^3 = \{x \in \mathbb{M}, x^2 = 1\}$ ($k < 0$). In geeigneten Koordinaten ist

$$h = \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad . \quad (2.47)$$

Für die Krümmung der Raumzeit findet man

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j)X &= \frac{k + \dot{a}^2}{a^2} (g(\partial_j, X)\partial_i - g(\partial_i, X)\partial_j) \\ R(\partial_0, \partial_i)X &= \frac{\ddot{a}}{a} (g(\partial_i, X)\partial_0 - g(\partial_0, X)\partial_i) \quad . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Daraus erhält man die Komponenten des Riccitorsors

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{0i} &= 0 \\ R_{ij} &= \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{k + \dot{a}^2}{a^2} \right) h_{ij} \end{aligned} \quad (2.49)$$

und den Krümmungsskalar $R = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k+\dot{a}^2}{a^2} \right)$. Die Einsteingleichungen lauten (mit $T_{00} = \rho$, $T_{0i} = 0$, $T_{ij} = ph_{ij}$)

$$\begin{aligned} -3\frac{\ddot{a}}{a} &= 4\pi(\rho + 3p) \\ \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{k + \dot{a}^2}{a^2} &= 4\pi(\rho - p) \end{aligned} \tag{2.50}$$

AUFGABE 2.3. Löse die Einsteingleichungen im Friedmann-Universum für Staub ($p = 0$) und für elektromagnetische Strahlung ($p = \frac{1}{3}\rho$).

KAPITEL 3

Freie Quantenfelder; der Hawkingeffekt

Wir betrachten ein skalares Feld auf einer global hyperbolischen Raumzeit, das die kovariante Klein-Gordon-Gleichung erfüllt,

$$(\square_g + m^2 - \kappa R)\varphi = 0 \quad , \quad (3.1)$$

mit dem kovarianten Wellenoperator

$$\square_g = |g|^{-\frac{1}{2}} \partial_\mu g^{\mu\nu} |g|^{\frac{1}{2}} \partial_\nu \quad , \quad (3.2)$$

($|g| = |\det g_{\mu\nu}|$). Auf einer global hyperbolischen Raumzeit ist das Cauchy-Problem für die Klein-Gordon-Gleichung eindeutig lösbar. Insbesondere gibt es zu jeder Testfunktion $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ ($\mathcal{D}(\mathcal{M})$ ist der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf \mathcal{M} mit kompaktem Träger) eindeutig bestimmte retardierte und avancierte Lösungen $E_{ret}f$ und $E_{av}f$ der inhomogenen Gleichung. $E_{ret/av}$ sind Operatoren von $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ nach $\mathcal{E}(\mathcal{M})$, die die Gleichungen

$$DE_{ret/av} = E_{ret/av}D = \text{id} \quad , \quad D := \square_g + m^2 - \kappa R \quad (3.3)$$

erfüllen. Ihre Integralkerne sind Distributionen auf $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{D}(\mathcal{M}) = \mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$ mit Träger in $\{(x, y), y \in J_\pm(x)\}$. Die Differenz ihrer Integralkerne $E(x, y)$ ist eine antisymmetrische Distribution, die in x und in y eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist (im Sinne von Distributionen). Einschränkungen von E und seinen Ableitungen auf $\Sigma \times \Sigma$ für eine Cauchyfläche Σ haben wegen der Trägereigenschaften von E Träger auf der Diagonalen $\Delta(\Sigma) = \{(x, x), x \in \Sigma\}$. Es gilt $E \upharpoonright_{\Delta(\Sigma)} = 0$, $\partial_{\Sigma, x} E = -\partial_{\Sigma, y} E = -\delta_\Sigma$ und $\partial_{\Sigma, x} \partial_{\Sigma, y} E \upharpoonright_{\Delta(\Sigma)} = 0$, wobei ∂_Σ das zukunftsgerichtete Normalenvektorfeld auf Σ und δ_Σ den Integralkern des Einheitsoperators auf $\mathcal{D}(\Sigma)$ bezeichnet, in Koordinaten $\partial_\Sigma = n^\mu \partial_\mu$, $\delta_\Sigma(x, y) = \delta(x - y)|h|^{-\frac{1}{2}}(y)$ mit der durch Einschränkung von g auf Σ erhaltenen Metrik h .

Die algebraischen Eigenschaften des zugehörigen Quantenfeldes können jetzt in einfacher Weise angegeben werden. Heuristisch erwarten wir auf der Cauchyfläche Σ gleichzeitige Vertauschungsrelationen der Form

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= 0 \\ [\varphi(x), \partial_\Sigma \varphi(y)] &= i\delta_\Sigma(x, y) \\ [\partial_\Sigma \varphi(x), \partial_\Sigma \varphi(y)] &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Zusammen mit der Feldgleichung folgt daraus die Vertauschungsrelation auf $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = iE(x, y) \quad . \quad (3.5)$$

Um diese Relationen mit einem präzisen mathematischen Sinn zu versehen, fasst man üblicherweise das Quantenfeld als eine operatorwertige Distribution auf, d.h. als eine lineare Abbildung des Testfunktionenraums $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ in die Operatoren eines Hilbertraums, für die noch geeignete Stetigkeitsbedingungen erfüllt werden. Auf gekrümmten Raumzeiten erweist sich die Konstruktion dieses Hilbertraums als in hohem Maße willkürlich. Wir definieren daher die Quantenfelder zunächst nur im Sinne abstrakter Algebren. Darstellungen dieser Algebren durch Operatoren von Hilberträumen werden wir später diskutieren.

Wir suchen also eine lineare Abbildung φ von $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ in eine (assoziative) Algebra \mathfrak{A} mit Einselement und mit einer $*$ -Operation

$$\begin{aligned} (A + \lambda B)^* &= A^* + \bar{\lambda} B^* \\ (AB)^* &= B^* A^* \\ A^{**} &= A \quad , \end{aligned} \quad (3.6)$$

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) \mathfrak{A} wird von den Elementen $\varphi(f)$, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ erzeugt.
- (ii) φ erfüllt die Feldgleichung (3.1) im Sinne von Distributionen, d.h. $\varphi(Df) = 0$, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$.¹
- (iii) $[\varphi(f), \varphi(g)] = i\langle f, Eg \rangle$
- (iv) $\varphi(f)^* = \overline{\varphi(f)}$.

Die Konstruktion der Algebra \mathfrak{A} ist einfach. Man betrachtet die Borchersalgebra über $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, d.h. die Tensoralgebra mit der $*$ -Operation $f^* := \bar{f}$, und dividiert durch das Ideal, das von den Feldgleichungen und den Vertauschungsrelationen erzeugt wird.

AUFGABE 3.1. Sei $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ mit $[\varphi(f), \varphi(g)] = 0 \quad \forall g \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$. Zeige, dass $\varphi(f) = 0$. (Hinweis: In einer global hyperbolischen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist $J_+(x) \cap J_-(y)$ für alle Paare $x, y \in \mathcal{M}$ kompakt.)

Nicht so einfach zu entscheiden ist die Frage, ob es eine treue Darstellung von \mathfrak{A} durch Hilbertraumoperatoren gibt. Äquivalent dazu ist die Frage nach einer genügend großen Anzahl von Zuständen (im Sinne von Erwartungswertfunktionalen). Ein Zustand auf einer $*$ -Algebra mit Einselement ist hierbei definiert als ein lineares Funktional ω auf \mathfrak{A} mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \omega(A^*A) &\geq 0 \\ \omega(1) &= 1 \quad . \end{aligned} \quad (3.7)$$

¹Eigentlich müsste hier der transponierte Operator D^t stehen, doch bezüglich des durch die Metrik g ausgezeichneten Maßes ist D formal selbstadjungiert.

Ist \mathfrak{A} durch Hilbertraumoperatoren dargestellt, so liefert jeder Einheitsvektor Φ durch $\omega(A) := (\Phi, A\Phi)$ einen Zustand. Andere Beispiele von Zuständen sind von der Form $\omega(A) = \sum (\Phi_i, A\Phi_i)$ mit $\sum \|\Phi_i\|^2 = 1$. Umgekehrt definiert jeder Zustand durch $\langle A, B \rangle = \omega(A^*B)$ eine positiv semidefinite Sesquilinearform auf \mathfrak{A} . Der Nullraum dieser Form ist wegen der Cauchy-Schwartz-Gleichung ein Linksideal in \mathfrak{A} , daher wirkt \mathfrak{A} durch Linksmultiplikation auf den Quotientenraum. Auf diesem ist das Skalarprodukt positiv definit, so dass wir damit eine Darstellung von \mathfrak{A} auf einem dichten Unterraum eines Hilbertraums gefunden haben. Die beschriebene Konstruktion nennt man die GNS-Konstruktion (nach Gelfand, Neumark und Segal).

Ein Zustand ω auf \mathfrak{A} ist eindeutig bestimmt durch die sogenannten n -Punktfunktionen

$$\omega_n(f_1, \dots, f_n) = \omega(\varphi(f_1) \cdots \varphi(f_n)) \quad . \quad (3.8)$$

ω ist ein multilineares Funktional auf $\mathcal{D}(\mathcal{M})$. Wir wollen nur solche Zustände betrachten, bei denen dieses Funktional in jedem Eintrag eine Distribution ist. Wir erinnern daran, dass eine Distribution t ein lineares stetiges Funktional auf dem Testfunktionenraum ist,

$$t(\phi_n) \rightarrow 0 \text{ wenn } \phi_n \rightarrow 0 \quad . \quad (3.9)$$

Hierbei konvergiert eine Folge von Testfunktionen ϕ_n gegen 0, wenn alle ϕ_n Träger in einer festen kompakten Menge haben und für beliebige Vektorfelder X_1, \dots, X_k , $k = 0, 1, \dots$ die Funktionen $X_1 \cdots X_k \phi_n$ gleichmäßig gegen 0 konvergieren.

Wir nutzen jetzt das sogenannte Kerntheorem von Schwartz aus. Dieses Theorem besagt, dass Multilinearformen auf $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, die in jedem Eintrag stetig sind, eine eindeutige Fortsetzung zu einer Distribution auf \mathcal{M}^n besitzen. Unsere n -Punktfunktionen sind also wohldefinierte Distributionen in n Argumenten aus \mathcal{M} . Sie sind in jedem Argument Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung und erfüllen wegen der kanonischen Vertauschungsrelation die Bedingung

$$\begin{aligned} \omega_{n+2}(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+2}) - \omega_{n+2}(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots) = \\ iE(x_i, x_{i+1})\omega_n(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+2}) \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Komplizierter ist die Positivitätsbedingung. Für die 2-Punktfunktion bedeutet sie

$$\int dx dy \omega_2(x, y) \overline{f(x)} f(y) \geq 0, f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \quad . \quad (3.11)$$

Es gibt eine wichtige Klasse von Zuständen, die quasifreien Zustände, die durch ihre 2-Punktfunktion festgelegt werden. Sei ω_2 eine Distribution auf $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, die in jedem Argument eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist, deren antisymmetrischer Anteil durch die Kommutatorfunktion E gegeben ist,

$$\omega_2(x, y) - \omega_2(y, x) = iE(x, y) \quad , \quad (3.12)$$

und die die Positivitätsbedingung (3.11) erfüllt. ω_2 definiert auf $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ ein positiv semidefinites Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Man benutzt nun die 2-Punktfunktion, um durch

$$\int dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_n \prod_{i=1}^n \omega_2(x_i, y_i) \overline{f(x_1, \dots, x_n)} g(y_1, \dots, y_n) =: \langle f, g \rangle \quad (3.13)$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{D}(\mathcal{M}^n)$ zu erklären.

AUFGABE 3.2. Zeige, dass das Skalarprodukt (3.13) positiv semidefinit ist. (Hinweis: Wegen der Stetigkeit der Distribution $\prod_{i=1}^n \omega_2(x_i, y_i)$ reicht es aus, die positive Definitheit für Testfunktionen der Form $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i f_1^i(x_1) \cdots f_n^i(x_n)$ mit $f_k^i \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ zu zeigen. Dadurch wird das Problem auf ein Problem der linearen Algebra zurückgeführt.)

Wir betrachten jetzt den symmetrischen Fockraum $\mathcal{F}(\mathcal{D}(\mathcal{M}))$ über dem Testfunktionenraum $\mathcal{D}(\mathcal{M})$. Dieser besteht aus endlichen Folgen $F = (F_n)_{n \geq 0}$, mit $F_0 \in \mathbb{C}$ und Testfunktionen $F_n \in \mathcal{D}(\mathcal{M}^n)$, die unter Vertauschung ihrer Argumente symmetrisch sind. Addition und Skalarmultiplikation sind gliedweise erklärt, und durch

$$\langle F, G \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle F_n, G_n \rangle \quad (3.14)$$

wird ein positiv semidefinites Skalarprodukt auf dem Fockraum eingeführt. Jeder Testfunktion $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ wird ein Operator $\varphi(f) = a(f) + a^*(f)$ auf $\mathcal{F}(\mathcal{D}(\mathcal{M}))$ zugeordnet mit

$$\begin{aligned} (a(f)F)_n(x_1, \dots, x_n) &= \sqrt{n+1} \int dx dy \omega_2(x, y) f(x) F_{n+1}(y, x_1, \dots, x_n) \\ (a^*(f)F)_n(x_1, \dots, x_n) &= \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(x_k) F_{n-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), & n \neq 0 \end{cases} . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Man verifiziert, dass die Vertauschungsrelationen erfüllt sind, $[\varphi(f), \varphi(g)] = i(f, Eg)$ und dass $\langle F, \varphi(f)G \rangle = \langle \varphi(\bar{f})F, G \rangle$ gilt. Hieraus folgt insbesondere, dass der Nullraum des Skalarprodukts invariant unter Anwendung von $\varphi(f)$ ist. Weiter bildet $\varphi(Df)$ mit dem Klein-Gordon-Operator D und $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ den Fockraum auf den Nullraum des Skalarprodukts ab, weil ω_2 eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung in beiden Argumenten ist. Sei \mathfrak{H} der Prähilbertraum, der durch Quotientenbildung nach dem Nullraum entsteht. Dann erhalten wir eine Darstellung von \mathfrak{A} auf \mathfrak{H} , und der Vektor Ω , der der Klasse der Folge $1, 0, 0, \dots \in \mathcal{F}(\mathcal{D}(\mathcal{M}))$ entspricht, induziert über

$$\omega(A) = (\Omega, A\Omega) \quad (3.16)$$

einen Zustand mit 2-Punktfunktion ω_2 . Für die n -Punktfunktionen findet man $\omega_n = 0$ für ungerade n und

$$\omega_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\text{Paarungen}} \prod \omega_2(x_i, x_j) \quad , \quad (3.17)$$

wobei alle Zerlegungen von $\{1, \dots, 2n\}$ in Paare (i, j) mit $i < j$ auftreten.

Wir wollen einige Beispiele für 2-Punktfunktionen besprechen. Sei unsere Raumzeit zunächst der Minkowskiraum. Die Kommutatorfunktion ist

$$E(x, y) = \Delta(x - y) = -(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{\mu(\mathbf{p})} \sin \langle (\mu(\mathbf{p}), \mathbf{p}), x - y \rangle \quad . \quad (3.18)$$

($\mu(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$). Die 2-Punktfunktion des Vakuums ist der positive Frequenzanteil von Δ ,

$$\omega_2(x, y) = \Delta_+(x - y) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2\mu(\mathbf{p})} \exp -i \langle (\mu(\mathbf{p}), \mathbf{p}), x - y \rangle \quad . \quad (3.19)$$

Die Positivitätseigenschaft läßt sich leicht verifizieren,

$$\int dx dy \overline{f(x)} f(y) \omega_2(x, y) = 2\pi \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2\mu(\mathbf{p})} |\tilde{f}(\mu(\mathbf{p}), \mathbf{p})|^2 \geq 0 \quad . \quad (3.20)$$

mit der Fouriertransformierten

$$\tilde{f}(p) = (2\pi)^{-2} \int d^4 x f(x) e^{-ipx} \quad (3.21)$$

Der durch ω_2 bestimmte Hilbertraum kann explizit angegeben werden: der Nullraum des Skalarprodukts (3.13) besteht aus denjenigen Testfunktionen $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}^n)$, deren Fouriertransformierten $\tilde{f}(p_1, \dots, p_n)$ verschwinden, sobald einer der Impulse p_i auf der Massenschale $H_m = \{p \in \mathbb{M}^*, p^2 = m^2, p_0 > 0\}$ liegt. Daher lassen sich die Restklassen nach dem Nullraum mit den Restriktionen der Fouriertransformierten auf die Massenschalen identifizieren. Wir interpretieren diese Vektoren als Impulsraumwellenfunktionen von n -Teilchenzuständen.

Man kann in diesem Fall auch leicht den Hamiltonoperator angeben. Der Hamiltonoperator ist definiert als der Generator der Zeittranslationen. Die Zeittranslationen im Minkowskiraum induzieren die Transformation $f \rightarrow f_t$, $f_t(x) = f(x_0 - t, \mathbf{x})$ im Testfunktionenraum. Durch $\alpha_t(\varphi(f)) = \varphi(f_t)$ erhält man einen Automorphismus der Observablenalgebra \mathfrak{A} . Offenbar sind ω_2 und der zugehörige quasifreie Zustand ω invariant unter Zeittranslationen. Dann wird durch

$$U(t)A\Omega = \alpha_t(A)\Omega \quad (3.22)$$

eine 1-parametrische Gruppe von unitären Operatoren auf \mathfrak{H} erklärt. Man verifiziert, dass die Abbildung $t \rightarrow U(t)$ stark stetig ist,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|U(t)\Phi - \Phi\| = 0 \quad \forall \Phi \in \mathfrak{H} \quad . \quad (3.23)$$

Dann folgt aus dem Satz von Stone, dass es einen dichten Unterraum $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{H}$ gibt, so dass $U(t)\Phi$ für $\Phi \in \mathfrak{D}$ differenzierbar ist, und dass der auf \mathfrak{D} erklärte Operator $H = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} U(t)|_{t=0}$ selbstadjungiert ist und die unitäre Gruppe $U(t)$ erzeugt. Auf den n -Teilchenwellenfunktionen ergibt sich

$$H\Phi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \sum_{i=1}^n \mu(\mathbf{p}_i) \Phi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n). \quad (3.24)$$

Insbesondere ist der Hamiltonoperator also positiv. Tatsächlich ist ω der einzige zeittranslationsinvariante Zustand mit positivem Hamiltonoperator.

Andere mögliche 2-Punktfunktionen entsprechen Zuständen endlicher positiver Temperatur $T = \beta^{-1}$,

$$\begin{aligned} \omega_2(x, y) &= \Delta_\beta(x - y) = \\ (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\mu(\mathbf{p})} &\frac{\exp -i\langle(\mu(\mathbf{p}), \mathbf{p}), x - y\rangle}{1 - e^{-\beta\mu(\mathbf{p})}} + \frac{\exp i\langle(\mu(\mathbf{p}), \mathbf{p}), x - y\rangle}{e^{\beta\mu(\mathbf{p})} - 1} \quad (3.25) \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Positivitätsbedingung (3.11) verletzt wird, wenn β negative Werte annimmt.

Der obige Zustand kann nicht durch eine Dichtematrix im Vakuumhilbertraum beschrieben werden, da das Spektrum des Hamiltonoperators kontinuierlich ist. Stattdessen charakterisiert man Zustände endlicher Temperatur durch die sogenannte KMS-Bedingung. Ein Zustand ω erfüllt die KMS-Bedingung zur inversen Temperatur β , wenn er invariant unter Zeittranslationen ist, so dass $\omega(A\alpha_t(B))$ für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ stetig in t ist, und wenn für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt

$$(A\Omega, e^{-\beta H} A\Omega) = (A^*\Omega, A^*\Omega) \quad (3.26)$$

mit dem wie oben konstruierten Hamiltonoperator H . Der Hamiltonoperator hat hier nicht die Bedeutung der Energie, wie man schon daran sieht, dass der Erwartungswert von H im Temperaturzustand nach Konstruktion verschwindet.

AUFGABE 3.3. Sei $\mathfrak{A} = M_n(\mathbb{C})$, und sei $\alpha_t(A) = e^{iht} A e^{-iht}$, $h = h^* \in M_n(\mathbb{C})$. Zeige, dass der KMS-Zustand zur inversen Temperatur β das kanonische Ensemble ist, d.h.

$$\omega(A) = \frac{\text{Tr} A e^{-\beta h}}{\text{Tr} e^{-\beta h}} \quad (3.27)$$

Der GNS-Hilbertraum zu einem KMS-Zustand sieht anders aus, als der Vakuumhilbertraum. Denn der Nullraum des durch die 2-Punktfunktion induzierten Skalarprodukts besteht aus den Testfunktionen, deren Fouriertransformierte verschwindet, sobald einer der Impulse auf der positiven oder der negativen Massenschale liegt. Entsprechend sind die n -Teilchen-Impulsraum-Wellenfunktionen Funktionen auf beiden Massenschalen, und der Hamiltonoperator ergibt sich zu

$$H\Phi_n(\varepsilon_1, \mathbf{p}_1, \dots, \varepsilon_n, \mathbf{p}_n) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mu(\mathbf{p}_i) \Phi_n(\varepsilon_1, \mathbf{p}_1, \dots, \varepsilon_n, \mathbf{p}_n) \quad (3.28)$$

mit $\varepsilon_i = \pm 1$.

