

# THEORETISCHE MECHANIK

Klaus Fredenhagen  
II.Institut für Theoretische Physik  
Universität Hamburg  
Wintersemester 1997/98

## Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Newtonsche Mechanik</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1      | Das Prinzip der Determiniertheit . . . . .  | 3         |
| 1.2      | Bewegung in einer Dimension . . . . .   | 4         |
| 1.3      | Phasenraumfluß, Hamiltonsche Gleichungen und Satz von Liouville . . . . .               | 11        |
| 1.4      | Bewegung eines Massenpunkts im vorgegebenen Kraftfeld im 3-dimensionalen Raum . . . . . | 13        |
| 1.5      | Zentralkraftfelder . . . . .  | 15        |
| 1.6      | Das Keplerproblem . . . . .   | 18        |
| 1.7      | Mehrteilchensysteme . . . . .   | 21        |
| 1.8      | Schwerpunkts- und Relativbewegung . . . . .   | 22        |
| <b>2</b> | <b>Variationsrechnung und Hamiltonsches Prinzip</b>                                     | <b>25</b> |
| 2.1      | Das Brachistochronenproblem . . . . .   | 25        |
| 2.2      | Die Euler-Lagrange-Gleichungen . . . . .  | 28        |
| 2.3      | Beispiele zur Variationsrechnung . . . . .  | 29        |
| 2.4      | Die Lagrangefunktion und das Hamiltonsche Prinzip . . . . .                             | 31        |
| 2.5      | Holonome Zwangsbedingungen . . . . .  | 32        |
| 2.6      | Zyklische Koordinaten, konjugierte Impulse und das Noethertheorem . . . . .             | 34        |
| 2.7      | Beispiele für Systeme mit Zwangsbedingungen . . . . .                                   | 36        |
| 2.8      | Das relativistische Keplerproblem . . . . .   | 41        |
| <b>3</b> | <b>Hamiltonsche Mechanik</b>  | <b>45</b> |
| 3.1      | Legendretransformation . . . . .  | 45        |
| 3.2      | Hamiltonfunktion und Hamiltonsche Gleichungen . . . . .                                 | 47        |
| 3.3      | Phasenraum und Poissonklammern . . . . .  | 49        |
| 3.4      | Kanonische Transformationen . . . . .   | 52        |
| 3.5      | Symplektische Geometrie . . . . .   | 56        |
| 3.6      | Hamilton-Jacobi-Theorie . . . . .   | 59        |
| 3.7      | Kleine Schwingungen . . . . .   | 63        |
| <b>4</b> | <b>Theorie des Kreisels</b>   | <b>68</b> |
| 4.1      | Die euklidische Gruppe . . . . .  | 68        |
| 4.2      | Bewegte Bezugssysteme . . . . .   | 73        |
| 4.3      | Kinetische Energie und Drehimpuls des starren Körpers. Der Trägheitstensor . . . . .    | 75        |
| 4.4      | Euler-Gleichung und Poincot-Konstruktion . . . . .                                      | 78        |
| 4.5      | Der symmetrische Kreisel . . . . .  | 79        |

# 1 Newtonsche Mechanik

## 1.1 Das Prinzip der Determiniertheit

Die Bewegung von Körpern stellte die Menschen lange Zeit vor schwierige Probleme: da waren die Himmelskörper, die sich vor allem auf Kreisen zu bewegen schienen, bis auf die Planeten, deren Bewegung unvorhersehbar war und zu astrologischen Spekulationen Anlaß gab, da waren die Körper, die nach unten fielen, wenn sie nicht daran gehindert wurden, und es gab die horizontalen Bewegungen, die nach einiger Zeit zum Stillstand kamen.

Lange Zeit hat man vergeblich versucht, die Bewegungen aus dem Ort des Körpers vorherzusagen. In modernen Begriffen kann man diesen Versuch in der folgenden Weise beschreiben.

Der Ort eines (genügend kleinen) Körpers wird als ein Punkt  $P$  eines dreidimensionalen euklidischen Raumes aufgefaßt. Durch Wahl eines Ursprungs  $O$  kann der Punkt durch einen Vektor  $\vec{x}$  eines dreidimensionalen Vektorraumes dargestellt werden. Wählt man auch noch Koordinatenachsen, d.h. ein rechtshändiges Tripel von Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , so wird der Ort durch 3 reelle Parameter  $x_1, x_2, x_3$  bestimmt,

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i \quad .$$

Bewegt der Körper sich, so beschreibt man dies durch eine Zeitabhängigkeit des Vektors,

$$t \mapsto \vec{x}(t).$$

Hierbei stellt man sich die Zeit  $t$  als einen eindimensionalen euklidischen Raum vor. Nach Wahl eines Zeitnullpunkts und einer Zeiteinheit kann  $t$  als reeller Parameter angesehen werden. Die Funktion  $t \rightarrow \vec{x}(t)$  wird als Bahnkurve bezeichnet. Zur Analyse der Bahnkurve betrachtet man die Ableitungen

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{x}}{dt} \equiv \dot{\vec{x}} && \text{Geschwindigkeit,} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{x}} && \text{Beschleunigung.} \end{aligned}$$

Die alten Versuche zur Auffindung eines Bewegungsgesetzes bestanden darin, einen Zusammenhang zwischen Ort und Geschwindigkeit zu finden, etwa von der Form einer Differentialgleichung

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad .$$

Erst Galilei erkannte, daß die Geschwindigkeit eines Körpers am jeweiligen Ort beliebig vorgegeben werden kann, daß also kein derartiger Zusammenhang besteht. Stattdessen gilt das *Newtonsche Prinzip der Determiniertheit*: Sind Orte und Geschwindigkeiten zu einem Zeitpunkt  $t_0$  vorgegeben,

so sind die Bahnkurven aller Körper eindeutig bestimmt. Insbesondere sind also die Beschleunigungen Funktionen  $\vec{f}$  von Ort und Geschwindigkeit, und man erhält für  $n$  genügend kleine Körper (Massenpunkte) die  $n$  vektoriellen Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\ddot{\vec{x}}_i = \vec{f}_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_n, t), i = 1, \dots, n \quad .$$

Nach den Sätzen über Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen existieren (unter gewissen Bedingungen an die Funktionen  $\vec{f}_i$ ) eindeutige Lösungen für jede Wahl der Anfangsbedingungen

$$\vec{x}_1(t_0), \dots, \vec{x}_n(t_0), \dot{\vec{x}}_1(t_0), \dots, \dot{\vec{x}}_n(t_0) \quad ,$$

zumindest für ein genügend kleines Zeitintervall um  $t_0$ .

## 1.2 Bewegung in einer Dimension

Wir untersuchen zunächst die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes in einer räumlichen Dimension. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t), t)$$

Wir betrachten verschiedene Beispiele für die Wahl der Funktion  $f$ .

**Stokesche Reibung** : Bei der Bewegung in Flüssigkeiten und Gasen gilt für Geschwindigkeiten unterhalb einer gewissen Grenzgeschwindigkeit

$$\ddot{x} = -k\dot{x} \quad , k > 0 \quad .$$

*Lösung:* Wir setzen  $v = \dot{x}$ . Dann gilt  $\dot{v} = -kv$  mit der Lösung

$$v(t) = v_0 e^{-kt} \quad ,$$

wobei die freie Konstante  $v_0$  durch die Anfangsbedingung

$$v(t_0) = v_0 e^{-kt_0}$$

bestimmt ist.  $x(t)$  erhält man jetzt durch Integration,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t dt' v(t') = x_0 + \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \quad ,$$

und die zusätzliche freie Konstante  $x_0$  ergibt sich aus dem Anfangsort  $x(t_0)$ . Die Geschwindigkeit strebt gegen 0 für  $t \rightarrow \infty$ , verschwindet aber zu keiner endlichen Zeit (für  $v_0 \neq 0$ ), und der Massenpunkt nähert sich dem Punkt  $x_\infty = x_0 + \frac{v_0}{k}$  an.

**Senkrechter Fall** : Im Schwerfeld der Erde nahe der Oberfläche ist die Beschleunigung nahezu konstant und senkrecht nach unten gerichtet,

$$\ddot{x} = -g \quad , g = 9,81\text{ms}^{-2} \quad .$$

Die Lösung ergibt sich durch 2-fache Integration,

$$\dot{x}(t) = v_0 - gt \quad , x(t) = x_0 + v_0t - \frac{g}{2}t^2 \quad ,$$

wobei sich die freien Konstanten wieder aus den Anfangsbedingungen ergeben.

**Harmonische Schwingung** :

$$\ddot{x} = -\omega^2x \quad , \omega^2 > 0$$

Zur Lösung machen wir den Ansatz

$$x = Ae^{\lambda t} \quad .$$

Einsetzen ergibt die Bedingung

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

mit den Lösungen  $\lambda = \pm i\omega$ . Da die Differentialgleichung reell ist, ist mit  $x$  auch die komplex konjugierte Funktion  $\bar{x}$  Lösung, damit erhält man als reelle Lösung

$$x = \text{Re}Ae^{i\omega t} = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad , A = a - ib \quad .$$

$a$  ist der Ort zur Zeit  $t = 0$  und  $b\omega$  die Geschwindigkeit zur Zeit  $t = 0$ .

**Harmonische Schwingung mit Reibung:**

$$\ddot{x} = -\omega^2x - k\dot{x} \quad , k > 0 \quad .$$

Wieder machen wir den Ansatz

$$x = Ae^{\lambda t} \quad .$$

Diesmal erhalten wir als Bedingung an  $\lambda$

$$\lambda^2 + \lambda k + \omega^2 = 0$$

mit den Lösungen  $\lambda = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - \omega^2}$ . Wir unterscheiden jetzt die folgenden 3 Fälle

$\frac{k^2}{4} < \omega^2$ : In diesem Fall ist  $\lambda$  komplex, und die Lösung ist

$$x = c e^{-\frac{k}{2}t} \cos\left(t\sqrt{\omega^2 - \frac{k^2}{4}} + \delta\right)$$

(Schwingfall).

$\frac{k^2}{4} > \omega^2$ : Hier sind beide Lösungen für  $\lambda$  reell, und wir erhalten als allgemeine Lösung für  $x$

$$x = c e^{-\frac{k}{2}t} \cosh\left(t\sqrt{\frac{k^2}{4} - \omega^2} + \delta\right)$$

Im Grenzfall sehr kleiner Frequenzen gilt

$$\sqrt{\frac{k^2}{4} - \omega^2} - \frac{k}{2} = \frac{k}{2} \left( \sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{k^2}} - 1 \right) \approx \frac{k}{2} \left( -\frac{2\omega^2}{k^2} \right) = -\frac{\omega^2}{k}$$

d.h.  $x \approx c e^{-\frac{\omega^2}{k}t}$  für  $t \rightarrow \infty$  (Kriechfall).

$\frac{k^2}{4} = \omega^2$ : Hier gibt es nur einen erlaubten Wert für  $\lambda$ ,  $\lambda = -\frac{k}{2}$ . Die allgemeine Lösung ist in diesem Fall

$$x = (a + bt)e^{-\frac{k}{2}t}$$

(aperiodischer Grenzfall).

### Erzwungene Schwingung:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + f(t)$$

Zunächst betrachten wir den Fall einer periodischen äußeren Kraft  $f(t) = f_0 \cos \omega_1 t$ . Mit dem Ansatz

$$x(t) = A \cos \omega_1 t$$

für eine partikuläre Lösung findet man

$$(\omega^2 - \omega_1^2)A = f_0 \quad ,$$

also

$$A = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_1^2} \quad ,$$

falls  $\omega \neq \omega_1$ . Die allgemeine Lösung ist in diesem Fall

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + B \cos(\omega t + \delta) \quad .$$

Wenn die anregende Frequenz  $\omega_1$  kleiner als die Eigenfrequenz  $\omega$  ist, schwingen  $x$  und  $f$  gleichphasig, anderenfalls gegenphasig.

Im Resonanzfall, wenn  $\omega_1 = \omega$  gilt, machen wir den Ansatz

$$x(t) = At \sin \omega t$$

für eine partikuläre Lösung. Mit

$$\ddot{x} = 2A\omega \cos \omega t - \omega^2 x$$

ergibt sich

$$A = \frac{f_0}{2\omega} \quad .$$

Die allgemeine Lösung ist

$$x = \frac{f_0}{2\omega} t \sin \omega t + B \cos(\omega t + \delta) \quad .$$

Für  $t \rightarrow \infty$  wächst die Amplitude linear an (Resonanzkatastrophe).

Wir können auch den Fall einer beliebigen äußeren Kraft  $f(t)$  behandeln. Hierzu betrachten wir die komplexwertige Funktion

$$z(t) = \dot{x}(t) + i\omega x(t) \quad .$$

Für  $z$  gilt die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{z} - i\omega z = f \quad .$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$z(t) = ce^{i\omega t} \quad .$$

Dann macht man für die inhomogene Gleichung den Ansatz

$$z(t) = c(t)e^{i\omega t}$$

mit einer komplexwertigen Funktion  $c(t)$  (Variation der Konstanten).

Man findet

$$\dot{c}(t) = e^{-i\omega t} f(t) \quad ,$$

also

$$c(t) = \int_0^t ds e^{-i\omega s} f(s) + c(0) \quad .$$

Für  $z$  ergibt sich

$$z(t) = \int_0^t ds e^{i\omega(t-s)} f(s) + z(0)e^{i\omega t}$$

und schließlich für  $x$

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t ds \sin \omega(t-s) f(s) + x(0) \cos \omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t \quad .$$

Nach der ausführlichen Diskussion dieser wichtigen Spezialfälle wenden wir uns jetzt dem allgemeinen Fall einer geschwindigkeits- und zeitunabhängigen Kraft zu. Sei

$$\ddot{x} = f(x) \quad .$$

Wir multiplizieren beide Seiten dieser Gleichung mit  $\dot{x}$ . Auf der linken Seite erhalten wir

$$\dot{x}\ddot{x} = \frac{d}{dt}T$$

mit der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2 \quad ,$$

und auf der rechten Seite finden wir nach der Kettenregel

$$\dot{x}f(x) = -\frac{d}{dt}U(x)$$

mit der potentiellen Energie

$$U(x) = -\int_a^x dy f(y) \quad .$$

Die mit  $\dot{x}$  multiplizierte Bewegungsgleichung besagt also, daß die Summe von  $T$  und  $U$ , die Gesamtenergie  $E$ , zeitlich konstant ist. Dies ist der Energieerhaltungssatz für dieses System.

Wir nutzen diese Information zunächst dafür aus, uns einen qualitativen Überblick über die möglichen Bahnen  $x(t)$  zu verschaffen. Dabei verwenden wir, daß die kinetische Energie nur positive Werte annehmen kann. Sei  $U$  vorgegeben. Dann kann sich das Teilchen nur im Gebiet  $\{x \in \mathbb{R}, E \geq U(x)\}$  aufhalten. Solange  $E > U(x)$  gilt, ist die kinetische Energie und damit die Geschwindigkeit des Teilchens verschieden von Null, das Teilchen bewegt sich also zwischen den Nullstellen der Funktion  $E - U(x)$ ; nur an diesen Stellen kann es seine Bewegungsrichtung ändern.

Wir betrachten jetzt die Bahn in einem 2-dimensionalen Raum, dem sogenannten Phasenraum, in dem die erste Koordinate den Ort und die zweite die Geschwindigkeit angibt,

$$(x(t), \dot{x}(t)) \in \{(x, v), x, v \in \mathbb{R}\} \quad .$$

Auf Grund der Energieerhaltung ist die Bahn enthalten in der Menge

$$\{(x, v) \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}v^2 + U(x) = E\}$$

Typischerweise bestehen diese Mengen aus geschlossenen Kurven. Auf dem Teil der Kurven oberhalb der  $x$ -Achse bewegt sich das Teilchen nach rechts (die Geschwindigkeit ist positiv), unterhalb nach links. Die Umkehrpunkte der Bewegung liegen auf der  $x$ -Achse.

Wir kommen jetzt zur quantitativen Bestimmung der Bahn. Auf den Punkten der Bahn im Bereich des Phasenraums oberhalb der  $x$ -Achse gilt

$$\dot{x} = \sqrt{2(E - U(x))} \quad .$$

Dies ist eine Differentialgleichung, die mit der Methode der Separation der Variablen gelöst werden kann. Denn sei  $G(x)$  eine Stammfunktion der Funktion

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}} \quad .$$

Dann ist nach der Kettenregel und den obigen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}G(x(t)) = g(x)\dot{x} = 1 \quad ,$$

also  $G(x(t)) = t + c$  mit einer Konstanten  $c$ . Zwischen zwei Umkehrpunkten ist  $G$  strikt monoton und läßt sich daher umkehren; wir erhalten also durch Auflösung nach  $x$  die Bahnkurve

$$x(t) = G^{-1}(t + c) \quad .$$

Eine entsprechende Überlegung gilt für Punkte des Phasenraums unterhalb der  $x$ -Achse. Falls Umkehrpunkte in endlicher Zeit erreicht werden, muß die globale Lösung aus diesen Teilstücken zusammengesetzt werden.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die bereits behandelte harmonische Schwingung,

$$U(x) = \frac{\omega^2}{2}x^2 \quad , \omega > 0 \quad .$$

Mit  $E = \frac{\omega^2}{2}a^2$ ,  $a > 0$  Schwingungsamplitude, ergibt sich

$$G(x) = \int_0^x \frac{dy}{\omega \sqrt{a^2 - y^2}} \quad .$$

Wir substituieren  $\xi = \frac{y}{a}$  und erhalten

$$G(x) = \int_0^{\frac{x}{a}} \frac{d\xi}{\omega \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\arcsin \frac{x}{a}}{\omega}$$

mit der Umkehrfunktion  $G^{-1}(t) = a \sin \omega t$ .

Als ein weiteres Beispiel untersuchen wir den freien senkrechten Fall im Schwerfeld der Erde aus großer Höhe., so daß das Gravitationsfeld nicht mehr als konstant angesehen werden kann. Die Bewegungsgleichung für den Abstand  $r$  vom Erdmittelpunkt lautet

$$\ddot{r} = -cr^{-2}, \quad r > R, \quad c = gR^2, \quad ,$$

mit dem Erdradius  $R$ . Wir nehmen an, daß der Gegenstand aus der Höhe  $h$  fällt. Die Energieerhaltung besagt

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - cx^{-1} = -ch^{-1} \quad .$$

Die Zeit, die der Gegenstand braucht, um die Erdoberfläche zu erreichen, ist

$$t = \int_R^h \frac{dr}{v(r)}$$

mit der Geschwindigkeit  $v(r)$  im Abstand  $r$ ,  $R \leq r \leq h$ ,

$$v(r) = \sqrt{2c(r^{-1} - h^{-1})} \quad .$$

Mit der Variablensubstitution

$$z = \frac{2r}{h} - 1$$

ergibt sich für die benötigte Zeit

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{h^3}{8c}} \int_{\frac{2R}{h}-1}^1 dz \frac{z+1}{\sqrt{1-z^2}} \\ &= \sqrt{\frac{h^3}{8c}} \left( -\sqrt{1-z^2} - \arccos z \right) \Big|_{\frac{2R}{h}-1}^1 = \sqrt{\frac{h^3}{8c}} \left( 2\sqrt{\frac{R}{h}\left(1-\frac{R}{h}\right)} + \arccos\left(\frac{2R}{h}-1\right) \right) \quad . \end{aligned}$$

Im Grenzfall kleiner Höhen ergibt sich mit der Formel

$$\frac{d}{du} \arccos(1 - u^2)|_{u=0} = \sqrt{2}$$

der bekannte Ausdruck

$$\lim_{h \rightarrow R} \frac{t}{\sqrt{h - R}} = \sqrt{\frac{2}{g}}$$

für die Fallzeit im homogenen Schwerfeld.

Eine andere Anwendung der allgemeinen Formel findet man für den Kollaps von Sternen oder interstellaren Wolken. Hier ist  $c = GM$  mit der Gravitationskonstanten  $G$  und der innerhalb des Radius  $R$  befindlichen Masse  $M$ . Im Limes  $R \rightarrow 0$  ergibt sich für die Zeit, in der sich der Kollaps ereignet

$$t = \frac{\pi h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{8GM}} \quad .$$

Ist die anfängliche Dichte  $\rho$ , so ist  $M = \frac{4}{3}\pi\rho h^3$ , also

$$t = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}} \quad .$$

Beim Kollaps eines Sterns ist die Dichte von der Größenordnung  $1\text{gcm}^{-3}$ , damit dauert der Kollaps 35 min. Bei interstellaren Wolken ist die Dichte von der Größenordnung  $10^{-22}\text{gcm}^{-3}$ , der Kollaps dauert dann  $6 \cdot 10^6\text{y}$ .

### 1.3 Phasenraumfluß, Hamiltonsche Gleichungen und Satz von Liouville

Wir wollen in diesem Abschnitt das Verhalten der Bahnkurve im Phasenraum unter einem neuen Gesichtspunkt diskutieren. Die Bewegungsgleichung im Phasenraum lautet

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ f(x, p) \end{pmatrix} \quad .$$

(Wir haben hier, im Vorgriff auf spätere Konventionen, die Geschwindigkeit  $v$  durch den Impuls  $p$  ersetzt. Im Augenblick ist das (für  $m = 1$ ) nur eine Umbenennung der Variablen.)

Sei bei gegebenen Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0, p(0) = p_0$  die Bahn

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(t) \quad .$$

Dann wird durch

$$\varphi_t : \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(t)$$

eine einparametrische Familie von Abbildungen des  $\mathbb{R}^2$  auf sich gegeben mit den folgenden Eigenschaften

$$\varphi_0 = \text{id}$$

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = F \circ \varphi_t$$

mit  $F \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -f(x,p) \end{pmatrix}$ . Eine solche einparametrische Familie nennt man einen Fluß. Er wird bestimmt durch das Vektorfeld  $F$ .

