Adiabatische Vakuumzustände des Dirac-Feldes auf einer gekrümmten Raumzeit

Mark Wellmann

Diplomarbeit, September 1997

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Quantenfeldtheorie auf einer gekrümmten Raumzeit (QFT auf GRZ) beschäftigt sich mit der Beschreibung quantisierter Felder auf einer Mannigfaltigkeit, auf der eine Metrik mit Lorentz-Signatur definiert ist, die die kausale Struktur der Raumzeit festlegt. Die Metrik wird dabei als klassisches Feld behandelt und nicht quantisiert. Die Situation ist also analog zur Behandlung eines quantisierten Feldes in einem äußeren Potential auf dem Minkowski-Raum.

Seit Hawking's Entdeckung [11], daß schwarze Löcher durch Teilchenerzeugung Energie verlieren, hat es ein großes Interesse an Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit gegeben, da dieses Phänomen im Rahmen der klassischen allgemeinen Relativitätstheorie nicht erklärt werden kann. Solange keine quantisierte Theorie der Gravitation existiert, kann diese semiklassische Näherung dazu dienen, Hinweise auf die Wechselwirkungen der Gravitation mit quantisierter Materie zu erhalten. Der Gültigkeitsbereich der QFT auf GRZ erstreckt sich bis zu Abständen der Planck-Länge 10^{-33}cm, ab der Quanteneffekte der Gravitation wichtig werden.

Die Beschreibung quantisierter Felder auf einer gekrümmten Raumzeit ist jedoch mit einigen technischen Schwierigkeiten behaftet und kann nicht ohne weiteres vom Minkowski-Raum übertragen werden. Aufgrund der unendlich vielen Freiheitsgrade der Felder existieren inäquivalente Darstellungen der (Anti-)Vertauschungsrelationen. Im Minkowski-Raum wählt man eine dieser Darstellungen aus, indem man einen Hilbertraum konstruiert, der einen unter Translationen invarianten Vektor Ω besitzt. Die Fourier-Zerlegung der Lösungen der klassischen Feldgleichung in positiv und negativ frequente Anteile wird zur Definition des Skalarproduktes benutzt. Observable werden dann durch selbstadjungierte Operatoren auf diesem Hilbertraum dargestellt, und meßbare Größen entsprechen Erwartungswerten dieser Operatoren. Teilchen werden als Anregungen des Vakuumvektors Ω betrachtet.

Auf einer generischen Raumzeit existiert i.A. keine Symmetriegruppe bzgl. derer man den physikalischen Zustandsraum auswählen könnte. Auch steht einem die Fourier-Analyse nicht zur Verfügung. Es bietet sich daher an, die algebraische Formulierung zu verwenden, bei der zunächst die lokalen Observablen angegeben werden. Zustände werden dann als lineare Funktionale definiert, die auf die Observablen wirken. Mit Hilfe der GNS-Konstruktion kann man die algebraische Sichtweise und den gewöhnlichen Hilbertraumzugang miteinander in Verbindung bringen.

Es stellt sich dann die Frage nach der Charakterisierung physikalischer Zustände. Ausgehend von Eigenschaften physikalischer Zustände auf dem Minkowski-Raum haben Haag, Narnhofer und Stein [10] das Prinzip der lokalen Definitheit formuliert, welches Zustände auf einer gekrümmten Raumzeit erfüllen müssen, um als physikalisch angesehen werden zu können. Eine wichtige Klasse von Zuständen die diesem Prinzip genügen sind die sog. Hadamard-Zustände, die eine bestimmte Singularitätenstruktur besitzen [5]. Das diese Zustände in der Tat das Prinzip der lokalen Definitheit erfüllen wurde für das Klein-Gordon-Feld von Verch [25] gezeigt. Die Hadamard-Zustände wurden dann von Köhler [16] benutzt, um den Energie-Impuls-Tensor zu renormieren. Für das Klein-Gordon-Feld auf einer Robertson-Walker Raumzeit wurde von Junker [14] gezeigt, daß adiabatische Vakuumzustände Hadamard-Zustände sind.

In dieser Arbeit sollen nun physikalische Zustände für das Dirac-Feld auf einer GRZ konstruiert werden. Wir beschreiben dazu im ersten Teil der Arbeit die Quantisierung des Dirac-Feldes mit Hilfe des algebraischen Zugangs zur Quantenfeldtheorie und betrachten anschließend das Dirac-Feld auf einer Robertson-Walker Raumzeit. In Analogie zum Klein-Gordon-Feld werden danach adiabatische Vakuumzustände des Dirac-Feldes definiert.

