Musterlösug Aufgabe 4

Gegeben:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{C} \tag{7}$$

Mit $f(1) = 2,\ f(2) = 7,\ f(3) = 4.$

Gesucht sind die Werte für a, b und c.

Durch jeweiliges Einsetzen von 1, 2 und 3 für x wird (7) zu einem linearen Gleichungssystem :

$$f(1) = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 = 2 \tag{7a}$$

$$f(2) = a \cdot 4 + b \cdot 2 + c \cdot 1 = 7 \tag{7b}$$

$$f(3) = a \cdot 9 + b \cdot 3 + c \cdot 1 = 4 \tag{7c}$$

Die Koeffizienten und Lösungen der drei Gleichungen werden nach dem Gausschen Eliminationsverfahren in eine sog. erweiterte Matrix überführt, dabei steht die erste Spalte für Koeffizienten a, die zweite für Koeffizienten b, die dritte für Koeffizienten c und die letzte für die jeweilige Lösung der drei Gleichungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \tag{7d}$$

Durch Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$, Vertauschen von Zeilen oder Addition von Zeilen in beliebiger Kombination versucht man zu erreichen, dass möglichst viele Matrix-Elemente von Links unten beginnend *Null* werden.

Multiplikation der ersten Zeile mit -9 und Addidion dieser Zeile zur letzten Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -6 & -8 & -14 \end{array}\right) \tag{7e}$$

Multiplikation der ersten Zeile mit -4 und Addidion dieser Zeile zur zweiten Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -8 & -14 \end{array}\right) \tag{7f}$$

Multiplikation der zweiten Zeile mit -3 und Addidion dieser Zeile zur dritten Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 \end{array}\right) \tag{7g}$$

Zeile drei liest sich somit als:

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 = -11 \Longleftrightarrow c = -11 \tag{7n}$$

Nun lässt sich in Zeile zwei von (7g) $c = -11$ einsetzen:

$$a \cdot 0 + b \cdot (-2) + (-11) \cdot (-3) = -1 \Longleftrightarrow b = 17 \tag{7o}$$

Mit $c = -11$ und $b = -17$ ergibt sich die erste Zeile von (7g) zu:

$$a \cdot 1 + (17) \cdot 1 + (-11) \cdot 1 = 2 \Longleftrightarrow a = -4 \tag{7p}$$

Es ergeben sich somit $a = -4$, $b = -17$ und $c = -11$.