Wir wollen den Fluß am Beispiel der harmonischen Schwingung studieren. Falls die Reibung nicht verschwindet, bilden (im Schwingfall) die Phasenraumbahnen Spiralen, die im Nullpunkt enden. Ohne Reibung sind die Bahnen Ellipsen, die durch den Wert der Energie (als Funktion auf dem Phasenraum festgelegt werden. In diesem Fall verhält sich der Phasenraum unter dem Fluß wie eine inkompressible Flüssigkeit, in dem Sinn, daß das Volumen eines Gebietes  $G$  im Phasenraum sich unter dem Fluß nicht ändert,

$$\text{Vol}(\varphi_t(G)) = \text{const} \quad .$$

Dies ist der Inhalt des Theorems von Liouville, das wir in einer etwas allgemeineren Form beweisen wollen.

**Satz 1.1** Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld mit  $\text{div}F \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0$ , und sei  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  der zugehörige Fluß. Dann ist für jedes kompakte Gebiet  $G$  das Volumen von  $\varphi_t(G)$  unabhängig von  $t$ .

*Beweis:* Setze  $x_i(t, a) = \varphi_t(a)_i, i = 1, \dots, n$ . Dann ist

$$\text{Vol}(\varphi_t(G)) = \int_G d^n a \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial a_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial a_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial a_n} \end{vmatrix} .$$

Weiter gilt

$$\frac{d}{dt}\text{Vol}(\varphi_t(G)) = \int_G d^n a \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial a_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial a_n} & \cdots & \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial a_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial a_n} \end{vmatrix} .$$

Mit  $\frac{\partial}{\partial t}x_i(t, a) = F_i(x(t, a))$  und  $\frac{\partial F_i}{\partial a_j} = \sum_k \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial a_j}$  folgt

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\varphi_t(G)) = \int_G d^n a \operatorname{div} F \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial a_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial a_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial a_n} \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Im Beispiel des harmonischen Oszillators ist im Fall ohne Reibung  $F(x, p) = \begin{pmatrix} p \\ -\omega^2 x \end{pmatrix}$ , also  $\operatorname{div} F = 0$ . Bei Anwesenheit von Reibung ergibt sich stattdessen  $F(x, p) = \begin{pmatrix} p \\ -kp - \omega^2 x \end{pmatrix}$  und damit  $\operatorname{div} F = -k$ . Daher schrumpft das Volumen von  $G$  in diesem Fall exponentiell,  $\text{Vol}(\varphi_t(G)) = e^{-kt} \text{Vol}(G)$ .

Im  $\mathbb{R}^2$  ist jedes divergenzfreie Vektorfeld  $F$  von der Form

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial x} \end{pmatrix}$$

mit einer Funktion  $H(x, p)$ . Im Fall einer geschwindigkeitsunabhängigen Kraft mit Potential  $U(x)$  ist

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + U(x)$$

die Energie, ausgedrückt als Funktion von Ort und Impuls. Man nennt  $H$  die Hamiltonfunktion des Systems; die sich aus der Form des Vektorfeldes ergebenden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

heißen Hamiltonsche Gleichungen.

## 1.4 Bewegung eines Massenpunkts im vorgegebenen Kraftfeld im 3-dimensionalen Raum

Wir betrachten jetzt einen Massenpunkt im Raum unter dem Einfluß eines vorgegebenen zeit- und geschwindigkeitsunabhängigen Kraftfeldes. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

mit dem durch die Masse dividierten Kraftfeld  $\vec{f}$ . Wir bilden auf beiden Seiten der Gleichung das Skalarprodukt mit der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{x}}$ ,

$$\ddot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}$$

und integrieren beide Seiten über die Zeit. Wir erhalten

$$\frac{1}{2}(|\dot{\vec{x}}(t_2)|^2 - |\dot{\vec{x}}(t_1)|^2) = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{f}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) \quad .$$

Die linke Seite beschreibt die Änderung der kinetischen Energie  $T = \frac{1}{2}|\dot{\vec{x}}|^2$ . Das Integral auf der rechten Seite ist unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der die Bahn durchlaufen wird. Denn sei  $t(s)$  eine strikt monotone Funktion eines Parameters  $s$  ( $\frac{dt}{ds} > 0$ ) mit  $t(s_1) = t_1, t(s_2) = t_2$ . Dann gilt

$$\int_{s_1}^{s_2} ds \vec{f}(\vec{x}(t(s))) \cdot \frac{d\vec{x}}{ds}(t(s)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{f}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}(t)$$

Man nennt dieses Integral das Wegintegral über die durch die Bahn beschriebene Kurve  $C$ . Es ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve und wird durch

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{x}$$

bezeichnet.  $A(C) = - \int_C \vec{f} \cdot d\vec{x}$  nennt man die gegen das Kraftfeld  $\vec{f}$  längs  $C$  geleistete Arbeit. Sie beschreibt die Änderung der kinetischen Energie beim Durchlaufen der Bahn.

Falls die Arbeit längs jeden geschlossenen Weges verschwindet, nennt man das Kraftfeld konservativ. In diesem Fall kann man eine Funktion  $U$ , das Potential, definieren mit der Eigenschaft

$$A(C) = U(\vec{x}_2) - U(\vec{x}_1) \quad ,$$

falls  $C$  ein Weg von  $\vec{x}_1$  nach  $\vec{x}_2$  ist. Hierzu setzt man den Wert von  $U$  an einem Punkt  $\vec{x}_0$  beliebig fest. An allen anderen Punkten  $\vec{x}$  ist  $U$  dann durch die längs eines beliebigen Weges von  $\vec{x}_0$  nach  $\vec{x}$  geleistete Arbeit bestimmt. Es gilt der Energiesatz

$$E \equiv T + U = \text{const} \quad .$$

Aus dem Potential  $U$  erhält man das Kraftfeld  $\vec{f}$  durch Differentiation,

$$\vec{f}(\vec{x}) = -\text{grad}U(\vec{x}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}U, \frac{\partial}{\partial x_2}U, \frac{\partial}{\partial x_3}U\right)(\vec{x}) \quad .$$

Eine notwendige Bedingung dafür, daß das Kraftfeld  $\vec{f}$  konservativ ist, ist das Verschwinden der Rotation von  $\vec{f}$ ,

$$0 = \text{rot}\vec{f} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_2}f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}f_2, \frac{\partial}{\partial x_3}f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}f_3, \frac{\partial}{\partial x_1}f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}f_1\right) \quad .$$

Denn setzt man  $\vec{f} = -\text{grad}U$  in diese Formel ein, so verschwinden alle Komponenten wegen der Symmetrie der 2. Ableitungen von  $U$ . Die Bedingung ist für Kraftfelder im  $\mathbb{R}^3$  auch hinreichend. Falls das Kraftfeld nur in einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^3$  definiert ist, so gilt dies, wenn  $G$  einfach zusammenhängend ist, d.h., wenn jeder geschlossene Weg sich zu einem Punkt zusammenziehen läßt.

*Beispiel:* (1) Das Gravitationsfeld, das ein Massenpunkt am Ort  $\vec{y}$  mit Masse  $M$  auf einen anderen Massenpunkt am Ort  $\vec{x}$  ausübt,

$$\vec{f}(\vec{x}) = GM \frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \quad ,$$

ist konservativ, mit dem Potential

$$U(\vec{x}) = -\frac{GM}{|\vec{y} - \vec{x}|} \quad .$$

*Beispiel:* (2) In einem unendlich langen Zylinder mit Radius  $r$  herrsche in Richtung der Achse zur Zeit  $t$  ein homogenes Magnetfeld der Stärke  $bt$ . Nach dem Induktionsgesetz wird dadurch außerhalb des Zylinders ein elektrisches Feld erzeugt. Legt man die  $z$ -Achse in die Zylinderachse, so ergibt sich für das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{br^2}{2(x^2 + y^2)}(y, -x, 0) \quad , \quad x^2 + y^2 > r^2 \quad .$$

Auf einen Massenpunkt mit Ladung  $q$  wirkt dann die Kraft

$$\vec{F}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x}) \quad .$$

Dieses Kraftfeld hat außerhalb des Zylinders verschwindende Rotation. Die Arbeit längs eines geschlossenen Weges um den Zylinder aber beträgt

$$A = qb\pi r^2 \quad .$$

## 1.5 Zentralkraftfelder

Das Gravitationsfeld eines Massenpunktes hat die Eigenschaft, daß die Kraft immer in Richtung eines festen Punktes  $\vec{x}_0$ , des Kraftzentrums, zeigt. Kraftfelder mit dieser Eigenschaft nennt man Zentralkraftfelder. Ist darüber hinaus

der Betrag der Kraft nur vom Abstand vom Zentrum abhängig, so ist das Kraftfeld konservativ.

In Zentralkraftfeldern gibt es einen erhaltenen Vektor, den Drehimpuls,

$$\vec{L} = (\vec{x} - \vec{x}_0) \times \dot{\vec{x}} \quad ,$$

denn

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{x}} + (\vec{x} - \vec{x}_0) \times \ddot{\vec{x}} = 0 \quad .$$

Der erste Term auf der rechten Seite verschwindet wegen der Antisymmetrie des Vektorproduktes. Dasselbe gilt für den zweiten Term, wenn man die Bewegungsgleichung einsetzt und ausnutzt, daß die Kraft ein Vielfaches des Vektors  $\vec{x} - \vec{x}_0$  ist.

Die Erhaltung des Drehimpulses hat zur Folge, daß die Bahn in der Ebene durch das Kraftzentrum, die senkrecht auf dem Drehimpuls steht, verläuft ( $\vec{L} \neq 0$ ):

$$(\vec{x}(t) - \vec{x}_0) \cdot \vec{L} = 0 \quad .$$

Zur Beschreibung der Bewegung in einem Zentralkraftfeld wählt man zweckmäßigerweise ein Koordinatensystem mit  $\vec{x}_0$  als Ursprung und der  $z$ -Achse in Richtung von  $\vec{L}$ . In der  $x$ - $y$ -Ebene führen wir Polarkoordinaten ein,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad .$$

Es gilt dann

$$|\dot{\vec{x}}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$L_z = xy - yx = r^2 \dot{\varphi}$$

Die Konstanz von  $r^2 \dot{\varphi}$  hat eine geometrische Bedeutung. Denn  $\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} dt$  ist die Fläche, die von dem Radiusvektor („Fahrstrahl“) in der Zeit  $dt$  überstrichen wird. Die Erhaltung von  $L \equiv L_z$  ist von Kepler als das Gesetz der Konstanz der Flächengeschwindigkeit bei der Planetenbewegung entdeckt worden (2. Keplersches Gesetz).

In einem konservativen Zentralkraftfeld mit Potential  $U(r)$  läßt sich die Lösung der Bewegungsgleichung auf ein eindimensionales Problem zurückführen. Denn die Energie schreibt sich in Polarkoordinaten als

$$E = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) \quad .$$

Mit  $\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}$  ergibt sich

$$E = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

mit dem „effektiven Potential“

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2r^2} + U(r) \quad .$$

In der Koordinate  $r$  hat man jetzt ein eindimensionales Problem, das man mit Separation der Variablen lösen kann. Ist  $r(t)$  gefunden, so bekommt man  $\varphi(t)$  durch Integration,

$$\varphi(t) = \int \frac{L}{r(t)^2} dt \quad .$$

Man kann auch direkt die Bahnform  $\varphi(r)$  finden, indem man

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$$

in die Gleichung für die Energie einsetzt und wieder die Variablen separiert. Man erhält

$$\varphi(r) = \pm \int \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2(E - U_{\text{eff}}(r))}} \quad .$$

Eine interessante Größe ist der Winkel  $\Delta\varphi$ , der innerhalb einer Periode der Radialbewegung zurückgelegt wird. Sind  $r_1 < r_2$  die Radien, zwischen denen die Radialbewegung verläuft, so ist

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2(E - U_{\text{eff}}(r))}} \quad .$$

Nur wenn  $\Delta\varphi$  ein rationales Vielfaches von  $2\pi$  ist, ist die Bahn in der  $x$ - $y$ -Ebene geschlossen. Im anderen Fall kommt die Bahn jedem Punkt  $(x, y)$  mit  $r_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_2$  beliebig nahe.

Falls  $r_2 = \infty$  ist, nennt man

$$\Theta = \left| \frac{\Delta\varphi}{2} - \pi \right|$$

den Streuwinkel. Bei Streuexperimenten schickt man einen Probekörper mit vorgegebener kinetischer Energie und vorgegebenem Drehimpuls auf ein zu untersuchendes Kraftzentrum („Target“). Aus der Messung des Streuwinkels kann dann das Potential bestimmt werden. Bei Mikrosystemen ist es aber in der Regel nicht möglich, den Drehimpuls festzulegen. Stattdessen verfährt man bei kurzreichweitigen Potentialen in der folgenden Weise. Man schickt die Teilchen aus einer festen Richtung aus großem Abstand mit Geschwindigkeit  $v_\infty$  in Richtung des Zentrums. In großer Entfernung vom Zentrum sind die Bahnen Geraden, die parallel zu einer Achse durch das Zentrum verlaufen. Ihr Abstand zur Achse sei mit  $s$  bezeichnet („Stoßparameter“). Der

Betrag des Drehimpulses ist dann  $L = sv_\infty$ . Man wiederholt den Versuch jetzt mehrmals, indem man z.B. einen Teilchenstrahl auf das Target richtet. Die Zahl der Teilchen mit Stoßparameter zwischen  $s_1$  und  $s_2$  ist proportional zur Fläche des Kreisrings mit diesen beiden Radien,

$$\Delta N = c\pi\Delta s^2 \quad .$$

Dann bestimmt man die Zahl der Teilchen, deren Streuwinkel  $\Theta$  zwischen  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  liegt. Ist  $s(\Theta)$  der zugehörige Stoßparameter, so gilt

$$\Delta N = c \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \pi \left| \frac{ds^2}{d\Theta} \right| d\Theta \quad .$$

Hierbei haben wir angenommen, daß  $s$  eindeutig durch  $\Theta$  bestimmt ist. Ersetzt man jetzt noch  $d\Theta$  durch das Raumwinkelement  $d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta$  (die Fläche des Kreisrings auf der Einheitssphäre zwischen  $\Theta$  und  $\Theta + d\Theta$ ), so erhält man

$$\Delta N = c \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s}{\sin \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| \quad .$$

## 1.6 Das Keplerproblem

Als wichtigen Spezialfall betrachten wir die Bewegung im Gravitationsfeld einer Punktmasse  $M$ . Das Potential ist

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = GM \quad .$$

Sei  $L \neq 0$ . Dann besitzt das effektive Potential

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2r^2}$$

ein Minimum bei  $r = \frac{L^2}{\alpha} \equiv p$  mit dem Wert  $U_{\text{min}} = -\frac{\alpha}{2p} \equiv -E_0$ .

Für  $E = -E_0$  beschreibt der Planet eine Kreisbahn mit Radius  $p$  und Umlaufzeit

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi p^2}{L} = 2\pi\alpha^{-\frac{1}{2}} p^{\frac{3}{2}}$$

(Spezialfall des 3. Keplerschen Gesetzes). Für  $E \in (-E_0, 0)$  bleibt der Planet im Abstand  $r \in [r_-, r_+]$ , wobei  $r_\pm$  die Lösungen der Gleichung  $E = U_{\text{eff}}(r)$  sind. Mit

$$\frac{U_{\text{eff}}(r)}{E_0} = -\frac{2p}{r} + \frac{p^2}{r^2}$$

folgt

$$\varepsilon^2 \equiv 1 + \frac{E}{E_0} = \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 \quad ,$$

also

$$\frac{p}{r_{\pm}} = 1 \mp \varepsilon$$

und

$$r_{\pm} = \frac{p}{1 \mp \varepsilon} = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} (1 \pm \varepsilon) \quad .$$

Für  $E \geq 0$  ist  $\varepsilon \geq 1$ . Die Gleichung  $E = U_{\text{eff}}(r)$  besitzt dann nur die Lösung  $r_- = \frac{p}{1+\varepsilon}$ , der Massenpunkt nähert sich dem Zentrum also bis auf  $r_-$  an und entfernt sich dann beliebig weit.

Die Gleichung für die Energie lautet

$$E = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + E_0 \left(-\frac{2p}{r} + \frac{p^2}{r^2}\right) \quad .$$

Mit den oben angegebenen Definitionen von  $p$  und  $\varepsilon$  folgt

$$\varepsilon^2 = \frac{p^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 \quad .$$

Separation der Variablen liefert für  $\varphi(r)$  das Integral

$$\varphi(r) = \int_{r_-}^r dr' \frac{p}{(r')^2 \sqrt{\varepsilon^2 - \left(\frac{p}{r'} - 1\right)^2}} \quad .$$

(Hierbei haben wir  $\varphi(r_-) = 0$  gesetzt.) Durch die Substitution

$$u = \varepsilon^{-1} \left(\frac{p}{r} - 1\right) \quad , \quad du = -\varepsilon^{-1} \frac{p}{r^2} dr$$

erhält man (mit  $u_- = \varepsilon^{-1} \left(\frac{p}{r_-} - 1\right) = 1$ )

$$\varphi(r) = \int_{\varepsilon^{-1} \left(\frac{p}{r} - 1\right)}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arccos \varepsilon^{-1} \left(\frac{p}{r} - 1\right)$$

also

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad .$$

Im Fall  $\varepsilon < 1$  sind alle Werte von  $\varphi$  möglich, im Fall  $\varepsilon \geq 1$  nur Werte im Intervall  $(-\varphi_0, \varphi_0)$  mit

$$\varphi_0 = \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad .$$

Die Bahngleichung  $r(\varphi)$  ist die Gleichung eines Kegelschnitts in Brennpunktdarstellung mit Exzentrizität  $\varepsilon$ . Für  $\varepsilon = 0$  hat man einen Kreis mit Radius  $p$ , für  $0 < \varepsilon < 1$  eine Ellipse mit Halbachsen  $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$ ,  $b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$  und Brennpunkten bei Null und bei  $\varphi = \pi$ ,  $r = \frac{2\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}$ . Für  $\varepsilon = 1$  ergibt sich eine Parabel mit Brennpunkt bei Null und Brenngerade bei  $x = p$ . Für  $\varepsilon > 1$  schließlich findet man den linken Ast einer Hyperbel mit Brennpunkten bei Null und bei  $\varphi = 0$ ,  $r = \frac{2\varepsilon p}{\varepsilon^2-1}$  und Halbachsen  $a = \frac{p}{\varepsilon^2-1}$ ,  $b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$ . Die Asymptoten der Hyperbel schneiden sich unter dem Winkel  $2 \arccos(-\frac{1}{\varepsilon})$ .

Die große Halbachse hängt nur von der Energie  $E$ , nicht aber vom Drehimpuls ab,

$$a = \frac{p}{|1-\varepsilon^2|} = \frac{\alpha}{2|E|} \quad .$$

Die Umlaufzeit für Ellipsenbahnen ermittelt man am einfachsten mit Hilfe von Keplers Flächengesetz. Die Fläche  $A$  einer Ellipse mit Halbachsen  $a$  und  $b$  ist  $A = \pi ab = \pi p^2(1-\varepsilon^2)^{-\frac{3}{2}}$ , andererseits ist

$$A = \frac{1}{2} \int_0^T r^2 \dot{\varphi} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha p} T \quad .$$

Folglich gilt

$$T = 2\pi \alpha^{-\frac{1}{2}} p^{\frac{3}{2}} (1-\varepsilon^2)^{-\frac{3}{2}} = 2\pi \alpha^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} \quad .$$

Unter allen Bahnen mit gleichem Drehimpuls hat also die Kreisbahn die kürzeste Umlaufzeit. Weiter erkennt man, daß bei vorgegebenem Wert von  $\alpha = GM$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

für alle Bahnen gleich ist (3. Keplersches Gesetz). Bei der Anwendung dieses Gesetzes auf die Planetenbahnen muß allerdings berücksichtigt werden, daß die Sonne kein feststehendes Kraftzentrum ist, sondern eine kleine Mitbewegung durchführt. Dieser Effekt führt zu kleinen Korrekturen.

Wir berechnen noch den Wirkungsquerschnitt nach der im vorherigen Abschnitt angegebenen Formel. Es gilt für den Streuwinkel  $\Theta$  die Beziehung

$$\frac{1}{\varepsilon} = \sin \frac{\Theta}{2} \quad .$$

Mit dem Stoßparameter  $s$  folgt

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}$$

und damit für den Wirkungsquerschnitt die Rutherfordsche Formel

$$d\sigma = \frac{1}{2 \sin \Theta} \frac{ds^2}{d\Theta} d\Omega = \frac{a^2}{4(\sin \frac{\Theta}{2})^4} d\Omega \quad .$$

## 1.7 Mehrteilchensysteme

Zur Formulierung der Bewegungsgleichungen für ein abgeschlossenes  $n$ -Teilchensystem müssen die Funktionen  $\vec{f}_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)$  ermittelt werden. Hierfür findet man empirisch die folgenden Regeln:

**Isolierbarkeit von Teilsystemen** Die Funktionen  $\vec{f}_i$  hängen im Limes großer Entfernungen nicht von den Orten und Geschwindigkeiten der weit entfernten Massenpunkte ab.

**Existenz von Inertialsystemen** Es gibt Koordinatensysteme, in denen die Beschleunigung für jedes isolierte Teilchen verschwindet. Ein solches System nennt man ein Inertialsystem. In ihm bewegt sich ein isoliertes Teilchen gleichförmig geradlinig.