2 Dirac-Feld

In diesem Abschnitt wird das Dirac-Feld auf einer gekrümmten Raumzeit eingeführt. Außerdem wird die Quantisierungsprozedur mit Hilfe der selbstdualen CAR-Algebra beschrieben. Wir halten uns in der Darstellung an die Dissertation von Verch [24] sowie die Arbeit von Dimock [7].

2.1 Clifford-Algebra

Sei V ein reeller Vektorraum und s eine reelle, symmetrische, nicht-entartete Bilinearform auf V. Die zu (V, s) assoziierte Clifford-Algebra $\mathcal{C}(V, s)$ ist die reelle, assoziative Algebra mit Einselement $\mathbf{1}$, die von den Elementen $\{c(v), v \in V\}$ erzeugt wird. Die $c(v)$ sollen der folgenden Relation genügen:

$$c(v)c(w) + c(w)c(v) = 2s(v, w)\mathbf{1}, v, w \in V \qquad (1)$$

Für das Dirac-Feld auf dem Minkowski-Raum ist der Fall $V = \mathbf{R}^4, s = \eta = (\eta_{ab}) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ von besonderem Interesse. Sei $\{e_a, a = 0,1,2,3\}$ eine Basis des $\mathbf{R}^4$ mit $\eta(e_a, e_b) = \eta_{ab}$. Gesucht werden nun treue Darstellungen der komplexifizierten Clifford-Algebra $\mathcal{C}(\mathbf{R}^4,\eta)_{\mathbf{C}} \cong \mathcal{C}(\mathbf{R}^4,\eta) \oplus i\mathcal{C}(\mathbf{R}^4,\eta)$ durch komplexe (4×4)-Matrizen:

$$\rho : \mathcal{C}(\mathbf{R}^4,\eta)_{\mathbf{C}} \to M_{\mathbf{C}}(4), c(e_a) \mapsto \rho(c(e_a))$$

Dies sind die sog. Dirac-Darstellungen und die Matrizen $\gamma_a := \rho(c(e_a))$, $a = 0,1,2,3$ heißen Dirac-Matrizen [9]. Sind ρ_1 und ρ_2 zwei Dirac-Darstellungen von $\mathcal{C}(\mathbf{R}^4,\eta)_{\mathbf{C}}$, so gibt es nach Pauli's Theorem eine nichtsinguläre Matrix M, so daß für die entsprechenden Sätze von Dirac-Matrizen γ_a^1 und γ_a^2, $a = 0,1,2,3$ gilt:

$$M\gamma_a^1 M^{-1} = \gamma_a^2,\ a = 0,1,2,3$$

Es existieren Darstellungen, in denen die Dirac-Matrizen die zusätzliche Eigenschaft besitzen:

$$\gamma_0^* = \gamma_0, \quad \gamma_j^* = -\gamma_j,\ j = 1,2,3$$

Hierbei ist γ_a^* die Hermitesch konjugierte Matrix zu γ_a, also $\gamma_a^* = (\overline{\gamma_a})^t$. Eine solche Darstellung heißt Standarddarstellung. Eine Standarddarstellung mit der weiteren Eigenschaft $\overline{\gamma_a} = -\gamma_a$, $a = 0,1,2,3$ heißt Majorana-Darstellung. In dieser Darstellung ist die Dirac-Gleichung reell und die Ladungskonjugation erhält eine einfache Form. Im folgenden wird davon ausgegangen, daß eine Majorana-Darstellung der Dirac-Matrizen vorliegt. Seien nun Dirac-Matrizen $\{\gamma_a,\ a = 0,1,2,3\}$ gegeben. Betrachte dann die Lie-Gruppe $\mathrm{Spin}(1,3)$, die aus den Matrizen S besteht, die folgende Eigenschaften besitzen:

1) $\det S = 1$

2) $S\gamma_a S^{-1} = \gamma_b \Lambda^b{}_a, \Lambda^b{}_a \in \mathbf{R}$

Zusammen mit den Antivertauschungsrelationen der Dirac-Matrizen ergibt sich folgende Identität für die $\Lambda^b{}_a : \eta_{cd}\Lambda^c{}_a\Lambda^d{}_b = \eta_{ab}$, d.h. die Matrix $(\Lambda^a{}_b)$ ist ein Element der Lorentzgruppe $\mathcal{L}$. [1] Die Abbildung $S \to \Lambda(S)$ definiert durch 2) ist ein surjektiver 2-1 Homomorphismus $\mathrm{Spin}(1,3) \to \mathcal{L}$. Im folgenden beschränken wir uns auf $\mathrm{Spin}_0(1,3)$, die Zusammenhangskomponente der Eins von $\mathrm{Spin}(1,3)$. Ihr Bild $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ist die Lie-Gruppe der eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen. $\mathrm{Spin}_0(1,3)$ ist isomorph zu $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$.