Es ist illustrativ, den Erwartungswert der Energiedichte im KMS-Zustand zu berechnen. In der klassischen Klein-Gordon-Theorie ist die Energiedichte gegeben durch

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}(x)^2 + |\partial\varphi(x)|^2 + m^2\varphi(x)^2) . \quad (3.29)$$

In der Quantenfeldtheorie ist diese Größe wegen der Singularität der Quantenfelder nicht wohldefiniert. Man kann aber durch das sogenannte point-splitting-Verfahren der Differenz der Erwartungswerte der Energiedichte in verschiedenen Zuständen einen Sinn geben. Es gilt

$$\Delta_\beta(x-y) - \Delta_+(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\mu(\mathbf{p})} \frac{\cos\langle(\mu(\mathbf{p}), \mathbf{p}, x-y)\rangle}{e^{\beta\mu(\mathbf{p})}-1} . \quad (3.30)$$

Offenbar ist diese Differenz eine glatte Funktion. Ersetzen wir in der Definition der Energiedichte die Quadrate durch Produkte der Felder an verschiedenen Punkten

$$\mathcal{H}(x, y) = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}(x)\dot{\varphi}(y) + \partial\varphi(x) \cdot \partial\varphi(y) + m^2\varphi(x)\varphi(y)) , \quad (3.31)$$

berechnen die Differenz der Erwartungswerte im KMS-Zustand und im Vakuum und führen danach wieder den Limes $y \rightarrow x$ aus, so erhalten wir

$$\langle\mathcal{H}\rangle_\beta = \int d^3\mathbf{p} \frac{\mu(\mathbf{p})}{e^{\beta\mu(\mathbf{p})}-1} . \quad (3.32)$$

Insbesondere erkennen wir, dass der Hamiltonoperator nicht das räumliche Integral der Energiedichte sein kann.

Die durch den KMS-Zustand induzierte Darstellung der Observablenalgebra ist nicht irreduzibel, d.h., es gibt invariante Unterräume, die nicht dicht sind. Man erkennt dies an der Existenz von Operatoren, die mit allen Elementen von \mathfrak{A} vertauschen (Schursches Lemma). Zunächst folgt aus der KMS-Bedingung, dass \mathfrak{A} keine Vernichtungsoperatoren, d.h. Operatoren A mit $A\Omega = 0$, enthalten kann. Denn aus $A\Omega = 0$ folgt mit der KMS-Bedingung $A^*\Omega = 0$, das Linksideal der Vernichtungsoperatoren ist also invariant unter der *-Operation und damit ein beidseitiges Ideal. Also ist $AB\Omega = 0$ für alle $B \in \mathfrak{A}$, d.h. A ist der Nulloperator. In unserem Fall ist die Algebra \mathfrak{A} einfach, so dass A auch als Element von \mathfrak{A} verschwinden muss. Man sagt, dass Ω ein separierender Vektor für \mathfrak{A} ist.

Operatoren, die mit allen Elementen von \mathfrak{A} vertauschen, erhält man jetzt durch Rechtsmultiplikation,

$$r(A)B\Omega := BA\Omega , \quad A, B \in \mathfrak{A} . \quad (3.33)$$

Wegen der separierenden Eigenschaft von Ω ist $r(A)$ wohldefiniert. Wir berechnen sein Adjungiertes. Dazu studieren wir die Matricelemente

$$(r(A)C\Omega, B\Omega) = (CA\Omega, B\Omega) = (B^*\Omega, e^{-\beta H}A^*C^*\Omega) . \quad (3.34)$$

Wir nehmen jetzt an, dass $t \rightarrow \alpha_t(A)$ eine analytische Funktion ist. Dann gilt

$$e^{-\beta H} A = \alpha_{i\beta}(A) e^{-\beta H} . \quad (3.35)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} (B^* \Omega, e^{-\beta H} A^* C^* \Omega) &= (B^* \Omega, \alpha_{i\beta}(A^*) e^{-\beta H} C^* \Omega) = \\ (\alpha_{-i\beta}(A) B^* \Omega, e^{-\beta H} C^* \Omega) &= (C \Omega, B \alpha_{i\beta}(A^*) \Omega) , \end{aligned} \quad (3.36)$$

also $r(A)^* = r(\alpha_{i\beta}(A^*))$. Wir setzen

$$j(A) = r(\alpha_{i\frac{\beta}{2}}(A^*)) . \quad (3.37)$$

j ist eine antilinearer *-Isomorphismus der Algebra in ihre Kommutante. Es gilt $(\Omega, j(A)\Omega) = \overline{\omega(A)}$.

KMS-Zustände besitzen eine Reihe von Eigenschaften, die zeigen, dass sie zu Recht als thermodynamische Gleichgewichtszustände angesehen werden können. Eine solche Eigenschaft ist die sogenannte Passivität. Nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik gibt es kein Perpetuum Mobile der zweiten Art, d.h. keine Methode, wie man einem Gleichgewichtszustand eines Systems Energie entnehmen kann, ohne Veränderungen außerhalb zu hinterlassen. In unserem Rahmen können wir eine solche Operation durch die Anwendung eines unitären Elements U der Observablenalgebra auf den Zustand beschreiben. Die dabei im Mittel aufgewandte Energie ist

$$E = (U\Omega, HU\Omega) . \quad (3.38)$$

(Obwohl H nicht mit der Energie identifiziert werden kann, wird die Differenz der Energien zwischen den durch $U\Omega$ und Ω beschriebenen Zuständen richtig durch diese Formel wiedergegeben.) Aus $e^x \geq 1 + x$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt mit Hilfe der KMS-Bedingung (3.26)

$$\beta E \geq (U\Omega, 1 - e^{-\beta H} U\Omega) = (U\Omega, U\Omega) - (U^* \Omega, U^* \Omega) = 0 . \quad (3.39)$$

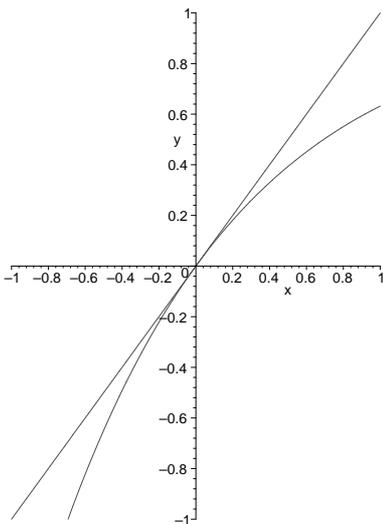


ABBILDUNG 1.
 $1 - e^{\beta x} \leq x$

Also erfüllen KMS-Zustände für positives β den 2. Hauptsatz. Tatsächlich gilt unter einer Zusatzannahme an die Reinheit des Zustands auch die Umkehrung.

Die Passivität von KMS-Zuständen ermöglicht auch eine direkte Abschätzung des Wirkungsgrades bei Kopplung zweier KMS-Zustände mit unterschiedlichen Temperaturen. Seien ω_i $i = 1, 2$ KMS-Zustände von Systemen mit Observablenalgebren \mathfrak{A}_i und Zeitentwicklungen α_t^i mit positiven inversen Temperaturen $\beta_i > 0$. Das gekoppelte System hat die Observablenalgebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ und die Zeitentwicklung $\alpha_t = \alpha_t^1 \otimes \alpha_t^2$,

$$\alpha_t(A_1 \otimes A_2) = \alpha_t^1(A_1) \otimes \alpha_t^2(A_2) . \quad (3.40)$$

Wir betrachten den Produktzustand $\omega = \omega_1 \otimes \omega_2$,

$$\omega(A_1 \otimes A_2) = \omega_1(A_1)\omega_2(A_2) . \quad (3.41)$$

Dieser Zustand ist invariant unter α_t , daher kann der Hamiltonoperator in der zugehörigen GNS-Darstellung $(\mathfrak{H}, \pi, \Omega)$ definiert werden. Es gelten die Beziehungen $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$, $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$, $\Omega = \Omega_1 \otimes \Omega_2$ und $H = H_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_2$ mit den GNS-Darstellungen und Hamiltonoperatoren der Teilsysteme. Eine Operation im gekoppelten System wird durch Anwendung eines unitären Operators $U \in \mathfrak{A}$ beschrieben, und die entnommene Energie ist im Mittel

$$-E = -(U\Omega, HU\Omega) = -E_1 - E_2 \quad (3.42)$$

mit der den Teilsystemen im Mittel entnommenen Energien $-E_1 = -(U\Omega, H_1 \otimes \mathbf{1}U\Omega)$ und $-E_2 = -(U\Omega, \mathbf{1} \otimes H_2U\Omega)$. Wir nutzen jetzt aus, dass der Zustand ω die KMS-Bedingung zu $\beta = 1$ für die reskalierte Zeitentwicklung $\hat{\alpha}_t := \alpha_{\beta_1 t}^1 \otimes \alpha_{\beta_2 t}^2$ erfüllt. Aus der Passivität (3.39) folgt die Ungleichung

$$\beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 \geq 0 \quad (3.43)$$

Sei das System 1 dasjenige mit der höheren Temperatur, $\beta_1 < \beta_2$. Dann ist die vom System 2 aufgenommene Energie $E_2 \geq \frac{\beta_1}{\beta_2}(-E_1)$, und die dem gekoppelten System entnommene Energie erfüllt die Abschätzung

$$-E \leq \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)(-E_1) = \frac{T_1 - T_2}{T_1}(-E_1) \quad (3.44)$$

(Carnotscher Wirkungsgrad).

Ganz ähnlich zum Minkowskiraum lassen sich ultrastatische Raumzeiten $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$ behandeln. Sie besitzen eine Metrik der Form

$$g = dt^2 - h \quad (3.45)$$

mit einer zeitunabhängigen Riemannschen Metrik h auf der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit Σ . Der Wellenoperator ist

$$\square_g = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_h \quad (3.46)$$

mit dem zur Metrik h gehörenden Laplace-Beltrami-Operator

$$\Delta_h = |h|^{-\frac{1}{2}} \partial_i h^{ij} |h|^{\frac{1}{2}} \partial_j \quad (3.47)$$

Kay hat gezeigt, dass \mathcal{M} genau dann global hyperbolisch ist, wenn Σ als metrischer Raum vollständig ist, oder, was bei Riemannschen Räumen äquivalent ist, wenn Σ geodätisch vollständig ist, d.h. wenn keine Geodäte in endlicher Parameterzeit den Rand der Mannigfaltigkeit erreicht. In diesem Fall ist der Operator $A = -\Delta_h + \mu^2$ auf $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ wesentlich selbstadjungiert, sein Abschluss, den wir mit demselben Symbol bezeichnen wollen, ein selbstadjungierter positiver Operator auf dem Hilbertraum $L^2(\Sigma, |h|^{\frac{1}{2}} d^3x)$. Wir können daher mit Hilfe des

Spektralsatzes Funktionen von A bilden. Auf diese Weise erhalten wir für die Kommutatorfunktion

$$E(t, x; s, y) = -\frac{\sin \sqrt{A}(t-s)}{\sqrt{A}}(x, y) \quad . \quad (3.48)$$

Die 2-Punktfunktion des Grundzustands ergibt sich zu

$$\omega_2(t, x; s, y) = \frac{\exp -i\sqrt{A}(t-s)}{2\sqrt{A}}(x, y) \quad . \quad (3.49)$$

Für Temperaturzustände ergibt sich entsprechend

$$\omega_2(t, x; s, y) = \frac{1}{2\sqrt{A}} \left(\frac{\exp -i\sqrt{A}(t-s)}{1 - e^{-\beta\sqrt{A}}} + \frac{\exp i\sqrt{A}(t-s)}{e^{\beta\sqrt{A}} - 1} \right) (x, y) \quad . \quad (3.50)$$

Das Bild ändert sich nur unwesentlich, wenn man statische Raumzeiten betrachtet, d.h. Raumzeiten $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$ mit einer Metrik

$$g = a^2 dt^2 - h \quad , \quad (3.51)$$

mit einer zeitunabhängigen Metrik h auf Σ ist und einer glatten Funktion a auf Σ .

Das einfachste Beispiel ist der sogenannte Rindler-Keil („wedge“). Dies ist die Teilmenge $\{x \in \mathbb{M}, |x^0| < x^1\}$. Wir führen Koordinaten λ, θ, y, z ein mit $x^0 = e^\lambda \sinh \theta$, $x^1 = e^\lambda \cosh \theta$, $y = x^2$, $z = x^3$. Die Metrik wird in diesen Koordinaten

$$g = e^{2\lambda}(d\theta^2 - d\lambda^2) - dy^2 - dz^2 \quad . \quad (3.52)$$

Der Rindler-Keil ist also statisch, und man kann leicht zeigen, dass er auch

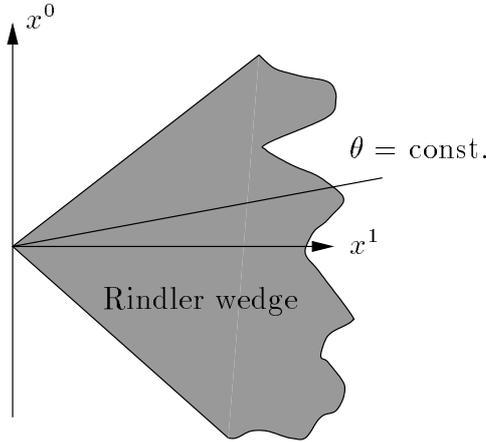


ABBILDUNG 2. Der Rindler-Keil (grau) und Flächen konstanter Zeit.

global hyperbolisch ist, mit Cauchyflächen $\theta = \text{const.}$ Im Minkowskiraum sind

diese Flächen raumartige Hyperebenen durch die yz -Ebene. Die Klein-Gordon-Gleichung lautet

$$(e^{-2\lambda}(\partial_\theta^2 - \partial_\lambda^2) - \partial_y^2 - \partial_z^2 + m^2) \phi = 0 \quad (3.53)$$

Sei A der Operator

$$-\partial_\lambda^2 - e^{2\lambda}(\partial_y^2 + \partial_z^2 - m^2) \quad (3.54)$$

auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^3)$. A kann interpretiert werden als Hamiltonoperator für Teilchen, die aus negativer λ -Richtung auf ein exponentiell wachsendes Potential treffen und davon reflektiert werden. Insbesondere ist A auf \mathcal{D} wesentlich selbstadjungiert und positiv. Man kann daher die Kommutatorfunktion sowie die Zweipunktfunktionen des Grundzustands und der KMS-Zustände zu positiven Werten von β wie oben durch die Integralkerne der entsprechenden Funktionen von A angeben. Man beachte, dass die Integralkerne sich auf das Lebesgue-Maß beziehen, nicht auf das durch die räumliche Metrik bestimmte Volumenmaß auf der Cauchyfläche.

Einen weiteren Zustand auf dem Rindlerkeil findet man, indem man die Vakuumzweipunktfunktion des Minkowskiraums auf den Rindlerkeil einschränkt. Man findet in den Koordinaten θ, λ, y, z

$$\omega_2^{\text{M}}(\theta, \lambda, y, z; \theta', \lambda', y', z') = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\mu(\mathbf{p})} e^{-i\mu(\mathbf{p})(e^\lambda \sinh \theta - e^{\lambda'} \sinh \theta') + ip_1(e^\lambda \cosh \theta - e^{\lambda'} \cosh \theta') + ip_2(y - y') + ip_3(z - z')}$$

Translationen in der Variablen θ sind eigentliche Lorentztransformationen in der 1-Richtung.

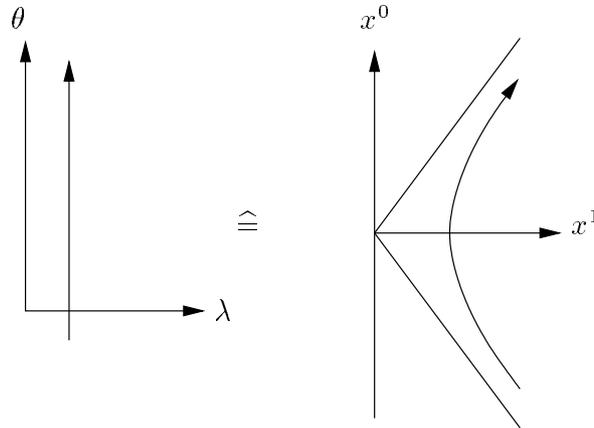


ABBILDUNG 3. Translationen in θ entsprechen Lorentztransformationen mit dem Boostparameter θ .

Da das Vakuum im Minkowskiraum lorentzinvariant ist, können wir um $-\frac{\theta+\theta'}{2}$ verschieben und erhalten

$$\omega_2^{\text{M}}(\theta, \lambda, y, z; \theta', \lambda', y', z') =$$

$$(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\mu(\mathbf{p})} e^{-i\mu(\mathbf{p})(e^\lambda + e^{\lambda'}) \sinh \frac{\theta - \theta'}{2} + ip_1(e^\lambda - e^{\lambda'}) \cosh \frac{\theta - \theta'}{2} + ip_2(y - y') + ip_3(z - z')}$$

Man erkennt, dass die Zweipunktfunktion sich in θ' analytisch in den Streifen $0 < \text{Im}\theta' < 2\pi$ fortsetzen läßt. Ist der Imaginärteil gleich 2π , so findet man die ursprüngliche Zweipunktfunktion wieder, wobei gestrichene und ungestrichene Variablen ihren Platz getauscht haben. Wir schließen, dass das Minkowskivakuum für die Rindlerzeit θ ein KMS-Zustand mit Temperatur $\frac{1}{2\pi}$ ist. Da der KMS-Zustand eindeutig ist, muss er mit dem vorher angegebenen Zustand übereinstimmen. Dies läßt sich durch explizite Rechnung verifizieren.

Was ist die physikalische Interpretation dieses mathematischen Sachverhalts? Die Bahnen unter Translationen von θ beschreiben gleichmäßig beschleunigte Bewegungen in 1-Richtung, mit Eigenzeit $d\tau = e^\lambda d\theta$ und Beschleunigung $a = e^{-\lambda}$. Ein beschleunigter Beobachter empfindet daher das Vakuum wie ein Wärmebad der Temperatur $\frac{a}{2\pi}$. Für Beschleunigungen makroskopischer Körper ist dieser Effekt sehr klein ($T = 10^{-19} K$ für $a = 1 \text{ms}^{-1}$).

Als nächstes Beispiel betrachten wir die Schwarzschildraumzeit. Außerhalb des Schwarzschildradius $r_0 = 2m$ können wir die Koordinate r durch die sogenannte Schildkrötenkoordinate

$$r^* = r + r_0 \ln\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)$$

ersetzen. Die Metrik wird dann

$$g = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)(dt^2 - dr^{*2}) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.55)$$

Der Wellenoperator ergibt sich zu

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - r^{-1} \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} r\right) + \left(\frac{-\Delta_{S^2}}{r^2} + \frac{r_0}{r^3}\right)$$

AUFGABE 3.4. Bestätige dieses Ergebnis durch Nachrechnen.

Wir betrachten jetzt den Operator

$$A = -r^{-1} \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} r + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \left(\frac{-\Delta_{S^2}}{r^2} + \frac{r_0}{r^3}\right) \quad (3.56)$$

Bei gegebenem Eigenwert $-l(l+1)$ des Laplaceoperators der Sphäre S^2 beschreibt rAr^{-1} die Bewegung eines quantenmechanischen Teilchens, unter dem Einfluß des Potentials

$$V_l(r) = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{r_0}{r^3}\right)$$

in der r^* -Richtung. Dieses Potential fällt in Richtung $r^* \rightarrow -\infty$ exponentiell ab, hat ein Maximum bei $r = ?$ und fällt für $r^* \rightarrow \infty$ wie $\frac{1}{r^{*2}}$ ab, s. Figur 4. Man zeigt wie im Rindlerkeil, dass A auf den unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in $L^2(\mathbb{R} \otimes S^2, r^2 \sin\theta dr^* d\theta d\phi)$ wesentlich selbstadjungiert ist, und erhält wie vorher Grund- und Temperaturzustände.

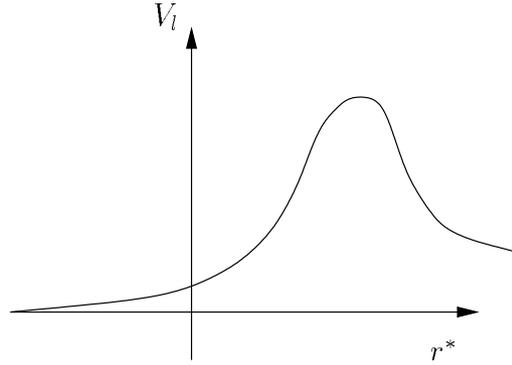


ABBILDUNG 4. Skizze des effektiven Potentials $V_l(r^*)$.