**Actio=Reactio** In einem Inertialsystem sind die Funktionen  $\vec{f}_i, i = 1, \dots, n$  für ein abgeschlossenes  $n$ -Teilchensystem linear abhängig, d.h. es gibt Konstanten  $m_i, i = 1, \dots, n$  mit

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{f}_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) = 0 \quad .$$

Die Koeffizienten  $m_i$  können positiv gewählt werden und sind bis auf einen gemeinsamen Faktor, der der Wahl einer Einheit entspricht, eindeutig bestimmt. Man nennt  $m_i$  die (träge) Masse des  $i$ -ten Massenpunktes und  $\vec{F}_i = m_i \vec{f}_i$  die auf das  $i$ -te Teilchen wirkende Kraft. Insbesondere gilt für ein isoliertes System von 2 Teilchen

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \quad .$$

**Galilei-Invarianz** In einem Inertialsystem sind die Kräfte invariant unter Translationen

$$\vec{x}_i \rightarrow \vec{x}_i + \vec{b} \quad , \quad t \rightarrow t + t_0 \quad ,$$

kovariant unter Drehungen  $R$

$$\vec{F}_i(R\vec{x}_1, \dots, R\vec{x}_n) = R\vec{F}_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$$

und invariant unter eigentlichen Galileitransformationen (Transformationen auf ein geradlinig gleichförmig bewegtes Bezugssystem).

Nach dem Prinzip Actio=Reactio verschwindet die Summe aller Kräfte  $\vec{F}_i$ . Definiert man als Schwerpunkt des Systems

$$\vec{x} = \frac{\sum_i m_i \vec{x}_i}{\sum_i m_i}$$

so erhält man den Schwerpunktsatz:

*Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich geradlinig und gleichförmig.*

Definiert man  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$  als den Impuls des  $i$ -ten Teilchens und  $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$  als den Gesamtimpuls des Systems, so gilt der Impulssatz

*Der Impuls eines abgeschlossenen Systems ist konstant.*

Typischerweise sind alle Kräfte Summen von geschwindigkeits- und zeitunabhängigen 2-Teilchenkräften. Ist  $\vec{F}_{ij}$  die Kraft, die in dem aus den Teilchen  $i$  und  $j$  bestehenden isolierten System auf das Teilchen  $i$  wirkt, so ist die im  $n$ -Teilchensystem auf Teilchen  $i$  wirkende Kraft

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad .$$

Wegen der Galilei-Invarianz der 2-Teilchenkräfte müssen diese die Form haben

$$\vec{F}_{ij} = (\vec{x}_i - \vec{x}_j) f_{ij}(|x_i - x_j|) \quad ,$$

also konservative Zentralkraftfelder sein. Hieraus folgt die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{x}_i - \vec{x}_0) \times \vec{p}_i$$

für jeden Bezugspunkt  $\vec{x}_0$  sowie die Erhaltung der Energie

$$E = \sum_i \frac{m_i}{2} |\vec{v}_i|^2 + \sum_{i < j} U_{ij} \quad ,$$

wobei  $U_{ij}$  die potentielle Energie für die 2-Teilchenkraft  $\vec{F}_{ij}$  ist.

## 1.8 Schwerpunkts- und Relativbewegung

Wir betrachten ein abgeschlossenes System von  $n$  Massenpunkten in einem Inertialsystem. Der Schwerpunkt  $\vec{x}$  eines solchen Systems bewegt sich geradlinig und gleichförmig. Sei  $\vec{y}_i$  der Abstandsvektor des  $i$ -ten Massenpunktes vom Schwerpunkt,

$$\vec{y}_i = \vec{x}_i - \vec{x} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad .$$

Die  $n$  Vektorfunktionen  $\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)$  sind nicht linear unabhängig, sondern erfüllen die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{y}_i = 0 \quad .$$

Der Impuls des Gesamtsystems ist

$$\vec{p} = \sum m_i(\dot{\vec{y}}_i + \dot{\vec{x}}) = m\dot{\vec{x}}$$

mit der Gesamtmasse  $m = \sum m_i$ , stimmt also mit dem Impuls eines Massenpunktes der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{x}}$  überein. Für den Drehimpuls gilt

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum m_i(\vec{y}_i + \vec{x}) \times (\dot{\vec{y}}_i + \dot{\vec{x}}) \\ &= \sum m_i\vec{y}_i \times \dot{\vec{y}}_i + m\vec{x} \times \dot{\vec{x}}\end{aligned}$$

da die gemischten Terme verschwinden. Der Drehimpuls zerfällt also in eine Summe aus dem inneren Drehimpuls um den Schwerpunkt und dem Drehimpuls der Schwerpunktsbewegung.

Entsprechend findet man für die kinetische Energie die Zerlegung

$$T = T^{\text{innen}} + T^{\text{Schwerpunkt}}$$

mit der inneren kinetischen Energie

$$T^{\text{innen}} = \sum \frac{m_i}{2} |\dot{\vec{y}}_i|^2$$

und der kinetischen Energie der Schwerpunktsbewegung

$$T^{\text{Schwerpunkt}} = \frac{m}{2} |\dot{\vec{x}}|^2 \quad .$$

Die Bewegungsgleichungen für die Vektoren  $\vec{y}_i$  enthalten die Schwerpunktskoordinaten nicht, da  $\ddot{\vec{x}} = 0$  und da die Kräfte wegen der Translationsinvarianz nur von den Differenzen  $\vec{x}_i - \vec{x}_j = \vec{y}_i - \vec{y}_j$  abhängen.

Oft ist es günstig, von dem linear abhängigen System  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$  zu einem linear unabhängigen System von  $n - 1$  Vektorfunktionen überzugehen. Besonders einfach geht dies im Fall  $n = 2$ . Denn für den Abstandsvektor

$$\vec{z} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$$

gilt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{z}} = \frac{1}{m_1} \vec{F}_{12} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{21} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12}$$

Mit der sogenannten reduzierten Masse

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

schreibt sich dies in der Form

$$\mu \ddot{\vec{z}} = \vec{F}_{12}(\vec{z}) \quad ,$$

also als Bewegungsgleichung eines Massenpunktes der Masse  $\mu$  im vorgegebenem Kraftfeld  $\vec{F}_{12}$ . Das Zweikörperproblem ist damit auf ein Einkörperproblem im vorgegebenem Kraftfeld zurückgeführt worden.

Als eine Anwendung betrachten wir das Zweikörperproblem Sonne-Planet. Ist  $m$  die Planetenmasse und  $M$  die Sonnenmasse, so ist der Betrag der Gravitationskraft  $GmMr^{-2}$  ( $r$  Abstand Sonne-Planet). In der Bewegungsgleichung muß jetzt die Planetenmasse durch die reduzierte Masse  $\mu = \frac{mM}{m+M}$  ersetzt werden. Also ist der Koeffizient von  $\frac{1}{r}$  im Potential (nach Division durch die reduzierte Masse)

$$\alpha = G(M + m) \quad .$$

Hierdurch entstehen Korrekturen zum 3. Keplerschen Gesetz,

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M + m)}{4\pi^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \quad .$$

## 2 Variationsrechnung und Hamiltonsches Prinzip

### 2.1 Das Brachistochronenproblem

Oft findet man physikalische Gesetze als Lösungen von Extremalproblemen. So ergibt sich z.B. das Reflexionsgesetz als Lösung der Aufgabe, den kürzesten, aus zwei geraden Stücken bestehenden Weg zwischen zwei Punkten zu finden, der eine gegebene Ebene berührt. Sind  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  die Koordinaten beider Punkte, und sind  $y = 0$  die Reflexionsebene und  $(x, 0)$  der Reflexionspunkt, so muß

$$s = \sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}$$

minimal sein. Aus dem Verschwinden der Ableitung  $\frac{ds}{dx}$  folgt die Gleichheit von Einfall- und Ausfallwinkel. Ähnlich kann das Brechungsgesetz, wenn die Lichtgeschwindigkeiten sich in zwei Medien umgekehrt wie die Brechungsindizes verhalten, aus der Forderung abgeleitet werden, daß der Lichtstrahl den Weg zwischen zwei Punkten in der kürzesten Zeit zurücklegt.

Ein komplizierteres Problem ist es, diejenige Kurve in einer vertikalen Ebene zu finden, in der ein reibungsfreier Körper unter dem Einfluß eines homogenen Schwerfeldes in der kürzesten Zeit von einem Punkt zu einem anderen gelangt. Wir beschreiben die Kurve  $C$  durch eine Funktion

$$x = f(z) \quad ,$$

wobei  $x$  die horizontale und  $z$  die vertikale Koordinate ist (nach unten gerichtet). Die Randbedingungen seien

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(a) = b \quad .$$

Am Ort  $x = 0, z = 0$  sei der Körper in Ruhe. Wegen der Energieerhaltung ist der Betrag seiner Geschwindigkeit in der Höhe  $z$

$$v = \sqrt{2gz} \quad .$$

Zum Durchlaufen der Kurve benötigt er die Zeit

$$t(f) = \int_C \frac{ds}{v} = \int_0^a dz \sqrt{\frac{1 + f'(z)^2}{2gz}} \quad .$$

Man muß jetzt diejenige Funktion  $f$  finden, für die diese Zeit minimal ist. Dies ist ein Extremalproblem in dem unendlich dimensionalen Raum der

(genügend oft) differenzierbaren Funktionen. Es läßt sich in der folgenden Weise auf ein Extremalproblem in einer Dimension zurückführen.

Sei  $f$  die Lösung des Extremalproblems, und sei  $h$  eine beliebige unendlich oft differenzierbare Funktion mit  $h(0) = h(a) = 0$ . Dann wird durch  $f + \alpha h$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  eine andere Kurve beschrieben, in der die Fallzeit  $t(f + \alpha h)$  größer oder gleich  $t(f)$  ist. Wenn  $t(f + \alpha h)$  nach  $\alpha$  differenzierbar ist, so muß die Ableitung an der Stelle  $\alpha = 0$  verschwinden,

$$0 = \left. \frac{d}{d\alpha} t(f + \alpha h) \right|_{\alpha=0} .$$

Nach Vertauschung von Integration und Differentiation ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^a dz \left. \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{1+y^2}{2gz}} \right|_{y=f'(z)} \cdot h'(z) \\ &= \int_0^a dz \frac{f'(z)}{\sqrt{(1+f'(z)^2)2gz}} h'(z) , \end{aligned}$$

und nach partieller Integration

$$0 = \left. \frac{f'(z)}{\sqrt{(1+f'(z)^2)2gz}} h(z) \right|_0^a - \int_0^a dz \left( \frac{d}{dz} \frac{f'(z)}{\sqrt{(1+f'(z)^2)2gz}} \right) h(z) .$$

Die Randterme verschwinden wegen der Voraussetzungen an die Funktion  $h$ . Wir nutzen jetzt aus, daß die Funktion  $h$  ansonsten beliebig war. Es gilt das folgende Lemma:

**Satz 2.1** *Sei  $F$  eine stetige Funktion auf dem Intervall  $[0, a]$  der reellen Achse mit der Eigenschaft*

$$\int_0^a dx F(x) h(x) = 0$$

*für alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen  $h$  mit  $h(0) = h(a) = 0$ . Dann ist  $F(x) = 0 \forall x \in [0, a]$ .*

*Beweis:* Wir beweisen die Behauptung durch Widerspruch. Sei  $F(x) = c > 0$  für ein  $x_0 \in [0, a]$ . Wegen der Stetigkeit von  $F$  gilt dann  $F(x) > \frac{c}{2}$  für alle  $x$  aus einer Umgebung  $V$  von  $x_0$ . Wir wählen jetzt eine unendlich oft differenzierbare Funktion  $h$ , die außerhalb von  $V$  verschwindet, keine negativen Werte annimmt und

$$\int_0^a dx h(x) = 1$$

erfüllt (solche Funktionen gibt es). Dann gilt

$$\int_0^a dx F(x)h(x) \geq \frac{c}{2} \int_0^a dx h(x) = \frac{c}{2}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung im Satz. Also gilt  $F(x) \leq 0 \forall x \in [0, a]$ . Ebenso zeigt man  $F(x) \geq 0$ . Daraus folgt die Behauptung.

Wir schließen, daß die der Kurve mit der kürzesten Fallzeit entsprechende Funktion  $f$  die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz} \frac{f'(z)}{\sqrt{(1 + f'(z)^2)2gz}} = 0$$

erfüllt<sup>1</sup>. Sei

$$c = \frac{f'}{\sqrt{(1 + (f')^2)z}} .$$

Im Fall  $c = 0$  ist  $f$  konstant, die Kurve ist also eine vertikale Gerade. Sei nun  $c > 0$ . Dann ist auch  $b = f(a) > 0$ . Auflösung der Gleichung nach  $f'$  ergibt

$$f'(z) = \sqrt{\frac{c^2 z}{1 - c^2 z}} , \quad z < \frac{1}{c^2} .$$

Wir substituieren

$$z = \frac{1}{c^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2c^2} (1 - \cos \varphi) , \quad \varphi \in [0, \pi] .$$

Mit

$$dz = \frac{1}{c^2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$$

folgt

$$\begin{aligned} x(\varphi) = f(z(\varphi)) &= \frac{1}{c^2} \int_0^\varphi d\varphi' \sin^2 \frac{\varphi'}{2} \\ &= \frac{1}{2c^2} \int_0^\varphi d\varphi' (1 - \cos \varphi') = \frac{1}{2c^2} (\varphi - \sin \varphi) . \end{aligned}$$

Die gesuchte Kurve schreibt sich mit Hilfe des Parameters  $\varphi$  als

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \frac{1}{2c^2} (\varphi - \sin \varphi) \\ z(\varphi) &= \frac{1}{2c^2} (1 - \cos \varphi) , \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Die Singularität bei  $z = 0$  macht eine etwas kompliziertere Betrachtung notwendig

es handelt sich um eine Zykloide, also die Bahn eines Punktes auf der Peripherie eines Kreises mit Radius  $\frac{1}{2c^2}$ , der auf der Geraden  $z = 0$  abrollt. Die Konstante  $c$  bestimmt man aus der Bedingung, daß es ein  $\varphi \in [0, \pi]$  gibt, so daß

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2c^2}(\varphi - \sin \varphi) \quad , \\ a &= \frac{1}{2c^2}(1 - \cos \varphi) \quad . \end{aligned}$$

## 2.2 Die Euler-Lagrange-Gleichungen

Das Brachistochronenproblem war historisch der Ausgangspunkt für eine allgemeine Untersuchung von Extremalproblemen für Funktionale  $A$  der Form

$$A(f) = \int_{x_1}^{x_2} dx a(f(x), f'(x), x) \quad ,$$

wobei  $a$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von drei reellen Variablen und  $f$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall  $[x_1, x_2]$  ist, mit vorgegebenen Werten an den Stellen  $x_1$  und  $x_2$ . Mit derselben Überlegung wie im vorigen Paragraphen erhalten wir für eine Funktion  $f$ , die das Funktional  $A$  extremal macht, und jede unendlich oft differenzierbare Funktion  $h$ , die an den Stellen  $x_1$  und  $x_2$  verschwindet

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial a}{\partial f}(f(x), f'(x), x) - \frac{d}{dx} \frac{\partial a}{\partial f'}(f(x), f'(x), x) \right) h(x) \quad .$$

Hierbei ist

$$\frac{\partial a}{\partial f}(f(x), f'(x), x)$$

eine Kurznotation für

$$\frac{\partial}{\partial y} a(y, z, x) \Big|_{(y,z,x)=(f(x),f'(x),x)}$$

und

$$\frac{\partial a}{\partial f'}(f(x), f'(x), x)$$

eine Kurznotation für

$$\frac{\partial}{\partial z} a(y, z, x) \Big|_{(y,z,x)=(f(x),f'(x),x)} \quad .$$

Aus dem Lemma im vorigen Abschnitt folgt, daß eine Funktion  $f$ , die das Extremalproblem löst, die Differentialgleichung

$$\frac{\partial a}{\partial f}(f(x), f'(x), x) - \frac{d}{dx} \frac{\partial a}{\partial f'}(f(x), f'(x), x) = 0$$

erfüllt. Diese Gleichung heißt die Euler-Lagrange-Gleichung des durch das Funktional  $A$  gegebenen Variationsproblems.

Die Verallgemeinerung auf  $n$ -komponentige Funktionen  $f = (f_1, \dots, f_n)$  ist einfach. Man ersetzt  $a$  durch eine Funktion von  $2n + 1$  reellen Variablen und erhält die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial a}{\partial f_i}(f(x), f'(x), x) - \frac{d}{dx} \frac{\partial a}{\partial f'_i}(f(x), f'(x), x) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad .$$

### 2.3 Beispiele zur Variationsrechnung

Als erstes Beispiel betrachten wir das Problem, die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte in der euklidischen Ebene zu finden. Seien  $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$  zwei Punkte, und sei

$$C : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{cases}$$

eine Kurve, die die beiden Punkte verbindet. Dann ist

$$l(C) = \int_0^1 dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

die Länge von  $C$ . Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= 0 \quad , \\ \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Also sind die Funktionen

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

und

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

konstant. Dies sind aber gerade die Komponenten des Einheitsvektors in Richtung der Tangente der Kurve, es handelt sich daher um eine Gerade.

Da die Länge der Kurve nicht von der Parametrisierung abhängt, ist die Parametrisierung durch das Variationsproblem nicht bestimmt.

Als zweites Beispiel suchen wir die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten auf einer Kugeloberfläche. Wir parametrisieren die Fläche durch Kugelkoordinaten

$$(x, y, z) = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad , \quad \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi] \quad .$$

Für die Länge ergibt sich dann

$$l(C) = r \int_0^1 dt \sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2} \quad .$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\sin^2 \theta \dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2}} &= 0 \quad , \\ \frac{d}{dt} \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2}} &= \frac{\sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2}} \quad . \end{aligned}$$

Wir wählen als Nordpol ( $\theta = 0$ ) unseres Koordinatensystems den Anfangspunkt der Kurve  $C$ . Dann ist nach der ersten Gleichung

$$\frac{\sin^2 \theta \dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2}} = 0$$

auf der ganzen Kurve<sup>2</sup>, also  $\dot{\varphi} = 0$ . Die kürzeste Verbindungslinie zu einem Punkt mit den Koordinaten  $(\theta_1, \varphi_1)$  verläuft daher auf dem Meridian  $\varphi = \varphi_1$ .

Als nächstes untersuchen wir die Weltlinie eines Teilchens unter Berücksichtigung der relativistischen Zeitdilatation. Bei einer Geschwindigkeit  $v$  ist die Eigenzeit  $d\tau$  um den Faktor  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  kleiner als die Zeit  $dt$  für den ruhenden Betrachter. Man kann jetzt unter allen Bahnen  $x(t)$  mit  $x(0) = 0$  und  $x(t_1) = x_1$ , deren Geschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, so daß die Zeitdilatation reell ist, diejenige suchen, für die die Eigenzeit maximal ist. (Wir beschränken uns der einfacheren Notation wegen auf Bewegungen in einer räumlichen Dimension.) Dazu muß das Funktional

$$\tau(x) = \int_0^{t_1} dt \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}$$

<sup>2</sup>Bei  $\theta = 0$  ist  $\varphi$  nicht wohl definiert. Doch für jede differenzierbare Kurve ist  $|\sin \theta \dot{\varphi}| \leq |\dot{x}|$ , d.h.  $\sin^2 \theta \dot{\varphi}$  konvergiert gegen Null, wenn man sich auf der Kurve dem Nordpol nähert

variiert werden. Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} = 0$$

mit der Lösung

$$x(t) = \frac{x_1}{t_1} t \quad .$$

Es ergibt sich also die gleichförmige Bewegung, die wir als die kräftefreie Bewegung in der Newtonschen Mechanik kennen.

Auch das Gravitationsfeld trägt zur Zeitdilatation bei, es gilt für einen ruhenden Betrachter bei einem Gravitationspotential  $U$

$$d\tau = \sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}} dt \quad .$$

(Hierbei ist das Gravitationspotential so normiert, daß es in unendlicher Entfernung verschwindet.) Auf der Erdoberfläche beträgt die durch das Gravitationsfeld bewirkte Zeitdilatation  $\frac{d\tau}{dt} - 1 \approx \frac{gR}{c^2} \approx 7 \cdot 10^{-10}$ . Für kleine Werte von  $\frac{v}{c}$  und  $\frac{U}{c^2}$  gilt (unter Verwendung von  $\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2}$  für kleine  $a$ ) für die Eigenzeit eines bewegten Teilchens im Gravitationsfeld die Näherungsformel

$$\tau(x) = \int_0^{t_1} dt \left( 1 + \frac{1}{c^2} (U - \frac{1}{2} \dot{x}^2) \right) \quad .$$

Die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{dU}{dx} + \ddot{x} = 0 \quad ,$$

stimmt also mit der Newtonschen Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld überein.

## 2.4 Die Lagrangefunktion und das Hamiltonsche Prinzip

Aus dem letzten Beispiel erkennt man, wie die Bewegungsgleichung eines mechanischen Systems in einem konservativen Kraftfeld aus einem Extremalprinzip abgeleitet werden kann. Man definiert die Lagrangefunktion

$$L = T - U \quad ,$$

als eine Funktion der Ortskoordinaten, Geschwindigkeiten und möglicherweise auch der Zeit. Dann betrachtet man das Variationsproblem für alle Bahnkurven mit vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt für das Funktional

$$S(x) = \int_0^{t_1} dt L(x(t), \dot{x}(t), t) \quad .$$

$S$  nennt man die Wirkung der Bahn. Die Euler-Lagrange-Gleichung dieses Variationsproblems ist nichts anderes als die Newtonsche Bewegungsgleichung des Systems. Dieser Sachverhalt wird als Hamiltonsches Prinzip oder auch als Prinzip der kleinsten Wirkung bezeichnet. Allerdings ist die Lösung der Bewegungsgleichung in der Regel nur ein lokales Minimum der Wirkung.