2.2 Spin-Strukturen

Sei nun (M,g) eine Raumzeit, wobei M eine 4-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit bezeichnen soll und g eine Metrik mit Lorentzsignatur ist. (M,g) soll raum- und zeitorientierbar sein und es seien solche Orientierungen gewählt. Zum Tangentialbündel TM kann nun ein Vektorbündel von Orthonormalbasen, ein sog. Orthonormalrahmenbündel[2] $F(M,g)$ assoziiert werden. Die Konstruktion von

[1] siehe Anhang A.1

[2] In der physikalischen Literatur sind hierfür auch die Begriffe Vierbein oder Tetrad gebräuchlich; siehe Anhang A.3 für die Definition eines Vektorbündels

$F(M,g)$ geht folgendermaßen. Sei $\{\partial/\partial x^\mu, \mu = 0,1,2,3\}$ eine Koordinatenbasis von T_pM bzgl. eines Koordinatensystems (U_i, x^μ) um $p \in M$. An jedem Punkt $p \in M$ kann nun eine Orthonormalbasis definiert werden, vermöge

i) $e_a = e^\mu{}_a \partial/\partial x^\mu|_p$, $a = 0,1,2,3$, wobei $(e^\mu{}_a) \in \mathrm{GL}(4,\mathbf{R})$

ii) $g(e_a, e_b)|_p = \eta_{ab}$

iii) $g_{\mu\nu}(p) e^\mu{}_0 e^\nu{}_0 > 0$, $e^0{}_0 > 0$

$e = (e_0, \ldots, e_3)$ heißt dann auch Orthonormalrahmen am Punkt p. Die Projektion in $F(M,g)$ wird definiert durch $\pi_F(e) = p$. Die lokale Trivialisierung $\phi_i : U_i \times \mathrm{GL}(4,\mathbf{R}) \to \pi_F^{-1}(U_i)$ ist definiert durch

$$\phi_i^{-1}(e) = (p, (e^\mu{}_a))$$

Der Wechsel von einem Orthonormalrahmen zum nächsten wird durch eine Lorentztransformation vermittelt.

$$(R_\Lambda e)_b = e_a \Lambda^a{}_b, \Lambda = (\Lambda^a{}_b) \in \mathcal{L}_+^\uparrow \tag{2}$$

Umgekehrt existiert zu je zwei Orthonormalrahmen $\{e_a\}$ und $\{e'_b\}$ eine Matrix aus $\mathcal{L}_+^\uparrow$, so daß die Relation (2) erfüllt ist. R_Λ definiert eine freie, transitive Rechtswirkung von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ auf $F(M,g)$. Seien nun $(U_i, x^\mu), (V_j, y^\nu)$ zwei Koordinatensysteme um $p \in M$. Für $q \in U_i \cap V_j$ gilt dann

$$e_a = e^\mu{}_a \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_q = e'^\nu{}_a \frac{\partial}{\partial y^\nu}|_q, \text{ mit } (e^\mu{}_a), (e'^\nu{}_a) \in \mathrm{GL}(4,\mathbf{R})$$

Das Transformationsverhalten der Vierbeine bei Koordinatentransformationen lautet also

$$e^\mu{}_a = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\right)_p e'^\nu{}_a$$

Damit sind die Übergangsfunktionen $t_{ij}(p)$ gegeben durch

$$t_{ij}(p) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\right)_p$$

und $F(M,g)$ wird so zu einem $\mathcal{L}_+^\uparrow$-Hauptfaserbündel.

Eine Spin-Struktur für (M,g) ist nun ein Paar $(S(M,g), \varphi)$ bestehend aus einem $\mathrm{Spin}_0(1,3)$-Hauptfaserbündel $S(M,g)$ über M, sowie einem Bündelhomomorphismus $\varphi : S(M,g) \to F(M,g)$ für den gilt:

$$\varphi \circ R_S = R_{\Lambda(S)} \circ \varphi, \; S \in \mathrm{Spin}_0(1,3)$$