Die Analogie zum Rindlerfall legt nahe, dass der Zustand mit der Hawking-Temperatur $T = \frac{1}{4\pi r_0}$ physikalisch besonders wichtig ist. Die Analogie zum Rindlerfall wird besonders deutlich durch die Einführung der sogenannten Kruskal-Koordinaten

$$\begin{aligned} T &= 2r_0 e^{\frac{r^*}{2r_0}} \sinh \frac{t}{2r_0} \\ R &= 2r_0 e^{\frac{r^*}{2r_0}} \cosh \frac{t}{2r_0} . \end{aligned} \quad (3.57)$$

In diesen Koordinaten schreibt sich die Schwarzschildmetrik als

$$g = \frac{r_0}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} (dT^2 - dR^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (3.58)$$

Wegen $R^2 - T^2 = 4r_0^2 (\frac{r}{r_0} - 1) e^{\frac{r}{r_0}}$ ist r für $R^2 - T^2 > -4r_0^2$ eine Funktion von $R^2 - T^2$. Wir können daher die Schwarzschildraumzeit in die sogenannte Kruskalraumzeit

$$\mathcal{K} = \{(T, R) \in \mathbb{R}^2, R^2 - T^2 > -4r_0^2\} \times S^2 \quad (3.59)$$

einbetten, mit der obigen Metrik (3.58).

Wir betrachten jetzt den KMS-Zustand zu $\beta = 4\pi r_0$ auf der Schwarzschildraumzeit. In den Kruskalkoordinaten entspricht die Translation in t um $2\pi r_0 i$ gerade der Reflexion $(T, R) \rightarrow (-T, -R)$. Wir definieren daher für $R < 0$, $T^2 < R^2$, das Feld am Punkt (T, R, θ, ϕ) in der GNS-Darstellung durch

$$\varphi(T, R, \theta, \phi) = j(\varphi(-T, -R, \theta, \phi)) . \quad (3.60)$$

Wir wollen untersuchen, weshalb dieser Zustand „besser“ ist als die Zustände mit anderen Temperaturen. Dazu betrachten wir ein vereinfachtes System, in dem das Potential V_l vernachlässigt wird. Die Zweipunktfunktion des KMS-Zustands wird

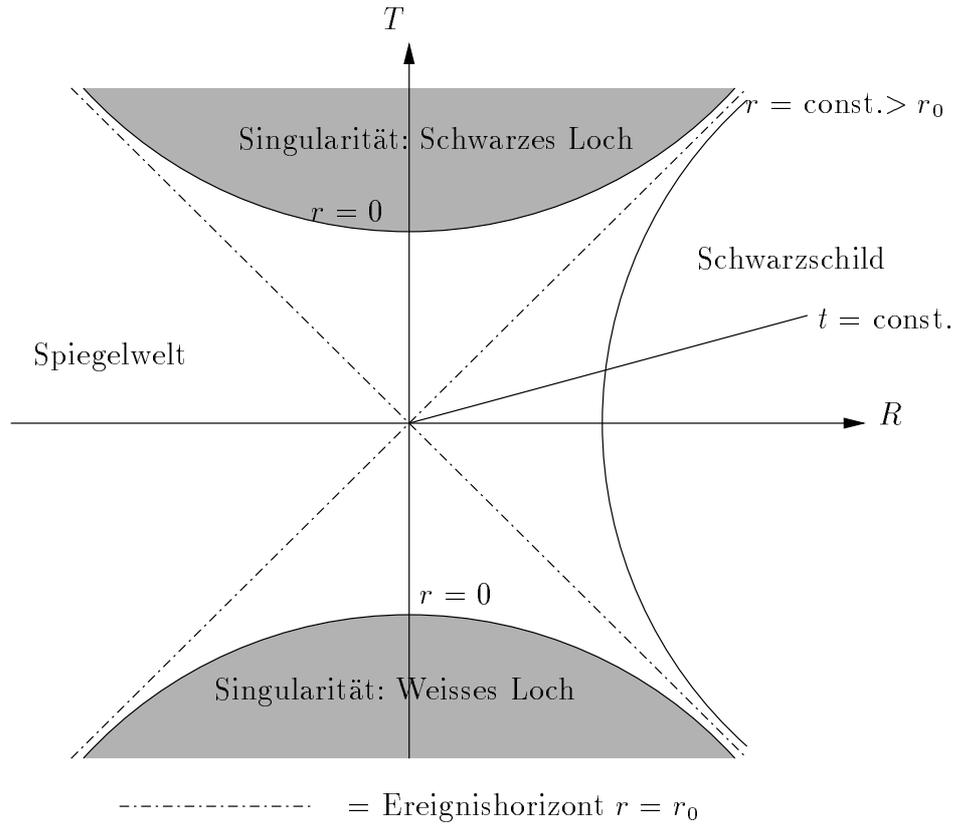


ABBILDUNG 5. Die Kruskalraumzeit: Wie im Minkowskiraum haben kausale Kurven eine Steigung $\geq 45^\circ$. Die Vergangenheits-Singulartät bei $r = 0$ heisst Weisses Loch.

dann gegeben durch

$$\omega_2^\beta(t, r^*, t', r^{*'}) = (2\pi)^{-1} \int dp |p|^{-1} \left(\frac{e^{-i|p|(t-t') + ip(r^* - r^{*'})}}{1 - e^{-\beta|p|}} + \frac{e^{+i|p|(t-t') + ip(r^* - r^{*'})}}{e^{\beta|p|} - 1} \right). \quad (3.61)$$

Wegen der Singulartät bei $p = 0$ ist dieser Ausdruck keine Distribution. Wir differenzieren daher nach t und t' und erhalten an der Stelle $t = t' = 0$

$$\partial_t \partial_{t'} \omega_2^\beta(r^*, r^{*'}) = (4\pi)^{-1} \int dp p \coth \frac{\beta}{2} p e^{ip(r^* - r^{*'})}. \quad (3.62)$$

Der Integrand ist meromorph mit Polen an den Stellen $p = \frac{2\pi}{\beta}ni$ und fällt in der unteren Halbebene schnell ab. Wir berechnen mit Hilfe des Residuensatzes

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_{t'} \omega_2^\beta(r^*, r^{*'}) &= (4\pi)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi i \operatorname{res}_{p=-\frac{2\pi}{\beta}ni} \left(p \coth \frac{\beta}{2} p e^{ip(r^*-r^{*'})} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\beta^2} n e^{\frac{2\pi}{\beta}(r^*-r^{*'})} = \frac{\pi}{2\beta^2} \sinh^{-2} \frac{\pi}{\beta}(r^* - r^{*'}) . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Insbesondere fallen die Korrelationen also wie $e^{-\frac{2\pi}{\beta}|r^*-r^{*'}|}$ ab. Wir betrachten jetzt die Korrelationen der Ableitungen nach der Kruskalzeit in der Umgebung des Punktes $T = R = 0$. Es gilt

$$\partial_T \partial_{T'} |_{t=t'=0} = e^{-\frac{r^*+r^{*'}}{2r_0}} \partial_t \partial_{t'} . \quad (3.64)$$

Also sind nur im Fall von $\beta = 4\pi r_0$ die Korrelationen mit dem Punkt $T = R = 0$ endlich und von Null verschieden. Da dieser Punkt innerhalb der Kruskalraumzeit lokal keine signifikant anderen Eigenschaften hat, ist die Hawkingtemperatur die physikalisch ausgezeichnete Temperatur.

Man muss jetzt zeigen, dass die obigen Betrachtungen richtig bleiben, wenn das Potential V_l berücksichtigt wird. Da V_l beschränkt ist und für $r^* \rightarrow \infty$ schnell verschwindet, sollte dies mit nicht allzu großem Aufwand möglich sein.

Das Problem der obigen Rechnungen wie auch analoger Rechnungen mit euklidischem Pfadintegral ist, dass sie die Zustände von Quantenfeldern im Gravitationsfeld eines statischen schwarzen Lochs betreffen. Physikalisch interessanter ist aber die Situation im Gravitationsfeld eines kollabierenden Sterns, der schließlich in einem schwarzen Loch endet. Tatsächlich war Hawkings ursprüngliches Resultat, dass ein System, das sich vor dem Kollaps im Grundzustand befindet, nach dem Kollaps in einen Zustand mit Wärmestrahlung übergeht.

Lange Zeit war nicht klar, wie Hawkings Argument mathematisch präzisiert werden kann. Eine Lösung wurde dann gegeben in dem Papier „On the Derivation of Hawking Radiation Associated with the Formation of a Black Hole“ von Rudolf Haag und mir (Commun. Math. Phys. **127**, 273-284 (1990)). Man betrachtet einen sphärisch symmetrischen Kollaps. Außerhalb des Sterns ist das Gravitationsfeld eine rotationssymmetrische Lösung der Einsteingleichung mit verschwindendem Energie-Impuls-Tensor. Nach dem Theorem von Birkhoff ist die Schwarzschildmetrik die einzige derartige Lösung; insbesondere ist die Metrik außerhalb des Sterns automatisch statisch. Wir wollen jetzt den Zustand eines masselosen, skalaren, freien Quantenfeldes weit außerhalb des Schwarzschildradius $r \gg r_0$ im Limes $t \rightarrow \infty$ bestimmen. Wegen der Wellengleichung sind die n -Punktfunktionen des Zustands durch ihre Cauchydaten auf der Cauchyfläche $t = 0$ festgelegt. Sei h eine Testfunktion. Dann ist Eh eine Lösung der Wellengleichung. Seien $h_0 = Eh |_{t=0}$ und $h_1 = \frac{\partial}{\partial t} Eh |_{t=0}$ die entsprechenden Cauchydaten.

Dann gilt

$$\varphi(h) = \int dr^* \left(\varphi(0, r^*) h_1(r^*) - \frac{\partial}{\partial t} \varphi(0, r^*) h_0(r^*) \right). \quad (3.65)$$

Wir betrachten jetzt die in der Schwarzschildzeit t verschobenen Testfunktionen $h_T(t, r^*) = h(t - T, r^*)$ und die zugehörigen Cauchydaten h_0^T und h_1^T auf der Cauchyfläche zur Zeit $t = 0$. Diese bestehen im wesentlichen aus zwei Anteilen, nämlich einem, der bei $r^* = -T$ konzentriert ist, und einem bei $r^* = T$. Bei einem massiven Feld ist der letztere Term stärker ausgedehnt. In das asymptotische Verhalten des Feldes gehen jetzt die folgenden Eigenschaften des Zustands zur Zeit $T = 0$ ein:

- das Verhalten bei $r^* \rightarrow -\infty$, d.h. nahe am Horizont
- das Verhalten bei $r^* \rightarrow \infty$, also bei $r \rightarrow \infty$
- die Korrelationen zwischen Horizont und $r \rightarrow \infty$

Für eine große Klasse von Zuständen sind diese Eigenschaften identisch. Die erste Eigenschaft bezieht sich auf das Kurzabstandsverhalten. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass alle physikalisch akzeptablen Zustände dasselbe Kurzabstandsverhalten haben, und dass dieses unter der Zeitentwicklung in einer glatten Raumzeitmetrik stabil ist. Es wird insbesondere nicht durch den Kollaps verändert. Das Verhalten bei $r = \infty$ hängt von den globalen Eigenschaften des Zustands ab (Temperatur etc.) und wird ebenfalls nicht vom Kollaps beeinflusst. Die Korrelationen schließlich sollten bei allen interessanten Zuständen bei großen Abständen gegen Null gehen.

Wir betrachten jetzt ein h , das bei der asymptotischen Zerlegung der Cauchydaten von Eh_T nur den Anteil am Horizont besitzt. Man kann dann zeigen, dass der Zustand, eingeschränkt auf solche Felder, im Limes $T \rightarrow \infty$ ein KMS-Zustand bezüglich der Schwarzschildzeit mit der Hawking-Temperatur ist. In diesem Sinn strahlt ein schwarzes Loch also wie ein schwarzer Körper. Allerdings gelangt wegen der Reflexion am Potential V_l nur ein Bruchteil der Strahlung nach außen. Dies wirkt sich dadurch aus, dass ein h , das weit entfernt vom Horizont lokalisiert ist, notwendig auch einen Anteil besitzt, der zu frühen Zeiten nach außen strebt. Man findet für $h = \sum h_{lm} Y_{lm}$ als Beitrag des Horizonts

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \omega(\varphi(h_T^*) \varphi(h_T))_{\text{Horizont}} = \text{const} \sum_{lm} \int_{-\infty}^{\infty} dE D_l(E) \frac{|h_{lm}^{\sim}(E, -E)|^2}{E(1 - e^{-4\pi r_0 E})} \quad (3.66)$$

mit der Durchlasswahrscheinlichkeit $D_l(E)$ durch das Potential V_l .

Bei der Berechnung des Massenverlusts eines schwarzen Lochs durch Hawkingstrahlung muß der Abschirmeffekt berücksichtigt werden. Eine auch nur grobe Abschätzung der Modifikation dieses Effekts durch Wechselwirkungen existiert meines Wissens nach nicht. Dies erschwert die Diskussion astrophysikalischer Auswirkungen des Hawkingeffekts.

Ein weiteres ungelöstes Problem ist die Übertragung der Argumente auf ein rotierendes schwarzes Loch. Es ist sehr wahrscheinlich, dass in diesem Fall kein thermodynamischer Gleichgewichtszustand existiert (siehe die Arbeit von B. Kay und R. Wald: Theorems on the Uniqueness and Thermal Properties of Stationary, Nonsingular, Quasifree States on Spacetimes with a Bifurcate Killing Horizon, *Physics Reports* **207**, 49-136 (1991)). Ein weiteres Problem ist, dass der Kollaps in diesem Fall nicht notwendig zu einem statischen Gravitationsfeld im Außenraum führt. Unter der Annahme, dass das Feld im Außenraum durch die Kerr-Metrik beschrieben wird, ist eine Analyse der entstehenden Strahlung von Hermann Heßling in seiner Dissertation durchgeführt worden.

KAPITEL 4

Hadamard-Zustände und Wellenfrontmengen

Die Diskussion der möglichen Zustände des skalaren freien Feldes auf einer global hyperbolischen Raumzeit hat gezeigt, dass man ein Kriterium dafür braucht, welche Zustände akzeptabel sind, in dem Sinne, dass sie lokal ähnliche Eigenschaften haben wie die Zustände im Vakuumsektor einer Minkowskiraumtheorie. Das entscheidende Kriterium dort ist die Spektrumsbedingung, d.h. die Existenz einer stark stetigen unitären Darstellung der Translationen mit Generatoren P_μ , die die relativistische Spektrumsbedingung erfüllen,

$$\text{sp}P_\mu \subset \overline{V_+} \quad . \quad (4.1)$$

Hierzu gibt es zwei verschiedene Ansätze. Der eine geht zurück auf Brehme und de Witt und basiert auf einem rekursiven Verfahren zur Konstruktion einer Lösung der Klein-Gordon-Gleichung, das von Hadamard angegeben worden ist. Im Minkowskiraum liefert es die Vakuumzweipunktfunktion (bis auf glatte Anteile). Daher wurde vermutet, dass es auf gekrümmten Raumzeiten die richtige 2-Punktfunktion liefert. Der andere Ansatz geht zurück auf Parker und geht aus von der Beobachtung, dass in einer nicht stationären Raumzeit eine eindeutige Teilcheninterpretation nicht möglich ist. Wählt man zu jedem Zeitpunkt t die Teilcheninterpretation einer statischen Raumzeit, die mit der gegebenen Raumzeit auf einer Cauchyfläche $\{t\} \times \Sigma$ übereinstimmt, so beobachtet man die Erzeugung unendlich vieler Teilchen. Parker hat die sogenannten adiabatischen Vakua eingeführt, in denen die erwähnte Teilchenproduktion minimiert wird. Erst vor kurzem ist es Wolfgang Junker gelungen, zu zeigen, dass die adiabatischen Vakua in der Tat Beispiele für Hadamardzustände sind.

Der entscheidende Durchbruch in dieser Frage ist Marek Radzikowski zu verdanken, der in seiner Dissertation gezeigt hat, dass man die Klasse der zulässigen Zweipunktfunktionen des freien Feldes durch eine lokale Version der Spektrumsbedingung charakterisieren kann.

Im Minkowskiraum ist die Vakuumzweipunktsfunktion gerade der positive Frequenzanteil der Kommutatorfunktion. Man erhält sie, indem man die Kommutatorfunktion fouriertransformiert und dann auf positive Frequenzen beschränkt. Auf einer gekrümmten Raumzeit macht die Fouriertransformation keinen Sinn, da sie von der Wahl einer Karte abhängt. Um zu sehen, was lokal von der Information über den Träger der Fouriertransformierten sichtbar ist, multiplizieren

wir die Funktion

$$\Delta_+(x) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\mu(\mathbf{p})} e^{-ipx} \Big|_{p_0=\mu(\mathbf{p})} = (2\pi)^{-3} \int d^4\delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0) e^{-ipx} \quad (4.2)$$

mit einer Testfunktion f mit kompaktem Träger. Die Fouriertransformierte von $f\Delta_+$ ist eine unendlich oft differenzierbare Funktion, nämlich gerade die Faltung der Fouriertransformierten von f und Δ_+ ,

$$\widetilde{f\Delta_+} = \tilde{f} * \tilde{\Delta_+} = (2\pi)^{-2} \int d^4q \tilde{f}(q) \tilde{\Delta_+}(p - q) . \quad (4.3)$$

Hätte \tilde{f} kompakten Träger, so würde gelten

$$\text{supp } \widetilde{f\Delta_+} \subset \text{supp } \tilde{f} + H_m \quad (4.4)$$

mit dem Massenhyperboloid H_m . Tatsächlich ist aber \tilde{f} als Fouriertransformierte einer glatten Funktion mit kompaktem Träger nur schnell abfallend, so dass wir die Aussage erhalten, dass die Funktion $\widetilde{f\Delta_+}$ außerhalb des Hyperboloids H_m schnell abfällt. Die Lokalisierung im Ortsraum verwischt also die scharfe Lokalisierung im Impulsraum, asymptotische Aussagen aber bleiben erhalten. Wir werden diese Begriffe im weiteren Verlauf der Vorlesung noch präzisieren.

Lokal sichtbar ist bei einer Distribution die Singularitätsstruktur. Formal ist diese definiert als die Restklasse nach den unendlich oft differenzierbaren Funktionen. Wir werden später sehen, wie diese mit dem asymptotischen Verhalten im Impulsraum zusammen hängt.

Wir wollen zunächst die Singularitäten von Δ_+ bestimmen. Wegen der Invarianz von Δ_+ unter eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen kann für raumartige Argumente o.B.d.A. $x = (0, \mathbf{x})$ gewählt werden. Es gilt

$$\Delta_+(0, \mathbf{x}) = S(0, \mathbf{x}) \quad (4.5)$$

mit der Schwinger-2-Punktfunktion

$$S(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4p \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} . \quad (4.6)$$

In dieser Formel werden x und p als Elemente des euklidischen Raums \mathbb{R}^4 aufgefasst; insbesondere sind p^2 und px im Sinne des euklidischen Skalarprodukts zu verstehen.

Die Schwinger-2-Punktfunktion S ist invariant unter den Rotationen im euklidischen \mathbb{R}^4 , also gilt

$$S(0, \mathbf{x}) = S(|\mathbf{x}|, 0) . \quad (4.7)$$

Integrieren wir nun wieder über p_0 , so erhalten wir

$$\Delta_+(0, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\mu(\mathbf{p})} e^{-\mu(\mathbf{p})|\mathbf{x}|} . \quad (4.8)$$

Man erkennt, dass die Zweipunktfunktion im Raumartigen exponentiell abfällt. Nach Integration über die Winkelkoordinaten und Einführung der Variablen $\lambda = \mu(\mathbf{p})|\mathbf{x}|$ ergibt sich

$$\Delta_+(0, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-2} |\mathbf{x}|^{-2} \int_{m|\mathbf{x}|}^{\infty} d\lambda \sqrt{\lambda^2 - m^2 |\mathbf{x}|^2} e^{-\lambda} \quad (4.9)$$

Mit der Abschätzung $\sqrt{1-a} > 1 - \frac{a}{2}$ für $0 < a < 1$ folgt die Ungleichung

$$\Delta_+(0, \mathbf{x}) > (2\pi)^{-2} |\mathbf{x}|^{-2} \int_{m|\mathbf{x}|}^{\infty} d\lambda \left(\lambda - \frac{m^2 |\mathbf{x}|^2}{2\lambda} \right) e^{-\lambda} \quad (4.10)$$

Der erste Term im Integral ergibt

$$(1 + m|\mathbf{x}|) e^{-m|\mathbf{x}|} = 1 + O(m^2 |\mathbf{x}|^2) \quad (4.11)$$

der zweite Term

$$m^2 |\mathbf{x}|^2 \ln m|\mathbf{x}| + O(m^2 |\mathbf{x}|^2) \quad (4.12)$$

Durch eine verfeinerte Abschätzung kann man zeigen, dass der singuläre Anteil richtig wiedergegeben wird. Auch für zeitartige Argumente erhält man eine ähnliche Entwicklung. Berücksichtigt man noch die Singularität auf dem Lichtkegel, so findet man die asymptotische Darstellung

$$\Delta_+(x) = (2\pi)^{-2} \frac{-1}{x^2 + i\varepsilon x^0} + (2\pi)^{-2} \frac{m^2}{2} \ln(x^2 + i\varepsilon x^0) + \text{reguläre Terme} . \quad (4.13)$$

Auf gekrümmten Raumzeiten kann man $(x-y)^2$ durch das Quadrat $\sigma(x, y)$ des geodätischen Abstands zwischen x und y ersetzen. Der Hadamardsche Ansatz für die Zweipunktfunktion ist

$$\omega_2 = -(2\pi)^{-2} \frac{u}{\sigma} + v \ln \sigma + w \quad (4.14)$$

mit glatten Funktionen u, v, w und $u(x, x) = 1$.

