Lösungen zur Klausur

Aufgabe 1

a) Die Arbeit ist gerade die Fläche des Rechtecks:

$$A = \Delta V \Delta p$$

Auf den ersten beiden Teilstücken des Prozesses wird Wärme zugeführt, ihr Betrag ist

$$\begin{aligned}
Q_1 &= C_V(T_B - T_A) = \frac{3}{2}Nk\left(\frac{(p_0+\Delta p)V_0}{Nk} - \frac{p_0V_0}{Nk}\right) = \frac{3}{2}V_0\Delta p \\
Q_2 &= C_V(T_C - T_B) + (p_0+\Delta p)(V_C - V_B) \\
&= \frac{3}{2}(p_0+\Delta p)(V_0+\Delta V - V_0) + (p_0+\Delta p)(V_0+\Delta V - V_0) \\
&= \frac{5}{2}\Delta V(p_0+\Delta p).
\end{aligned}$$

Der Wirkungsgrad ergibt sich zu

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{auf}}} = \frac{2}{3u+5\pi+5}$$

mit $Q_{\text{auf}} = Q_1 + Q_2$, $u = V_0/\Delta V$ and $\pi = p_0/\Delta p$.

b) Am Startpunkt ist die Temperatur minimal, und die maximale Temperatur wird am Ende des zweiten Teilabschnitts angenommen: $T_{\min} = \frac{p_0V_0}{Nk}$, $T_{\max} = \frac{(p_0+\Delta p)(V_0+\Delta V)}{Nk}$.

c) Der Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses zwischen den extremalen Temperaturen ist

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = \frac{1+u+\pi}{1+u+\pi+\pi u},$$

und für $\pi = u = 1$ sieht man

$$\eta = \frac{2}{13} < \eta_{\text{Carnot}} = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 2

Die Zustandssumme eines 1D klassischen Teilchens im Potential $V(x) = E\ln\left(|x|/x_0 + 1\right)$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
Z &= \int \mathrm{d}p\ \mathrm{e}^{-\beta p^2/2m} \int \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-\beta E\ln(|x|/x_0+1)} = \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}2\int_0^\infty \mathrm{d}x\ \left(\frac{|x|}{x_0}+1\right)^{-\beta E} \\
&= \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}2x_0\int_1^\infty \mathrm{d}x\ x^{-\beta E} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}\frac{2x_0}{\beta E-1} & \beta E > 1 \\ +\infty & \beta E \le 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Dichtefunktion des kanonischen Ensembles ist dann wohl definiert, wenn die Zustandssumme existiert, d.h. nur im Bereich $\beta > 1/E$. Bei $\beta = 1/E$ gibt es einen Phasenübergang. Der Erwartungswert des Abstands des Teilchens ist

$$\begin{aligned}\langle |x| \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathrm{d}p \; \mathrm{e}^{-\beta p^2/2m} \int \mathrm{d}x \; |x| \left(\frac{|x|}{x_0} + 1 \right)^{-\beta E} &= \frac{\beta E - 1}{2x_0} 2x_0^2 \int_1^\infty \mathrm{d}x \; \underbrace{|x-1|}_{=x-1} |x|^{-\beta E} \\ = (\beta E - 1) x_0 \int_1^\infty \mathrm{d}x \; x^{-\beta E + 1} - x^{-\beta E} = x_0 \left(\frac{\beta E - 1}{\beta E - 2} - 1 \right) &= \frac{x_0}{\beta E - 2}, \quad \text{für } \beta E > 2\,.\end{aligned}$$

Der Erwartungswert divergiert für $\beta E \leq 2$, d.h. schon bei kleineren Temperaturen als dem Phasenübergang ist diese Observable nicht mehr wohldefiniert.

Aufgabe 3

a) Da das Gesamtsystem abgeschlossen ist, sind Gesamtenergie $E = E_1 + E_2$ und Gesamtvolumen $V = V_1 + V_2$ erhalten.

b) Im Gleichgewicht ist die Gesamtentropie abgeschlossener Systeme maximal. Da $E_2 = E - E_1$ und $V_2 = V - V_1$ sind die einzigen freien Variablen E_1 und V_1, da Energie- und Volumenaustausch zugelassen sind. Notwendige Bedingung fuer die Maximalitaet von $S = S_1 + S_2$ ist das Verschwinden der partiellen Ableitungen nach diesen freien Variablen, also

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \left(S_1(E_1, V_1) + S_2(E - E_1, V - V_1) \right)}{\partial E_1} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{S_1(E_1, V_1)}{\partial E_1} = -\frac{S_2(E - E_1, V - V_1)}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2(E_2, V - V_1)}{\partial E_2} \\ &\Rightarrow T_1 = T_2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \left(S_1(E_1, V_1) + S_2(E - E_1, V - V_1) \right)}{\partial V_1} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{S_1(E_1, V_1)}{\partial V_1} = -\frac{S_2(E - E_1, V - V_1)}{\partial V_1} = \frac{\partial S_2(E - E_1, V_2)}{\partial V_2} \\ &\Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}\end{aligned}$$

Druck und Temperatur der Teilsysteme muessen also gleich sein.

c) Seien $S_i(E_i, V_i),\ i = 1, 2$ konkav. Insbesondere ist dann $S_2(E_2, V_2) = S_2(E - E_1, V - V_1)$ als Funktion von E_1, V_1 konkav und somit auch die Summe $S(E_1, V_1) = S_1(E_1, V_1) + S_2(E - E_1, V - V_1)$. Der Zustand, der durch das Verschwinden der partiellen Ableitungen von S nach E_1 und V_1 charakterisiert ist, ist also stabil, da kleine Stoerungen um (E_1, V_1) herum nicht zu einer Zunahme der Gesamtentropie S fuehren ($\Leftrightarrow$ die Entropiefunktion hat dort ein Maximum).