Ein Vorteil dieser Formulierung besteht darin, daß es sehr einfach wird, die Bewegungsgleichungen in anderen Koordinaten aufzuschreiben. Man braucht lediglich das Potential und die kinetische Energie als Funktion der neuen Koordinaten  $q = (q_1, \dots, q_n)$  und ihrer Zeitableitungen  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  zu kennen. Dann lauten die Bewegungsgleichungen (Lagrangesche Gleichungen)

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad .$$

In Kugelkoordinaten z.B. ist die kinetische Energie eines einzelnen Teilchens

$$T(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)) \quad .$$

Für die kräftefreie Bewegung findet man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \quad , \\ \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) &= r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \quad , \\ \frac{d}{dt}(r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

## 2.5 Holonome Zwangsbedingungen

Oft betrachtet man in der Mechanik Situationen, in denen ein Teil der Kräfte indirekt dadurch beschrieben wird, daß die Bewegungsmöglichkeiten der Massenpunkte eingeschränkt wird. So ist z.B. beim mathematischen Pendel die Bewegung des in einer vertikalen Ebene schwingenden Massenpunktes dadurch eingeschränkt, daß der Faden den Abstand vom Aufhängepunkt konstant hält. Wir wollen im folgenden nur solche Zwangsbedingungen untersuchen, bei denen die Koordinaten durch Gleichungen der Form

$$F_i(q_1, \dots, q_n) = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

eingeschränkt werden, mit genügend glatten Funktionen  $F_i$  mit linear unabhängigen Gradienten (holonome Zwangsbedingungen). Wenn wir jetzt das Hamiltonsche Prinzip anwenden wollen, so müssen wir beachten, daß die Variationen  $h_i$  hier dadurch eingeschränkt sind, daß auch die variierte Bahn die Zwangsbedingungen erfüllen muß. Am einfachsten berücksichtigt man dies dadurch, daß man die Zwangsbedingungen lokal auflöst, so daß sie in den neuen Koordinaten die Form

$$q_i = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

annehmen. In den verbleibenden  $n - k$  Koordinaten kann man dann frei variieren und erhält die üblichen Lagrange-Gleichungen. Im Fall des mathematischen Pendels etwa wählt man in der vertikalen Ebene Polarkoordinaten mit dem Aufhängepunkt bei  $r = 0$ . Die Zwangsbedingung lautet dann  $r - l = 0$ , und man erhält in der Variablen  $\varphi$  die bekannte Pendelgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad .$$

Stattdessen kann man auch die aus der Bestimmung von Extrema mit Nebenbedingungen bekannten Methoden verwenden. Man erhält dann Lagrange-Gleichungen, in denen auf der rechten Seite Linearkombinationen der Ableitungen der Zwangsbedingungen stehen,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=0}^k \lambda_j(t) \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \quad .$$

Hierbei sind die Funktionen  $\lambda_j(t)$  (die Lagrangeschen Multiplikatoren) zunächst beliebig. Sie können aus den Zwangsbedingungen und den Lagrange-Gleichungen bestimmt werden. Wir wollen das am Beispiel des mathematischen Pendels in kartesischen Koordinaten durchführen.

Die Zwangsbedingung lautet

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0 \quad .$$

Die Lagrange-Gleichungen sind

$$\ddot{x} = -2\lambda x$$

$$\ddot{y} + g = -2\lambda y$$

Zweimalige Differentiation der Zwangsbedingung nach der Zeit liefert

$$\ddot{x}x + \ddot{y}y + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0 \quad .$$

Setzen wir hier die Bewegungsgleichung ein, so ergibt sich

$$\lambda = \frac{1}{2l^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - gy$$

Wir können auch die erste Lagrange-Gleichung mit  $\dot{x}$  und die zweite mit  $\dot{y}$  multiplizieren und beide Gleichungen addieren. Die rechte Seite verschwindet dann als Folge einmaliger Differentiation der Zwangsbedingung, so daß der Lagrangesche Multiplikator aus der Beschreibung eliminiert worden ist.

Sowohl die Bestimmung der Lagrangeschen Multiplikatoren als Funktionen der Koordinaten und Geschwindigkeiten als auch ihre Elimination können immer durchgeführt werden.

Die auf der rechten Seite der Lagrange-Gleichungen auftretenden Terme nennt man die Zwangskräfte. Ihre Form kann durch das d'Alembertsche Prinzip charakterisiert werden:

*Bei virtuellen Verrückungen leisten die Zwangskräfte keine Arbeit.*

Hierbei sind „virtuelle Verrückungen“ die von den Zwangsbedingungen bei festgehaltener Zeit erlaubten Geschwindigkeiten.

## 2.6 Zyklische Koordinaten, konjugierte Impulse und das Noethertheorem

Sei  $L$  die Lagrangefunktion eines Systems, und sei  $L$  unabhängig von einer der Koordinaten  $q_i$ ,  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ . Eine solche Koordinate nennt man zyklisch. Zu jeder Koordinate definiert man den kanonisch konjugierten Impuls durch

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} .$$

Ist  $q_i$  zyklisch, so ist nach der Lagrange-Gleichung der kanonisch konjugierte Impuls  $p_i$  eine Erhaltungsgröße.

Ist  $L$  unabhängig von der Zeit,  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , so zeigt man, daß

$$E := \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

erhalten ist. Denn

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} ,$$

wenn  $q(t)$  die Lagrange-Gleichungen erfüllt. Ist  $L = T - U$  mit

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

und einem geschwindigkeitsunabhängigen Potential  $U$ , dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T \quad ,$$

also

$$E = T + U \quad .$$

$E$  hat daher in diesem Fall die Bedeutung der Energie.

Eine koordinatenunabhängige Formulierung des Zusammenhangs zwischen Invarianzeigenschaften der Lagrangefunktion und Erhaltungssätzen liefert das Noethertheorem.

**Satz 2.2** Sei  $q \mapsto Q(\alpha, q), \alpha \in \mathbb{R}$  eine (unendlich oft differenzierbare) einparametrische Schar von Koordinatentransformationen mit  $Q(0, q) = q$  und mit den transformierten Geschwindigkeiten

$$\dot{Q}_i(\alpha, q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad .$$

Sei  $L(Q(\alpha, q), \dot{Q}(\alpha, q, \dot{q}), t) = L(q, \dot{q}, t) \forall \alpha$ . Dann ist

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} X_i(q)$$

(mit  $X_i = \left. \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$ ) eine Erhaltungsgröße.

*Beweis:* Unter Benutzung der Lagrange-Gleichung findet man

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} X_i(q) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \alpha \partial q_j} \dot{q}_j \right) \Bigg|_{\alpha=0} \quad .$$

Die rechte Seite ist aber gerade die partielle Ableitung von  $L(Q(\alpha, q), \dot{Q}(\alpha, q, \dot{q}), t)$  nach  $\alpha$  an der Stelle  $\alpha = 0$ .

*Beispiel:* (1) Sei  $L$  die Lagrangefunktion eines abgeschlossenen  $n$ -Teilchensystems in kartesischen Koordinaten,

$$L = T - U \quad ,$$

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} |\dot{x}_i|^2 \quad ,$$

mit einem Potential  $U$ , das unter gleichzeitigen Translationen aller Koordinaten  $\vec{x}_i \mapsto \vec{x}_i + \vec{a}$ ,  $i = 1, \dots, n$  invariant ist. Dann ist für jeden Einheitsvektor  $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$ ,  $|\vec{e}| = 1$  die Lagrangefunktion unter den Abbildungen  $\vec{x}_i \mapsto \vec{x}_i + \alpha \vec{e}$  invariant. Die entsprechende Erhaltungsgröße ist der Impuls in Richtung von  $\vec{e}$ ,

$$\vec{e} \cdot \vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{e} \cdot \text{grad}_{\vec{x}_i} L$$

(2) Sei

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x^2 + y^2) \quad .$$

$L$  ist invariant unter Drehungen in der  $x$ - $y$ -Ebene,

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \quad , \\ y(\alpha) &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad . \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} l &= \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \\ &= -\dot{x}y + \dot{y}x \end{aligned}$$

erhalten; es handelt sich offensichtlich um den Drehimpuls.

## 2.7 Beispiele für Systeme mit Zwangsbedingungen

**Mathematisches Pendel** Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{1}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + gl \cos \varphi$$

Da  $L$  nicht von der Zeit abhängt, ist die Energie

$$E = \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \frac{1}{2}l^2\dot{\varphi}^2 - gl \cos \varphi$$

erhalten. Mit der Methode der Separation der Variablen erhalten wir

$$t = \int d\varphi \frac{l}{\sqrt{2(E + gl \cos \varphi)}} \quad .$$

Falls  $E < gl$ , ist die Bewegung periodisch mit Umkehrpunkten  $\pm\varphi_0$ ,  $\varphi_0 = \arccos(-\frac{E}{gl})$ . Die Periode ergibt sich zu

$$t_0 = 4 \int_0^{\varphi_0} \frac{ld\varphi}{\sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} \quad .$$

Im Fall  $E = gl$  ist  $\varphi_0 = \pi$ . Zu dieser Energie gibt es 3 Bahnen:  $\varphi(t) = \pi$  für alle  $t$ ,  $\dot{\varphi}(t) > 0$  für alle  $t$  und  $\dot{\varphi}(t) < 0$  für alle  $t$ . In den beiden letzten Fällen braucht der Massenpunkt unendlich lange, um den Umkehrpunkt  $\varphi_0 = \pi$  zu erreichen (vgl. Übungsaufgabe 7).

Ist  $E > gl$ , so dreht sich das Pendel immer in einer Richtung; die Zeit für einen Umlauf ist

$$t = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \frac{l}{\sqrt{2(E + gl \cos \varphi)}} .$$

Die verschiedenen Bahnen lassen sich im Phasenraum (mit den Koordinaten  $\varphi$  und  $p_\varphi = l^2 \dot{\varphi}$ ) veranschaulichen.

Die Berechnung der obigen Integrale ist nicht mehr mit elementaren Funktionen möglich. Es handelt sich um sogenannte elliptische Integrale. Für kleine Auslenkungen  $\varphi \ll \pi$  kann man im Potential  $\cos \varphi$  durch  $1 - \frac{1}{2}\varphi^2$  ersetzen und findet einen harmonischen Oszillator mit Frequenz  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

Im allgemeinen Fall setzen wir zunächst  $w = 1 - \cos \varphi$ . Dann ist  $dw = \sin \varphi d\varphi = \sqrt{w(2-w)} d\varphi$  für  $\varphi > 0$ . Sei  $w_0 = 1 + \frac{E}{gl}$ . Wir erhalten für die Zeit  $t(\varphi)$  das folgende Integral

$$t(\varphi) - t(0) = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{1-\cos \varphi} \frac{dw}{\sqrt{w(w_0 - w)(2 - w)}} .$$

Im Nenner des Integranden steht ein Polynom 3. Grades mit den Nullstellen  $0, w_0, 2$ . Wir betrachten den Fall  $0 < w_0 < 2$ . Wir substituieren  $w = w_0 u^2, u > 0$  und finden für das obige Integral

$$\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\sqrt{\frac{1-\cos \varphi}{w_0}}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\frac{w_0}{2}u^2)}} .$$

Mit der erneuten Substitution  $u = \sin \xi, du = \cos \xi d\xi = \sqrt{1-u^2} d\xi$  wird daraus

$$\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\arcsin \sqrt{\frac{1-\cos \varphi}{w_0}}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\frac{w_0}{2} \sin^2 \xi}} .$$

Für kleine  $w_0$  entwickeln wir den Integranden bis zur ersten Ordnung und finden den Näherungsausdruck

$$t(\varphi) - t(0) = \sqrt{\frac{l}{g}} \left( \xi \left( 1 + \frac{w_0}{8} \right) + \frac{w_0}{16} \sin 2\xi \right)$$

mit  $\xi = \arcsin \sqrt{\frac{1-\cos \varphi}{w_0}}$ . In unterster Ordnung in  $w_0$  ergibt sich eine harmonische Schwingung,

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \sqrt{\frac{g}{l}}(t - t(0)) \quad .$$

Die Periode beträgt in 1. Ordnung in  $w_0$

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}\right) \quad .$$

**Sphärisches Pendel** Unter einem sphärischen Pendel versteht man einen Massenpunkt, der sich unter dem Einfluß eines homogenen Schwerfeldes auf der Oberfläche einer Kugel bewegt. Wir parametrisieren den Ortsvektor des Massenpunktes durch Kugelkoordinaten, wobei  $\theta = 0$  die Richtung nach unten angibt. Dann ist

$$\vec{x}(\theta, \varphi) = l(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad .$$

Für die Geschwindigkeit ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\ &= l\dot{\theta}(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) + l \sin \theta \dot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die kinetische Energie zu

$$T = \frac{1}{2} l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \quad .$$

Die potentielle Energie ist

$$U = -gl \cos \theta \quad .$$

Die Lagrangefunktion  $L = T - U$  hängt weder von  $\varphi$  noch von  $t$  ab. Die zugehörigen Erhaltungsgrößen sind

$$p_\varphi = l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad ,$$

dies ist der Drehimpuls um die vertikale Achse; er ist erhalten, weil in vertikaler Richtung kein Drehmoment wirkt, und die Energie

$$E = \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \frac{l^2}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta)$$

mit

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{p_\varphi^2}{2l^2 \sin^2 \theta} - gl \cos \theta \quad .$$

Die Gleichung kann jetzt mit Separation der Variablen gelöst werden. Wie beim ebenen mathematischen Pendel wird das Integral durch die Substitution  $w = 1 - \cos \theta$  in die Form

$$t(\theta) - t(\theta_1) = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{w_1}^{1-\cos \theta} \frac{dw}{\sqrt{w^3 + aw^2 + bw + c}}$$

gebracht, mit  $a = -(2+w_0)$ ,  $b = 2w_0$ ,  $c = -\frac{p_\varphi^2}{2gl^3}$  und  $w_0 = 1 + \frac{E}{gl}$ . Für  $c = 0$  erhält man das ebene Pendel zurück. Das Polynom unter der Wurzel im Nenner des Integranden hat 3 reelle Nullstellen  $w_1 < w_2 < w_3$ , für  $w_1 < w < w_2$  ist es positiv. Nach Bestimmung der Nullstellen, etwa durch die Cardanoschen Formeln oder nach einem Näherungsverfahren, kann das Integral genauso wie beim ebenen Pendel behandelt werden, und wir erhalten

$$t(\theta) - t(\theta_1) = \sqrt{\frac{2l}{g(w_3 - w_1)}} \int_0^{\arcsin \sqrt{\frac{w-w_1}{w_2-w_1}}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{w_2-w_1}{w_3-w_1} \sin^2 \xi}} \quad .$$

**Doppelpendel** Beim (ebenen) Doppelpendel bewegen sich zwei Massenpunkte unter dem Einfluß eines homogenen Schwerfeldes in einer vertikalen Ebene, der erste mit einem festen Abstand von einem festgehaltenem Punkt und der zweite mit einem festen Abstand vom ersten Massenpunkt. Sind  $\varphi_1, \varphi_2$  die Auslenkungen von der Vertikalen vom jeweiligen Aufhängepunkt, so sind die beiden Ortsvektoren

$$\vec{x}_1 = l_1(\cos \varphi_1, \sin \varphi_1) \quad , \quad \vec{x}_2 = \vec{x}_1 + l_2(\cos \varphi_2, \sin \varphi_2) \quad .$$

Für die kinetische Energie findet man

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \quad ,$$

und für die potentielle Energie

$$U = -m_1 l_1 g \cos \varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2) \quad .$$

Das Doppelpendel ist ein nichtintegrables System; die Bewegungsgleichungen können nicht auf die Berechnung von Integralen zurückgeführt

werden. Numerische Berechnungen weisen auf ein teilweise chaotisches Verhalten hin. Die Existenz von Bahnen, bei denen in einer vorgegebenen Zeit  $t_1$  das eine Pendel sich  $n$  mal, das andere  $m$  mal dreht,  $n, m \in \mathbb{Z}$ , läßt sich mit Hilfe des Prinzips der kleinsten Wirkung zeigen: Die Wirkung  $S$  einer solchen Bahn ist nach unten beschränkt,

$$S \geq -t_1(m_1 l_1 g + m_2 g(l_1 + l_2)) \quad .$$

Bei einer stetigen Variation der Bahn ändert sich die Zahl der Umläufe nicht. Wir beginnen mit der Bahn

$$(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \frac{2\pi t}{t_1}(n, m)$$

und variieren sie solange, bis die Wirkung minimal wird.

**Peitsche** Eine Schnur der Länge  $l$  bewegt sich auf der  $x$ -Achse. Die Endpunkte liegen bei  $x_1$  und  $x_2$ , an der Stelle  $y < x_1, x_2$  ist die Schnur umgeschlagen,

$$x_1 - y + x_2 - y = l, \text{ d.h. } y = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - l) \quad .$$

Ist  $\rho$  die Masse pro Länge, so ergibt sich für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\rho(x_1 - y)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\rho(x_2 - y)\dot{x}_2^2 \quad .$$

Mit Relativ- und Schwerpunktskoordinaten  $\xi = x_1 - x_2, X = \frac{1}{2l}((x_1 - y)(x_1 + y) + (x_2 - y)(x_2 + y))$ , der Gesamtmasse  $M = \rho l$  und der reduzierten Masse

$$\mu = \rho \frac{(x_1 - y)(x_2 - y)}{l} = \frac{\rho l}{4} \left(1 - \frac{\xi^2}{l^2}\right)$$

wird daraus

$$T = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\xi}^2 = \frac{\rho l}{8} \left(4\dot{X}^2 + \left(1 - \frac{\xi^2}{l^2}\right)\dot{\xi}^2\right) \quad .$$

Im kräftefreien Fall ist dies bereits die Lagrangefunktion des Systems. Es gibt zwei Erhaltungsgrößen: die Energie, da  $L$  nicht von der Zeit abhängt, und den Schwerpunktsimpuls, da  $L$  nicht von der Schwerpunktskoordinate abhängt. Daher ist auch die Energie der Relativbewegung erhalten,

$$E_{\text{rel}} = \frac{\rho l}{8} \left(1 - \frac{\xi^2}{l^2}\right)\dot{\xi}^2 \equiv \frac{\rho l}{8} v_0^2 = \text{const} \quad ,$$

$v_0 > 0$ . Man sieht, daß die Relativgeschwindigkeit für  $\xi \rightarrow \pm l$  divergiert. In der Praxis überschreitet sie dann die Schallgeschwindigkeit, und die Peitsche knallt. Die Bewegungsgleichung läßt sich wieder durch Separation der Variablen lösen. Wir finden für  $\xi > 0$

$$t = \frac{1}{v_0} \int d\xi \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{l^2}} \quad .$$

Mit der Substitution  $\xi = l \sin \alpha$  ergibt sich

$$t = \frac{l}{v_0} \int d\alpha \cos^2 \alpha \quad .$$

Die Stammfunktion von  $\cos^2 \alpha$  ist  $\frac{1}{4}(2\alpha + \sin 2\alpha)$ , daher ist die Lösung

$$t(\xi) = t(0) + \frac{l}{v_0} \frac{1}{2} \left( \arcsin \frac{\xi}{l} - \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{l^2}} \frac{\xi}{l} \right) \quad .$$

Die Zeit für das volle Durchschwingen der Peitsche ist

$$t = \frac{l}{v_0} \frac{\pi}{2} \quad .$$

## 2.8 Das relativistische Keplerproblem

In einem rotationssymmetrischen Gravitationsfeld eines Sterns der Masse  $M$  gilt für die Eigenzeit  $d\tau$  eines Massenpunktes außerhalb des Sterns (und außerhalb des Schwarzschildradius  $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$ ) (im folgenden wird die Lichtgeschwindigkeit  $c = 1$  gesetzt)

$$d\tau = L dt$$

mit

$$L = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)} \quad .$$

und der Eigenzeit  $dt$  eines weit entfernten ruhenden Beobachters. Die Euler-Lagrange-Gleichung für  $\theta$  wird durch  $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$  gelöst. Dies entspricht der Tatsache, daß die Bewegung wie im nichtrelativistischen Fall in einer Ebene abläuft. Wir setzen daher im folgenden  $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$  und erhalten als Lagrangefunktion

$$L = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2} \quad .$$

Die Koordinate  $\varphi$  ist zyklisch, daher ist der zugehörige kanonisch konjugierte Impuls („Drehimpuls“) erhalten,

$$p_\varphi = -\frac{r^2\dot{\varphi}}{L} = \text{const} \quad .$$

Da  $L$  nicht von der Zeit abhängt, ist auch die „Energie“

$$E = \dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = -\frac{1}{L}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$$

eine Erhaltungsgröße. Wir ersetzen jetzt in  $L$  die Zeitableitungen durch die Ableitungen nach der Eigenzeit  $\tau$ . Mit

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\tau}L \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{d\varphi}{d\tau}L\end{aligned}$$

ergibt sich für  $L$  die Gleichung

$$L^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) - \left[\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right]L^2 \quad ,$$

also

$$L^2 = \frac{1 - \frac{2GM}{r}}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + 1} \quad .$$

Einsetzen in die Formel für die Energie, mit  $\frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{p_\varphi}{r^2}$  liefert

$$E^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left[\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + 1\right]$$

oder

$$\frac{E^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

mit

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2} - \frac{GMp_\varphi^2}{r^3} \quad .$$

Die ersten beiden Terme im effektiven Potential sind uns bereits aus dem nichtrelativistischen Keplerproblem bekannt. Der dritte Term ist neu, er stellt ein anziehendes Potential dar, das bei kleinen Werten von  $r$  dominiert und jeden Massenpunkt in endlicher Eigenzeit in den Ursprung  $r = 0$  zieht (schwarzes Loch). Periodische Bewegungen in der radialen Koordinate kann es nur geben, wenn das effektive Potential nicht monoton ist. Hierzu setzen

wir die Ableitung des effektiven Potentials nach  $r$  gleich Null und erhalten die quadratische Gleichung

$$r^2 - \frac{p_\varphi^2}{GM}r + 3p_\varphi^2 = 0 \quad . \quad ,$$

die nur für  $p_\varphi > \sqrt{3}r_0$  zwei verschiedene reelle Lösungen besitzt,

$$r_\pm = \frac{p_\varphi^2}{r_0} \pm p_\varphi \sqrt{\frac{p_\varphi^2}{r_0^2} - 3} \quad .$$

Wir wenden uns nun der Bestimmung der Bahnkurve  $\varphi(r)$  für den Fall einer periodischen Bewegung zu. Sind  $r_1 > r_2 > r_3$  die drei Lösungen der Gleichung

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{E^2 - 1}{2} \quad ,$$

so variiert die Radialkoordinate zwischen  $r_1$  und  $r_2$ . Die Bahnkurve ergibt sich aus dem Integral (wir setzen  $\varphi(r_2) = 0$ )

$$\varphi(r') = \int_{r_2}^{r'} \frac{-p_\varphi dr}{r^2 \sqrt{E^2 - 1 - 2U_{\text{eff}}(r)}} \quad .$$

Wir substituieren  $w = \frac{r_0}{r}$  und finden wieder ein elliptisches Integral

$$\int_w^{w_2} \frac{ldw}{\sqrt{E^2 - 1 + w - l^2w^2 + l^2w^3}}$$

mit  $l = -\frac{p_\varphi}{r_0}$ .  $w_1 < w_2 < w_3$ ,  $w_i = \frac{r_0}{r_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  sind die Nullstellen des Nenners des Integranden.