Geht man mit diesem Ansatz in die Klein-Gordon-Gleichung, so findet man zunächst eine Gleichung für den Koeffizienten u des singulärsten Terms. Die Lösung ist nur bis auf Vielfache von σ festgelegt. Man findet

$$u(x, y) = \frac{1}{4} |g(x)|^{-\frac{1}{4}} |g(y)|^{-\frac{1}{4}} \left| \det \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \sigma \right|^{\frac{1}{2}} . \quad (4.15)$$

Die in dieser Formel auftretende Determinante heißt van Vleck-Morette-Determinante.

Im nächsten Schritt bestimmt man v . Man setzt an $v = v_n \sigma^n$ und gewinnt die Koeffizienten v_n durch Induktion (Induktionsanfang?). Zum Schluss muss man noch eine inhomogene Klein-Gordon-Gleichung für w lösen.

Der antisymmetrische Anteil der Lösung muss so gewählt werden, dass er mit der Kommutatorfunktion übereinstimmt. Der symmetrische Anteil ist nicht eindeutig bestimmt. Doch zwei verschiedene Hadamard-Lösungen können sich nur um eine glatte, symmetrische Lösung der Klein-Gordon-Gleichung in beiden Argumenten unterscheiden.

Es ist schwierig, den Hadamardschen Ansatz mathematisch präzise zu formulieren. Dies ist erst in der schon erwähnten Arbeit von Kay und Wald geschehen.

AUFGABE 4.1. Sei $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$, mit \mathbb{T}^3 dem 3-Torus $[0, L]^3$. Die Metrik auf \mathbb{M} sei $g = dt^2 - \sum_{i=1}^3 dx_i^2$. Sei weiterhin φ das freie Feld auf \mathbb{M} mit Masse $m > 0$.

- (i) Bestimme die Kommutatorfunktion $E(t, \mathbf{x}; s, \mathbf{y}) = \Delta^L(t-s; \mathbf{x}-\mathbf{y})$ und die Zweipunktfunktion des Grundzustandes $\omega_2(t, \mathbf{x}; s, \mathbf{y}) = \Delta_+^L(t-s; \mathbf{x}-\mathbf{y})$.
(ii) Zeige, dass für $|t| + |\mathbf{x}| < \frac{L}{2}$ gilt:

$$\begin{aligned}\Delta^L(t, \mathbf{x}) &= \Delta(t, \mathbf{x}), \\ \Delta_+^L(t, \mathbf{x}) &= \Delta_+(t, \mathbf{x}) + f(t, \mathbf{x}),\end{aligned}$$

mit $f \in \mathbb{C}^\infty$.

Als eine weitere Methode zur Definition physikalischer Zustände wollen wir die adiabatischen Vakua besprechen. Diese Methode ist anwendbar, wenn die Raumzeit von der Form $\mathbb{R} \times \Sigma$ ist mit einer Metrik $g = dt^2 - a(t)^2 h$, wobei h eine Riemannsche Metrik auf Σ ist. Beispiele sind die Robertson-Walker-Raumzeiten oder Friedmann-Universen. Der Wellenoperator ist

$$\square_g = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + 3H \frac{\partial}{\partial t} - a^{-2} \Delta_h \quad (4.16)$$

mit dem Hubble-Parameter $H = \frac{\dot{a}}{a}$ und dem Laplaceoperator Δ_h auf (Σ, h) . Wir nehmen an, dass Σ vollständig ist. Dann ist der Laplaceoperator auf $L^2(\Sigma, |h|^{\frac{1}{2}} d^3x)$ selbstadjungiert und positiv. Seien Y_k Eigenfunktionen mit Eigenwert E_k und den Normierungs- und Vollständigkeitsrelationen

$$\begin{aligned}\int Y_k(x) \overline{Y_{k'}(x)} |h|^{\frac{1}{2}} d^3x &= \delta(k, k') \\ \int \overline{Y_k(x)} Y_k(y) dk &= \delta(x-y) |h|^{-\frac{1}{2}}\end{aligned} \quad (4.17)$$

Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung findet man jetzt durch den Ansatz $f = T_k(t) Y_k(x)$; dabei muss T_k die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\ddot{T}_k + 3H \dot{T}_k + \omega^2 T_k = 0 \quad (4.18)$$

erfüllen, mit $\omega = \sqrt{a^{-2} E_k + m^2}$. Die Gleichung (4.18) besitzt 2 linear unabhängige Lösungen. Wir können diese so wählen, dass sie komplex konjugiert zueinander sind und so dass die Wronskideterminante W_k ,

$$W_k = \overline{\dot{T}_k} T_k - \overline{T_k} \dot{T}_k \quad (4.19)$$

den Wert ia^{-3} hat. Mit Hilfe dieser Lösungen erhält man die Kommutatorfunktion

$$iE(t, x; s, y) = \int dk \left(T_k(t) \overline{T_k(s)} - T_k(s) \overline{T_k(t)} \right) Y_k(x) \overline{Y_k(y)} \quad (4.20)$$

Eine damit verträgliche Zweipunktfunktion ist

$$\omega_2(t, x; s, y) = \int dk T_k(t) \overline{T_k(s)} \overline{Y_k(x)} \overline{Y_k(y)} \quad (4.21)$$

Im Fall $a = \text{const}$ erhält man den Grundzustand durch die Wahl $T_k(t) = (2a^3\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega t}$. Nach Parker macht man im allgemeinen Fall den Ansatz

$$T_k(t) = (2a^3\Omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i \int_{t_0}^t \Omega(t') dt'} \quad (4.22)$$

mit einer positiven Funktion Ω . Einsetzen in die Gleichung (4.18) liefert eine Differentialgleichung für Ω ,

$$\Omega^2 = \omega^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{3\ddot{a}}{2a} + \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - \frac{1\ddot{\Omega}}{2\Omega} \equiv F(\Omega) \quad (4.23)$$

Man löst diese Gleichung approximativ durch Iteration,

$$(\Omega^{(n+1)})^2 = F(\Omega^{(n)}) , \quad (4.24)$$

mit dem Startwert $\Omega^{(0)} = \omega$. Wenig ist über die Konvergenz dieser Iteration bekannt. Man bricht sie deshalb nach endlich vielen Schritten n ab, bestimmt die Anfangswerte der Approximation in (4.22), wählt T_k als die entsprechende Lösung von (4.18) und erhält mit (4.21) das sogenannte adiabatische Vakuum n -ter Ordnung. Wie zuerst von Junker gezeigt worden ist, ist bereits das adiabatische Vakuum 0-ter Ordnung (mit den Anfangsbedingungen $T_k(t_0) = (2a^3\omega)^{-\frac{1}{2}}$ und $\dot{T}_k(t_0) = (2a^3\omega)^{-\frac{1}{2}} (-i\omega - \frac{3}{4}H - \frac{1}{2}\frac{\dot{\omega}}{\omega})$) ein Hadamard-Zustand; die höheren Approximationen betreffen also nur den glatten Anteil der Zweipunktfunktion.

Wir kommen jetzt zu der Charakterisierung der Zweipunktfunktion durch die mikrolokale Spektrumsbedingung. Zu ihrer Formulierung benötigen wir einige mathematische Hilfsmittel. Das wichtigste ist das Konzept der Wellenfrontmenge.

Sei t eine Distribution auf dem \mathbb{R}^n , die am Punkt x singulär ist. Sei f eine Testfunktion mit kompaktem Träger, die an der Stelle x nicht verschwindet. Dann ist auch ft am Punkt x singulär. Als Distribution mit kompaktem Träger besitzt ft eine unendlich oft differenzierbare Fouriertransformierte \tilde{ft} . \tilde{ft} wird in einige Richtungen nicht schnell abfallen (anderenfalls wäre ft am Punkt x unendlich oft differenzierbar). Hierbei nennt man eine Funktion g in der Richtung $k \neq 0$ schnell abfallend, wenn es einen offenen Kegel C mit $k \in C$ gibt mit $\sup_{k' \in C} |k'|^N |g(k')| < \infty$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

DEFINITION 4.1. Die Wellenfrontmenge $\text{WF } t$ einer Distribution $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge aller Paare $(x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so dass die Fouriertransformierte \tilde{ft} für keine Testfunktion $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, die bei x nicht verschwindet, schnell in Richtung von k abfällt.

Zun Beispiel gilt für die Deltafunktion $\widetilde{f}\delta(k) = f(0)$, also ist $\text{WF}(\delta) = \{0\} \otimes \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Für die Distribution $\frac{1}{x+i\varepsilon}$ auf \mathbb{R} gilt

$$\frac{\widetilde{f}}{x+i\varepsilon}(k) = -i \int_{-\infty}^k dk' \widetilde{f}(k'), \quad (4.25)$$

also ist die Wellenfrontmenge $\{0\} \otimes \mathbb{R}_+$.

Mit Hilfe der Wellenfrontmengen kann man eine wichtige Aussage über die Ausbreitung von Singularitäten von Lösungen partieller Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten formulieren. Sei $P = \sum_{n=0}^m p_n(x, i\partial)$ ein Differentialoperator, mit homogenen Polynomen p_n vom Grade n in den partiellen Ableitungen und glatten Koeffizienten. Das Polynom höchster Ordnung heißt das Hauptsymbol p_m . Wir nehmen an, dass p_m reellwertig ist. Man definiert die Charakteristik von P als die Menge der Nullstellen von p_m ,

$$\text{char}(P) = \{(x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p_m(x, k) = 0\}. \quad (4.26)$$

Wir fassen jetzt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ als Phasenraum und p_m als Hamiltonfunktion auf. Dann gilt der folgende Satz von Hörmander:

THEOREM 4.1. Sei P ein Differentialoperator mit reellem Hauptsymbol p_m . Sei $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Differentialgleichung $Pt = 0$. Dann ist $\text{WF}(t)$ enthalten in der Charakteristik von P und invariant unter dem Hamiltonschen Fluss, der von p_m erzeugt wird.

Mit Hilfe dieses Theorems können wir sehr leicht die Wellenfrontmenge von Δ_+ berechnen. Das Hauptsymbol des Klein-Gordon-Operators ist k^2 , daher ist die Wellenfrontmenge enthalten in $\mathbb{M} \otimes \{k \in \mathbb{M}^*, k^2 = 0\}$. Der Hamiltonsche Fluss hat Trajektorien $(x(t), k(t)) = (x_0 + tk, k)$. Offenbar ist $\{0, k\}$ für einige lichtartige k in der Wellenfrontmenge, anderenfalls wäre Δ_+ bei 0 regulär. Wir schließen jetzt aus dem obigen Theorem, dass dann auch die Punkte $(x, k) = (tk, k)$ in der Wellenfrontmenge liegen. Da Δ_+ aber für raumartige Argumente glatt ist, kann (x, k) nur dann in der Wellenfrontmenge liegen, wenn k parallel zu x ist. Wegen der Lorentzinvarianz von Δ_+ muss auch die Wellenfrontmenge lorentzinvariant sein. Zu Anfang haben wir bereits gesehen, dass die Fouriertransformierten von $f\Delta_+$ außerhalb des Vorwärtlichtkegels schnell abfallen. Damit erhalten wir das Ergebnis

$$\text{WF}(\Delta_+) = \{(x, k), x^2 = 0, k^2 = 0, x \parallel k, k_0 > 0\}. \quad (4.27)$$

Da die Distribution Δ der antisymmetrische Anteil von Δ_+ ist, ist ihre Wellenfrontmenge

$$\text{WF}(\Delta) = \{(x, k), x^2 = 0, k^2 = 0, x \parallel k, k \neq 0\}. \quad (4.28)$$

Die Kommutatorfunktion $E(x, y) = \Delta(x - y)$ hat also die Wellenfrontmenge

$$\text{WF}(E) = \{(x, y; k, k'), (x - y)^2 = 0, k^2 = 0, x - y \parallel k, k + k' = 0, k \neq 0\}. \quad (4.29)$$

Wir wollen jetzt die Wellenfrontmenge der Kommutatorfunktion E auf einer beliebigen global hyperbolischen Raumzeit berechnen. $E(x, y)$ ist eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung in x und y . Das Hauptsymbol des Klein-Gordon-Operators ist $p(x, k) = g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu$. Die Charakteristik besteht aus dem Lichtkegel im Impulsraum,

$$\text{char}(\square_g + m^2) = \{(x, k) \in T^*\mathcal{M}, k^2 = 0\} . \quad (4.30)$$

Die Hamiltonschen Gleichungen mit Hamiltonfunktion p sind

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu &= 2g^{\mu\nu} k_\nu \\ \dot{k}_\mu &= \partial_\mu g^{\nu\rho} k_\nu k_\rho , \end{aligned} \quad (4.31)$$

die Lösungen sind $(x(t), k(t))$ mit einer lichtartigen Geodäten $x(t)$ mit Tangentenvektor $2g^{\mu\nu} k_\nu$. $k(t)$ ist der Paralleltransport von k entlang dieser Geodäte. Wir erkennen aus diesem Beispiel, dass die Information des Propagationssatzes rein geometrisch ist und nicht von der Wahl der Koordinaten abhängt. Tatsächlich ist bereits die Wellenfrontmenge als Teilmenge des Kotangentialbündels $T^*\mathcal{M}$ koordinatenunabhängig definiert.

Nach dem Theorem 4.1 besteht die Wellenfrontmenge von E aus der Vereinigung von Mengen

$$\begin{aligned} \{(x(t), x'(s); k(t), k'(s)) \in T^*(\mathcal{M} \times \mathcal{M}), (x(t), k(t), (x'(s), k'(s)) \\ \text{Lösungen von (4.31), } t, s \in \mathbb{R}\} . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Für x in der Zukunft von x' stimmt E mit der retardierten Greenschen Funktion überein. Wegen der Trägereigenschaften der retardierten Funktion muss die Trajektorie $(x(t), x', k(t), k')$ außerhalb der Zukunft des Punktes x' enden. Nach dem Satz über die Propagation von Singularitäten kann sie nur in einem Punkt der Wellenfrontmenge der Deltafunktion enden. Also geht die Geodäte $x(t)$ durch x' und an dieser Stelle gilt $k + k' = 0$. Wir schließen, dass

$$\text{WF}(E) \subset \{(x, x'; k, k'), (x, k) \sim (x', -k')\} , \quad (4.33)$$

wobei die Relation \sim bedeutet, dass es eine lichtartige Geodäte von x nach x' gibt, dass k und k' (ko)tangential zu dieser Geodäten sind und dass der Paralleltransport von k gerade $-k'$ ergibt.

Tatsächlich gilt sogar Gleichheit in (4.33). Sei Σ eine (raumartige) Cauchyfläche. Wir betrachten die Anfangswerte von E auf Σ . Es ist leicht zu sehen, dass die Wellenfrontmenge unter Ableitungen nicht anwachsen kann. Daher ist $\text{WF}(\partial_\Sigma E) \subset \text{WF}(E)$. In diesem Fall stimmen die beiden Wellenfrontmengen sogar überein, da die Trajektorien des Hauptsymbols von ∂_Σ zeitartig sind. Wir müssen wissen, wie die Wellenfrontmenge einer Distribution sich bei einer Restriktion auf eine Untermannigfaltigkeit verhält. Es gilt

THEOREM 4.2. Sei $t \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$. Sei \mathcal{N} eine Untermannigfaltigkeit von \mathcal{M} . Wenn aus $k \perp T_x \mathcal{N}$, $k \in T_x^* \mathcal{M}$, $x \in \mathcal{N}$ folgt, dass $k \notin \text{WF}(t)$, dann lässt sich t auf

\mathcal{N} einschränken, und die Wellenfrontmenge von $t_{\mathcal{N}}$ ergibt sich aus der Wellenfrontmenge von t durch die Einschränkung der Kotangentialvektoren (im Sinne von Linearformen) auf den Tangentialraum von \mathcal{N} ,

$$\text{WF}(t_{\mathcal{N}}) \subset \{(x, k \upharpoonright_{T_x \mathcal{N}}), x \in \mathcal{N}, (x, k) \in \text{WF}(t)\} . \quad (4.34)$$

Beweis: Wir wollen den Satz für einen Spezialfall beweisen. Sei $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ und sei $\mathcal{N} = \mathbb{R} \times \{0\}$. Durch Multiplikation von t mit einer \mathcal{C}^∞ -Zerlegung der 1 können wir t als Summe von Distributionen mit beliebig kleinem Träger darstellen. Wir können daher o.B.d.A. annehmen, dass t einen kompakten Träger in der Umgebung eines Punktes $x \in \mathcal{N}$ besitzt und dass die Fouriertransformierte von t in einem Kegel um die Richtung $(0, 1)$ schnell abfällt. Wir definieren jetzt $t_{\mathcal{N}}$ mit Hilfe der Fouriertransformierten

$$\langle t_{\mathcal{N}}, \varphi \rangle = \int dk_1 dk_2 \tilde{t}(k_1, k_2) \tilde{\varphi}(-k_1) . \quad (4.35)$$

Nach Voraussetzung fällt \tilde{t} in einem Kegel C um die k_2 -Richtung schnell ab. Außerhalb des Kegels ist \tilde{t} als Fouriertransformierte einer Distribution durch ein Polynom beschränkt. Der entscheidende Punkt ist jetzt, dass $\tilde{\varphi}$, das als Fouriertransformierte einer Testfunktion auf \mathbb{R} schnell abfällt, auch als Funktion auf \mathbb{R}^2 außerhalb von C schnell abfällt. Daher fällt der Integrand in (4.35) schnell ab, und das Integral existiert.

Das Resultat über die Wellenfrontmengen folgt aus der Betrachtung des asymptotischen Verhaltens von $\int dk_2 \tilde{t}(k_1, k_2)$. ■

Aus $\partial_\Sigma E \upharpoonright_{\Sigma \times \Sigma} = \delta_\Sigma$ und $\text{WF}(\delta_\Sigma) = \{(x, x; \mathbf{k}, -\mathbf{k}), x \in \Sigma, \mathbf{k} \in T^*\Sigma\}$ folgt schließlich, dass es zu jedem $\mathbf{k} \in T_x^*\Sigma$ ein $k \in T_x^*\mathcal{M}$ gibt mit $k \upharpoonright_{T_x \Sigma} = \mathbf{k}$ und $(x, x, k, -k) \in \text{WF}(E)$. Es bleibt zu zeigen, dass beide lichtartige Kotangentialvektoren k mit der Projektion \mathbf{k} auftreten. Hierfür muss auf die Literatur verwiesen werden.

Ein indirektes Argument, das die Gleichheit in (4.33) zeigt, beruht auf der Möglichkeit, die Raumzeit lokal so zu deformieren, dass sie in einem gewissen Gebiet mit dem Minkowskiraum übereinstimmt. Dort muss dann die Kommutatorfunktion mit derjenigen des Minkowskiraums übereinstimmen. Deren Wellenfrontmenge ist aber bekannt. Die Wellenfrontmenge an anderen Punkten ergibt sich dann wieder aus dem Propagationssatz.

Wir können jetzt die mikrolokale Spektrumsbedingung für die Zweipunktfunktion formulieren.

DEFINITION 4.2. Eine Zweipunktfunktion ω_2 des freien skalaren Klein-Gordon-Feldes erfüllt die mikrolokale Spektrumsbedingung, wenn

$$\text{WF}(\omega_2) = \{(x, x'; k, k') \in \text{WF}(E), k \in \overline{V_+}\} . \quad (4.36)$$

Offenbar erfüllt $\omega_2^+(x, y) = \Delta_+(x - y)$ die mikrolokale Spektrumsbedingung. Da glatte Funktionen leere Wellenfrontmengen haben und da $\text{WF}(t_1 + t_2) \subset$

$WF(t_1) \cup WF(t_2)$, erfüllen dann auch die Zweipunktfunktionen ω_2^β der KMS-Zustände die mikrolokale Spektrumsbedingung. Tatsächlich fixiert die mikrolokale Spektrumsbedingung die Zweipunktfunktion bereits bis auf einen glatten Anteil. Denn da zwei beliebige Zweipunktfunktionen denselben antisymmetrischen Anteil haben (3.12), ist ihre Differenz symmetrisch in x und x' . Dann ist auch ihre Wellenfrontmenge symmetrisch unter Vertauschung von (x, k) mit (x', k') . Doch $k \in \overline{V_+}$ bedeutet $k' \in \overline{V_-}$. Symmetrie gilt also nur für $k = k' = 0$. Da $(k, k') = 0$ aber nach Definition der Wellenfrontmenge ausgeschlossen ist, schließen wir, dass die Wellenfrontmenge der Differenz leer ist. Das aber bedeutet, dass die Differenz eine glatte Funktion ist.