$\Lambda(S)$ erfüllt Bedingung 2)(siehe S. 3). Dabei ist R_S die Rechtswirkung von $\mathrm{Spin}_0(1,3)$ auf $S(M,g)$. $S(M,g)$ wird auch Spinrahmenbündel genannt. Spin-Strukturen sind nicht eindeutig durch die zugrundeliegende Raumzeit bestimmt. Zwei Spinstrukturen $(S_1(M,g), \varphi_1)$ und $(S_2(M,g), \varphi_2)$ heißen äquivalent, wenn es einen Isomorphismus $\tau : S_1(M,g) \to S_2(M,g)$ gibt, der die Bezugspunkte respektiert, so daß gilt $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \tau$. Die Existenz einer Spinstruktur für eine gegebene Raumzeit hängt allein von den topologischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit ab [19]. Im weiteren werden nur global hyperbolische Raumzeiten in 4 Dimensionen betrachtet, bei denen die Existenz von Spinstrukturen gesichert ist [27].

Sei nun eine global hyperbolische Raumzeit (M, g) mit einer Spinstruktur $(S(M, g), \varphi)$ gegeben. Weiter sei ρ eine Majorana-Darstellung der Clifford-Algebra $\mathcal{C}(\mathbf{R}^4, \eta)_{\mathbf{C}}$ und $\hat{\rho}$ die von ρ induzierte Selbstdarstellung von $\mathrm{Spin}_0(1,3)$. Das Dirac-Bündel ist dann das assoziierte Vektorbündel zum $\mathrm{Spin}_0(1,3)$-Hauptfaserbündel $S(M, g)$, der Darstellung $\hat{\rho}$, sowie dem Vektorraum $\mathbf{C}^4$:

$$D_\rho(M, g) := (S(M, g) \times_{\hat{\rho}} \mathbf{C}^4)/\mathrm{Spin}_0(1,3)$$

Im weiteren sei $D_\rho(M, g)$ abkürzend mit DM notiert. Ein Spinorfeld ist ein glatter Schnitt im Dirac-Bündel DM. Die Menge der glatten Spinorfelder sei mit $\mathcal{C}^\infty(DM)$ bezeichnet. Mit D^*M sei das duale Spinorbündel bezeichnet. Ein Element $v \in D^*M$ ist für ein $p \in M$ ein Element des Dualraumes der Faser über p. Die glatten Schnitte in D^*M heißen Co-Spinorfelder. Die Menge aller glatten Co-Spinorfelder sei $\mathcal{C}^\infty(D^*M)$. Für eine Untermannigfaltigkeit Σ von M sei DM_Σ das Vektorbündel $\pi_{DM}^{-1}(\Sigma)$ über Σ mit Projektion $\pi_{DM|\Sigma} := \pi_{DM}|\pi_{DM}^{-1}(\Sigma)$. Hierbei ist π_{DM} die Projektion in DM. D^*M_Σ ist analog definiert. Im weitern wird noch folgende Notation verwendet. Für $X = DM$ oder D^*M sei $\mathcal{C}_0^\infty(X)$ die Menge der glatten Schnitte in X mit kompaktem Träger. Für ein offenes Gebiet $\mathcal{O} \subset M$ sei $\mathcal{C}_0^\infty(X, \mathcal{O})$ der Raum der glatten Schnitte in X mit kompaktem Träger in $\mathcal{O}$. Für $u \in \mathcal{C}^\infty(DM)$ und $v \in \mathcal{C}^\infty(D^*M)$ bezeichnen wir die kanonische duale Paarung von v mit u am Punkt p mit:

$$v(u)|_p,\, p \in M$$

Jeder lokale Schnitt $E : U \subset M \to S(M, g)$ im Spinrahmenbündel $S(M, g)$ induziert einen Rahmen $(E_0, \ldots, E_3)$ in DM mittels: $E_A := [(E, b_A)]$, $A = 0, 1, 2, 3$. Dabei ist $[\,.\,]$ die Restklassenabbildung von $S(M, g) \times_{\hat{\rho}} \mathbf{C}^4$ nach DM und $b_0, \ldots, b_3$ eine Standardbasis in $\mathbf{C}^4$. E induziert darüber hinaus einen Orthonormalrahmen in TM, d.h. einen lokalen Schnitt $e := (e_a)_{a=0,\ldots,3} := \varphi \circ E$ in $F(M, g)$. Diese, durch lokale Schnitte induzierten Orthonormalrahmen (E_A) und (e_a), werden im folgenden induzierte mitbewegte Rahmen genannt. Die induzierten mitbewegten Rahmen transformieren sich beim Übergang zu einem anderen lokalen Schnitt $E' : U' \to S(M, g)$, der mit E über die glatten Funktionen $(S^A{}_B) = S : U \cap U' \to \mathrm{Spin}_0(1,3)$ durch $E' = R_{S^{-1}}E$ verknüpft ist, wie folgt:

$$E'_A = E_B (S^{-1})^B{}_A \quad \text{und} \quad e'_a = e_b \Lambda(S^{-1})^b{}_a$$