Wir wollen jetzt die Periheldrehung berechnen. Wir erhalten

$$\varphi = \frac{4}{\sqrt{w_3 - w_1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \sin^2 \xi}}$$

und für den Fall, daß  $w_2 - w_1 \ll w_3 - w_1$ , die Näherungsformel (mit  $\bar{w} = \frac{1}{2}(w_2 + w_1)$  und  $\delta = w_2 - w_1$ )

$$\begin{aligned} \varphi &= (w_3 - w_1)^{-\frac{1}{2}} 2\pi \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}\right) \\ &= 2\pi \frac{w_3 - \bar{w} + \frac{3}{4}\delta}{(w_3 - \bar{w} + \frac{1}{2}\delta)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\approx 2\pi(w_3 - \bar{w})^{-\frac{1}{2}}$$

Dieser Fall liegt vor, wenn  $1 - E^2$  nahe am lokalen Maximum des Polynoms  $P(w) = w - l^2w^2 + l^2w^3$  an der Stelle  $w_m = \frac{1}{3}(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{l^2}})$  liegt. Die Bahn ist in diesem Fall nahezu kreisförmig. Es ist dann  $\bar{w} \approx w_m$ . Für  $w_3 - w_m$  ergibt sich aus der Taylorentwicklung von  $P$  an der Stelle  $w_m$

$$w_3 - w_m = -\frac{3P''(w_m)}{P'''(w_m)} = \sqrt{1 - \frac{3}{l^2}} \quad .$$

Wir schließen, daß die relativistische Periheldrehung

$$\varphi - 2\pi = 2\pi \left( \left(1 - \frac{3}{l^2}\right)^{-\frac{1}{4}} - 1 \right) \approx \frac{3\pi}{2l^2}$$

für  $l^2 \gg 3$  beträgt. In diesem Fall ist der Bahnparameter  $p$  gegeben durch

$$p = \frac{r_0}{w_m} = 2r_0l^2 \quad .$$

Die Perihelverschiebung ist also

$$\Delta\varphi = 3\pi \frac{r_0}{p} \quad .$$

Dieser Wert konnte tatsächlich bei der Planetenbewegung beobachtet werden. So ergibt sich für den Merkur

$$\Delta\varphi = 5,02 \cdot 10^{-7}.$$

Zu beachten ist dabei, daß andere Einflüsse (Quadrupolmoment der Sonne, Gravitationswirkung der anderen Planeten) ebenfalls zu einer Periheldrehung führen, die von ähnlicher Größenordnung ist.

## 3 Hamiltonsche Mechanik

### 3.1 Legendretransformation

Gleichungen zwischen physikalischen Größen werden oft durch Differentiation aus sogenannten Potentialen gewonnen. Prototyp hierfür sind die Kraftgesetze für die Komponenten eines konservativen Kraftfeldes, die sich aus den Ableitungen der potentiellen Energie (als Funktion des Ortes) nach den Ortskoordinaten ergeben,

$$F_i(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3) \quad .$$

Die Lagrangefunktion kann als Potential der verallgemeinerten Impulse und Kräfte angesehen werden,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q; \dot{q}, t) \quad ,$$

$$K_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}(q; \dot{q}, t) \quad ,$$

für die die Newtonsche Gleichung in der ursprünglichen Form gilt,

$$\frac{dp_i}{dt} = K_i \quad .$$

Wenn man die Bewegung eines mechanischen Systems als Bewegung im Phasenraum (mit den Koordinaten  $q_1, \dots, p_n$ ) verstehen möchte, ist es sinnvoll, die Gleichung für den Impuls nach den Geschwindigkeiten aufzulösen. Wir suchen dann ein Potential (als Funktion von Ort und Impuls) für Geschwindigkeit und Kraft.

Probleme dieser Art treten in der Physik an vielen Stellen auf, insbesondere in der Thermodynamik. Man löst sie mit Hilfe der sogenannten Legendretransformation.

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit  $f'' > 0$  und sei  $u = f'(x)$ . Dann ist  $f'$  invertierbar,

$$x(u) = (f')^{-1}(u) \quad .$$

Wir suchen jetzt ein Potential für  $x$  als Funktion von  $u$ , d.h. eine Funktion  $g$  mit  $g' = (f')^{-1}$ . Es gilt

$$(g(f'(x)) + f(x))' = g'(f'(x))f''(x) + f'(x) = x \frac{du}{dx} + u = \frac{d}{dx}(xu) \quad ,$$

also ist

$$g(u) = x(u)u - f(x(u))$$

das (bis auf eine additive Konstante eindeutige) gesuchte Potential. Man nennt  $g$  die Legendretransformierte von  $f$ .

*Beispiel:* Sei  $f(x) = ax^2$  und sei  $u(x) = f'(x) = 2ax$ . Dann ist  $x(u) = (f')^{-1}(u) = \frac{u}{2a}$  und die Legendretransformierte ist

$$g(u) = x(u)u - f(x(u)) = \frac{u^2}{4a}$$

Hängt  $f$  noch von einer weiteren Variablen  $y$  ab, und ist  $g$  die Legendretransformierte von  $f$  bezüglich  $x$ , so gilt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y}(u, y) &= u \frac{\partial x}{\partial y}(u, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, y), y) \frac{\partial x}{\partial y}(u, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, y), y) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial y}(x(u, y), y) \quad . \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, daß die partielle Ableitung von  $g$  nach  $y$  bei festgehaltenem  $u$  und die partielle Ableitung von  $f$  nach  $y$  bei festgehaltenem  $x$  durchzuführen ist.

Man kann entsprechend auch Funktionen mehrerer Variabler transformieren. Die Bedingung an die Positivität der 2. Ableitung ist dann so zu verstehen, daß die Matrix der zweifachen partiellen Ableitungen,

$$(f'')_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad ,$$

positiv definit ist.

*Beispiel:* Sei

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} x_i x_j$$

mit  $f(x) > 0$  für  $x > 0$  und  $a_{ij} = a_{ji}$ . Dann ist  $u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ . Wir betrachten jetzt die inverse Matrix  $(b_{ij})$  zu  $(a_{ij})$ ,

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} a_{jk} = \delta_{ik} \quad ,$$

Dann ist  $x_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}u_j$ , und die Legendretransformierte von  $f$  ist

$$\begin{aligned} g(u) &= \sum_{i=1}^n u_i x_i - f(x) \\ &= \sum_{i,j=1}^n u_i b_{ij} u_j - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \sum_{k,l=1}^n b_{ik} b_{jl} u_k u_l \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_{ij} u_i u_j \quad . \end{aligned}$$

### 3.2 Hamiltonfunktion und Hamiltonsche Gleichungen

Wir wenden jetzt die Legendretransformation auf die Lagrangefunktion an, um die Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  zu Gunsten der Impulse  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  zu eliminieren. Die dabei entstehende Funktion der Koordinaten, Impulse und der Zeit,

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$$

heißt die Hamiltonfunktion des Systems. Voraussetzung für die Durchführung dieser Transformation ist, daß das Gleichungssystem

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

nach  $\dot{q}$  aufgelöst werden kann. In dem obigen Ausdruck für die Hamiltonfunktion muß dann überall  $\dot{q}$  als Funktion von  $p, q, t$  geschrieben werden.

Die zeitliche Entwicklung im Phasenraum wird jetzt durch die Hamiltonschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

bestimmt. Hierbei ergeben sich die Gleichungen für die Zeitableitungen der Koordinaten  $q_i$  aus der definierenden Eigenschaft der Legendretransformation. Die Gleichungen für die Zeitableitungen der Impulse folgen aus der Lagrange-Gleichung zusammen mit der Beziehung zwischen den partiellen

Ableitungen nach zusätzlichen Variablen in einer Funktion und ihrer Legendretransformierten.

Drückt man  $H$  als Funktion von  $q, \dot{q}, t$  aus, so ergibt sich

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad ,$$

$H$  ist also die Energie als Funktion von Ort, Impuls und Zeit, wenn  $L = T - U$  ist mit einem geschwindigkeitsunabhängigem Potential  $U$  und einer kinetischen Energie  $T$ , die eine quadratische Funktion der Geschwindigkeiten ist.

*Beispiel:* (1) Massenpunkt im äußeren Potential  $V(q)$ :

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \Rightarrow H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

(2) Freies Teilchen in Kugelkoordinaten: Die Lagrangefunktion ist

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \quad .$$

Die kanonisch konjugierten Impulse sind

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} \quad , \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad .$$

Auflösen nach den Geschwindigkeiten ergibt

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad , \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta} \quad .$$

Also ist die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \quad .$$

(3) Peitsche: Die Lagrangefunktion in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten ist

$$L = \frac{\rho l}{8} (4\dot{X}^2 + (1 - \frac{\xi^2}{l^2}) \dot{\xi}^2) \quad .$$

Die Impulse ergeben sich zu

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \rho l \dot{X} \quad , \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\rho l}{4} (1 - \frac{\xi^2}{l^2}) \dot{\xi} \quad .$$

Wir lösen wieder nach den Geschwindigkeiten auf und finden

$$\dot{X} = \frac{P}{\rho l}, \quad \dot{\xi} = \frac{4lp}{\rho(l^2 - \xi^2)} \quad .$$

Daher ist die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{P^2}{2\rho l} + \frac{2lp^2}{\rho(l^2 - \xi^2)} \quad .$$

### 3.3 Phasenraum und Poissonklammern

Sei  $f(p, q)$  eine Funktion auf dem Phasenraum. Aufgrund der Hamiltonschen Gleichungen beschreibt der Phasenraumpunkt  $(p, q)$  eine Bahn im Phasenraum. Setzt man dies in die Phasenraumfunktion  $f$  ein, so findet man für die zeitliche Veränderung von  $f$  nach den Hamiltonschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(p(t), q(t)) &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \quad . \end{aligned}$$

Man nennt für zwei Phasenraumfunktionen  $f$  und  $g$  den Ausdruck

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

die Poissonklammer von  $f$  und  $g$ . Mit Hilfe dieser Notation schreibt sich die Zeitableitung von  $f$  als Poissonklammer mit der Hamiltonfunktion,

$$\frac{d}{dt}f(p(t), q(t)) = \{f, H\}(p(t), q(t)) \quad ,$$

und die Hamiltonschen Gleichungen erhalten die Form

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad i = 1, \dots, n.$$

Besonders einfache Poissonklammern gibt es für Impulse und Ortskoordinaten untereinander. Man findet die „kanonischen Poissonklammern“

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

mit dem Kroneckersymbol  $\delta_{ij}$ .

Sei  $\mathcal{A}$  die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf dem Phasenraum.  $\mathcal{A}$  hat mit punktweiser Addition und Multiplikation

$$\begin{aligned}(f + g)(p, q) &= f(p, q) + g(p, q) \\ (f \cdot g)(p, q) &= f(p, q)g(p, q) \\ (\lambda f)(p, q) &= \lambda f(p, q)\end{aligned}$$

die Struktur einer kommutativen Algebra, d.h. eines Vektorraums zusammen mit einem assoziativen, kommutativen Produkt, das das Distributivgesetz erfüllt. Diese Algebra kann man als die Algebra der Observablen des mechanischen Systems auffassen.

Durch die Poissonklammer wird ein zweites, nichtkommutatives Produkt auf  $\mathcal{A}$  eingeführt. Es ist antisymmetrisch,

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad ,$$

und erfüllt die folgenden Verträglichkeitsbedingungen mit den anderen Verknüpfungen,

$$\begin{aligned}\{\lambda f + \mu g, h\} &= \lambda\{f, h\} + \mu\{g, h\} \quad , \\ \{f, gh\} &= \{f, g\}h + g\{f, h\} \quad .\end{aligned}$$

Die letzte Bedingung sagt, daß die Poissonklammer mit  $f$  eine Derivation der Algebra darstellt. Zum besseren Verständnis dieser Eigenschaft ordnen wir  $f$  einen Differentialoperator 1. Ordnung zu,

$$X_f = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \quad .$$

Es gilt

$$X_f g = \{f, g\} \quad .$$

Die Derivationseigenschaft schreibt sich dann als

$$X_f(gh) = (X_f g)h + g(X_f h) \quad ,$$

dies ist aber nichts anderes als die Produktregel der Differentiation. Das durch die Poissonklammer erklärte Produkt ist nicht assoziativ. stattdessen gilt die sogenannte Jacobi-Identität

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \quad .$$

Mit Hilfe der Antisymmetrie und der den Phasenraumfunktionen zugeordneten Differentialoperatoren schreibt sich die Jacobi-Identität in der Form

$$X_f X_g h - X_g X_f h = X_{\{f,g\}} h \quad .$$

Die Jacobi-Identität ist typisch für nichtassoziative Produkte. Andere Beispiele sind das Vektorprodukt im  $\mathbb{R}^3$  und der Kommutator zweier  $n$ -reihiger Matrizen

$$[A, B] = AB - BA \quad .$$

Eine kommutative Algebra mit einem zusätzlichen Produkt, das antisymmetrisch und bilinear ist und sowohl die Derivationseigenschaft bezüglich des 1. Produktes besitzt als auch die Jacobi-Identität erfüllt, nennt man eine Poissonalgebra.

Eine wichtige Konsequenz aus der Jacobi-Identität ist, daß die Poissonklammern mit der Zeitentwicklung verträglich sind. Sei  $\varphi_t$  der von der zeitunabhängigen Hamiltonfunktion  $H$  erzeugte Fluß auf dem Phasenraum, d.h.

$$\varphi_t(p, q) = (p(t), q(t))$$

erfüllt die Hamiltonschen Gleichungen mit der Anfangsbedingung

$$\varphi_0(p_0, q_0) = (p_0, q_0) \quad .$$

Dann gilt für eine Phasenraumfunktion  $f$

$$\left. \frac{d}{dt} f \circ \varphi_t \right|_{t=0} = \{f \circ \varphi_t, H\} \quad .$$

Wegen der Gruppeneigenschaft des Phasenraumflusses,

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \quad ,$$

folgt

$$\frac{d}{dt} f \circ \varphi_t = \left. \frac{d}{ds} f \circ \varphi_{t+s} \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} (f \circ \varphi_t) \circ \varphi_s \right|_{s=0} = \{f \circ \varphi_t, H\} \quad .$$

Für die Zeitabhängigkeit der Poissonklammer zweier Phasenraumfunktionen findet man

$$\frac{d}{dt} \{f \circ \varphi_t, g \circ \varphi_t\} = \{\{f \circ \varphi_t, H\}, g \circ \varphi_t\} + \{f \circ \varphi_t, \{g \circ \varphi_t, H\}\} = \{\{f \circ \varphi_t, g \circ \varphi_t\}, H\} \quad .$$

Man erkennt, daß  $\{f \circ \varphi_t, g \circ \varphi_t\}$  dieselbe gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung in  $t$  erfüllt wie  $\{f, g\} \circ \varphi_t$ . Da auch die Anfangswerte wegen  $\varphi_0 = \text{id}$  übereinstimmen, folgt

$$\{f \circ \varphi_t, g \circ \varphi_t\} = \{f, g\} \circ \varphi_t \quad .$$

Eine weitere Konsequenz betrifft die Erhaltungsgrößen. Offenbar ist  $f$  genau dann unter dem Fluß  $\varphi_t$  erhalten, wenn die Poissonklammer von  $f$  mit  $H$  verschwindet. Insbesondere ist  $H$  erhalten, wenn es nicht (explizit) von  $t$  abhängt. Seien nun  $f$  und  $g$  zwei Erhaltungsgrößen. Dann folgt aus der Jacobi-Identität, daß

$$\{\{f, g\}, H\} = 0$$

ist. Also ist auch die Poissonklammer von  $f$  und  $g$  eine Erhaltungsgröße (Poissonscher Satz).

Im Hamiltonschen Formalismus kann jede Phasenraumfunktion  $f$  die Rolle der Hamiltonfunktion übernehmen. Den erzeugten Fluß bezeichnen wir mit  $\varphi_t^f$ . Auch dieser erhält die Poissonklammern. Ist insbesondere  $f$  eine Erhaltungsgröße, d.h.  $f \circ \varphi_t^H = f$ , so ist dies äquivalent zu  $\{f, H\} = 0$ . Vertauscht man jetzt die Rollen von  $f$  und  $H$ , so folgt

$$H \circ \varphi_t^f = H \quad .$$

$H$  ist also invariant unter dem Fluß  $\varphi_t^f$ . Man findet wie beim Noethertheorem einen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen.

### 3.4 Kanonische Transformationen

Die Lagrange-Gleichungen sind invariant unter sogenannten Punkttransformationen

$$\Phi : q = (q_1, \dots, q_n) \mapsto Q = (Q_1, \dots, Q_n) = \Phi(q) \quad ,$$

wobei  $\Phi$  ein Diffeomorphismus ist, d.h. eine invertierbare, unendlich oft differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung  $\Psi = \Phi^{-1}$  ebenfalls (unendlich oft) differenzierbar ist. Eine solche Transformation induziert für jedes  $q$  eine Transformation der Geschwindigkeiten

$$\dot{q} \mapsto \dot{Q} = (\dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_n)$$

mit

$$\dot{Q}_i(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

und mit der Umkehrabbildung

$$\dot{Q} \mapsto \dot{q}(Q, \dot{Q}) = \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_n}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right) .$$

Die Lagrangefunktion  $\tilde{L}$  in den neuen Koordinaten und Geschwindigkeiten erfüllt die Gleichung

$$\tilde{L}(Q, \dot{Q}) = L(q(Q), \dot{q}(Q, \dot{Q})) .$$

Die zu den neuen Koordinaten kanonisch konjugierten Impulse  $P_i$  sind daher

$$P_i = \frac{\partial \tilde{L}(Q, \dot{Q})}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial L(q(Q), \dot{q}(Q, \dot{Q}))}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} .$$

**Definition 3.1** Eine Phasenraumtransformation  $(q, p) \mapsto (Q, P)$  mit einem Diffeomorphismus  $q \mapsto Q$  und mit  $P_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} p_j$  heißt Punkttransformation oder Kontakttransformation.

Die Hamiltonfunktion  $\tilde{H}$  in den neuen Variablen ist

$$\begin{aligned} \tilde{H}(Q, P) &= \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i P_i - \tilde{L}(Q, \dot{Q}) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} p_k - L(q, \dot{q}) . \end{aligned}$$

Mit

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \delta_{jk}$$

folgt

$$\tilde{H}(Q(q), P(q, p)) = H(q, p) .$$

Da die Herleitung der Hamiltonschen Gleichungen in jedem Koordinatensystem gültig ist, erfüllen die neuen Variablen die Hamiltonschen Gleichungen bezüglich der neuen Hamiltonfunktion  $\tilde{H}$ .

Als Beispiel betrachten wir die Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2} q^2 \dot{q}^2 .$$

Der kanonisch konjugierte Impuls ist

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = q^2 \dot{q} ,$$

die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2q^2} \quad .$$

Wir führen als neue Koordinate ein

$$Q = \frac{1}{2}q^2 \quad .$$

Dann ist  $\dot{Q} = q\dot{q}$ ,  $\tilde{L} = \frac{1}{2}\dot{Q}^2$  und  $P = \frac{p}{q}$ . Für die Hamiltonfunktion schließlich ergibt sich

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}P^2 \quad .$$

Dies stimmt überein mit dem Ausdruck, den man durch die Legendretransformation aus  $\tilde{L}$  gewinnt.

Tatsächlich gibt es in der Hamiltonschen Formulierung noch allgemeinere Transformationen, bei denen die Rollen von Ortskoordinaten und Impulsen nicht länger festgehalten werden. Da alle Strukturen mit Hilfe der Poissonklammern beschrieben werden können, lassen wir alle Koordinatentransformationen im Phasenraum zu, die mit den Poissonklammern verträglich sind.

**Definition 3.2** Ein Diffeomorphismus  $\Phi : (p, q) \mapsto (P, Q)$  des Phasenraums heißt kanonische Transformation, wenn er die Poissonklammern erhält, d.h. wenn gilt

$$\{f \circ \Phi, g \circ \Phi\} = \{f, g\} \circ \Phi \quad .$$

für alle Phasenraumfunktionen  $f, g \in \mathcal{A}$ .

Ein einfaches Kriterium dafür, ob eine Transformation kanonisch ist, ergibt sich aus der folgenden Betrachtung. Seien  $u_k(p, q), k = 1, \dots, 2n$  neue Koordinaten, so daß  $(p, q) \mapsto u = (u_1, \dots, u_{2n})$  ein Diffeomorphismus  $\Phi$  ist. Für eine Funktion  $f \in \mathcal{A}$  sei  $\tilde{f} = f \circ \Phi^{-1}$ . Es gilt der

**Satz 3.1** (1) Seien  $f, g \in \mathcal{A}$ . Dann ergibt sich die Poissonklammer von  $f$  und  $g$  zu

$$\{f, g\} = \sum_{k,l=1}^{2n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_k}(u(p, q)) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial u_l}(u(p, q)) \{u_k, u_l\}$$

(2) Wir nennen  $u_k = Q_k, k = 1, \dots, n$  und  $u_{k+n} = P_k, k = 1, \dots, n$ . Wenn die neuen Koordinaten die kanonischen Poissonklammern besitzen,

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\}, \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \quad ,$$

dann ist die Transformation  $(p, q) \mapsto (P, Q)$  kanonisch.