Wir haben jetzt 3 Konzepte zur Charakterisierung physikalisch akzeptabler Zweipunktfunktionen kennen gelernt, die Hadamard-Bedingung, die adiabatischen Vakua und die mikrolokale Spektrumsbedingung. Es gilt das folgende Theorem.

- THEOREM 4.3.** (i) Die Hadamard-Bedingung ist äquivalent zur mikrolokalen Spektrumsbedingung.
- (ii) Die adiabatischen Vakua n -ter Ordnung ($n = 0, 1 \dots$) erfüllen die mikrolokale Spektrumsbedingung.
- (iii) Grund- und KMS-Zustände in ultrastatischen Raumzeiten erfüllen die mikrolokale Spektrumsbedingung.
- (iv) Es gibt höchstens einen stationären Zustand auf der Schwarzschildraumzeit, der sich so auf die Kruskalraumzeit fortsetzen lässt, dass die mikrolokale Spektrumsbedingung erfüllt ist.

Der erste Punkt wurde von Radzikowski und Köhler bewiesen, der zweite von Junker. Der dritte beruht auf eine Arbeit von Fulling, Narcovich und Wald, die gezeigt haben, dass diese Zustände die Hadamard-Bedingung erfüllen. Der vierte wurde zuerst von Kay und Wald bewiesen. Ein eleganter Beweis wurde von Andronache gefunden.

Wickpolynome, Renormierung und wechselwirkende Felder

Wir wollen jetzt andere als freie Felder betrachten. Die einfachsten Beispiele dafür sind die sogenannten Wickpolynome. Mit ihrer Hilfe werden wir später auch die wechselwirkenden Felder konstruieren.

Bereits das freie Feld ist singulär und kann als operatorwertige Distribution nicht punktweise mit sich selbst multipliziert werden. Der Vakuumerwartungswert von $\varphi(x)^2$ z.B. ist formal gegeben durch

$$\Delta_+(0) = (2\pi)^{-3} \int d^3\mathbf{p} (2\mu(\mathbf{p}))^{-1} = \infty .$$

Man definiert jetzt das Wick-Produkt durch $:\varphi(x)\varphi(y): := \varphi(x)\varphi(y) - \Delta_+(x-y)$. Man sieht leicht, dass die Matrixelemente des Wick-Produkts auf die Diagonale $x = y$ eingeschränkt werden können. Tatsächlich ist $:\varphi(x)^2:$ sogar eine operatorwertige Distribution. Dies wurde zuerst von Garding und Wightman bewiesen. Die Grundidee des Beweises ist bereits bei der Berechnung der Zweipunktfunktion zu sehen. Es gilt

$$\omega(:\varphi(x)^2::\varphi(y)^2:) = 2\Delta_+(x-y)^2. \quad (5.1)$$

Δ_+^2 kann als Distribution definiert werden durch

$$\Delta_+^2(f) = (2\pi)^{-4} \int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{q}}{4\mu(\mathbf{p})\mu(\mathbf{q})} \tilde{f}(\mu(\mathbf{p}) + \mu(\mathbf{q}), \mathbf{p} + \mathbf{q}) , \quad (5.2)$$

da der Integrand in \mathbf{p} und \mathbf{q} schnell abfällt. Wesentlich hierfür ist, dass der Träger der Fouriertransformierten von Δ_+ im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel liegt.

Multiplizierbarkeit von Distributionen hängt nur von der lokalen Singularitätsstruktur ab. Daher kann sie durch eine Eigenschaft der Wellenfrontmengen charakterisiert werden. Es gilt der folgende Satz:

THEOREM 5.1. Seien t_1 und t_2 Distributionen, so dass aus $(x, k_1) \in \text{WF}(t_1)$, $(x, k_2) \in \text{WF}(t_2)$ folgt: $k_1 + k_2 \neq 0$. Dann existiert das punktweise Produkt $t_1 t_2$. Es gilt $\text{WF}(t_1 t_2) \subset \text{WF}(t_1) \cup \text{WF}(t_2) \cup (\text{WF}(t_1) + \text{WF}(t_2))$.

Beweis: Wir definieren das Produkt als Distribution auf Testfunktionen mit genügend kleinem Träger. Dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass t_1 und t_2 kompakten Träger haben und dass die Funktion $\tilde{t}_1(k_1)\tilde{t}_2(k_2)$ in einem offenen Kegel um die Richtung $(k_1, k_2 = -k_1)$ schnell abfällt. Daher kann $t_1(x_1)t_2(x_2)$ auf

die Diagonale $x_1 = x_2$ eingeschränkt werden. Die Wellenfrontmenge von $t_1 \otimes t_2$ besteht aus Punkten $(x_1, x_2; k_1, k_2)$, so dass $(x_1, k_1) \in \text{WF}(t_1)$ und $k_2 = 0$ oder $(x_2, k_2) \in \text{WF}(t_2)$ und $k_1 = 0$ oder $(x_1, k_1) \in \text{WF}(t_1)$ und $(x_2, k_2) \in \text{WF}(t_2)$. Der Tangentialraum der Diagonale besteht aus Punkten $(x, x; \xi, \xi)$, $\xi \in T_x \mathcal{M}$. Aus $\langle (k_1, k_2), (\xi, \xi) \rangle = \langle k_1 + k_2, \xi \rangle$ ergibt sich die Aussage über die Wellenfrontmenge. \blacksquare

Wir erkennen sofort, dass die mikrolokale Spektrumsbedingung garantiert, dass ω_2 mit sich selbst multipliziert werden kann. Man kann dann das Analogon des Garding-Wightman-Theorems auch für quasifreie Zustände auf gekrümmten Raumzeiten beweisen. Dies wurde in einer Arbeit von Brunetti, Köhler und mir getan. Man definiert operatorwertige Distributionen $:\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n):$ in der folgenden Weise. Man setzt $:1 := 1$ und $:\varphi(x) := \varphi(x)$. Das Produkt von $n + 1$ Faktoren wird dann durch

$$:\varphi(x) \prod_{i=1}^n \varphi(x_i): = \varphi(x) : \prod_{i=1}^n \varphi(x_i): - \sum_{k=1}^n \omega_2(x, x_k) : \prod_{i \in \{1, \dots, n\}, i \neq k} \varphi(x_i): \quad (5.3)$$

rekursiv bestimmt. Die so eingeführten operatorwertigen Distributionen auf \mathcal{M}^n lassen sich jetzt auf die totale Diagonale $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ einschränken:

THEOREM 5.2. Sei ω ein quasifreier Zustand und sei $(\mathfrak{H}, \Omega, \pi)$ die GNS-Konstruktion zu ω . Dann existieren die Wickprodukte $:\varphi(x)^n:$ auf dem dichten Unterraum $\pi(\mathfrak{A})\Omega$ als operatorwertige Distributionen.

Bei dieser Definition entsteht allerdings dadurch ein Problem, dass es keinen ausgezeichneten Zustand gibt, der dem Vakuum entspricht. Die Auswahl des Zustands geht in zweifacher Hinsicht in die Definition der Wickpolynome ein: Zunächst direkt durch die Subtraktion. Verwendet man einen anderen Hadamard-Zustand, so unterscheiden sich die Wick-Polynome um endliche Terme. Das zweite Problem ist technischer Natur und kommt daher, dass die verschmierten Wickpolynome unbeschränkte Operatoren sind, die auf einem dichten Unterraum des jeweiligen GNS-Hilbertraums definiert sind. Es ist Verch gelungen, zu zeigen, dass die GNS-Darstellungen von Algebren zu kompakten Gebieten unitär äquivalent sind. Es ist aber nicht anzunehmen, dass die Garding-Wightman-Domänen bei dieser unitären Transformation ineinander abgebildet werden.

Dieses Problem kann durch eine verbesserte Definition der Wickprodukte gelöst werden. Man nutzt dabei aus, dass die mit der Zweipunktfunktion ω_2 definierten Wickprodukte durch die erzeugende Funktion

$$:e^{i\varphi(f)}: = e^{\frac{1}{2}\omega_2(f \otimes f)} e^{i\varphi(f)} \quad (5.4)$$

charakterisiert werden können. Da

$$\omega(e^{i\varphi(f)}) = e^{-\frac{1}{2}\omega_2(f \otimes f)}, \quad (5.5)$$

verschwinden die Erwartungswerte der Wickpolynome im Zustand ω . Ist ω' ein anderer quasifreier Zustand, dessen Zweipunktfunktion die mikrolokale Spektrumsbedingung erfüllt, dann gilt $\omega'_2 - \omega_2 = F$ mit einer C^∞ -Funktion F . Es folgt

$$\omega'(:\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{2n}):) = \sum_{\text{Paarungen Paare}} \prod F(x_i, x_j) \quad , \quad (5.6)$$

in Analogie zur Formel (3.17). Die Erwartungswerte von Wickpolynomen in quasifreien Hadamardzuständen sind also glatte Funktionen.

Das Produkt zweier Wickprodukte kann in eine Summe von Wickprodukten entwickelt werden (Wicksches Theorem)

$$\begin{aligned} & : \prod_{i \in I} \varphi(x_i) : : \prod_{j \in J} \varphi(x_j) : \\ &= \sum_{I_0 \subset I} \sum_{\alpha: I_0 \rightarrow J \text{ injektiv}} \prod_{i \in I_0} \omega_2(x_i, x_{\alpha(i)}) : \prod_{i \in (I \setminus I_0) \cup (J \setminus \alpha(I_0))} \varphi(x_i) : . \end{aligned} \quad (5.7)$$

Wir benutzen diese Formel zu einer algebraischen Definition der Wickprodukte. Wir betrachten den Vektorraum \mathfrak{W} , der erzeugt wird von den Elementen

$$\phi^{\otimes n}(t) = \int : \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) : t(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n. \quad (5.8)$$

Hierbei lassen wir als Testfunktionen symmetrische Distributionen mit kompaktem Träger zu, deren Wellenfrontmenge keine Impulse in $\overline{V_+^n \cup V_-^n}$ enthalten. Das Produkt zweier Monome (5.8) ist erklärt durch

$$\phi^{\otimes n}(t) \phi^{\otimes m}(s) = \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \phi^{\otimes n+m-2k}(t \otimes_k s) \quad (5.9)$$

mit dem k -fach kontrahierten Tensorprodukt

$$\begin{aligned} (t \otimes_k s)(x_1, \dots, x_{n+m-2k}) &= \text{symmetrischer Anteil von} \\ & \frac{n!m!}{k!(n-k)!(m-k)!} \int dy_1 \cdots dy_n \omega_2(y_1, y_2) \cdots \omega_2(y_{2k-1}, y_{2k}) \\ & t(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, y_3, \dots, y_{2k-1}) s(x_{n-k+1}, \dots, x_{n+m-2k}, y_2, y_4, \dots, y_{2k}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Man überzeugt sich jetzt davon, dass das kontrahierte Tensorprodukt wieder eine zulässige Wellenfrontmenge besitzt. Damit erhält \mathfrak{W} ein Produkt. Es ist assoziativ, und die $*$ -Operation wird erklärt durch $\varphi^{\otimes n}(t)^* = \varphi^{\otimes n}(\bar{t})$. Jeder quasifreie Hadamard-Zustand induziert über (5.6) einen Zustand auf \mathfrak{W} .

Wir wollen jetzt in einer gegebenen GNS-Darstellung zu einem quasifreien Hadamardzustand ω den Definitionsbereich der Wickpolynome bestimmen. Sei Ω der Vektor im GNS-Hilbertraum, der den Zustand ω induziert. Wir betrachten die vektorwertige Distribution $\Psi(x) = : \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) : \Omega$ auf \mathcal{M}^n . Die Wellenfrontmenge einer vektorwertigen Distribution ist durch das asymptotische Verhalten

der Normen der Vektoren $\Psi(fe^{ikx})$ definiert. Es gilt

$$\|\Psi(fe^{ikx})\|^2 = \sum_{\sigma \in S_n} \int dx dy \overline{f(x)} f(y) e^{-ik(x-y)} \prod_{i=1}^n \omega_2(x_i, y_{\sigma(i)}). \quad (5.11)$$

Aus der mikrolokalen Spektrumsbedingung folgt, dass $\text{WF}(\Psi) = \{(x, k) \in T^*\mathcal{M}^n, k \in (\partial V_-)^n, k \neq 0\}$. Wir betrachten jetzt den folgenden dichten Unterraum von \mathfrak{H} . Für reelle Testfunktionen sind die Operatoren $e^{i\varphi(f)}$ unitär und daher auf dem ganzen Hilbertraum definiert. Das Feld $\varphi(f)$ kann nach dem Satz von Stone als Ableitung der einparametrischen unitären Gruppe $e^{it\varphi(f)}$ bei $t = 0$ definiert werden. In Verallgemeinerung dieses Sachverhalts betrachten wir den Unterraum \mathfrak{D}_1 der Vektoren Ψ , für die die Funktionen $e^{i\varphi(f)}\Psi$ unendlich oft differenzierbar sind, in dem Sinne, dass es vektorwertige Distributionen $\Psi^{(n)}$ auf \mathcal{M}^n gibt, so dass für eine stetige Seminorm p auf dem Testfunktionenraum $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ gilt

$$\|e^{i\varphi(f)}\Psi - \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} \Psi^{(n)}(f^{\otimes n})\| p(f)^{-m} \rightarrow 0, \quad p(f) \rightarrow 0. \quad (5.12)$$

\mathfrak{D}_1 ist ein invarianter Definitionsbereich der Felder. Im Unterschied zu dem Bereich $\pi(\mathfrak{Q})\Omega$ hängt er nicht von der Wahl eines Vektors im Darstellungsraum ab. Auf \mathfrak{D}_1 können normalgeordnete Produkte als Distributionen $\Psi(x)$ auf \mathcal{M}^n erklärt werden. Sei jetzt \mathfrak{D} der Teilraum von \mathfrak{D}_1 , auf dem die Wellenfrontmengen dieser Distributionen die Bedingung

$$\text{WF}(\Psi) \subset \{(x, k), k \in \overline{V_-^n}\} \quad (5.13)$$

erfüllen. Es gilt

THEOREM 5.3. Seien $\Psi', \Psi \in \mathfrak{D}$. Dann ist

$$(\Psi', : \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) : \Psi) \quad (5.14)$$

unendlich oft differenzierbar.

Im nächsten Schritt wollen wir Wechselwirkungen einführen. Wir betrachten zunächst eine Theorie im Minkowskiraum und addieren zum Hamiltonoperator H eines freien Feldes einen zeitabhängigen Wechselwirkungsterm

$$H_{I,t} = \int d^3\mathbf{x} A(0, \mathbf{x}) g(t, \mathbf{x}), \quad g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \quad (5.15)$$

mit einem Wickpolynom A . Der Zeitentwicklungsoperator $U(t, s)$ im Wechselwirkungsbild genügt der Gleichung

$$i \frac{d}{dt} U(t, s) = H_I(t) U(t, s) \quad (5.16)$$

mit

$$H_I(t) = e^{iHt} H_{I,t} e^{-iHt} = \int d^3\mathbf{x} A(t, \mathbf{x}) g(t, \mathbf{x}), \quad g \in \mathcal{D}(\mathbb{M}) \quad (5.17)$$

und der Anfangsbedingung $U(s, s) = 1$. Durch Integration findet man die Integralgleichung

$$U(t, s) = 1 - i \int_s^t dt_1 H_I(t_1) U(t_1, s). \quad (5.18)$$

Iteration liefert die Dysonreihe

$$U(t, s) = T e^{-i \int_s^t dt_1 H_I(t_1)} \quad (5.19)$$

mit dem zeitgeordneten Exponential

$$T e^{-i \int_s^t dt_1 H_I(t_1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{[s, t]^n} dt_1 \cdots dt_n T H_I(t_1) \cdots H_I(t_n). \quad (5.20)$$

Hierbei ist das n -fache zeitgeordnete Produkt einer operatorwertigen Funktion $C(t)$ definiert als diejenige symmetrische Funktion von t_1, \dots, t_n , die für $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ mit $C(t_1) \cdots C(t_n)$ übereinstimmt.

Die S-Matrix S ist definiert als der Limes von $U(t, s)$ für $t \rightarrow \infty$ und $s \rightarrow -\infty$. Da nach Voraussetzung H_I außerhalb eines endlichen Intervalls verschwindet, gilt $S = U(t, s)$ für $t, -s$ genügend groß. Formal ergibt sich

$$\begin{aligned} S &= T e^{-i \int d^4 A(x) g(x)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n T A(x_1) \cdots A(x_n) g(x_1) \cdots g(x_n). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Das wechselwirkende Feld wird definiert durch

$$\varphi_{int}(x) = U(x^0, s)^{-1} \varphi(x) U(x^0, s). \quad (5.22)$$

Man findet im Fall, dass das Wickpolynom A keine Zeitableitungen enthält,

$$\begin{aligned} (\square + m^2) \varphi_{int}(x) &= -i U(x^0, s)^{-1} [H_I(x^0), \dot{\varphi}(x)] U(x^0, s) \\ &= U(x^0, s)^{-1} \frac{\partial A}{\partial \varphi}(x) U(x^0, s). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Eine elegante Definition des wechselwirkenden Feldes geht auf Bogoljubov zurück. Seien $h \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, $K(t) = \int d^3 \mathbf{x} \varphi_{int}(t, \mathbf{x}) h(t, \mathbf{x})$ und $K_0(t) = \int d^3 \mathbf{x} \varphi(t, \mathbf{x}) h(t, \mathbf{x})$. Seien ferner $V_\lambda(t, s)$ und $U_\lambda(t, s)$ Zeitentwicklungsoperatoren zu den zeitabhängigen Hamiltonoperatoren $\lambda K(t)$ und bzw. $\lambda K_0(t)$. Dann gilt

$$V_\lambda(t, s) = U(t, s)^{-1} U_\lambda(t, s) \quad (5.24)$$

Der Term 1. Ordnung in λ ist

$$\int_s^t dt' K(t') = -i \varphi_{int}(h) \quad (5.25)$$

für $t, -s$ genügend groß. Ist $S(g, h)$ die S-Matrix zur Wechselwirkungs-Lagrangedichte $gA + h\varphi$, so folgt Bogoljubovs Formel

$$\varphi_{int}(x) = \frac{\delta}{i\delta h(x)} S(g, 0)^{-1} S(g, h) |_{h=0} . \quad (5.26)$$

Wir erkennen, dass wir zu einer störungstheoretischen Konstruktion der wechselwirkenden Felder lediglich die zeitgeordneten Produkte von Wickpolynomen als operatorwertige Distributionen kennen müssen. Die in der Herleitung benutzte Einschränkung der Felder auf scharfe Zeiten (sie existiert in 4 Dimensionen nur für das freie Feld selbst) ist in der Bogoljubovschen Formel eliminiert worden.

Für lokale Felder A , d.h. für Felder, die bei raumartigen Abständen kommutieren, ist die Zeitordnungsvorschrift unabhängig vom Lorentzsystem. Denn für Argumente, bei denen sich die Zeitordnung ändert, kommt es auf die Reihenfolge nicht an.

Die wechselwirkenden Felder zu einer festen Zeit sind unitär äquivalent zum freien Feld und vertauschen daher für nicht zusammenfallende Punkte. Wegen der Unabhängigkeit der Definition vom Lorentzsystem vertauschen sie dann auch für beliebige raumartig getrennte Punkte. Dasselbe Argument gilt auch für global hyperbolische Raumzeiten.

Als Beispiel betrachten wir das Feld φ selbst als Lagrangedichte. Es gilt

$$S(g) =: e^{i\varphi(g)} : e^{\frac{i}{2}\omega_F(g\otimes g)} \quad (5.27)$$

mit dem Feynmanpropagator

$$i\omega_F(x, y) = \omega_2(x, y) + iE_{av}(x, y) \quad (5.28)$$

Für die zeitgeordneten Produkte erhält man

$$T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n) = \sum_G : \prod_j \varphi(x_j) : \prod_l i\omega_F(x_{s(l)}, x_{r(l)}) . \quad (5.29)$$

Hier wird über alle Graphen G mit Vertizes $1, \dots, n$ summiert, bei denen an jedem Vertex genau eine Linie ankommt, wobei auch äußere Linien zugelassen sind, die nur einen Endpunkt haben. Das Produkt über j erstreckt sich über die Vertizes an den äußeren Linien. Das Produkt über l geht über die inneren Linien des Graphen, mit Anfangspunkt $s(l)$ („source“) und Endpunkt $r(l)$ („range“) bezüglich einer willkürlichen Orientierung (der Feynmanpropagator ist symmetrisch).