Für die Dualrahmen (E^B) und (e^b) die durch $E^B(E_A) = \delta_A^B$ und $e^b(e_a) = \delta_a^b$ definiert sind erhält man:

$$E'^B = S_A{}^B E^A \quad \text{und} \quad e'^b = \Lambda(S)_a{}^b e^a$$

Man kann nun beliebige gemischte Spinor-Tensorfelder erzeugen, d.h. Schnitte in den fasernweisen Tensorprodukten von DM, D^*M, TM, T^*M. Durch Einführung von globalen mitbewegten Rahmen(E_A) und (e_a) ist ein glatter Schnitt f in $(\bigotimes_p TM) \otimes (\bigotimes_q T^*M) \otimes (\bigotimes_r DM) \otimes (\bigotimes_s D^*M)$ festgelegt durch Angabe der

Familie von glatten $\mathbf{C}$-wertigen Funktionen $f^{a_1\ldots a_p}{}_{b_1\ldots b_q}{}^{A_1\ldots A_r}{}_{B_1\ldots B_s}$ auf M, so daß

$$f = (f^{a_1\ldots a_p}{}_{b_1\ldots b_q}{}^{A_1\ldots A_r}{}_{B_1\ldots B_s})e_{a_1}\otimes\ldots\otimes e_{a_p}\otimes\ldots\otimes E^{B_1}\otimes\ldots\otimes E^{B_s}$$

Von besonderem Interesse ist der Spinor-Tensor γ, definiert als glatter Schnitt in $T^*M\otimes DM\otimes D^*M$, der in allen induzierten mitbewegten Rahmen die folgenden Komponenten besitzt

$$\gamma_a{}^A{}_B = (\gamma_a)^A{}_B \tag{3}$$

wobei γ_a, $a = 0,\ldots,3$ die Dirac-Matrizen in Majorana-Darstellung sind. Die Unabhänigkeit der Komponenten von γ von dem gewählten mitbewegten Rahmen ist eine Folge der Transformationsgleichungen sowie der Clifford-Algebra-Relationen (1).

Üblicherweise benutzt man für die Kontraktion von gemischten Spinor-Tensorfeldern die Schreibweise der Summation über Dualrahmenindizes, z.B. $v(u)|_p = v_A u^A$ für $v = v_A E^A \in \mathcal{C}^\infty(D^*M)$ und $u = u^A E_A \in \mathcal{C}^\infty(DM)$. Falls k ein Vektorfeld ist, so bezeichnet $\not k$ die Kontraktion mit γ: $\not k^A{}_B := k^a\gamma_a{}^A{}_B$. Für einen Spinor u schreiben wir $\not k u$ für $\not k(u)$, d.h. $\not k u$ ist ein Spinor mit Komponenten $\not k u^A = \not k^A{}_B u^B$. Für einen Co-Spinor v ist $\not k v$ ein Co-Spinor mit Komponenten $\not k v_B = \not k^A{}_B v_A$. Nützlich ist zudem die Einführung des adjungierten Spinors u^+ eines Spinors u. Dies ist der Co-Spinor mit Komponenten $(u^+)_B := \overline{u^A}\gamma_{0AB}$, wobei $^-$ komplexe Konjugation bedeutet, und γ_{0AB} sind die Matrixelemente von γ_0.[3] Die Adjunktion antivertauscht mit der komplexen Konjugation, da

$$\overline{u_A^+} = \overline{\overline{u}^B\gamma_{0AB}} = u^B\overline{\gamma_0}_{AB} = -u^B\gamma_{0AB} = -\overline{u}_A^+$$

für Dirac-Matrizen in Majorana-Darstellung. Die Komponenten von u^+ haben das richtige Transformationsverhalten bei Wechsel des Spinrahmens E^A und deshalb ist u^+ ein vom gewählten Spinrahmen unabhäniger Spinor (siehe Dimock [7] S.136). Die Adjunktion ist eine antilineare Abbildung $(.)^+ : \mathcal{C}^\infty(DM)\to\mathcal{C}^\infty(D^*M)$. Diese Abbildung ist bijektiv und ihr inverses (ebenfalls mit $(.)^+$ bezeichnet) ist gegeben durch: $(v^+)^A = -\overline{v}_B\gamma_0{}^{BA}$, denn

$$\begin{aligned}(v^+)^+_B &= \overline{v^{+A}}\gamma_{0AB}\\ &= -\overline{\overline{v}_C\gamma_0^{CA}}\gamma_{0AB} = -v_C\overline{\gamma_0}^{CA}\gamma_{0AB} = v_C\gamma_0^{CA}\gamma_{0AB} = v_C\delta^C_B\\ &= v_B\end{aligned}$$

(Dies gilt in Majorana-Darstellung der Dirac-Matrizen); $v\in\mathcal{C}^\infty(D^*M)$.