*Beweis:* (1) Es gilt

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( - \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial p_i} \right) \left( \sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial q_i} \right) + \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial q_i} \right) \left( \sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial p_i} \right) \right) \end{aligned}$$

Durch Vertauschung der Summation über  $i$  mit der über  $k, l$  folgt die Behauptung.

(2) Wenn die neuen Koordinaten kanonische Poissonklammern besitzen, so ergibt sich mit der Definition der Poissonklammern aus (1)

$$\{\tilde{f} \circ \Phi, \tilde{g} \circ \Phi\} = \{\tilde{f}, \tilde{g}\} \circ \Phi \quad ,$$

d.h.  $\Phi$  ist eine kanonische Transformation. q.e.d.

Beispiele für kanonische Transformationen sind

- Kontakttransformationen
- Hamiltonsche Flüsse
- $q_i \mapsto p_i, p_i \mapsto -q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Orte und Impulse können also bei kanonischen Transformationen ihre Rollen tauschen.

Die Hamiltonschen Gleichungen behalten unter kanonischen Transformationen ihre Form. Dabei ist die Hamiltonfunktion in den neuen Variablen  $\tilde{H}$  gegeben durch

$$\tilde{H}(P(p, q), Q(p, q)) = H(p, q) \quad .$$

Durch eine geschickte Wahl einer kanonischen Transformation können die Hamiltonschen Gleichungen wesentlich vereinfacht werden.

*Beispiel:* Wir betrachten die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators mit Frequenz 1,  $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ . Wir suchen eine kanonische Transformation mit  $P = H$ .  $Q$  erfüllt die Gleichung

$$1 = \{Q, P\} = -\frac{\partial Q}{\partial p} q + \frac{\partial Q}{\partial q} p$$

Wir führen in der  $p$ - $q$ -Ebene Polarkoordinaten ein,  $p = r \cos \alpha$ ,  $q = r \sin \alpha$ . Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Q(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = 1 \quad ,$$

d.h.  $Q = \alpha(p, q) = \arctan \frac{p}{q}$  ist eine mögliche Wahl der Ortskoordinate. Die neue Hamiltonfunktion ist  $\tilde{H}(P, Q) = P$ . Damit ergeben sich die Hamiltonschen Gleichungen zu

$$\begin{aligned}\dot{P} &= \{P, P\} = 0 \\ \dot{Q} &= \{Q, P\} = 1\end{aligned}$$

mit der Lösung  $P(t) = \text{const}$ ,  $Q(t) = Q(0) + t$ .

Wir haben gesehen, daß Hamiltonsche Flüsse aus kanonischen Transformationen bestehen. Tatsächlich ist jeder Fluß im Phasenraum, der die Poissonklammern erhält, ein Hamiltonscher Fluß für eine geeignete Hamiltonfunktion.

**Satz 3.2** *Sei  $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  eine 1-Parametergruppe von kanonischen Transformationen. Dann gibt es eine Phasenraumfunktion  $H$ , so daß  $\Phi_t$  mit dem von  $H$  erzeugten Hamiltonschen Fluß  $\varphi_t^H$  übereinstimmt.*

*Beweis:*  $(p(t), q(t)) \equiv \Phi_t(p, q)$  erfüllt die Differentialgleichung  $\dot{p}_i = F_i(p, q)$ ,  $\dot{q}_i = F_{n+i}(p, q)$  mit dem Vektorfeld  $F = (F_1, \dots, F_{2n}) = \frac{d}{dt} \Phi_t(p, q)|_{t=0}$ . Nach Voraussetzung besitzen die Koordinaten  $p_1(t), \dots, q_n(t)$  kanonische Poissonklammern. Differenziert man diese Poissonklammern nach  $t$  an der Stelle  $t = 0$ , so findet man (mit  $u_i = p_i, u_{n+i} = q_i$ )

$$\{F_i, u_j\} + \{u_i, F_j\} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq 2n.$$

Auswertung der obigen Poissonklammern liefert

$$\pm \frac{\partial F_i}{\partial u_{j \pm n}} \mp \frac{\partial F_j}{\partial u_{i \pm n}} = 0 \quad .$$

Dies ist aber gerade die notwendige und in einfach zusammenhängenden Gebieten auch hinreichende Bedingung für die Existenz einer Funktion  $H$  mit  $\text{grad}H = (-F_{n+1}, \dots, -F_{2n}, F_1, \dots, F_n)$ . q.e.d.

### 3.5 Symplektische Geometrie

Wir haben gesehen, daß sich die Gesetze der Mechanik in der folgenden Form darstellen lassen: Die Observablen (interpretiert als unendlich oft differenzierbare Funktionen auf dem Phasenraum) bilden eine Poissonalgebra. Die Automorphismen dieser Poissonalgebra sind die kanonischen Transformationen. Die Zeitentwicklung wird durch eine 1-Parametergruppe von kanonischen Transformationen beschrieben, deren infinitesimaler Generator die

Poissonklammer mit einem ausgezeichnetem Element der Poissonalgebra ist, der Hamiltonfunktion.

Man kann stattdessen auch die geometrische Struktur des Phasenraums zum Ausgangspunkt nehmen. Dies führt auf die sogenannte symplektische Geometrie. Ausgangspunkt ist eine geometrische Interpretation der Poissonklammer.

Jeder Phasenraumfunktion  $f$  ist mittels der Poissonklammer ein Differentialoperator 1. Ordnung  $X_f$  auf dem Phasenraum zugeordnet. Differentialoperatoren 1. Ordnung können mit Vektorfeldern identifiziert werden, man nennt  $X_f$  das Hamiltonsche Vektorfeld zu  $f$ . Man kann jetzt dem von 2 Vektorfeldern an einem Punkt aufgespannten Parallelogramm den Wert

$$\omega(X_f(p, q), X_g(p, q)) = \{f, g\}(p, q)$$

zuordnen. Diese Zuordnung ist bilinear und antisymmetrisch in den beiden Vektoren. Man nennt eine solche Zuordnung eine alternierende Differentialform vom Grad 2 oder kurz eine 2-Form.

Differentialformen sind eine mathematische Präzisierung der in der Physik oft auftretenden infinitesimalen orientierten Weg-, Flächen- und Volumenelemente. Sie lassen sich am einfachsten als Multilinearformen über Vektorfeldern beschreiben. Hierbei sind 0-Formen gewöhnliche Funktionen, eine 1-Form ist z.B. die infinitesimale Arbeit  $F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$  in einem ortsabhängigen Kraftfeld  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ , ein Beispiel für eine 2-Form ist der infinitesimale magnetische Fluß  $B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2$ . Das sogenannte Grassmann-Produkt  $\wedge$  ist assoziativ und distributiv und ordnet einer  $k$ -Form  $\varphi$  und einer  $l$ -Form  $\psi$  eine  $k + l$ -Form  $\varphi \wedge \psi$  zu mit

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{kl} \psi \wedge \varphi \quad .$$

Für die Multiplikation einer  $k$ -Form  $\varphi$  mit einer 0-Form  $f$  und Vektorfelder  $X_1, \dots, X_k$  gilt

$$(f \wedge \varphi)(X_1, \dots, X_k) = f\varphi(X_1, \dots, X_k) \quad .$$

Das Symbol  $\wedge$  wird in diesem Fall meist ausgelassen. Für 1-Formen  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  gilt

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(X_1, \dots, X_k) = \begin{vmatrix} \varphi_1(X_1) & \dots & \varphi_1(X_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_k(X_1) & \dots & \varphi_k(X_k) \end{vmatrix} \quad .$$

Die sogenannte äußere Differentiation  $d$  ist eine Fortsetzung des auf Funktionen erklärten totalen Differentials,  $df(X) = Xf$ . Mit  $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$  ergibt

sich der bekannte Ausdruck

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad .$$

Auf Differentialformen wird  $d$  jetzt so fortgesetzt, daß für das Grassmann-Produkt die folgende Produktregel gilt:

$$d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^k \varphi \wedge d\psi \quad ,$$

falls  $\varphi$  eine  $k$ -Form ist, und so daß die zweimalige Anwendung von  $d$  immer Null ergibt,  $d^2\varphi = 0$  für alle Differentialformen  $\varphi$ . Hieraus ergibt sich die Formel

$$d(f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) = df_0 \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k$$

für 0-Formen  $f_i$ .

Eine Differentialform  $\varphi$  mit  $d\varphi = 0$  nennt man geschlossen.  $\varphi$  ist sicherlich geschlossen, wenn es eine Differentialform  $\psi$  gibt mit  $\varphi = d\psi$ . In diesem Fall nennt man  $\varphi$  eine exakte Form. Im  $\mathbb{R}^n$  (allgemeiner in allen kontrahierbaren Gebieten) gilt das Lemma von Poincaré: Jede geschlossene Form ist exakt. Z.B. ist die oben angegebene 1-Form der infinitesimalen Arbeit geschlossen, wenn die Rotation des Kraftfeldes verschwindet. In diesem Fall ist das Kraftfeld konservativ, und die infinitesimale Arbeit ist das totale Differential von  $-U$ , wenn  $U$  die zugehörige potentielle Energie ist.

Wir können jetzt die durch die Poissonklammer erklärte 2-Form  $\omega$  durch die Differentiale der Koordinaten ausdrücken. Es gilt wegen  $\frac{\partial}{\partial q_i} = -X_{p_i}$ ,  $\frac{\partial}{\partial p_i} = X_{q_i}$

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) &= \{p_i, p_j\} = 0 \quad , \\ \omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) &= -\{q_i, p_j\} = -\delta_{ij} \quad , \\ \omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) &= \{q_i, q_j\} = 0 \quad , \end{aligned}$$

und damit

$$\omega = - \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i \quad .$$

Wegen der Invarianz der Poissonklammer unter kanonischen Transformationen hat  $\omega$  in allen kanonischen Variablen diese Form.  $\omega$  ist offenbar eine geschlossene 2-Form, die außerdem noch im folgenden Sinn nicht entartet ist:

$$\omega(X, Y) = 0 \text{ für alle } Y \Rightarrow X = 0 \quad .$$

Eine solche Differentialform nennt man symplektisch. Diffeomorphismen, die  $\omega$  invariant lassen, sind gerade die kanonischen Transformationen. Das  $n$ -fache Grassmann-Produkt von  $\omega$  mit sich selbst ist proportional zum orientierten Volumenelement im Phasenraum. Die Invarianz von  $\omega$  impliziert daher den Liouvilleschen Satz in der Form: Das Phasenraumvolumen ist invariant unter kanonischen Transformationen.

Wir wollen jetzt zu einer wichtigen Konsequenz des Liouvilleschen Satzes kommen, dem Wiederkehrtheorem von Poincaré:

**Satz 3.3** *Sei  $G$  ein kompaktes Gebiet des Phasenraums, das unter der Zeitentwicklung invariant ist. Dann kehrt das System immer wieder beliebig nah an den Anfangsort zurück, d.h. für jede offene Menge  $V \subset G$  und jede Zeit  $T > 0$  gibt es ein  $t \geq T$ , so daß  $\varphi_t(V) \cap V \neq \emptyset$ .*

*Beweis:* Falls die Aussage falsch ist, gibt es ein  $T > 0$ , so daß  $\varphi_{nT}(V) \cap V = \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ . Da  $\varphi_{nT}(V) \cap \varphi_{mT}(V) = \varphi_{mT}(\varphi_{(n-m)T}(V) \cap V)$ , sind alle Mengen  $\varphi_{nT}(V), n \in \mathbb{Z}$  paarweise disjunkt. Nach dem Theorem von Liouville haben sie alle dasselbe Volumen. Nach Voraussetzung sind sie alle Teilmengen von  $G$ . Daher ist das Volumen von  $G$  unendlich, im Widerspruch zur Annahme, daß  $G$  kompakt ist.

### 3.6 Hamilton-Jacobi-Theorie

Die symplektische Struktur kann benutzt werden, um Potentiale für kanonische Transformationen zu finden, die sogenannten erzeugenden Funktionen. Die symplektische Form  $\omega$  ist geschlossen, also exakt:

$$\omega = - \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i = -d \sum_{i=1}^n p_i dq_i \quad .$$

Wenn  $(p, q) \rightarrow (P, Q)$  eine kanonische Transformation ist, dann ist

$$\sum_{i=1}^n dP_i \wedge dQ_i - \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i = 0 \quad ,$$

also ist  $\sum_{i=1}^n (P_i dQ_i - p_i dq_i)$  geschlossen und damit exakt, d.h. von der Form  $dS$  mit einer Phasenraumfunktion  $S$ . Falls sich die Gleichungen  $Q_i(p, q) = Q_i$  nach  $p$  auflösen lassen, setzen wir

$$S_1(q, Q) = S(p(q, Q), q)$$

und finden ein Potential für die alten und die neuen Impulse

$$p_i = -\frac{\partial S_1}{\partial q_i}, \quad P_i = \frac{\partial S_1}{\partial Q_i} \quad .$$

Betrachten wir z.B. die kanonische Transformation  $P_i = q_i, Q_i = -p_i$ . Dann ist  $\sum_{i=1}^n (P_i dQ_i - p_i dq_i) = -\sum_{i=1}^n (p_i dq_i + q_i dp_i) = -d\sum_{i=1}^n p_i q_i$ , d.h.  $S(p, q) = -\sum_{i=1}^n p_i q_i$ . Also ist  $S_1(q, Q) = \sum_{i=1}^n Q_i q_i$ , und wir finden  $p_i$  und  $P_i$  wie oben angegeben als Ableitungen von  $S_1$ .

Nicht immer ist die obige Voraussetzung erfüllt, daß die Gleichungen für die neuen Koordinaten nach den alten Impulsen aufgelöst werden können, z. B. nicht für Kontakttransformationen. Im allgemeinen Fall können wir aber für jeden Phasenraumpunkt eine Teilmenge von Indizes  $J \subset \{1, \dots, n\}$  finden, so daß das Gleichungssystem

$$Q_i(p, q) = Q_i, \quad P_j(p, q) = P_j, \quad i \in J, j \notin J$$

in einer genügend kleinen Umgebung des Punktes nach  $p$  aufgelöst werden kann. (Einen Beweis findet man im Buch von Arnold (9.5 und 8.5).) Wegen  $\omega = d(-\sum_{i \in J} P_i dQ_i + \sum_{j \notin J} Q_j dP_j)$  gibt es ein  $S$  mit

$$dS = \sum_{i \in J} P_i dQ_i - \sum_{j \notin J} Q_j dP_j - \sum_{i=1}^n p_i dq_i \quad .$$

$S_J(q, Q_i, P_j, i \in J, j \notin J) = S(p(Q_i, P_j, i \in J, j \notin J), q)$  ist dann die gesuchte erzeugende Funktion mit

$$p_i = -\frac{\partial S_J}{\partial q_i},$$

$$P_i = \frac{\partial S_J}{\partial Q_i}, \quad Q_j = \frac{\partial S_J}{\partial P_j}, \quad i \in J, j \notin J \quad .$$

Z. B. ist  $-\sum_{i=1}^n q_i P_i$  die erzeugende Funktion für die identische kanonische Transformation.

Wir können natürlich auch bei den alten Variablen die Rollen von Ort und Impuls vertauschen und erhalten dann z.B. als erzeugende Funktionen der Identität  $S_3(p, Q) = \sum_{i=1}^n p_i Q_i$ .

Wir suchen jetzt die erzeugende Funktion  $S_3(p, Q; t)$  für die Zeitentwicklung  $\varphi_t$ . Die neuen Koordinaten  $Q_i$  sind dabei die Ortskoordinaten  $q_i(t) = q_i \circ \varphi_t$ . Wegen  $\varphi_0 = \text{id}$  gilt  $S_3(p, Q; 0) = \sum_{i=1}^n p_i Q_i$ . Zunächst suchen wir Funktionen  $S_t$  auf dem Phasenraum mit  $dS_t = \sum_{i=1}^n (p_i(t) dq_i(t) + q_i dp_i)$ ,  $S_0(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i q_i$ . Differentiation nach  $t$  liefert

$$d\frac{\partial S_t}{\partial t} = \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i(t) dq_i(t) + p_i(t) d\dot{q}_i(t))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \circ \varphi_t dq_i(t) + p_i(t) d\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \circ \varphi_t\right) \right) \\
&= d \left( \sum_{i=1}^n p_i(t) \frac{\partial H}{\partial p_i} \circ \varphi_t - H \circ \varphi_t \right)
\end{aligned}$$

Der Ausdruck in den Klammern in der letzten Zeile ist aber gerade die Lagrange-Funktion  $L(q(t), \dot{q}(t))$  auf der Bahn, die zur Zeit  $t = 0$  am Phasenraumpunkt  $(p, q)$  beginnt. Daher können wir für  $S_t(p, q) - S_0(p, q)$  die Wirkung längs der Bahn  $(p(t'), q(t'))$ ,  $t'$  zwischen 0 und  $t$ ,  $p(0) = p, q(0) = q$  einsetzen.

Um jetzt zu der erzeugenden Funktion  $S_3$  zu gelangen, lösen wir die Gleichungen  $q_i \circ \varphi_t(p, q) = Q_i, i = 1, \dots, n$  nach  $q$  auf.  $S_3$  erfüllt die Gleichung

$$S_3(p, Q(p, q, t), t) = S_t(p, q)$$

und damit

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = \frac{\partial S_3}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S_3}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial t} \quad .$$

Mit  $\frac{\partial S_t}{\partial t}(p, q) = L(q(t), \dot{q}(t))$ ,  $\frac{\partial S_3}{\partial Q_i} = P_i = p_i(t)$  und  $\frac{\partial Q_i}{\partial t} = \dot{q}_i(t)$  ergibt sich schließlich für  $S_3$  die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung

$$\frac{\partial S_3}{\partial t} + H(Q_1, \dots, Q_n, \frac{\partial S_3}{\partial Q_1}, \dots, \frac{\partial S_3}{\partial Q_n}) = 0 \quad .$$

Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung ist eng mit der Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik verwandt. Sie kann benutzt werden, um Näherungslösungen für Wellenfunktionen zu finden. Man kann die klassische Mechanik als die Näherung der geometrischen Optik an die Quantenmechanik auffassen.

Die Funktion  $S_3$  hängt außer von  $Q$  und  $t$  auch von den Impulsskoordinaten  $p_i$  zur Zeit  $t = 0$  ab, und zwar so, daß für  $t \neq 0$  genügend klein gilt

$$\det \left( \frac{\partial^2 S_3}{\partial p_i \partial Q_j} \right) \neq 0 \quad .$$

Eine solche  $n$ -Parameter-Familie von Lösungen nennt man ein vollständiges Integral der Differentialgleichung.

Sei nun umgekehrt ein vollständiges Integral der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung  $S(\alpha, Q, t)$  gegeben mit Parametern  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Dann wird das Anfangswertproblem der Hamiltonschen Gleichungen in der folgenden Weise gelöst:

- Man bestimme  $\alpha$  aus den Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial Q_i}(\alpha, q, 0) \quad .$$

- Man bestimme  $Q_i = q_i(t)$  aus den Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}(\alpha, q, 0) = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}(\alpha, Q, t) \quad .$$

- Die Impulse  $P_i = p_i(t)$  erhält man jetzt durch

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial Q_i}(\alpha, Q, t) \quad .$$

Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung ist eine, i.a. nichtlineare, partielle Differentialgleichung. Die Lösung derartiger Gleichungen ist in der Regel wesentlich schwieriger, als die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen, wie sie in der Mechanik sonst auftreten. Überraschenderweise erweist sich aber der Weg über diese partielle Differentialgleichung als besonders erfolgreich bei der expliziten Lösung mechanischer Probleme.

Die grundlegende Idee bei der Lösung ist die sukzessive Separation in Probleme in einer Variablen. Ist  $H$ , wie wir der Einfachheit halber in der vorangegangenen Diskussion immer angenommen haben, unabhängig von der Zeit, kann man für  $S$  den Ansatz

$$S(Q, t) = W(Q) - Et$$

machen.  $W$  erfüllt dann die Differentialgleichung

$$H(Q_1, \dots, Q_n, \frac{\partial W}{\partial Q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial Q_n}) = E \quad .$$

Wenn diese Gleichung in eine Form gebracht werden kann, in der eine der Variablen, z.B.  $Q_1$ , nur in der Kombination  $h(Q_1, \frac{\partial W}{\partial Q_1})$  mit einer Funktion  $h$  auftritt, kann man den Ansatz

$$W(Q) = W_1(Q_1) + W'(Q_2, \dots, Q_n)$$

machen. Für  $W_1$  wählt man eine Lösung der Gleichung

$$h(Q_1, \frac{\partial W}{\partial Q_1}) = c_1 \quad .$$

Man erhält eine Gleichung für  $W'$ , in der die Variable  $Q_1$  nur noch über den Parameter  $c_1$  auftritt. Wenn sich dieser Schritt genügend oft wiederholen läßt, findet man auf diese Weise ein vollständiges Integral der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung, aus der sich dann die Lösung der Bewegungsgleichung ergibt.

Als ein Beispiel betrachten wir die Bewegung eines elektrisch geladenen Massenpunkt im elektrischen Feld eines punktförmigen Dipols in einer Ebene, die die Richtung des Dipols enthält. Das Potential in Polarkoordinaten ist  $V = ar^{-2} \cos \varphi$ , die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{2r^2} + V \quad .$$

Wir betrachten die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + V = E \quad .$$

Die Variable  $\varphi$  tritt nur in der Kombination  $(\frac{\partial W}{\partial \varphi})^2 + 2a \cos \varphi$  auf. Damit ist das Problem auf die Bestimmung der beiden Integrale

$$W_\varphi = \int \sqrt{c - 2a \cos \varphi} d\varphi$$

$$W_r = \int \sqrt{2E - cr^{-2}} dr$$

zurückgeführt. Die Zeitabhängigkeit von  $r$  ergibt sich jetzt aus der Gleichung  $\frac{\partial S}{\partial E} = \text{const}$ , die Bahngleichung  $r(\varphi)$  aus der Gleichung  $\frac{\partial S}{\partial c} = \text{const}$ .