Für Wickpolynome ist die kombinatorische Formel für die zeitgeordneten Produkte ganz ähnlich. Man läßt in der obigen Summe einfach alle Graphen aus, bei denen Vertizes innerhalb einer Normalordnung durch Linien verbunden werden. Es gilt

$$T : \varphi^{n_1}(x_1) : : \varphi^{n_k}(x_k) := \sum_G c(G) : \varphi^{l_1}(x_1) \cdots \varphi^{l_k}(x_k) : \prod_{i < j} \omega_F(x_i, x_j)^{l_{ij}}, \quad (5.30)$$

wobei über alle Graphen G mit Vertizes $1, \dots, k$ summiert wird, in denen vom Vertex i n_i Linien ausgehen. l_i ist die Zahl der äußeren Linien am Vertex i , l_{ij} ist die Zahl der Linien zwischen den Vertizes i und j . Der kombinatorische Faktor $c(G)$ ist die Zahl der Graphen \tilde{G} in (5.29) mit Vertizes $(i, j_i), j_i = 1, \dots, n_i, i = 1, \dots, k$, die bei Verschmelzung der Vertizes $(i, 1), \dots, (i, n_i)$ zum Vertex i , $i = 1, \dots, k$, den Graphen G ergeben. Es gibt $\binom{n_i}{l_i}$ Möglichkeiten, die l_i Vertizes mit äußeren Linien unter den n_i Vertizes, die zum Vertex i verschmelzen, auszuwählen. Die verbleibenden $n_i - l_i$ Vertizes lassen sich in $\frac{(n_i - l_i)!}{l_{i1}! \dots l_{ik}!}$ verschiedene Weisen in k Teilmengen zu je l_{ij} Elementen unterteilen. Weiter gibt es für die l_{ij} Linien, die die Vertizes i, j verbinden, $l_{ij}!$ Möglichkeiten. Es folgt

$$c(G) = \frac{\prod_i n_i!}{\prod_i l_i! \prod_{i < j} l_{ij}!} . \quad (5.31)$$

Im Gegensatz zu den Produkten im Sinne von Operatoren sind aber die zeitgeordneten Produkte von Wickpolynomen zunächst nicht wohldefiniert. Solange die Argumente alle verschieden sind, kann das zeitgeordnete Produkt auf das gewöhnliche Produkt zurückgeführt werden. Bei zusammenfallenden Punkten aber gibt es Probleme. Diese sind die bekannten Ultraviolettprobleme der Quantenfeldtheorie, die in einem naiven Zugang zu Divergenzen führen.

Betrachten wir zunächst das zeitgeordnete Produkt zweier Felder

$$T(\varphi(x)\varphi(y)) = : \varphi(x)\varphi(y) : + i\omega_F(x, y) . \quad (5.32)$$

Der Feynmanpropagator im Minkowskiraum ist $\omega_F(x, y) = \Delta_F(x - y)$ mit

$$\Delta_F(x - y) = (2\pi)^{-4} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} . \quad (5.33)$$

Der Feynmanpropagator ist ebenso wie die retardierte Funktion eine Lösung der inhomogenen Klein-Gordon-Gleichung $(\square_g + m^2)\omega_F = -\delta$ und besitzt die Wellenfrontmenge

$$\begin{aligned} \text{WF}(\omega_F) = & \{(x, x'; k, k') \in \text{WF}(E), k \in \overline{V_\pm} \text{ if } x \in J_\pm(x')\} \\ & \cup \{(x, x, k, -k), k \neq 0\} . \end{aligned} \quad (5.34)$$

$\omega_F(x, y)$ kann nach unserem Theorem über die Multiplizierbarkeit von Distributionen für $x \neq y$ mit sich selbst multipliziert werden. Bei $x = y$ aber können sich Impulse zu 0 addieren; dort ist das punktweise Produkt zunächst undefiniert.

Im Minkowskiraum können wir den Feynmanpropagator durch seine Fouriertransformierte beschreiben und dann versuchen, das entsprechende Faltungsintegral im Impulsraum zu berechnen. Wir finden z.B.

$$\Delta_F(x)^2 = (2\pi)^{-8} \int d^4p e^{-ipx} \int d^4q \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - q)^2 - m^2 + i\varepsilon)} . \quad (5.35)$$

Der Integrand verhält sich für große q wie $(q^2)^{-2}$, daher wird das Integral in 4 Dimensionen logarithmisch divergieren.

Zur Lösung der Ultraviolettprobleme in der Störungsreihe der Quantenfeldtheorie sind im Laufe der letzten 50 Jahre eine Vielzahl von scharfsinnigen und trickreichen Verfahren entwickelt worden, angefangen von den Arbeiten zur Renormierung von Feynman, Schwinger, Tomonaga und Dyson, die das Problem für die unteren Ordnungen lösen konnten und die zeigen konnten, dass die so erhaltenen Vorhersagen der QED mit den Experimenten phantastisch genau übereinstimmen. Der Beweis zu allen Ordnungen enthielt allerdings einen Fehler, der erst in den 70er Jahren durch die Arbeiten von Bogoljubov, Parasiuk, Hepp, Zimmermann, Epstein und Glaser beseitigt werden konnte. Zur Verallgemeinerung der Renormierung auf nichtabelsche Eichtheorien wurde von 't Hooft und Veltman die Methode der dimensionalrenormierung entwickelt, die heute in der Praxis meistens benutzt wird. In dieser Vorlesung kann auf die unterschiedlichen Verfahren nicht eingegangen werden.

Ein besonders elegantes Verfahren ist von Epstein und Glaser auf der Grundlage von Ideen von Stückelberg und Bogoljubov entwickelt worden. Im Unterschied zu den meisten anderen Verfahren läßt es sich bequem im Ortsraum formulieren und eignet sich daher besonders gut zur Renormierung auf gekrümmten Raumzeiten. Ich werde es hier in einer modernisierten Form vorstellen.

Wir haben bereits gesehen, dass es ausreicht, die zeitgeordneten Produkte von Wickpolynomen zu konstruieren. Wir formulieren die genauen Bedingungen und folgen dabei der Doktorarbeit von F.-M. Boas. Die klassischen Felder, die sich aus φ durch Produkte und Ableitungen, ohne Berücksichtigung der Feldgleichungen, gewinnen lassen, erzeugen einen linearen Raum L . Man sucht jetzt eine Familie von multilinearen Abbildungen T_n von L^n in die operatorwertigen Distributionen auf \mathcal{M}^n mit Werten in \mathfrak{W} . Diese sollen die folgenden Eigenschaften besitzen:

- (i) $T_0 = 1$
- (ii) $T_1(A) =: A$
- (iii) $T_n(A_1, \dots, A_n)(x_1, \dots, x_n)$ ist symmetrisch unter Vertauschung der Indizes.
- (iv) Wenn keiner der Punkte x_1, \dots, x_k in der Vergangenheit eines der Punkte x_{k+1}, \dots, x_n liegt, dann gilt die Faktorisierungsgleichung

$$T_n(A_1, \dots, A_n)(x_1, \dots, x_n) = T_k(A_1, \dots, A_k)(x_1, \dots, x_k) T_{n-k}(A_{k+1}, \dots, A_n)(x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (5.36)$$

Insbesondere vertauschen zeitgeordnete Produkte, wenn ihre Argumente raumartig getrennt sind.

Wir können jetzt die S-Matrix für die Wechselwirkungs-Lagrangedichte $\mathcal{L}(x) = \sum A_i g_i(x)$ durch

$$S(\mathcal{L}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n} T_n(A_{i_1}, \dots, A_{i_n})(g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_n}) \quad (5.37)$$

definieren. Sie erfüllt die folgende Funktionalgleichung

$$S(f + g + h) = S(f + g)S(g)^{-1}S(g + h) . \quad (5.38)$$

Hierbei sind f, g, h Testfunktionen mit Werten in L , und der Träger von f hat leeren Durchschnitt mit der Vergangenheit des Trägers von h . Das Inverse der S-Matrix ist als formale Potenzreihe wohldefiniert:

$$S(g)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n} \bar{T}_n(A_{i_1}, \dots, A_{i_n})(g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_n}). \quad (5.39)$$

mit den antizeitgeordneten Produkten \bar{T}_n . Die antizeitgeordneten Produkte erfüllen analoge Bedingungen wie die zeitgeordneten Produkte, wobei bei der Faktorisierungsbedingung (5.36) Vergangenheit durch Zukunft ersetzt werden muss. Sie sind explizit gegeben durch

$$\bar{T}_n(A_1, \dots, A_n)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})} (-1)^{|P|+n} \prod_{I \in P} T(I) \quad (5.40)$$

mit der Menge der geordneten Partitionen $P = (I_1, \dots, I_{|P|}) \in \mathcal{P}$ und mit der Abkürzung $T(I) = T_{|I|}(A_{i_1}, \dots, A_{i_{|I|}})(x_{i_1}, \dots, x_{i_{|I|}})$, $\{i_1, \dots, i_{|I|}\} = I$.

Zum Beweis von (5.38) betrachten wir die relativen S-Matrizen $V(g, h) = S(g)^{-1}S(g+h)$. Ihre Potenzreihenentwicklung definiert die retardierten Produkte $R_{n,m}$ als multilineare Abbildungen von L^{n+m} in operatorwertige Distributionen auf \mathcal{M}^{n+m} . Mit den entsprechenden Abkürzungen wie oben erhält man

$$R(X; Y) = \sum_{I \subset X} (-1)^{|I|} \bar{T}(I) T(X \setminus I \cup Y) . \quad (5.41)$$

Hierbei sind X und Y disjunkte endliche Indexmengen.

Die retardierten Produkte $R(X, Y)$ verschwinden, wenn einer der Punkte $x_i, i \in X$, nicht in der Vergangenheit wenigstens eines der Punkte $y_j, j \in Y$, liegt. Denn sei $I \subset X$ die Menge der Indizes mit dieser Eigenschaft. Dann liegt $x_j, j \in X \setminus I$, in der Vergangenheit eines Punktes $y_k, k \in Y$, also liegt $x_i, i \in I$, auch nicht in der Vergangenheit eines der Punkte $x_j, j \in X \setminus I$. Aufgrund der Faktorisierungseigenschaften der zeitgeordneten und antizeitgeordneten Produkte gilt

$$R(X; Y) = \sum_{J \subset I, K \subset X \setminus I} (-1)^{|J|+|K|} \bar{T}(K) \bar{T}(J) T(I \setminus J) T(X \setminus (I \cup K) \cup Y) . \quad (5.42)$$

Die Summe über J verschwindet identisch für nichtleeres I , da die zeitgeordneten Produkte gerade die Koeffizienten der inversen S-Matrix sind.

Also gilt $V(g, h) = V(f + g, h)$, wenn $\text{supp } f \cap \mathcal{J}_-(\text{supp } h) = \emptyset$. Daraus folgt die Funktionalgleichung (5.38).

Zur Konstruktion der zeitgeordneten Produkte geht man induktiv vor. Aufgrund der Anfangsbedingungen und der Faktorisierungsgleichung ist $T_2(\varphi^n, \varphi^m)$

auf $\mathcal{M}^2 \setminus D$ mit der Diagonale $D = \{(x, x), x \in \mathcal{M}\}$ schon bekannt. Es gilt

$$T_2(\varphi^n, \varphi^m)(x, y) = \sum_k \frac{n!m!}{k!(n-k)!(m-k)!} (i\omega_F(x, y))^k : \varphi(x)^{n-k} \varphi(y)^{m-k} : . \quad (5.43)$$

Wir untersuchen das Fortsetzungsproblem zunächst im Minkowskiraum. Für $x \notin \overline{V_-}$ finden wir

$$(i\Delta_F(x))^k = \Delta_+(x)^k = \int d^4p e^{-ipx} \rho_k(M) \Delta_+(x, M) \quad (5.44)$$

mit der Vakuumzweipunktfunktion $\Delta_+(x, M)$ zur Masse M und dem Phasenraumvolumen $\rho_k(p)$ eines k -Teilchenzustands mit Gesamtimpuls p ,

$$\rho_k(p) = \int \prod_{i=1}^k \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2\mu(\mathbf{p}_i)} \delta^{(4)}(p - \sum p_i) |_{(p_i)_0 = \mu(\mathbf{p}_i), i=1, \dots, k} . \quad (5.45)$$

Wegen Lorentzkovarianz hängt es nicht von p^2 ab; es verschwindet außerhalb von $\overline{V_+}$. In $\overline{V_+}$ verwenden wir als Koordinaten $(M, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ mit $p = (\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + M^2}, \mathbf{p})$ mit der Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial p}{\partial(M, \mathbf{p})} \right| = \frac{M}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + M^2}} \quad (5.46)$$

Damit erhält man

$$\Delta_+(x)^k = (2\pi)^3 \int dM^2 \rho_k(M) \Delta_+(x, M) . \quad (5.47)$$

Für große M verhält sich ρ_k wie M^{2k-4} . Für $k=2$ findet man

$$\rho_2(M) = \frac{1}{4(2\pi)^5} \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{M} . \quad (5.48)$$

Eine entsprechende Überlegung gilt für $x \notin \overline{V_+}$. Wir erhalten für $x \neq 0$

$$(i\Delta_F(x))^k = (2\pi)^3 \int dM^2 \rho_k(M) i\Delta_F(x, M) . \quad (5.49)$$

Es ist jetzt nicht möglich, die Fortsetzung unter dem Integralzeichen durchzuführen und dann zu integrieren. Da $\Delta_F(x, M) \sim \frac{1}{M^2}$, würde das Integral divergieren.

Stattdessen kann man ausnutzen, dass die Distributionen $\Delta_+(x, M)$ Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung zur Masse M sind. Daher gilt für $l \in \mathbb{N}$

$$\Delta_+(x)^k = (-\square + a^2)^l (2\pi)^3 \int dM^2 \frac{\rho_k(M)}{(M^2 + a^2)^l} \Delta_+(x, M) . \quad (5.50)$$

Für $l \geq k - 1$ konvergiert dann die Darstellung

$$(i\Delta_F(x))^k = (-\square + a^2)^l (2\pi)^3 \int dM^2 \frac{\rho_k(M)}{(M^2 + a^2)^l} i\Delta_F(x, M) \quad (5.51)$$

und stellt eine gewünschte Fortsetzung dar. Die Fortsetzung hängt von l und a^2 ab. Zwei verschiedene Fortsetzungen unterscheiden sich um eine Distribution mit Träger $\{0\}$, also um ein Vielfaches der Deltafunktion oder einer ihrer Ableitungen. Z. B. gilt im Fall $k = 2, l = 1$ und $m = 0$

$$(i\Delta_F(x))_a^2 - (i\Delta_F(x))_b^2 = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{a}{b} \delta(x). \quad (5.52)$$

Man kann jetzt das allgemeine Problem studieren, unter welchen Bedingungen sich Distributionen auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ zu Distributionen auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen lassen und wie sich die Fortsetzungen klassifizieren lassen.

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $t_0(x) = \frac{1}{|x|}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da t_0 bei 0 nicht integrabel ist, definiert es keine Distribution auf \mathbb{R} . Die Divergenz bei 0 kann aber kompensiert werden, wenn die Testfunktion f bei 0 verschwindet. In diesem Fall ist f von der Form xg mit einer anderen Testfunktion g , und wir können setzen

$$t_0(f) = \int dx \frac{x}{|x|} g(x). \quad (5.53)$$

Sei h eine festgewählte Testfunktion mit $h(0) = 1$. Jede Testfunktion f läßt sich schreiben als $f = f(0)h + xg$ mit einer Testfunktion g . Dann bilden die Distributionen

$$t(f) = cf(0) + t_0(xg). \quad (5.54)$$

Fortsetzungen von t_0 auf alle Testfunktionen. Die Divergenz ist verschwunden; geblieben ist eine unbestimmte Konstante. Eine explizite Formel für t erhält man aus der Beobachtung, dass t auf Testfunktionen, die bei Null verschwinden, mit der Ableitung (im Sinne von Distributionen) von $\text{sign}(x) \ln |x|$ übereinstimmt. Daher gilt

$$t(x) = (\text{sign}(x) \ln |x|)' + c\delta(x), \quad (5.55)$$

wobei die Konstante c durch den Wert von t auf einer Testfunktion, die bei Null nicht verschwindet, fixiert wird. Bemerkenswert ist, dass es keine homogene Fortsetzung von $\frac{1}{|x|}$ gibt. Dies ist der Prototyp der Anomalien in der Quantenfeldtheorie.

Im allgemeinen Fall klassifizieren wir nach Steinmann die Singularität einer Distribution mit Hilfe des Skalengrads.

DEFINITION 5.1. Sei t eine Distribution auf \mathbb{R}^n oder $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Der Skalengrad von t ist definiert als

$$\text{sd}(t) = \inf \{ \delta \in \mathbb{R}, \lambda^\delta t(\lambda x) \rightarrow 0 \text{ für } \lambda \rightarrow 0 \} \quad (5.56)$$

Es gelten die beiden folgenden Sätze:

THEOREM 5.4. Sei $t_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ mit $\text{sd}(t_0) < d$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Distribution $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ mit $\text{sd}(t) = \text{sd}(t_0)$ und $t(f) = t_0(f)$ für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$.

THEOREM 5.5. Sei $t_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ mit $\infty > \text{sd}(t_0) \geq d$. Dann gibt es Distributionen $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ mit $\text{sd}(t) = \text{sd}(t_0)$ und $t(f) = t_0(f)$ für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. t ist eindeutig bis auf Addition eines Terms $P(\partial)\delta$ mit einem Polynom P mit $\deg(P) \leq \text{sd}(t_0) - d$.

Der Skalengrad eines Feynmangraphen läßt sich einfach abzählen. Der Feynmanpropagator hat Skalengrad 2. Ein Graph mit n Vertizes und l inneren Linien hat daher Skalengrad $2l$. Im Minkowskiraum ist er wegen Translationsinvarianz eine Distribution in $4(n-1)$ Variablen. Beim induktiven Vorgehen ist er für $x \neq 0$ durch die unteren Ordnungen bestimmt. Im Fall $2l - 4(n-1) < 0$ ist der Feynmangraph dann eine eindeutig bestimmte Distribution, im Fall $2l - 4(n-1) \geq 0$ muss die Mehrdeutigkeit durch sogenannte (Re-)Normierungsbedingungen beseitigt werden.

Auch auf gekrümmten Raumzeiten sind den Feynmangraphen für nicht zusammenfallende Punkte wohldefinierte Distributionen zugeordnet, und beim induktiven Vorgehen ergibt sich, dass ein Graph mit n Vertizes überall bis auf die totale Diagonale $D_n = \{(x, \dots, x) \in \mathcal{M}^n\}$ wohldefiniert ist, falls alle Graphen mit weniger als n Indizes bereits definiert worden sind. Wegen der fehlenden Translationsinvarianz kann dies aber nicht direkt auf das Problem der Fortsetzung auf einen Punkt zurückgeführt werden. Stattdessen muss man sich mit dem Problem beschäftigen, wie Distributionen, die auf dem Komplement einer Untermannigfaltigkeit \mathcal{N} einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} bekannt sind, auf ganz \mathcal{M} fortgesetzt werden können. Einen Ersatz für die fehlende Translationsinvarianz stellt die folgende Eigenschaft dar:

DEFINITION 5.2. Eine Distribution $t \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$ heißt glatt entlang einer Untermannigfaltigkeit \mathcal{N} , falls $\text{WF}(t) \perp T\mathcal{N}$.

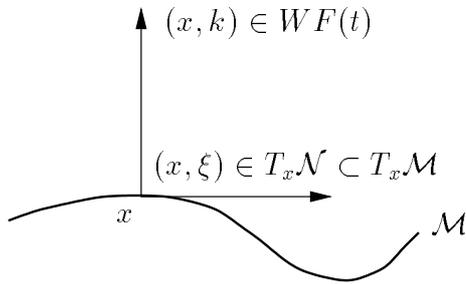


ABBILDUNG 1. $(x, k) \in T_x^*\mathcal{M} \rightarrow k(\xi) = 0$.