Aufgabe 4

a) Der Hamiltonian des Systems von N Teilchen in einem Kasten lautet:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + V(x_i) \right) ,$$

wobei das Potential $V(x)$ durch

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < x < L \\ \infty & , \quad x \geq L \end{cases}$$

gegeben ist. Wenn man die Dirichletschen Randbedingungen annimmt, bekommt man die Eigenvektoren folgender Form:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) ,$$

mit den zugehörigen Eigenwerten der Energie:

$$E_n = \frac{n^2\pi^2}{2mL^2}$$

Jetzt kann man die Zustandsumme des System von N Teilchen bestimmen:

$$Z = \mathrm{Tr} e^{-\beta H} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta E_n} \right)^N = \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta \frac{n^2\pi^2}{2mL^2}} \right)^N$$

Für grosse Kastenlänge L lässt sich die Summe durch ein Integral annähern:

$$Z \approx \left(\int_0^{\infty} e^{-\beta \frac{n^2\pi^2}{2mL^2}} dn \right)^N = \left(\frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{2m}{\beta}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right)^N = \left(L \sqrt{\frac{m}{2\pi\beta}} \right)^N .$$

Die Dichtematrix des Systems lautet: $\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$.

b) Die Teilchenzahldichte $n(x)$ berechnet man aus der Formel:

$$n(x) = N \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 e^{-\beta \frac{n^2\pi^2}{2mL^2}}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta \frac{n^2\pi^2}{2mL^2}}} = N \frac{\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\beta \frac{n^2\pi^2}{2mL^2}} \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right)}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta \frac{n^2\pi^2}{2mL^2}}}$$

Im thermodynamischen Limes kann die Summe über die Energieniveaus durch ein Integral approximiert werden. Es folgt dass:

$$\begin{aligned} n(x) &= \frac{2N}{L^2} \sqrt{\frac{2\pi\beta}{m}} \int_0^{\infty} e^{-\beta \frac{n^2\pi^2}{2mL^2}} \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dn = \\ &= \frac{4N}{L\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} \sin^2\left(\sqrt{\frac{2m}{\beta}} u x \right) du = \frac{N}{L} \left(1 - e^{-\frac{2m}{\beta} x^2} \right) \end{aligned}$$

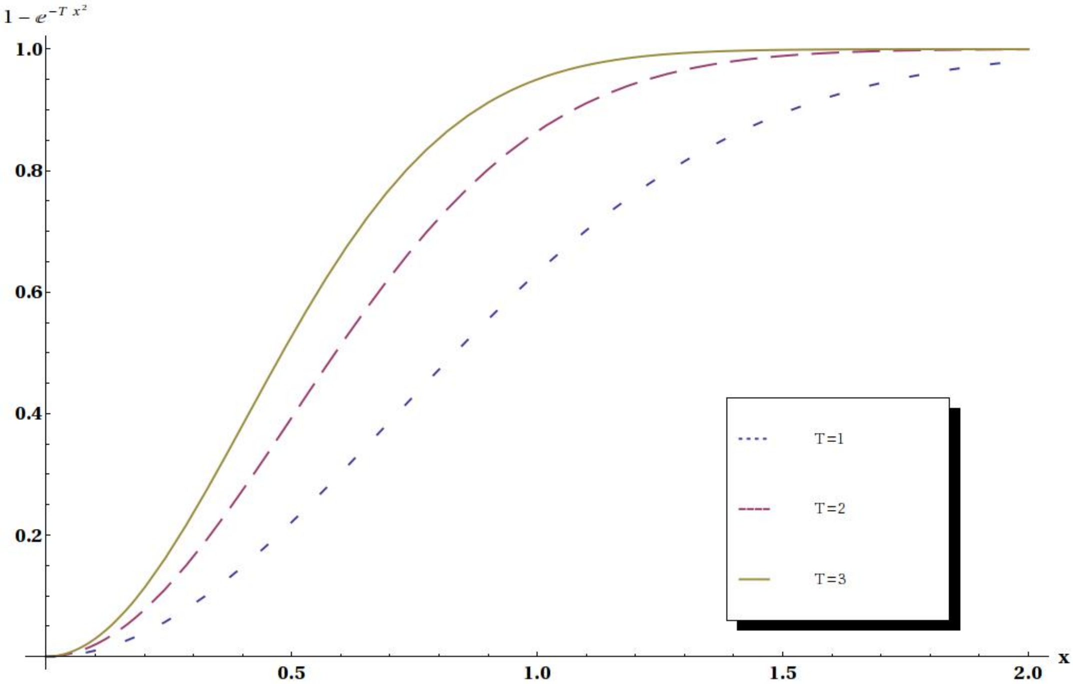

Abbildung 1: Die Funktion $1 - e^{-Tx^2}$ für 3 verschiedene Werte von T.