Es ist nun möglich ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}_0^\infty(DM)$ einzuführen. Dazu sei n ein zukunftsgerichtetes zeitartiges Vektorfeld auf $(M,g), u_1, u_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(DM)$. Dann ist

$$(u_1,u_2)_n := \int_M u_1^+(\not n u_2)(p)d\mu(p) \tag{4}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}_0^\infty(DM)$ (siehe Dimock [7], Prop.1.1.). Dabei ist μ das durch g induzierte Volumenelement. Für eine Untermannigfaltigkeit $\Sigma\subset M$

[3] Man beachte die Abweichung von der sonst üblichen Notation, bei der der Dirac-Adjungierte Spinor mit $\overline{u}$ bezeichnet wird (siehe z.B. [23]).

definiert

$$(u_1, u_2)_{n,\Sigma} := \int_\Sigma u_1^+(\not{n} u_2)(p) d\mu_\Sigma(p) \tag{5}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}_0^\infty(DM_\Sigma)$. Falls n mit dem Einheitsnormalenfeld von Σ zusammenfällt sei $(u_1, u_2)_{n,\Sigma}$ mit $(u_1, u_2)_\Sigma$ notiert.

Darüber hinaus kann auf $\mathcal{C}^\infty(DM)$ eine Ladungskonjugation eingeführt werden, d.h. eine antilineare Abblidung $\Gamma : \mathcal{C}^\infty(DM) \to \mathcal{C}^\infty(DM), u^A \mapsto (\Gamma u)^A := \overline{u^A}$. Diese Definition ist unabhänig von der Wahl des Spinrahmens. Nun gilt für alle zeitartigen Vektorfelder n und Spinoren $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^\infty(DM)$

$$(\Gamma u_1, \Gamma u_2)_n = (u_2, u_1)_n \tag{6}$$

denn

$$\begin{aligned}
(\Gamma u_1)^+(\not{n}\Gamma u_2)(p) &= \overline{u_1}^+(\not{n}\overline{u_2})(p) \\
&= \not{n}^A{}_B \overline{u_2}(p)^B \overline{u_1}^+(p)_A \\
&= n^a \gamma_a{}^A{}_B \overline{u_2}(p)^B u_1(p)^C \gamma_{0CA}
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
u_2^+(\not{n} u_1)(p) &= \not{n}^A{}_B u_1(p)^B u_2^+(p)_A \\
&= n^a \gamma_a{}^A{}_B u_1(p)^B \overline{u_2}(p)^C \gamma_{0CA}
\end{aligned}$$

Γ ist eine komplexe Konjugation auf den Prähilberträumen $(\mathcal{C}_0^\infty(DM), (.,.)_n)$ sowie $(\mathcal{C}_0^\infty(DM_\Sigma), (.,.)_{n,\Sigma})$. Mit dem Spinor-Tensor γ kann nun die Levi-Civitá-Ableitung von g auf gemischte Spinor-Tensorfelder geliftet werden. Dies geschieht folgendermaßen: $\nabla : \mathcal{C}^\infty(TM) \to \mathcal{C}^\infty(T^*M \otimes TM)$ ist zunächst definiert durch: $(\nabla k)^b{}_a := \partial_a k^b + \Gamma^b{}_{ac} k^c$, $k \in \mathcal{C}^\infty(TM)$. Dabei ist $\partial_a k^b := dk^b(e_a)$, wobei dk^b das Differential der Funktion k^b ist. Man definiert nun $\nabla : \mathcal{C}^\infty(DM) \to \mathcal{C}^\infty(T^*M \otimes DM)$ durch die Festlegung der Komponenten von ∇f, $f \in \mathcal{C}^\infty(DM)$, bzgl. induzierter mitbewegter Rahmen (E_B) und (e_a), als $(\nabla f)_a{}^B := \partial_a f^B + \sigma_a{}^B{}_A f^A$, wobei die Spin-Zusammenhangskomponenten $\sigma_a{}^B{}_A$ gegeben sind durch:

$$\sigma_a{}^B{}_A := -\frac{1}{4} \Gamma_{ca}{}^b \gamma_b{}^B{}_D \gamma^{cD}{}_A \tag{7}$$

Man kann zeigen, daß dies eine kovariante Ableitung auf M definiert. Man definiert ∇ nun auf allen Spinorfeldern dadurch, daß man die Leibnitz-Regel sowie die Kommutativität mit Kontraktionen verlangt. Es gilt $\nabla\gamma = 0$ (siehe Anhang A.2).