Distributionen mit dieser Eigenschaft lassen sich auf zu \mathcal{N} transversale Mannigfaltigkeiten einschränken. Man kann jetzt Koordinaten (x, y) in einer Umgebung von \mathcal{N} wählen mit $x \in \mathcal{N}$ und $y \in \mathbb{R}^d$ mit $d = \text{codim } \mathcal{N} = \dim \mathcal{M} - \dim \mathcal{N}$. Dann ist t nach Verschmierung mit einer Testfunktion auf \mathbb{R}^d eine glatte Funktion auf \mathcal{N} . Sei nun $t_0 \in \mathcal{D}'(\mathcal{M} \setminus \mathcal{N})$. Eine notwendige Bedingung für die Fortsetzbarkeit von t_0

zu einer entlang von \mathcal{N} glatten Distribution $t \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$ ist, dass $\overline{\text{WF}(t_0)} \perp T\mathcal{N}$ (hier wird die Wellenfrontmenge von t_0 als Teilmenge von $T^*\mathcal{M}$ aufgefasst). Man wählt jetzt eine Karte wie oben und definiert mit ihrer Hilfe den Skalengrad $\text{sd}_{\mathcal{N}}$. Die präzise Definition ist komplizierter als im Fall des Skalengrads bezüglich eines Punkts. Die Details finden sich in der Arbeit von Brunetti und mir. Das Hauptproblem ist, zu zeigen, dass die Definition nicht von der Wahl eines Koordinatensystems abhängt. Man findet den folgenden Satz:

THEOREM 5.6. Sei \mathcal{N} eine Untermannigfaltigkeit der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , und sei $t_0 \in \mathcal{D}'(\mathcal{M} \setminus \mathcal{N})$.

- (i) Im Fall $\text{sd}_{\mathcal{N}}(t_0) < \text{codim } \mathcal{N}$ gibt es eine eindeutige Fortsetzung mit demselben Skalengrad.
- (ii) Im Fall $\text{codim } \mathcal{N} < \text{sd}_{\mathcal{N}}(t_0) < \infty$ gibt es Fortsetzungen mit demselben Skalengrad. Sie sind eindeutig bis auf einen additiven Term $P(\partial)\delta_{\mathcal{N}}$ mit einem Differentialoperator $P(\partial)$ der Ordnung $\leq \text{sd}_{\mathcal{N}}(t_0) - \text{codim } \mathcal{N}$ mit glatten Koeffizienten. $\delta_{\mathcal{N}}$ ist eine auf \mathcal{N} konzentrierte Deltafunktion, d.h. $\delta_{\mathcal{N}}(f) = \int_{\mathcal{N}} f \rho dx$ mit einer glatten nirgends verschwindenden Dichte ρdx auf \mathcal{N} .

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Konstruktion der zeitgeordneten Produkte durchführen. Die induktive Konstruktion beruht auf dem folgenden Satz:

THEOREM 5.7. Wenn die zeitgeordneten Produkte T_0, \dots, T_{n-1} bekannt sind, dann ist T_n auf dem Komplement der totalen Diagonale wohldefiniert.

Beweis: Sei $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}^n \setminus D_n$. Dann kann die Menge $\{1, \dots, n\}$ in zwei nichtleere Teilmengen I, I^c zerlegt werden, so dass $\{x_i, i \in I\} \cap \mathcal{J}_-(\{x_j, j \in I^c\}) = \emptyset$. Dann gilt nach der Faktorisierungsgleichung

$$T(\{1, \dots, n\}) = T(I)T(I^c) . \quad (5.57)$$

Es bleibt zu zeigen, dass T_n nicht von der Wahl von I abhängt. Sei J eine andere Indexmenge mit der obigen Eigenschaft. Dann kann I entsprechend in $I \cap J$ und $I \setminus J$ zerlegt werden, und man erhält

$$T(\{1, \dots, n\}) = T(I \cap J)T(I \setminus J)T(I^c \setminus J^c)T(I^c \cap J^c) . \quad (5.58)$$

Die beiden Faktoren in der Mitte sind raumartig zueinander lokalisiert und lassen sich daher vertauschen. Erneute Anwendung der Faktorisierungsgleichungen ergibt die Faktorisierung mit J statt I . ■

Die Wahl der zeitgeordneten Produkte auf der Diagonalen lässt sich jetzt durch (Re-)Normierungsbedingungen einschränken.

N1. Kovarianz unter Isometrien g

$$\alpha_g(T(A_1, \dots, A_n)(x_1, \dots, x_n)) = T(gA_1, \dots, gA_n)(gx_1, \dots, gx_n)$$

Da generische Raumzeiten keine nichttrivialen Isometrien besitzen, ist diese Bedingung im allgemeinen leer.

N2. Unitarität

$$T(A_1, \dots, A_n)(x_1, \dots, x_n)^* = \overline{T}(A_1, \dots, A_n)(x_1, \dots, x_n)$$

(für reelle Felder A_1, \dots, A_n). Diese Bedingung garantiert die Unitarität der S-Matrix und die Hermitizität der wechselwirkenden Felder.

N3.

$$[\varphi(x), T(A_1, \dots, A_n)(x_1, \dots, x_n)] = \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha} i \partial_{x_k}^{\alpha} E(x, x_k) T(A_1, \dots, \frac{\partial A_k}{\partial(\partial^{\alpha} \varphi)}, \dots, A_n)(x_1, \dots, x_n). \quad (5.59)$$

Nach dieser Bedingung sind die zeitgeordneten Produkte der Felder aus L bis auf eine numerische Distribution durch die zeitgeordneten Produkte der Felder mit kleinerem Grad (als Polynome in φ und seinen Ableitungen) bestimmt. Das Problem der Fortsetzung operatorwertiger Distributionen ist damit auf das bereits gelöste Problem der Fortsetzung numerischer Distributionen zurückgeführt worden. Zweckmäßiger Weise nimmt man hierfür die Erwartungswerte der zeitgeordneten Produkte im gewählten Hadamard-Zustand.

N4. Falls die Felder A_1, \dots, A_n keine Ableitungen von φ enthalten, gilt

$$(\square_g^x + m^2) T(A_1, \dots, A_n, \varphi)(x_1, \dots, x_n, x) = i \sum_{k=1}^n \delta(x, x_k) T(A_1, \dots, \frac{\partial A_k}{\partial \varphi}, \dots, A_n)(x_1, \dots, x_n). \quad (5.60)$$

Diese Bedingung impliziert, dass das wechselwirkende Feld die der klassischen Feldgleichung entsprechende Gleichung erfüllt. Eine Verallgemeinerung dieser Bedingung, die auch Ableitungen der Grundfelder zulässt, ist von F.-M. Boas in Eichtheorien mit Erfolg angewandt worden.

Das wechselwirkende Feld zur Lagrangedichte $\mathcal{L}(x) = g(x)\varphi^4$ ist jetzt gegeben durch

$$\varphi_{\mathcal{L}}(h) = \frac{d}{i d\lambda} V(\mathcal{L}, \varphi \lambda h)|_{\lambda=0} \quad (5.61)$$

Es gilt der folgende Satz

THEOREM 5.8. (i) $\varphi_{\mathcal{L}}$ ist ein lokales Feld,

$$[\varphi_{\mathcal{L}}(x), \varphi_{\mathcal{L}}(y)] = 0, \text{ falls } x \text{ raumartig zu } y \text{ liegt.} \quad (5.62)$$

(ii) $\varphi_{\mathcal{L}}$ erfüllt die Feldgleichung

$$(\square_g + m^2)\varphi_{\mathcal{L}}(x) + 4g(x)\varphi_{\mathcal{L}}^3(x) = 0$$

mit $\varphi_{\mathcal{L}}^3(h) = \frac{d}{i d\lambda} V(g, \varphi^3 \lambda h)|_{\lambda=0}$.

(iii) $\varphi_{\mathcal{L}}$ ist hermitesch

- (iv) Wenn g und g' in einer Umgebung des kausal abgeschlossenen Gebiets \mathcal{O} übereinstimmen, dann gibt es einen unitären Operator U mit der Eigenschaft

$$\varphi_{\mathcal{L}'}(h) = U\varphi_{\mathcal{L}}(h)U^{-1} \text{ für alle } h \text{ mit } \text{supp } h \subset \mathcal{O} \quad (5.63)$$

mit $\mathcal{L}'(x) = g'(x)\varphi^4$.

Beweis: (i) folgt unmittelbar aus (5.38). (ii) folgt aus **N4**. (iii) ergibt sich aus **N2**. (iv) ist ebenfalls eine Konsequenz aus (5.38). Denn da die Funktion $\mathcal{L}' - \mathcal{L}$ in einer Umgebung von \mathcal{O} verschwindet, läßt sie sich zerlegen in $a+b$ mit $\text{supp } a \cap \mathcal{J}_-(\mathcal{O}) = \emptyset$ und $\text{supp } b \cap \mathcal{J}_+(\mathcal{O}) = \emptyset$. Nach (5.38) gilt

$$S(\mathcal{L}' + \varphi h) = S(\mathcal{L} + a + b)S(\mathcal{L} + b)^{-1}S(\mathcal{L} + b + \varphi h) , \quad (5.64)$$

also ist $V(\mathcal{L}', \varphi h) = V(\mathcal{L} + b, \varphi h)$. Weiter folgt aus (5.38)

$$S(\mathcal{L} + b + \varphi h) = S(\mathcal{L} + \varphi h)S(\mathcal{L})^{-1}S(\mathcal{L} + b) \quad (5.65)$$

und damit

$$V(\mathcal{L} + b, \varphi h) = V(\mathcal{L}, b)^{-1}V(\mathcal{L}, \varphi h)V(\mathcal{L}, b) . \quad (5.66)$$

Wir erhalten also die Behauptung mit $U = V(\mathcal{L}, b)^{-1}$. ■

Zur Konstruktion (bis auf unitäre Äquivalenz) der Algebra der wechselwirkenden Felder zur Lagrangedichte $\mathcal{L} = g\varphi^4$ mit $g = \text{const.}$ im Gebiet \mathcal{O} reicht es also aus, g in einer Umgebung von \mathcal{O} konstant zu wählen. Da \mathcal{O} beliebig ist, kann die Algebra aller lokalen Felder auf diese Weise konstruiert werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Andronache, M., *Über die Eindeutigkeit stationärer physikalischer Zustände für rotations-symmetrische schwarze Löcher*, Diplomarbeit, Hamburg 1998
- [2] Birrel, N. D. and Davies, P. C. W.: *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, 1982.
- [3] Bros, J., Epstein, H. and Moschella, U.: *Analyticity properties and thermal effects for general quantum field theory on de Sitter space-time*, Commun. Math. Phys., **186**, (1998), p. 535.
- [4] Brunetti, R., Fredenhagen, K. and Köhler, M.: *The microlocal spectrum condition and Wick polynomials of free fields on curved spacetimes*, Commun. Math. Phys., **180**, (1996), p. 312.
- [5] Brunetti, R. and Fredenhagen, K.: *Microlocal analysis and interacting quantum field theory: Renormalizability of φ^4* , *Operator Algebras and Quantum Field Theory*, International Press, 1997, Ed. Doplicher, S., Longo, R., Roberts, J. E. and Zsido, L.
- [6] Brunetti, R. and Fredenhagen, K.: *Microlocal analysis and interacting quantum field theory: Renormalization on physical backgrounds*, DESY 99-032, math-ph/9903028 (to appear in Commun. Math. Phys.)
- [7] Bunch, T. S.: *BPHZ Renormalization of $\lambda\phi^4$ field theory in curved space-times*, Ann. of Phys., **131**, (1981), p. 118.
- [8] Dütsch, M. and Fredenhagen, K.: *A local (perturbative) construction of observables in gauge theories: the example of QED*, Commun. Math. Phys. **203**, (1999), pp. 71-105.
- [9] De Witt, B. S. and Brehme, R. W.: *Radiation damping in a gravitational field*, Ann. of Phys., **9**, (1965), p. 220.
- [10] Dimock, J.: *Scalar quantum field in an external gravitational field*, J. Math. Phys., **20**, (1979), p. 2549.
- [11] Duistermaat, J. and Hörmander, L.: *Fourier integral operators II*. Acta Math. **128**, (1973), p. 183.
- [12] Epstein, H. and Glaser, V.: *The role of locality in perturbation theory*, Ann. Inst. Henri Poincaré-Section A, vol. XIX, n.3, (1973), p. 211.
- [13] Fredenhagen, K. and Haag, R.: *Generally covariant quantum field theory*, Commun. Math. Phys., **108**, (1987), p. 91.
- [14] Fredenhagen, K. and Haag, R.: *On the Derivation of Hawking Radiation Associated with the Formation of a Black Hole*, Commun. Math. Phys. **127**, (1990), pp. 273-284.
- [15] Fulling, S., *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, Cambridge University Press, 1989.
- [16] Haag, R., *Local Quantum Physics: Fields, particles and algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 2nd ed., 1996.
- [17] Haag, R., Narnhofer, H. and Stein, U.: *On quantum field theory in gravitational background*, Commun. Math. Phys., **94**, (1984), p. 219.
- [18] Hawking, S.: *Particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys., **43**, (1975), p. 199.
- [19] Hepp, K.: *Théorie de la Renormalisation*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

- [20] Hörmander, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vol. I-IV, Springer-Verlag, 1983-1986.
- [21] Junker, W.: *Hadamard states, adiabatic vacua and the construction of physical states for scalar quantum fields on curved spacetimes*, Rev. Math. Phys., **8**, (1996), p. 1091.
- [22] Kay, B. and Wald, R.: *Theorems on the Uniqueness and Thermal Properties of Stationary, Nonsingular, Quasifree States on Spacetimes with a Bifurcate Killing Horizon*, Physics Reports **207**, (1991), pp. 49-136.
- [23] Köhler, M.: *The stress energy tensor of a locally supersymmetric quantum field on a curved spacetime*, Ph.D. thesis, University of Hamburg 1994, DESY 95-080.
- [24] Kratzert, K.: *Singularitätsstruktur der Zweipunktfunktion des freien Diracfeldes aus einer global hyperbolischen Raumzeit*, Diplomarbeit, Hamburg 1999
- [25] Prange, D.: *Epstein-Glaser renormalization and differential renormalization*, J. Phys. A, **32**, no. 11, (1999), pp. 2225-2238, [hep-th/9710225](#).
- [26] Radzikowski, M.: *Micro-local approach to the Hadamard condition in quantum field theory on curved space-time*, Commun. Math. Phys., **179**, (1996), p. 529; und: *A local-to-global singularity theorem for quantum field theory on curved space-time*, Commun. Math. Phys., **180**, (1996), p. 1.
- [27] Scharf, G.: *Finite Quantum Electrodynamics: The Causal Approach*, Springer-Verlag, 1995, 2nd edition.
- [28] Slavnov, D. A.: *Principle of causality in scattering theory*, Theor. Math. Phys., **30**, (1977), p. 147; Il'in, V. A. and Slavnov, D. A.: *Observable algebras in the S-matrix approach*, Theor. Math. Phys., **36**, (1978), p. 32.
- [29] Steinmann, O.: *Perturbation Expansions in Axiomatic Field Theory*, Lectures Notes in Physics, **11**, Springer-Verlag, 1971.
- [30] Stora, R.: *Differential algebras in Lagrangean field theory*, ETH Lectures, January-February 1993; und: Popineau, S. and Stora, R., *A pedagogical remark on the main theorem of perturbative renormalization theory*, unpublished preprint.
- [31] Verch, R.: *Local definiteness, primarity and quasiequivalence of quasifree Hadamard quantum states in curved spacetime*, Commun. Math. Phys., **160**, (1994), p. 507.
- [32] Verch, R.: *Wavefront sets in algebraic quantum field theory*, [math-ph/9807022](#).
- [33] Wald, R. M.: *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [34] Wald, R. M.: *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, The University of Chicago Press, 1994.
- [35] Wald, R. M.: *The back reaction effect in particle creation in curved spacetime*, Commun. Math. Phys., **54**, (1977), p. 1; und *Trace anomaly of a conformally invariant quantum field theory*, Phys. Rev. **D17**, (1978), p. 1477.

KAPITEL 6

Lösungen der Aufgaben

Lösung von Aufgabe 2.1

Das Hyperboloid $\mathcal{H} = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3, t^2 - x^2 - y^2 = 1\}$ ist Untermannigfaltigkeit des dreidimensionalen Minkowskiraumes mit der Metrik $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2$.

Wir bestimmen die Metrik auf der Hyperfläche in "Kugel"-Koordinaten θ, φ .

$$x = \sinh \theta \cos \varphi \quad y = \sinh \theta \sin \varphi \quad t = \cosh \theta \quad .$$

Für die Differentiale auf der Fläche folgt:

$$\begin{aligned} dx &= \cosh \theta \cos \varphi d\theta - \sinh \theta \sin \varphi d\varphi \\ dy &= \cosh \theta \sin \varphi d\theta + \sinh \theta \cos \varphi d\varphi \\ dt &= \sinh \theta d\theta \quad . \end{aligned}$$

Damit ist die Metrik auf \mathcal{H} :

$$ds^2|_{\mathcal{H}} = -d\theta^2 - \sinh^2 \theta d\varphi^2 \quad .$$

Für eine Kurve $\gamma(t) = (\theta(t), \varphi(t))$ hat der Tangentenvektor die Länge $|\dot{\gamma}| = \sqrt{\dot{\theta}^2 + \sinh^2 \theta \dot{\varphi}^2}$ und die Länge von γ ist, s. (2.17):

$$l(\gamma) = \int_0^T dt \sqrt{\dot{\theta}^2 + \sinh^2 \theta \dot{\varphi}^2} \quad .$$

Das Variationsproblem ist analog zur klassischen Mechanik mit $|\dot{\gamma}|(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ als Lagrangefunktion. Offensichtlich ist φ eine zyklische Koordinate, so dass der konjugierte Impuls $\propto \dot{\varphi}$ erhalten bleibt. Jetzt ist aber \mathcal{H} invariant unter den 3-dimensionalen Lorentztransformationen, so dass wir o.B.d.A. $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$ setzen können. Für eine beliebige Kurve folgt dann

$$l(\theta(t), \varphi(t)) \geq l(\theta(t), 0) = \int_0^\theta dt \sqrt{\dot{\theta}^2} = \left| \int_{\theta(0)}^{\theta(T)} d\theta \right|,$$

falls $\text{sgn}(\dot{\theta}) = \text{const.}$

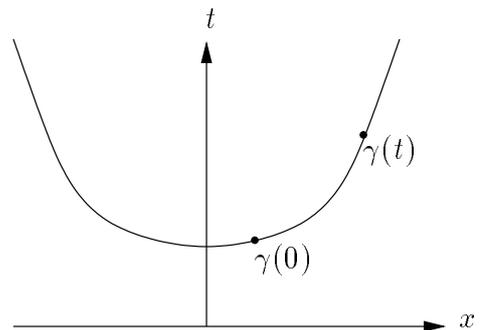


ABBILDUNG 1. Da $\varphi = 0$, befindet sich der Schnitt in der $y = 0$ Ebene.

Geometrisch ergibt sich die Geodäte somit als Schnittmenge des Paraboloides mit der $y = 0$ Ebene. Jedes andere Koordinatensystem wird durch Lorentztransformationen erreicht. Diese drehen die Ebene um den Ursprung. Die Geodäten sind dann die entsprechende Schnittmenge. Dies ist völlig analog zur Kugel: Geodäten (= Großkreise) sind die Schnittmenge der Kugel mit Ebenen durch den Ursprung.

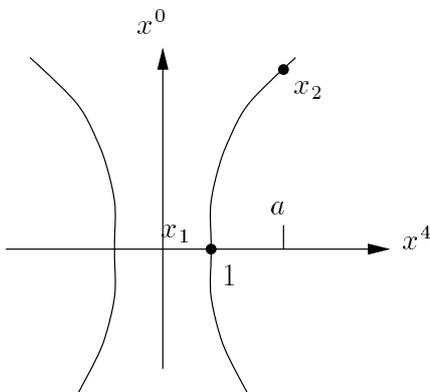
Lösung von Aufgabe 2.2

Der de-Sitter-Raum $= \{x \in \mathbb{R}^5, (x^0)^2 - \sum_{i=1}^4 (x^i)^2 = -1\}$ hat die Symmetrie des fünf-dimensionalen Minkowskiraumes. Alle Punkte, die durch eine fünf-dimensionale Lorentztransformation ineinander transformiert werden können, können in ihm identifiziert werden.

Wir wählen als Anfangspunkt unserer Geodäten $x_1 = (0, 0, 0, 0, 1)$ und als Endpunkt $x_2 = (t, \mathbf{x}_2, a)$. Mit $x_2^2 = -1$ (de-Sitter-Raum) und $(x_2 - x_1)^2 > 0$ für eine zeitartige Geodäte folgt:

$$x_2^2 = t^2 - |\mathbf{x}_2|^2 - a^2 = -1 \text{ und}$$

$$(x_2 - x_1)^2 = t^2 - |\mathbf{x}_2|^2 - (a - 1)^2 = 2(a - 1) > 0,$$



$\Rightarrow a > 1$. Auf zeitartigen Kurven können wir in der 4-Richtung nur nach außen gehen. Wir sehen, dass Teile des de-Sitter-Raumes nicht erreicht werden können. Der 4-dimensionale Minkowski Vektor (t, \mathbf{x}_2) ist zeitartig und kann durch eine Lorentztransformation (die die letzte Koordinate invariant lässt) in $(\sqrt{t^2 - |\mathbf{x}_2|^2}, \mathbf{0})$ transformiert werden. Die Geodäten liegen somit in der $(0,4)$ -Ebene.