### 3.7 Kleine Schwingungen

Nur in wenigen Fällen können die Hamiltonschen Gleichungen explizit gelöst werden. Falls aber die Hamiltonfunktion an einem Punkt  $(p_0, q_0)$  des Phasenraums ein striktes Minimum besitzt, so weiß man zunächst, daß jede Lösung mit Anfangsbedingungen genügend nahe bei diesem Punkt für alle Zeiten in der Nähe des Punktes bleibt. Wir approximieren jetzt die Hamiltonfunktion durch ihre Taylorentwicklung bis zur 2. Ordnung um den Punkt  $(p_0, q_0)$ . O.B.d.A. nehmen wir an, daß  $p_0 = 0 = q_0$  und daß  $H$  an dieser Stelle verschwindet. Dann ist  $H$  eine positiv semidefinite quadratische Form in Koordinaten und Impulsen.

Betrachten wir als Beispiel das Doppelpendel. Im Fall, daß Längen und Massen der beiden Pendel übereinstimmen,

$$l_1 = l_2 = l, \quad m_1 = m_2 = m,$$

ist die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} l^2 \left( 2\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \right)$$

und die potentielle Energie

$$U = -mgl(2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \quad .$$

Die Hamiltonfunktion in der quadratischen Näherung ist

$$H = \frac{1}{2ml^2} (p_1^2 - 2p_1p_2 + 2p_2^2) + \frac{mgl}{2} (2\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \quad .$$

Wir können jetzt eine Kontakttransformation finden, so daß die Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten in die Summe der Hamiltonfunktionen zweier eindimensionaler harmonischer Oszillatoren zerfällt. Wir führen diese Transformation in zwei Schritten aus. Im ersten Schritt ersetzen wir die Winkel durch normierte Koordinaten  $u_1 = \sqrt{2mgl}\varphi_1$ ,  $u_2 = \sqrt{mgl}\varphi_2$ , so daß die potentielle Energie die Form  $V = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)$  annimmt. Die zugehörigen Impulse sind dann  $r_1 = (\sqrt{2mgl})^{-1}p_1$ ,  $r_2 = (\sqrt{mgl})^{-1}p_2$ , und die kinetische Energie wird zu

$$T = \frac{g}{l} \left( r_1^2 - \sqrt{2}r_1r_2 + r_2^2 \right)$$

Die Linien konstanter potentieller Energie im  $u_1$ - $u_2$ -Raum sind Kreise um den Ursprung, die Linien konstanter kinetischer Energie im  $r_1$ - $r_2$ -Raum Ellipsen mit dem Mittelpunkt im Ursprung. Drehungen im  $u_1$ - $u_2$ -Raum induzieren die entsprechenden Drehungen im  $r_1$ - $r_2$ -Raum. Wir wählen jetzt eine Drehung, die die Koordinatenachsen in die Richtung der Hauptachsen der Ellipse dreht, und führen dieselbe Drehung im  $u_1$ - $u_2$ -Raum aus. In unserem Fall bilden die Hauptachsen einen Winkel von  $\frac{\pi}{4}$  mit den Koordinatenachsen. In den neuen Koordinaten  $Q_1, Q_2, P_1, P_2$  hat die Hamiltonfunktion dann die Form

$$H = \frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2) + \frac{1}{2}(\lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2) \quad ,$$

wobei  $\sqrt{\frac{2}{\lambda_1}}$  und  $\sqrt{\frac{2}{\lambda_2}}$  die Halbachsen der Ellipse mit  $T = 1$  sind. Man findet die Parameter  $\lambda_1, \lambda_2$  als die Eigenwerte der  $2 \times 2$ -Matrix

$$A = \frac{g}{l} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Diese ergeben sich zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{2g}{l} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \quad .$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß es auch im allgemeinen Fall immer eine geeignete kanonische Transformation gibt, die eine gegebene positiv definite quadratische Form im Phasenraum auf Diagonalgestalt bringt. Wir können uns hierbei auf lineare Transformationen beschränken. Wir fassen den Phasenraumpunkt  $(p, q)$  als Spaltenvektor im  $\mathbb{R}^{2n}$  auf. Eine lineare Transformation kann dann mit einer  $2n \times 2n$ -Matrix  $S$  identifiziert werden.  $S$  ist genau dann kanonisch, wenn gilt

$$S^T \sigma S = \sigma$$

mit der  $2 \times 2$ -Blockmatrix

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

deren Einträge  $n \times n$ -Matrizen sind. Solche Matrizen nennt man symplektisch.

Wir suchen also zu einer gegebenen positiv definiten  $2n \times 2n$ -Matrix  $A$  eine symplektische Matrix  $S$ , so daß  $S^T A S$  Diagonalgestalt besitzt. In jedem Variablenpaar  $(P_i, Q_i)$  können wir anschließend noch eine Transformation  $P_i \mapsto a_i P_i, Q_i \mapsto a_i^{-1} Q_i$  durchführen und so erreichen, daß die Diagonalmatrix die Form (als  $2 \times 2$ -Blockmatrix)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega^2 \end{pmatrix}$$

besitzt, wobei  $\Omega$  eine  $n$ -reihige Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen ist. Matrizen  $S$ , die die Gleichung

$$S^T A S = D$$

erfüllen, sind von der Form

$$S = A^{-\frac{1}{2}} R D^{\frac{1}{2}}$$

mit einer orthogonalen Matrix  $R$ ,  $R^T R = 1$ . Wir müssen  $R$  und  $\Omega$  so bestimmen, daß  $S$  symplektisch wird. Dies bedeutet, daß gelten muß

$$R^T A^{-\frac{1}{2}} \sigma A^{-\frac{1}{2}} R = \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega^{-1} & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix  $B = A^{-\frac{1}{2}} \sigma A^{-\frac{1}{2}}$  ist antisymmetrisch und besitzt daher imaginäre Eigenwerte  $\pm i\lambda_j, j = 1, \dots, n, \lambda_j > 0$  mit einer orthonormalen Basis von Eigenvektoren  $z_j, \bar{z}_j, i = 1, \dots, n$  im  $\mathbb{C}^{2n}$ . Sei  $x_i = \sqrt{2} \operatorname{Re} z_i$  und  $y_i = \sqrt{2} \operatorname{Im} z_i$ . Dann bilden die Vektoren  $x_i, y_i, i = 1, \dots, n$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^{2n}$ , und es gilt

$$Bx_i = -\lambda_i y_i, \quad By_i = \lambda_i x_i .$$

Die Diagonalelemente von  $\Omega$  sind daher  $\lambda_i^{-1}, i = 1, \dots, n$ , und  $R$  ist die Matrix mit den Spaltenvektoren  $x_i, i = 1, \dots, n, y_i, i = 1, \dots, n$ .

Zur praktischen Durchführung der Transformation bestimmt man die Eigenwerte  $\pm i\omega_j, j = 1, \dots, n$  der Matrix  $\sigma A$ . Die Spaltenvektoren  $s_j, j = 1, \dots, n, s_{n+j}, j = 1, \dots, n$  der symplektischen Matrix  $S$  sind dann die Real- (für  $s_j$ ) und Imaginärteile (für  $s_{n+j}$ ) der Eigenvektoren zum Eigenwert  $i\omega_j, j = 1, \dots, n$ , mit der Normierungsbedingung

$$s_j^T \sigma s_k = \sigma_{jk}, j, k = 1, \dots, 2n, ,$$

wobei  $\sigma_{jk}$  die Matrixelemente von  $\sigma$  bezeichnet. Die neuen Koordinaten ergeben sich wegen  $\sigma S^{-1} = S^T \sigma$  zu

$$Q_j = s_j^T \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}, P_j = -s_{n+j}^T \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}, j = 1, \dots, n .$$

Die Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten (den sogenannten Normalkoordinaten) ist dann

$$\tilde{H}(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (P_i^2 + \omega_i^2 Q_i^2)$$

mit den sogenannten Eigenfrequenzen  $\omega_i, i = 1, \dots, n$ .

Als Beispiel betrachten wir ein kreisförmiges Molekül aus  $n$  gleichen Atomen, bei denen die Atome sich nur entlang des Kreises bewegen können. Die Hamiltonfunktion in der Näherung kleiner Schwingungen sei

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{p_i^2}{m} + k(q_i - q_{i+1})^2 \right)$$

mit  $q_{n+1} = q_1$ . Die Matrix  $A$  hat dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

mit

$$K = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

im Fall  $n = 6$ . Für die Eigenvektoren  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  von  $\sigma A$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$Kv = i\omega u, \quad -\frac{1}{m}u = i\omega v,$$

d.h.  $\frac{1}{m}Kv = \omega^2 v$ . Die Eigenvektoren sind  $v_j^{(l)} = e^{\frac{2\pi i j l}{n}}$ ,  $j = 1, \dots, n, l = 0, \dots, (n-1)$  mit den Eigenwerten  $\omega_l^2 = \frac{k}{m}2(1 - \cos \frac{2\pi l}{n})$ .

## 4 Theorie des Kreisels

### 4.1 Die euklidische Gruppe

Durch die Wahl eines Ursprungs und eines orthonormalen Systems von Vektoren kann der physikalische Raum mit dem  $\mathbb{R}^3$  identifiziert werden. Die Struktur wird durch die übliche Metrik

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}$$

festgelegt.

**Definition 4.1** Eine Abbildung  $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die die Abstände zweier Punkte nicht ändert,

$$d(B\vec{x}, B\vec{y}) = d(\vec{x}, \vec{y}) \quad ,$$

nennt man eine Isometrie. Eine Isometrie, die einen Punkt des Raums invariant läßt, nennt man eine Rotation.

Die Menge der Isometrien bildet bezüglich Hintereinanderausführung eine Gruppe, die sogenannte euklidische Gruppe  $E(3)$ . Beispiele für Isometrien sind

**Translationen**  $B\vec{x} = \vec{x} + \vec{a}$  ,  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$

**Drehungen um eine Achse** Sei  $\vec{n}$  ein Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^3$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Eine Drehung um  $\vec{n}$  mit Drehwinkel  $\alpha$  ist

$$R(\vec{n}, \alpha)\vec{x} = (\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n} + \sin \alpha \vec{n} \times \vec{x} + \cos \alpha (\vec{x} - (\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n}) \quad .$$

**Spiegelung** Die Abbildung  $P\vec{x} = -\vec{x}$  läßt alle Abstände fest, ändert aber die Orientierung. Abbildungen mit dieser Eigenschaft können nicht stetig in die Identität überführt werden.

**Satz 4.1** Jede Isometrie ist das Produkt einer Translation und einer Rotation.

*Beweis:* Sei  $B$  eine Isometrie. Sei  $\vec{x}_0$  beliebig und setze  $\vec{a} = B\vec{x}_0 - \vec{x}_0$ ,  $R\vec{x} = B\vec{x} - \vec{a}$ . Dann ist  $R\vec{x}_0 = \vec{x}_0$ , d.h.  $R$  ist eine Rotation, und  $B\vec{x} = R\vec{x} + \vec{a}$ . q.e.d.

Die euklidische Gruppe kann daher als die Menge der Paare  $(\vec{a}, R)$ ,  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ,  $R$  Rotation um den Ursprung, aufgefaßt werden, mit dem Multiplikationsgesetz

$$(\vec{a}_1, R_1)(\vec{a}_2, R_2) = (\vec{a}_1 + R_1\vec{a}_2, R_1R_2)$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, daß Rotationen um den Ursprung lineare Transformationen sind. Dies sieht man in der folgenden Weise ein:

Für das Skalarprodukt gilt

$$2\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2 \quad ,$$

also ist es unter Rotationen  $R$  invariant. Dann aber folgt

$$|R(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) - \lambda R\vec{x} - \mu R\vec{y}|^2 = |(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) - \lambda\vec{x} - \mu\vec{y}|^2 = 0 \quad .$$

Da nur der Nullvektor die Länge Null hat, folgt, daß  $R$  linear ist.

Wir können daher  $R$  mit einer  $3 \times 3$ -Matrix identifizieren. Die Invarianz des Skalarprodukts bedeutet, daß  $R$  orthogonal ist,  $R^T R = \mathbf{1}$ . Die orthogonalen Matrizen bilden eine Gruppe, die mit  $O(3)$  bezeichnet wird.

Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist  $\pm 1$ , denn  $\det R^T = \det R$ ,  $\det(R^T R) = \det R^T \det R$  und  $\det \mathbf{1} = 1$ . Die orthogonalen Matrizen mit  $\det R = 1$  nennt man die eigentlichen Rotationen. Sie bilden die speziell orthogonale Gruppe (Bezeichnung  $SO(3)$ ). Da die Determinante eine stetige Funktion der Matrixelemente ist, lassen sich nur die eigentlichen Rotationen durch einen stetigen Weg  $R(s)$  in der orthogonalen Gruppe mit der  $\mathbf{1}$  verbinden.

Die Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix ist das Spatprodukt ihrer Spaltenvektoren,

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad .$$

Ist  $A$  eine  $3 \times 3$ -Matrix, so gilt nach dem Determinantenmultiplikationssatz

$$(A\vec{a} \times A\vec{b}) \cdot A\vec{c} = \det A (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad .$$

Daher ist das Spatprodukt dreier Vektoren unter eigentlichen Rotationen invariant, und das Vektorprodukt transformiert sich unter einer eigentlichen Rotation  $R$  nach

$$R\vec{a} \times R\vec{b} = R(\vec{a} \times \vec{b}) \quad .$$

Die eigentlichen Rotationen lassen sich sehr einfach beschreiben:

**Satz 4.2** *Jede eigentliche Rotation  $R$  ist eine Drehung um eine Achse, d.h. es gibt einen Einheitsvektor  $\vec{n}$  und einen Winkel  $\alpha$ , so daß  $R = R(\vec{n}, \alpha)$  gilt.*

*Beweis:* Zunächst zeigen wir, daß  $R$  den Eigenwert 1 besitzt. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}\det(R - \mathbf{1}) &= \det R^T \det(R - \mathbf{1}) = \det(R^T R - R^T) = \\ \det(\mathbf{1} - R^T) &= \det(\mathbf{1} - R) = (-1)^3 \det(R - \mathbf{1}) = -\det(R - \mathbf{1}) \quad .\end{aligned}$$

Sei  $\vec{n}$  ein normierter Eigenvektor von  $R$  zum Eigenwert 1. Wir wählen einen zweiten Einheitsvektor  $\vec{e}$  senkrecht zu  $\vec{n}$  und setzen  $\vec{f} = \vec{n} \times \vec{e}$ . Die Vektoren  $\vec{n}, \vec{e}, \vec{f}$  bilden dann ein orientiertes Dreibein. Da  $R\vec{e}$  senkrecht auf  $\vec{n}$  steht, gibt es reelle Zahlen  $\lambda$  und  $\mu$  mit

$$R\vec{e} = \lambda\vec{e} + \mu\vec{f}$$

Dann folgt mit  $\vec{n} \times \vec{f} = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{e}) = -\vec{e}$

$$R\vec{f} = R(\vec{n} \times \vec{e}) = \vec{n} \times R\vec{e} = \lambda\vec{n} \times \vec{e} + \mu\vec{n} \times \vec{f} = \lambda\vec{f} - \mu\vec{e} \quad .$$

Da  $R$  die Länge erhält, muß gelten:

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1 \quad .$$

Daher gibt es einen Winkel  $\alpha$ , so daß  $\mu = \sin \alpha$ ,  $\lambda = \cos \alpha$  gilt. Wir betrachten jetzt einen beliebigen Vektor  $\vec{x}$ . Aus der Zerlegung  $\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{e})\vec{e} + (\vec{x} \cdot \vec{f})\vec{f} + (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}$  folgt

$$\begin{aligned}R\vec{x} &= (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n} + (\vec{x} \cdot \vec{e})R\vec{e} + (\vec{x} \cdot \vec{f})R\vec{f} = \\ &(\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n} + \lambda \left( (\vec{x} \cdot \vec{e})\vec{e} + (\vec{x} \cdot \vec{f})\vec{f} \right) + \mu \left( (\vec{x} \cdot \vec{e})\vec{f} - (\vec{x} \cdot \vec{f})\vec{e} \right) \quad .\end{aligned}$$

Mit  $(\vec{x} \cdot \vec{e})\vec{f} - (\vec{x} \cdot \vec{f})\vec{e} = \vec{n} \times \vec{x}$  folgt die Behauptung. q.e.d.

Die Drehachse bestimmt den Einheitsvektor  $\vec{n}$  nur bis auf ein Vorzeichen. Es gilt

$$R(\vec{n}, \alpha) = R(-\vec{n}, 2\pi - \alpha) \quad .$$

$\vec{n}$  verhält sich unter eigentlichen Drehungen wie ein Vektor,

$$RR(\vec{n}, \alpha)R^{-1} = R(R\vec{n}, \alpha) \quad .$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned}RR(\vec{n}, \alpha)\vec{x} &= R((\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n} + \sin \alpha \vec{n} \times \vec{x} + \cos \alpha (\vec{x} - (\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n})) \\ &= ((R\vec{n} \cdot R\vec{x})R\vec{n} + \sin \alpha R\vec{n} \times R\vec{x} + \cos \alpha (R\vec{x} - (R\vec{n} \cdot R\vec{x})R\vec{n})) \\ &= R(R\vec{n}, \alpha)R\vec{x} \quad .\end{aligned}$$

Statt durch Drehachse und Drehwinkel beschreibt man Drehungen oft durch die Eulerschen Winkel  $\varphi, \theta, \psi$ . Sei  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  ein rechtshändiges Orthornormalsystem im  $\mathbb{R}^3$ . Eine eigentliche Rotation  $R$  bildet dieses System auf ein anderes Orthogonalsystem  $R\vec{e}_1, R\vec{e}_2, R\vec{e}_3$  ab. Der Winkel  $\theta$  wird dann definiert als der Winkel zwischen  $\vec{e}_3$  und  $R\vec{e}_3$ ,

$$\vec{e}_3 \cdot R\vec{e}_3 = \cos \theta, \quad \theta \in [0, \pi] \quad .$$

Falls  $\theta \neq 0, \pi$ , schneiden sich die  $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$ -Ebene und die  $R\vec{e}_1$ - $R\vec{e}_2$ -Ebene in einer Geraden, der sogenannten Knotenlinie. Sie wird aufgespannt vom Einheitsvektor

$$\vec{e}_N = \frac{1}{\sin \theta} \vec{e}_3 \times R\vec{e}_3 \quad .$$

Da  $\vec{e}_N$  im Durchschnitt der beiden Ebenen liegt, läßt er sich als Linearkombination sowohl von  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ,

$$\vec{e}_N = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2 \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad ,$$

als auch von  $R\vec{e}_1, R\vec{e}_2$ ,

$$\vec{e}_N = \cos \psi R\vec{e}_1 - \sin \psi R\vec{e}_2 \quad 0 \leq \psi < 2\pi \quad ,$$

ausdrücken. Dies bestimmt die beiden anderen Eulerschen Winkel eindeutig. In den Fällen  $\theta = 0, \pi$  ist  $\vec{e}_N$  ein beliebiger Vektor in der  $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$ -Ebene. Dann sind nur die Kombinationen  $\varphi + \psi$  bzw.  $\varphi - \psi$  festgelegt.

Sind umgekehrt die Eulerschen Winkel  $\varphi, \theta, \psi$  gegeben, so ergibt sich die zugehörige Drehung  $R = R(\varphi, \theta, \psi)$  als Hintereinanderausführung einer Drehung um  $\vec{e}_3$  mit Winkel  $\varphi$  (hierdurch wird  $\vec{e}_1$  in  $\vec{e}_N$  gedreht), einer Drehung um  $\vec{e}_N = R(\vec{e}_3, \varphi)\vec{e}_1$  mit Winkel  $\theta$  (sie transformiert  $\vec{e}_3$  in  $R\vec{e}_3$ ) und einer Drehung um  $R\vec{e}_3$  mit Winkel  $\psi$  (dadurch geht  $\vec{e}_N$  in  $R\vec{e}_1$  über),

$$R = R(R\vec{e}_3, \psi)R(\vec{e}_N, \theta)R(\vec{e}_3, \varphi) \quad .$$

Mit

$$R(R\vec{e}_3, \psi) = RR(\vec{e}_3, \psi)R^{-1}$$

und

$$R(\vec{e}_N, \theta)R(\vec{e}_3, \varphi) = R(R(\vec{e}_3, \varphi)\vec{e}_1, \theta)R(\vec{e}_3, \varphi) = R(\vec{e}_3, \varphi)R(\vec{e}_1, \theta)$$

folgt

$$\mathbf{1} = R(\vec{e}_3, \psi)R^{-1}R(\vec{e}_3, \varphi)R(\vec{e}_1, \theta) \quad .$$

Auflösung nach  $R$  liefert

$$R = R(\vec{e}_3, \varphi)R(\vec{e}_1, \theta)R(\vec{e}_3, \psi) \quad .$$

Als Matrizen bezüglich der Basis  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  ergeben sich

$$R(\vec{e}_3, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R(\vec{e}_1, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$R(\vec{e}_3, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für  $R = R(\varphi, \theta, \psi)$  die Matrixdarstellung

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten jetzt eine Bahnkurve von Rotationen,  $R(t)$ . Wir nennen  $R(t)$  differenzierbar, wenn für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  die Bahnkurve  $R(t)\vec{x}$  differenzierbar ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Matrixelemente von  $R(t)$  differenzierbar sind. Die Zeitableitung einer Bahn von Rotationen führt auf den Begriff der Winkelgeschwindigkeit:

**Satz 4.3** Sei  $R(t)$  eine differenzierbare Bahnkurve von Rotationen. Dann gibt es einen Vektor  $\vec{\omega}(t) \in \mathbb{R}^3$  (die momentane Winkelgeschwindigkeit), so daß für jeden Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$\frac{d}{dt}R(t)\vec{x} = \vec{\omega}(t) \times R(t)\vec{x}.$$

*Beweis:* Die Matrix  $\Omega = \dot{R}R^T$  ist antisymmetrisch,

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = \frac{d}{dt}RR^T = \frac{d}{dt}\mathbf{1} = 0.$$

Wir definieren  $\vec{\omega}$  durch

$$\omega_1 = \Omega_{32}, \quad \omega_2 = \Omega_{13}, \quad \omega_3 = \Omega_{21}.$$

Dann gilt  $\vec{\omega} \times \vec{x} = \Omega\vec{x}$ , wenn  $\vec{x}$  als Spaltenvektor aufgefaßt wird. q.e.d.