2.3 Dirac-Gleichung und klassische Lösungen

Der Dirac-Operator ist definiert als der Differentialoperator $\not{\nabla}$ auf Spinoren oder Co-Spinoren, den man durch Anwendung von ∇ und nachfolgender Kontraktion mit γ erhält. In Komponenten bzgl. induzierter mitbewegter Rahmen bedeutet dies: $(\not{\nabla} u)^A = \gamma^{aA}{}_B \nabla_a u^B$ für Spinoren u, sowie $(\not{\nabla} v)_B = (\nabla_a v_A)\gamma^{aA}{}_B$ für Co-Spinoren v. $\nabla_a u^B$ sind die Komponenten von ∇u. Tensorindizes werden durch Kontraktion mit η^{ab} (η_{ab}) angehoben(abgesenkt). Man beachte, daß die Anwendung des Dirac-Operators mit der Adjunktion vertauscht, d.h. $(\not\nabla u)^+ = \not\nabla(u^+)$, $u \in \mathcal{C}^\infty(DM)$, denn $(\not\nabla u)^+ = \overline{\not\nabla^A}\gamma_{0AB} = \not\nabla \overline{u^A}\gamma_{0AB} = \not\nabla(u^+)$. Die Dirac-Gleichung für Spinoren bzw. Co-Spinoren lautet nun

$$(-i\not\nabla + m)u = 0,\ u \in \mathcal{C}^\infty(DM) \tag{8}$$
$$(i\not\nabla + m)v = 0,\ v \in \mathcal{C}^\infty(D^*M) \tag{9}$$

Dabei ist m eine feste reelle Zahl. Führt man den spinoriellen Wellenoperator $\Box$ mit Komponenten $(\Box u)^A = \eta^{ab}\nabla_a\nabla_b u^A$ ein, so erhält man Lichnerowicz' Identität:

$$(-i\not\nabla + m)(i\not\nabla + m)u = (\Box - \frac{1}{4}R + m^2)u,\ u \in \mathcal{C}^\infty(DM) \tag{10}$$

wobei R der Krümmungsskalar der Metrik g ist. Ein Beweis dieser Formel befindet sich im Anhang A.2. Der Operator auf der rechten Seite wird spinorieller Klein-Gordon-Operator genannt. Bei Anwesenheit von Krümmung diagonalisiert nur der Hauptteil von $\Box$, denn $(\Box u)^A = \eta^{ab}\partial_a\partial_b u^A + f^{aA}{}_B\partial_a u^B + h^A{}_B u^B$ in Komponenten bzgl. induzierter mitbewegter Rahmen (E_A) und (e_a). Dabei sind $f^{aA}{}_B$ und $h^A{}_B$ glatte Funktionen auf M. Die Dirac-Gleichung ist invariant unter Ladungskonjugation Γ, denn der kovariante Ableitungsoperator ist reell und kommutiert dementsprechend mit Γ. Die nachfolgende Kontraktion mit γ bewirkt eine Antivertauschung von Γ mit $\not\nabla$ (Dirac-Matrizen in Majorana-Darstellung wechseln ihr Vorzeichen bei komplexer Konjugation). Durch den Faktor i wird dies jedoch wieder kompensiert.

Als nächstes sollen die klassischen Lösungen der Dirac-Gleichung auf einer global hyperbolischen Raumzeit betrachtet werden. Eine Raumzeit (M, g) mit gegebenen Raum- und Zeitorientierungen sowie Spin-Struktur heißt global hyperbolisch, wenn sie eine Cauchy-Fläche besitzt. Eine Cauchy-Fläche ist eine raumartige Hyperfläche $\Sigma \subset M$ die von jeder kausalen Kurve ohne Endpunkte in M genau einmal geschnitten wird. Jede Cauchy-Fläche ist automatisch eine 3-dimensionale $\mathcal{C}^0$-Hyperfläche. Dann hat M die Struktur $\mathbf{R} \times \Sigma$, d.h. M kann in glatte ($\mathcal{C}^\infty$) Hyperflächen Σ_t geblättert werden [28, 6].