In der Koordinatisierung durch τ und $\Omega \in S^3$ wählen wir Anfangs- und Endpunkt gleich auf S^3 , $\Rightarrow \Omega_1 = \Omega_2$. Dann gilt

$$l(\gamma) = \int dt \sqrt{(1 + \tan^2 \tau)(\dot{\tau}^2 - \dot{\Omega}^2)}$$

$$= \int_0^\tau d\tau' \sqrt{(1 + \tan^2 \tau') \left(1 - \left|\frac{d\Omega}{d\tau'}\right|^2\right)}$$

$$\leq \int_0^\tau d\tau' \sqrt{1 + \tan^2 \tau'}$$

$$= \operatorname{arcsinh}(\tan \tau).$$

Lösung von Aufgabe 2.3

Einstetzen von $p = 0$ in die Einsteingleichungen (2.50) ergibt die Differentialgleichung:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k + \dot{a}^2}{a^2} = 0,$$

$$\Leftrightarrow 2a\ddot{a} + \dot{a}(k + \dot{a}^2) = \frac{d}{dt}(ka + a\dot{a}^2) = 0.$$

Damit ist $ka + a\dot{a}^2 = C = \text{const.}$ Auflösen nach \dot{a} führt auf das Integral

$$t = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{C}{a} - k}} + t_0,$$

wobei wir t_0 so wählen, dass wir "Big Bang" Anfangsbedingungen erfüllen, d.h. $a(0) = 0$. Wir untersuchen die Fälle $k = +1, k = 0, k = -1$ nacheinander.

(i) $\mathbf{k = 1}$. Mit der Substitution $a = u^2$ wird

$$\begin{aligned} \int \frac{da}{\sqrt{\frac{C}{a} - 1}} &= 2 \int \frac{du u^2}{\sqrt{C - u^2}} \\ &= -u\sqrt{C - u^2} + C \arcsin \frac{u}{\sqrt{C}} \\ &= -\sqrt{Ca - a^2} + C \arcsin \sqrt{\frac{a}{C}} = t. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nicht weiter nach t aufgelöst werden. An der Stelle $a = C$ ist $\dot{a} = 0$, d.h. a hat dort ein lokales Maximum. Das Universum dehnt sich bis dorthin aus, dann fällt es wieder zusammen.

(ii) $\mathbf{k = 0}$.

$$\int \frac{da}{\sqrt{\frac{C}{a}}} = \frac{2}{3\sqrt{C}} a^{\frac{3}{2}} = t,$$

ergibt $a(t) = \left(\frac{9}{4}Ct\right)^{\frac{2}{3}}$. Das Universum dehnt sich unendlich aus. Das Modell heisst Einstein-de-Sitter Modell.

(iii) $\mathbf{k = -1}$. Mit derselben Substitution wie oben wird

$$\int \frac{da}{\sqrt{\frac{C}{a} + 1}} = \sqrt{Ca + a^2} - C \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{a}{C}} = t.$$

Auch hier ist das Universum unendlich, da $\dot{a}(t) > 0$.

Wir skizzieren das Verhalten in Abbildung 2. Im strahlungsdominierten Univer-

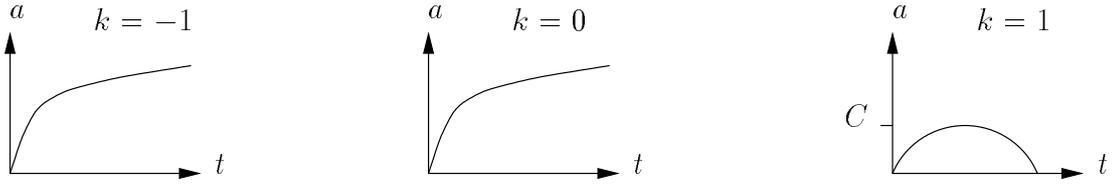


ABBILDUNG 2. Nur für $k = 1$ (Einstein-de-Sitter) erhalten wir ein geschlossenes Universum.

sum ist $\rho = 3p$. Einsetzen in die Einsteingleichungen (2.50) ergibt die Differentialgleichung:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k + \dot{a}^2}{a^2} = 0,$$

$$\Leftrightarrow a\ddot{a} + (k + \dot{a}^2) = \frac{d}{dt}(a\dot{a} + kt) = 0.$$

Damit ist

$$a\dot{a} + kt = C. \quad (6.1)$$

Wir lösen die homogene Gleichung

$$a\dot{a} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a^2 = C, \quad (6.2)$$

$$\Rightarrow a(t) = \sqrt{2Ct + K}. \quad (6.3)$$

Die Lösung von (6.1) folgt durch Variation der Konstanten K aus (6.3). Einsetzen liefert die Gleichung

$$\frac{\dot{K}}{2} + kt = 0, \quad (6.4)$$

mit der Lösung $K(t) = -kt^2$, wobei wir die Integrationskonstante an die ‘‘Big Bang’’ Anfangswerte angepasst haben. Damit haben wir

$$a(t) = \sqrt{2Ct - kt^2}. \quad (6.5)$$

Die Lösungen verhalten sich qualitativ wie im Materie (Staub) dominierten Universum. Nur im Fall $k = 1$ ist das Universum endlich.

Lösung von Aufgabe 3.1

Sei $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ und $[\varphi(f), \varphi(g)] = 0, \forall g \in \mathcal{D}(\mathcal{M}), \varphi \in \mathfrak{A}$. Dann ist

$$[\varphi(f), \varphi(g)] = i\langle f, Eg \rangle = -i\langle Ef, g \rangle = 0 \quad .$$

$\Rightarrow Ef = 0$, da das Skalarprodukt nicht entartet ist und g beliebig. Es folgt: $E_{\text{ret}}f = E_{\text{av}}f$. Für den Träger gilt:

$$\text{supp } E_{\text{ret}}f = \text{supp } E_{\text{av}}f \subset J_+(\text{supp } f) \cap J_-(\text{supp } f)$$

ist kompakt, d.h. $E_{\text{ret}}f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$. Mit $DE_{\text{ret}} = \text{id}$ folgt mit Punkt 2 auf Seite 24:

$$\varphi(f) = \varphi(DE_{\text{ret}}f) = 0.$$

Lösung von Aufgabe 3.2

Wir zeigen, dass

$$\int dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_n \prod_{i=1}^n \omega_2(x_i, y_i) \overline{f(x_1, \dots, x_n)} f(y_1, \dots, y_n) = \langle f, f \rangle \geq 0 \quad .$$

Da sich jede Funktion von n Argumenten als Grenzwert einer Reihe von Produkten n einzelner Funktionen schreiben lässt, und die Distributionen stetig sind, ist es ausreichend, den Fall

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m f_1^{(i)}(x_1) \dots f_n^{(i)}(x_n)$$

zu betrachten. Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^m \int dx_1 dy_1 \omega_2(x_1, y_1) f_1^{(i)}(x_1) f_1^{(j)}(y_1) \dots \int dx_n dy_n \omega_2(x_n, y_n) f_n^{(i)}(x_n) f_n^{(j)}(y_n) = \\ = \sum_{i,j=1}^m \langle f_1^{(i)}, f_1^{(j)} \rangle \dots \langle f_n^{(i)}, f_n^{(j)} \rangle. \quad (6.6) \end{aligned}$$

Definiere die $m \times m$ Matrix $A_k^{ij} = \langle f_k^{(i)}, f_k^{(j)} \rangle$. A_k ist positiv semidefinit, da

$$\sum_{i,j=1}^m \overline{\Lambda^i} A_k^{ij} \Lambda^j = \left\langle \sum_{i=1}^m \Lambda^i f_k^{(i)}, \sum_{j=1}^m \Lambda^j f_k^{(j)} \right\rangle \geq 0,$$

wegen (3.11). Somit hat A_k paarweise orthogonale Eigenvektoren $a_{k,r}$ und nicht-negative Eigenwerte. Wir schreiben:

$$A_k^{ij} = \sum_{r=1}^m \overline{a_{k,r}^i} a_{k,r}^j \quad .$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 (6.6) &= \sum_{i,j=1}^m \prod_{k=1}^n A_k^{ij} \\
 &= \sum_{i,j=1}^m \sum_{l_1, \dots, l_n=1}^m \prod_{k=1}^n \overline{a_{k,l_k}^i} a_{k,l_k}^j \\
 &= \sum_{l_1, \dots, l_n=1}^m \left| \sum_{i=1}^m \prod_{k=1}^n a_{k,l_k}^i \right|^2 \\
 &\geq 0 \quad .
 \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 3.3

Als erstes zeigen wir die Äquivalenz der KMS-Bedingung im Skript zu

$$\omega(\alpha_t(A)B) = \omega(B\alpha_{t+i\beta}(A)) \quad (6.7)$$

$$\Leftrightarrow \omega(A^*e^{-\beta H}A) = \omega(AA^*) \quad (6.8)$$

Wir beweisen zuerst “ \Rightarrow ”:

$$\begin{aligned}
 \omega(A^*e^{-\beta H}A) &= (\Omega, A^*e^{-\beta H}A\Omega) \\
 &= (\Omega, A^*e^{-\beta H}Ae^{\beta H}\Omega) \\
 &= (\Omega, A^*\alpha_{i\beta}(A)\Omega) \\
 &\stackrel{(6.7)}{=} \omega(AA^*) .
 \end{aligned}$$

Für “ \Leftarrow ” zeigen wir erst:

$$\begin{aligned}
 \omega(A^*\alpha_{i\beta}(A)) &= (\Omega, A^*\alpha_{i\beta}(A)\Omega) \\
 &= (\Omega, A^*e^{-\beta H}Ae^{\beta H}\Omega) \\
 &= (\Omega, A^*e^{-\beta H}A\Omega) \\
 &= \omega(A^*e^{-\beta H}A) \\
 &\stackrel{(6.8)}{=} \omega(AA^*) .
 \end{aligned}$$

Ausgewertet für $A \rightarrow A + B^*$ folgt:

$$\begin{aligned}
 \omega((A + B^*)(A + B^*)^*) &= \omega(AA^*) + \omega(B^*A^*) + \omega(AB) + \omega(B^*B) \\
 &= \omega((A + B^*)^*\alpha_{i\beta}(A + B^*)) \\
 &= \omega(A^*\alpha_{i\beta}(A)) + \omega(B\alpha_{i\beta}(A)) + \\
 &\quad + \omega(A^*\alpha_{i\beta}(B)^*) + \omega(B\alpha_{i\beta}(B)^*) \\
 &= \omega(AA^*) + \omega(B\alpha_{i\beta}(A)) + \omega(A^*\alpha_{i\beta}(B)^*) + \omega(B^*B)
 \end{aligned}$$

d.h.:

$$\omega(B^*A^*) + \omega(AB) = \omega(B\alpha_{i\beta}(A)) + \omega(A^*\alpha_{i\beta}(B)^*). \quad (6.9)$$

Wir setzen $B \rightarrow iB$ und multiplizieren mit $-i$:

$$-\omega(B^*A^*) + \omega(AB) = \omega(B\alpha_{i\beta}(A)) - \omega(A^*\alpha_{i\beta}(B)^*). \quad (6.10)$$

$\frac{1}{2}(6.9) + \frac{1}{2}(6.10)$:

$$\omega(AB) = \omega(B\alpha_{i\beta}(A)).$$

Damit gilt:

$$\omega(B\alpha_{i\beta+t}(A)) = \omega(B\alpha_{i\beta}(\alpha_t(A))) = \omega(\alpha_t(A)B),$$

da α_t ein Automorphismus von $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$.

Jeder Zustand auf $M_n(\mathbb{C})$ ist von der Form $\omega(A) = \text{Tr}\rho A$, mit $\rho \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho = \rho^*$, $\text{Tr}\rho = 1$, $\rho \geq 0$. Benutze die KMS-Bedingung (6.7) für $t = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Tr}\rho AB &= \text{Tr}\rho B e^{-\beta h} A e^{\beta h} \\ &= \text{Tr} B e^{-\beta h} A e^{\beta h} \rho \\ &= \text{Tr} B \rho A, \end{aligned}$$

hieraus folgt

$$\rho A = e^{-\beta h} A e^{\beta h} \rho \Rightarrow [e^{\beta h} \rho, A] = 0 \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

Da die Algebra einfach ist, vertauschen nur Vielfache der Eins mit allen Elementen:

$$e^{\beta h} \rho = \lambda \mathbf{1} \Rightarrow \rho = \lambda e^{-\beta h}.$$

Lösung von Aufgabe 3.4

Hier ist nur Differentiation gefordert. Es ist:

$$\begin{aligned} |g|^{\frac{1}{2}} &= |\det g_{\mu\nu}|^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) r^2 \sin \theta, \\ g^{tt} &= \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} = -g^{r^*r^*}, \\ g^{\theta\theta} &= -\frac{1}{r^2}, \\ g^{\phi\phi} &= -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

Beachte: Die folgenden Gleichungen sind *im Sinne von Operatoren* zu verstehen, d.h. z.B.: $\partial_x x = 1 + x \partial_x$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \square_g &= |g|^{-\frac{1}{2}} \partial_\mu g^{\mu\nu} |g|^{\frac{1}{2}} \partial_\nu \\ &= \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} (r^2 \sin \theta)^{-1} \left[\partial_t \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) r^2 \sin \theta \partial_t + \right. \\ &\quad - \partial_{r^*} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) r^2 \sin \theta \partial_{r^*} + \\ &\quad - \partial_\theta r^{-2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) r^2 \sin \theta \partial_\theta + \\ &\quad \left. - \partial_\phi r^{-2} \sin^{-2} \theta \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) r^2 \sin \theta \partial_\phi \right] \\ &= \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} (\partial_t^2 - r^{-2} \partial_{r^*} r^2 \partial_{r^*}) - r^{-2} [\sin^{-1} \theta \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \sin^{-2} \theta \partial_\phi^2], \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck in eckigen Klammern gerade der 2-dimensionale Laplace Operator in Kugelkoordinaten ist: $[\dots] = \Delta_{S^2}$. Wir zerlegen die zweite Zeile:

$$r^{-2} \partial_{r^*} r^2 \partial_{r^*} = r^{-1} (r^{-1} \partial_{r^*} r) (r \partial_{r^*} r^{-1}) r.$$

Mit $\frac{\partial r}{\partial r^*} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)$ folgt:

$$\begin{aligned} r \partial_{r^*} r^{-1} &= \partial_{r^*} - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right), \\ r^{-1} \partial_{r^*} r &= \partial_{r^*} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (r^{-1} \partial_{r^*} r) (r \partial_{r^*} r^{-1}) &= \partial_{r^*}^2 - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 - \left[\partial_{r^*} \left(\frac{1}{r} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \right) \right] \\ &= \partial_{r^*}^2 - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \left(2 \frac{r_0}{r} - 1\right) \\ &= \partial_{r^*}^2 - \frac{r_0}{r^3} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right). \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt:

$$\square_g = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} (\partial_t^2 - r^{-1} \partial_{r^*}^2 r) + \left(-\frac{\Delta_{S^2}}{r^2} + \frac{r_0}{r^3}\right).$$

Lösung von Aufgabe 4.1

Wir machen den Ansatz

$$\Delta^L(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} \Delta(t, \mathbf{x} + \mathbf{n}L). \quad (6.11)$$

Offensichtlich löst Δ^L die Klein-Gordon-Gleichung. Wir überprüfen die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \Delta^L(0, \mathbf{x}) &= 0, \text{ da } \Delta(0, \mathbf{x}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Delta^L(0, \mathbf{x}) &= - \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} \delta^3(\mathbf{x} + \mathbf{n}z). \end{aligned}$$

Der letzte Term ist die δ -Funktion auf \mathbb{T}^3 . Wegen der Eindeutigkeit des Cauchyproblems ist Δ^L die Fundamentallösung. Was ist mit der Konvergenz der Summe in unserem Ansatz? Wegen der Trägereigenschaften von Δ ist die Summe endlich, s. Figur 3.

Wir zeigen, dass diese Lösung auch direkt aus der allgemeinen Lösung für ultrastatische Raumzeiten folgt. Da $-\sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2 + m^2$ ein selbstadjungierter positiver Operator ist, gilt für die Fundamentallösung nach (3.48)

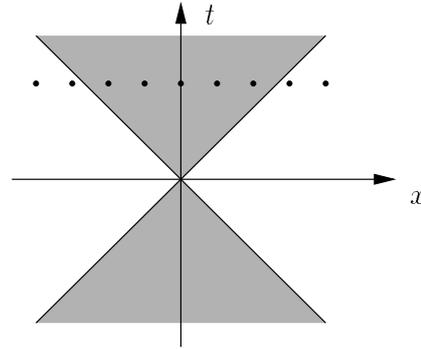


ABBILDUNG 3. Die Summe in Δ^L bricht ab.

$$E(t, \mathbf{x}; s, \mathbf{y}) = - \frac{\sin \sqrt{A}(t-s)}{\sqrt{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad . \quad (6.12)$$

Hierfür brauchen wir die Spektraldarstellung von A : Die orthonormierten Eigenfunktionen sind: $L^{-\frac{3}{2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ mit $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$ und den Eigenwerten: $E_{\mathbf{n}} = \left| \frac{2\pi}{L}\mathbf{n} \right|^2 + m^2$. Damit ist

$$- \frac{\sin \sqrt{A}(t-s)}{\sqrt{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} \frac{\sin \sqrt{E_{\mathbf{n}}}(t-s)}{\sqrt{E_{\mathbf{n}}}} L^{-3} e^{i \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \quad (6.13)$$

Sind die beiden Ausdrücke (6.11) und (6.13) gleich? Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}L} &= (2\pi)^3 \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} \delta^3(L\mathbf{k} - 2\pi\mathbf{n}) \\ &= (2\pi)^3 L^{-3} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} \delta^3 \left(\mathbf{k} - \frac{2\pi}{L}\mathbf{n} \right), \end{aligned} \quad (6.14)$$

was durch Fourierentwicklung bewiesen werden kann. Nach (3.18) ist die Kommutatorfunktion

$$\begin{aligned} \Delta(t, \mathbf{x}) &= -(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\mu(\mathbf{p})} \sin(\langle \mu(\mathbf{p}), \mathbf{p} \rangle, (t, \mathbf{x})) \\ &= -(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\mu(\mathbf{p})} \sin(\mu(\mathbf{p})t) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

mit $\mu(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$. Einsetzen in (6.11) und Integration mithilfe von (6.14) zeigt die Gleichheit.

Für die Zweipunktfunktion machen wir den entsprechenden Ansatz:

$$\Delta_+^L(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} \Delta_+(t, \mathbf{x} + \mathbf{n}L). \quad (6.15)$$

Die Summe existiert wieder, da Δ_+ in raumartiger Richtung exponentiell abfällt. Mit den obigen Argumenten kann die Gleichheit zu

$$\Delta_+(t, \mathbf{x}) = \frac{e^{-i\sqrt{A}t}}{2\sqrt{A}}(\mathbf{x}) \quad (6.16)$$

aus dem allgemeinen Ansatz für ultrastatische Raumzeiten nach (3.49) gezeigt werden. Es ist

$$(\Delta_+^L - \Delta_+)(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3, \mathbf{n} \neq 0} \Delta_+(t, \mathbf{x} + \mathbf{n}L) \in \mathcal{C}^\infty,$$

da $(t, \mathbf{x} + \mathbf{n}L)$ raumartig für $n \neq 0$, siehe Figur 4.

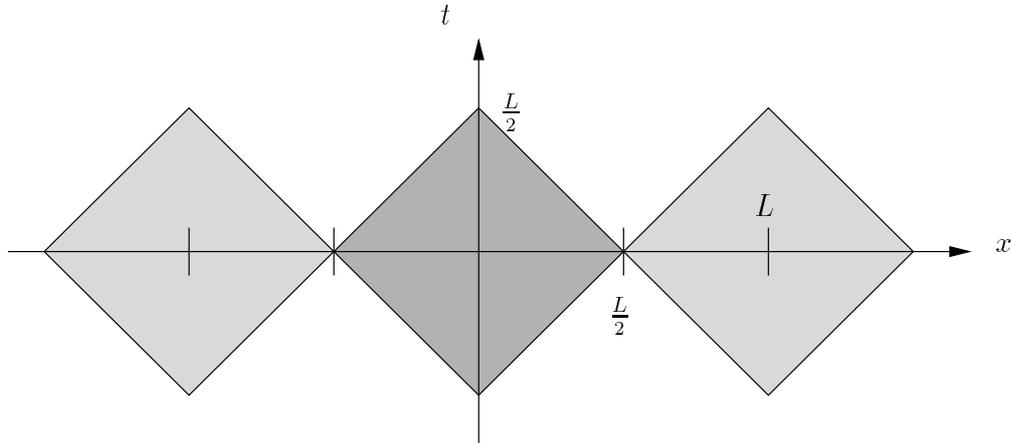


ABBILDUNG 4. Für jeden Vektor aus dem Doppelkegel $|t| + |x| < \frac{L}{2}$ ist der um nL in x -Richtung verschobene Vektor raumartig.