Ist  $R(t) = R(\vec{n}, \omega t)$ ,  $\omega > 0$ , so ist  $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$ , der Vektor  $\vec{\omega}$  zeigt also in die Richtung der Drehachse, sein Betrag ist die übliche Winkelgeschwindigkeit. Wir wollen jetzt  $\vec{\omega}$  durch die Zeitableitungen der Eulerschen Winkel ausdrücken. Durch Verwendung der Produktregel ergibt sich (mit  $R_1 = R(\vec{e}_3, \varphi)$ ,  $R_2 = R(\vec{e}_1, \theta)$ ,  $R_3 = R(\vec{e}_3, \psi)$ )

$$\begin{aligned} \dot{R}\vec{x} &= \dot{\varphi}\vec{e}_3 \times R\vec{x} + \dot{\theta}R_1(\vec{e}_1 \times R_2R_3\vec{x}) + \dot{\psi}R_1R_2(\vec{e}_3 \times R_3\vec{x}) \\ &= (\dot{\varphi}\vec{e}_3 + \dot{\theta}\vec{e}_N + \dot{\psi}R\vec{e}_3) \times R\vec{x} = \vec{\omega} \times R\vec{x} \quad . \end{aligned}$$

In der Basis  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  ist dann

$$\vec{\omega} = (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta)\vec{e}_1 + (\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta)\vec{e}_2 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)\vec{e}_3 \quad .$$

In der gedrehten Basis  $R\vec{e}_1, R\vec{e}_2, R\vec{e}_3$  erhält man

$$\vec{\omega} = (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta)R\vec{e}_1 + (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta)R\vec{e}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)R\vec{e}_3 \quad .$$

## 4.2 Bewegte Bezugssysteme

In der Newtonschen Mechanik sind Inertialsysteme physikalisch ausgezeichnet. In vielen Fällen ist es aber zweckmäßig, Systeme zu benutzen, die sich gegenüber einem Inertialsystem bewegen, z.B. ein fest mit der Erdoberfläche verbundenes System. Ist  $\vec{X}$  der Ortsvektor im bewegten System und  $\vec{x}$  der Ortsvektor im Inertialsystem, so gibt es zu jeder Zeit  $t$  eine Isometrie  $B(t)$ , so daß gilt:

$$\vec{x}(\vec{X}, t) = B(t)\vec{X} \quad .$$

Sei  $B(t) = (\vec{a}(t), R(t))$  die Zerlegung in Rotation und Translation. Wir betrachten jetzt eine Bahnkurve  $\vec{x}(t)$ . Die Geschwindigkeit im Inertialsystem ist

$$\dot{\vec{x}} = R\dot{\vec{X}} + \dot{R}\vec{X} + \dot{\vec{a}} \quad .$$

Definiert man die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  im bewegten System durch  $R\vec{\Omega} = \vec{\omega}$ , wobei  $\vec{\omega}$  die Winkelgeschwindigkeit der Rotation im Inertialsystem bezeichnet, so gilt

$$\dot{R}\vec{X} = \vec{\omega} \times R\vec{X} = R(\vec{\Omega} \times \vec{X}) \quad .$$

Für die Beschleunigung erhält man

$$\ddot{\vec{x}} = R\ddot{\vec{X}} + 2\dot{R}\dot{\vec{X}} + \ddot{R}\vec{X} + \ddot{\vec{a}}$$

mit  $\dot{R}\dot{\vec{X}} = R(\vec{\Omega} \times \dot{\vec{X}})$  und  $\ddot{R}\vec{X} = R(\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{X}) + R(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{X}))$ .

Die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$$

im Inertialssystem führt dann zur folgenden Bewegungsgleichung im bewegten System:

$$m\ddot{\vec{X}} = \vec{F}(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) - 2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{X}} - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{X} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{X}) - m\ddot{\vec{A}} \quad .$$

Hierbei ist  $\vec{F}$  die Kraft im bewegten System,

$$R\vec{F}(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) = \vec{f}(R(\vec{X} + \vec{A}), R(\dot{\vec{X}} + \vec{\Omega} \times \vec{X} + \dot{\vec{A}})) \quad .$$

und  $\ddot{\vec{a}} = R\ddot{\vec{A}}$ . Die zusätzlich zu  $\vec{F}$  auftretenden Terme nennt man Scheinkräfte.

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{X}} = 2m\dot{\vec{X}} \times \vec{\Omega}$$

heißt Corioliskraft und

$$\vec{F}_Z = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{X}) = m(|\vec{\Omega}|^2 \vec{X} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{X})\vec{\Omega})$$

Zentrifugalkraft.

Die in der Praxis wichtigsten bewegten Systeme sind diejenigen, die fest mit der Erdoberfläche verbunden sind. In guter Näherung kann die Bewegung des Erdmittelpunkts als geradlinig gleichförmig und die Rotation als gleichförmig (d.h.  $\vec{\omega} = \text{const}$ ) angenommen werden. Dann ist  $\vec{\Omega} = \vec{\omega} = \text{const}$ , und es wirken sich nur die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft aus. Die Zentrifugalkraft ist am Äquator am stärksten, daher ist dort die Erdbeschleunigung am geringsten. Dies führt zur Abplattung der Erde. Die Corioliskraft wirkt sich vor allem bei weiträumigen Bewegungen aus (Luft- und Wasserströmungen).

Als ein Beispiel betrachten wir die Abweichung vom Lot beim freien Fall. Auf das Lot wirkt die aus Schwere- und Zentrifugalbeschleunigung zusammengesetzte Beschleunigung  $\vec{G}$ . Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\vec{X}} = \vec{G} + 2\dot{\vec{X}} \times \vec{\Omega}$$

mit den Anfangsbedingungen  $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$ ,  $\dot{\vec{X}}(0) = 0$ . Wir setzen an

$$\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2$$

mit  $\vec{X}_1(t) = \vec{X}_0 + \frac{1}{2}\vec{G}t^2$ . Dann erfüllt  $\vec{X}_2$  die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{X}}_2 = 2t(\vec{G} \times \vec{\Omega}) + 2(\dot{\vec{X}}_2 \times \vec{\Omega}) \quad .$$

Wir vernachlässigen den 2. Term auf der rechten Seite und finden für die Abweichung vom Lot

$$\vec{X}_2 = \frac{t^3}{3} \vec{G} \times \vec{\Omega} \quad .$$

$\vec{\Omega}$  zeigt zum Polarstern und hat den Betrag  $\omega = \frac{2\pi}{24h}$ ,  $\vec{G}$  zeigt nach unten, also wird der fallende Körper nach Osten abgelenkt. An einem Ort der geographischen Breite  $\varphi$  ist der Winkel zwischen  $\vec{G}$  und  $\vec{\Omega}$   $\frac{\pi}{2} \pm \varphi$ , also ergibt sich für den Betrag der Ablenkung

$$\Delta = \frac{t^3}{3} g \omega \cos \varphi \quad .$$

Ein Bungeespringer vom Fernsehturm in Hamburg fällt ungefähr 3 Sekunden lang frei, die geographische Breite von Hamburg ist  $53,5^\circ$ . Mit  $\cos 53,5^\circ = 0,59$  und  $g = 9,81 \text{ms}^{-2}$  finden wir eine Ostabweichung von

$$\Delta = 9 \cdot 9,81 \cdot \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \cdot 0,59 \text{m} = 3,8 \text{mm} \quad .$$

### 4.3 Kinetische Energie und Drehimpuls des starren Körpers. Der Trägheitstensor

Ein starrer Körper („Kreisel“) ist ein System von Massenpunkten  $(m_i, \vec{x}_i)$ , deren Abstände sich im Laufe der Bewegung nicht ändern können. Die Bewegung eines starren Körpers kann daher durch eine Bahnkurve  $B(t)$  in der euklidischen Gruppe  $E(3)$  beschrieben werden, so daß die Bahnkurve des  $i$ -ten Massenpunktes durch  $\vec{x}_i(t) = B(t)\vec{X}_i$  gegeben ist, wobei  $\vec{X}_i$  zeitlich konstant ist. Man nennt  $\vec{X}_i$  den Ortsvektor des  $i$ -ten Massenpunktes im körperfesten System.  $\vec{x}_i$  wird als Ortsvektor im raumfesten System bezeichnet. Wir werden durchgängig die Größen, die sich auf das raumfeste System beziehen, mit kleinen Buchstaben bezeichnen und für die Größen im körperfesten System große Buchstaben verwenden. Falls die Massenpunkte nicht alle auf einer Geraden liegen, bestimmt die Bewegung des starren Körpers eindeutig die Bahn in der euklidischen Gruppe. Daher kann die Mechanik des Kreisels als die Mechanik eines Massenpunktes, der sich in der euklidischen Gruppe bewegt, aufgefaßt werden.

Wir zerlegen wieder die Isometrien in Rotationen und Translationen

$$B(t) = (\vec{a}(t), R(t)) \quad .$$

Die kinetische Energie des starren Körpers ist

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i |\dot{\vec{x}}_i|^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum m_i |\dot{\vec{a}}|^2 + \sum m_i \vec{a} \cdot (\vec{\omega} \times R\vec{X}_i) + \frac{1}{2} \sum m_i |\vec{\omega} \times R\vec{X}_i|^2 \quad .$$

Wir legen den Ursprung des körperfesten Systems in den Schwerpunkt,

$$\sum m_i \vec{X}_i = 0 \quad ,$$

so daß der gemischte Term auf der rechten Seite verschwindet. Die kinetische Energie zerfällt dann in die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung und die der Relativbewegung. Die kinetische Energie der Relativbewegung des starren Körpers nennt man Rotationsenergie. Sie ist eine quadratische Form über den Winkelgeschwindigkeiten. Wir wollen im folgenden Vektoren als Spaltenvektoren, d.h. als  $3 \times 1$ -Matrizen, auffassen und den Vektorpfeil weglassen. So schreibt sich das Skalarprodukt zweier Vektoren  $a$  und  $b$  als Matrixprodukt  $a \cdot b = a^T b$ . Mit der Formel

$$|b \times c|^2 = |b|^2 |c|^2 - (b \cdot c)^2 = b^T (|c|^2 \mathbf{1} - cc^T) b$$

( $\mathbf{1}$  ist hier die  $3 \times 3$ -Einheitsmatrix) findet man für die Rotationsenergie

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^T \theta_a \omega$$

mit dem sogenannten Trägheitstensor

$$\theta_a = \sum m_i (|x_i - a|^2 \mathbf{1} - (x_i - a)(x_i - a)^T) \quad .$$

Für einen Einheitsvektor  $n$  ist

$$n^T \theta_a n = \sum m_i d_i^2$$

mit  $d_i = \sqrt{|x_i - a|^2 - (n \cdot (x_i - a))^2}$ .  $d_i$  ist der Abstand des  $i$ -ten Massenpunktes von der Achse in Richtung  $n$  durch den Punkt  $a$ . Also ist  $n^T \theta_a n$  das Trägheitsmoment bezogen auf diese Achse. Der Trägheitstensor faßt also die Trägheitsmomente für alle Achsen durch den Punkt  $a$  zusammen.

Im raumfesten System bewegt sich der Trägheitstensor zusammen mit dem Körper. Dagegen ist der Trägheitstensor  $\Theta$  im körperfesten System zeitlich konstant,

$$\Theta = \sum_{i=1}^n m_i (|X_i|^2 \mathbf{1} - X_i X_i^T) \quad ,$$

und es gilt

$$\theta_a = R \Theta R^T \quad .$$

falls  $x = RX + a$  ist. Für die Rotationsenergie ergibt sich

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Omega^T \Theta_a \Omega \quad .$$

Wenn die Bewegung so abläuft, daß ein Punkt  $A$  des Kreisels festgehalten wird,

$$RA + a = \text{const} \quad ,$$

dann gilt für die Geschwindigkeit

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} (R(X - A) + RA + a) = R(\Omega \times (X - A))$$

und daher für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \Omega^T \Theta_A \Omega$$

mit dem Trägheitstensor bezüglich des Punktes  $A$

$$\Theta_A = \sum_{i=1}^n m_i (|X_i - A|^2 \mathbf{1} - (X_i - A)(X_i - A)^T) \quad .$$

Der Vergleich mit dem Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunkts ergibt

$$\Theta_A = \Theta + \sum_{i=1}^n m_i (|A|^2 \mathbf{1} - AA^T)$$

(Satz von Steiner).

Betrachten wir als nächstes den Drehimpuls bezüglich des Schwerpunkts. Im raumfesten System ergibt sich

$$l_a = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - a) \times \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - a) \times (\omega \times (x_i - a))$$

(der Beitrag der Schwerpunktsbewegung verschwindet), im körperfesten System findet man (mit  $RL = l_a$ )

$$L = \sum_{i=1}^n m_i X_i \times (\Omega \times X_i) = \sum_{i=1}^n m_i (|X_i|^2 \mathbf{1} - X_i X_i^T) \Omega = \Theta \Omega \quad .$$

Ein entsprechender Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit gilt im raumfesten System,

$$l_a = \theta_a \omega \quad .$$

Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit sind genau dann parallel, wenn die Winkelgeschwindigkeit ein Eigenvektor des Trägheitstensors ist. Die entsprechenden Achsen nennt man Hauptträgheitsachsen, die zugehörigen Eigenwerte die Hauptträgheitsmomente. Da der Trägheitstensor symmetrisch ist, stehen die Hauptträgheitsachsen zu verschiedenen Hauptträgheitsmomenten senkrecht aufeinander. Er ist positiv definit, daher sind die Hauptträgheitsmomente positiv.

#### 4.4 Euler-Gleichung und Poinsot-Konstruktion

Im kräftefreien Fall ist der Drehimpuls im raumfesten System erhalten,

$$0 = \frac{d}{dt}l = \frac{d}{dt}RL = R(\Omega \times L) + R\dot{L} \quad ,$$

also gilt im körperfesten System

$$\dot{L} + \Omega \times L = 0 \quad .$$

Wir setzen  $L = \Theta\Omega$  ein und erhalten die folgende Differentialgleichung für  $\Omega$

$$\Theta\dot{\Omega} + \Omega \times \Theta\Omega = 0$$

Legt man die Koordinatenachsen in die Hauptträgheitsachsen, so ergibt sich für die Komponenten von  $\Omega$

$$\begin{aligned} \Theta_1\dot{\Omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\Omega_2\Omega_3 &= 0 \\ \Theta_2\dot{\Omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\Omega_3\Omega_1 &= 0 \\ \Theta_3\dot{\Omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\Omega_1\Omega_2 &= 0 \end{aligned}$$

(Eulersche Gleichungen). Dieses Gleichungssystem besitzt zwei Erhaltungssätze, den Energieerhaltungssatz

$$E = \frac{1}{2}\Omega^T\Theta\Omega = \text{const}$$

und den Satz über die Erhaltung des Betrags des Drehimpulses

$$|L|^2 = |l|^2 = \Omega^T\Theta^2\Omega = \text{const} \quad .$$

Daher können z. B.  $\Omega_2$  und  $\Omega_3$  als Funktionen von  $\Omega_1$  geschrieben werden, und die Differentialgleichung für  $\Omega_1$  läßt sich dann mit der Methode der Separation der Variablen lösen. Dies führt auf elliptische Integrale (siehe z.B. Landau-Lifschitz). Wir wollen stattdessen eine geometrische Lösung besprechen, die auf Poinsot zurückgeht.

Der Drehimpuls  $L$  im körperfesten System ist i.a. nicht erhalten, sondern liegt aufgrund der beiden Erhaltungssätze im Durchschnitt der Kugel  $L^T L = |l|^2$  mit dem Ellipsoiden  $L^T \Theta^{-1} L = 2E$  mit den Halbachsen  $\sqrt{2E\Theta_1}, \sqrt{2E\Theta_2}$  und  $\sqrt{2E\Theta_3}$ . Er beschreibt daher eine periodische Bewegung. In der Nähe der größten und der kleinsten Halbachse bleibt  $L$  (und damit auch  $\Omega$ ) immer in der Nähe der Achse, die Rotationen um diese Achsen sind daher stabil gegen kleine Störungen. In der Nähe der mittleren Halbachse dagegen laufen die Bahnen auseinander (instabile Rotation).

Um die Bewegung des Körpers im Raum (bei ruhendem Schwerpunkt) zu veranschaulichen, betrachten wir den sogenannten Trägheitsellipsoid  $e_\theta = R(E_\Theta) = \{x \in \mathbb{R}^3, x^T \theta x = 1\}$ . Seine Punkte sind mit dem Körper fest verbunden. Der Drehimpuls  $l$  im raumfesten System ist zeitlich konstant. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist i.a. nicht konstant. Sie liegt im Durchschnitt der zeitlich konstanten Ebene  $l^T \omega = 2E$  mit dem skalierten Trägheitsellipsoid  $\sqrt{2E}e_\theta$ . Tatsächlich besteht dieser Durchschnitt nur aus einem Punkt, da  $l$  an der Stelle  $\omega$  normal zur Fläche  $\sqrt{2E}e_\theta$  ist,

$$l_i = \frac{\partial}{\partial \omega_i} \frac{1}{2} \omega^T \theta \omega \quad .$$

Wir betrachten jetzt den Punkt  $x = R X_{t_0}$  des Trägheitsellipsoids, der die invariante Ebene  $l^T x = \sqrt{2E}$  zur Zeit  $t_0$  berührt. Offenbar gilt  $X_{t_0} = \frac{\Omega(t_0)}{\sqrt{2E}}$ . Da  $x$  mit dem Körper fest verbunden ist, gilt zu jeder Zeit

$$\dot{x} = \omega \times x \quad .$$

d.h. zum Zeitpunkt  $t_0$  ist der Punkt  $x$  in Ruhe. Wir können daher die Bewegung in der folgenden Weise beschreiben: Der Trägheitsellipsoid rollt, ohne zu gleiten, bei festgehaltenem Mittelpunkt auf der invarianten Ebene.

## 4.5 Der symmetrische Kreisel

Stimmen zwei der drei Trägheitsmomente überein, etwa  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$ , so spricht man von einem symmetrischen Kreisel. Für diesen vereinfacht sich die Herleitung der Lösung erheblich.

Man nennt die Hauptträgheitsachse  $E_3$  zum dritten Hauptträgheitsmoment  $\Theta_3$  die Figurenachse. Nach den Eulergleichungen verschwindet die Zeitableitung der zugehörigen Komponente der Winkelgeschwindigkeit,  $\Omega_3 = \Omega \cdot E_3$ . Setzt man als Abkürzung  $A = \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1} \Omega_3$ , so werden die beiden verbleibenden Eulergleichungen zu

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 + A\Omega_2 &= 0 \\ \dot{\Omega}_2 - A\Omega_1 &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung  $\Omega_1 = B \cos A(t - t_0)$ ,  $\Omega_2 = B \sin A(t - t_0)$ . Die Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System rotiert also mit der Frequenz  $A$  um die Figurenachse,

$$\Omega(t) = R(E_3, At)\Omega_0 \quad .$$

Die volle Rotation  $R(t)$  erfüllt die Gleichung

$$\dot{R}X = R(\Omega(t) \times X) \quad \forall X \in \mathbb{R} \quad .$$

Wir wählen das raumfeste System so, daß es zur Zeit  $t = 0$  mit dem körperfesten System übereinstimmt,  $R(0) = \mathbf{1}$ . Wir machen den Ansatz

$$R(t) = R_1(t)R(E_3, -At)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 R(E_3, -At)X + R_1(-AE_3 \times R(E_3, -At)X) \\ = R_1(\Omega_0 \times R(E_3, -At)X) \quad , \end{aligned}$$

also erfüllt  $R_1$  die Differentialgleichung

$$\dot{R}_1 X = R_1((\Omega_0 + AE_3) \times X)$$

mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega_0 + AE_3 = \frac{1}{\Theta_1} L(0) = \frac{1}{\Theta_1} l \quad .$$

und der Anfangsbedingung  $R_1(0) = \mathbf{1}$ . Die Lösung für  $R(t)$  ist also

$$\begin{aligned} R(t) &= R\left(\frac{l}{|l|}, \frac{|l|}{\Theta_1} t\right) R(E_3, (1 - \frac{\Theta_3}{\Theta_1})\Omega_3 t) \\ &= R(e_3, (1 - \frac{\Theta_3}{\Theta_1})\Omega_3 t) R\left(\frac{l}{|l|}, \frac{|l|}{\Theta_1} t\right) \quad , \end{aligned}$$

wobei  $e_3 = RE_3 = R\left(\frac{l}{|l|}, \frac{|l|}{\Theta_1} t\right)E_3$  die Figurenachse im raumfesten System bezeichnet. Die Winkelgeschwindigkeit im raumfesten System ergibt sich zu

$$\omega = \frac{1}{\Theta_1} l + (1 - \frac{\Theta_3}{\Theta_1})\Omega_3 e_3 \quad .$$

$\frac{|l|}{\Theta_1}$  nennt man die Nutationsfrequenz. Sie gibt an, mit welcher Frequenz die Figurenachse um die Richtung des Drehimpulses kreist.