Man kann nun Distributionen über den Räumen $\mathcal{C}_0^\infty(DM)$ und $\mathcal{C}^\infty(D^*M)$ erklären, indem man eine Topologie bzgl. gewisser Sobolev-Normen auf ihnen einführt[24]. Die kanonische duale Paarung $v(u)$ für $v \in \mathcal{C}^\infty(D^*M)$ und $u \in \mathcal{C}_0^\infty(DM)$, aufgefaßt als Funktion von p, kann über M integriert werden und man definiert:

$$\langle v, u\rangle_M := \int_M v(u)(p)d\mu(p),\ u \in \mathcal{C}_0^\infty(DM),\ v \in \mathcal{C}^\infty(D^*M) \tag{11}$$

Auf diese Weise ist $\mathcal{C}^\infty(D^*M)$ eingebettet in $\mathcal{C}_0^\infty(DM)'$ und ebenso ist $\mathcal{C}_0^\infty(DM)$ ein Teilraum von $\mathcal{C}^\infty(D^*M)'$. Diese Betrachtung gilt analog auch für $\mathcal{C}_0^\infty(DM_\Sigma)$ und $\mathcal{C}^\infty(D^*M_\Sigma)$, für eine Cauchy-Fläche Σ. Dabei ist

$$\langle h, f\rangle_\Sigma := \int_\Sigma h(f)(p)d\mu_\Sigma(p),\ f \in \mathcal{C}_0^\infty(DM_\Sigma), h \in \mathcal{C}^\infty(D^*M_\Sigma) \tag{12}$$

Es gilt folgende Identität für den Dirac-Operator

$$\langle \not\nabla h, f\rangle_M = -\langle h, \not\nabla f\rangle_M,\ \forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(DM), h \in \mathcal{C}_0^\infty(D^*M) \tag{13}$$

Beweis: Für $u \in \mathcal{C}^\infty(DM), v \in \mathcal{C}^\infty(D^*M)$ gilt die Formel (siehe Dimock [7], Prop.1.2)

$$-i \int_{\partial D} v(\not{n}u)(p) d\mu_{\partial D}(p) = \int_D [v((-i\not{\nabla} + m)u)(p) - ((i\not{\nabla} + m)v)(u)(p)] \, d\mu(p) \tag{14}$$

Für $f \in \mathcal{C}_0^\infty(DM)$ und $h \in \mathcal{C}_0^\infty(D^*M)$, jeweils mit kompaktem Träger innerhalb von $D \subset M$, verschwindet die linke Seite der Gleichung und die Behauptung folgt für $m = 0$. Der Operator $\not{\nabla}$ kann damit stetig auf den Raum der Distributionen geliftet werden. Die Existenz von eindeutigen Fundamentallösungen für die Dirac-Gleichung wird nun durch das folgende Theorem sichergestellt.

Theorem 1 (Dimock, 1982). *Der Operator $(-i\not{\nabla} + m)$ auf $\mathcal{C}^\infty(DM)$ besitzt eindeutige retardierte bzw. avancierte Fundamentallösungen $S^\pm : \mathcal{C}_0^\infty(DM) \to \mathcal{C}^\infty(DM)$ mit*

$$(-i\not{\nabla} + m)S^\pm = S^\pm(-i\not{\nabla} + m) = id \text{ auf } \mathcal{C}_0^\infty(DM) \tag{15}$$

und $supp(S^\pm f) \subset J^\pm(supp(f))$.[4] *Der Operator $(i\not{\nabla} + m)$ auf $\mathcal{C}^\infty(D^*M)$ besitzt eindeutige retardierte bzw. avancierte Fundamentallösungen $S_\pm : \mathcal{C}_0^\infty(D^*M) \to \mathcal{C}^\infty(D^*M)$ mit*

$$(i\not{\nabla} + m)S_\pm = S_\pm(i\not{\nabla} + m) = id \text{ auf } \mathcal{C}_0^\infty(D^*M) \tag{16}$$

und $supp(S_\pm f) \subset J^\pm(supp(f))$.

Die Differenz S zwischen retardierter (S^+) und avancierter (S^-) Fundamentallösung heißt Dirac-Propagator für Spinoren: $S = S^+ - S^-$. $S_\sharp = S_+ - S_-$ heißt Dirac-Propagator für Co-Spinoren. Die komplex konjugierten Operatoren $\overline{S^\pm}, \overline{S_\pm}$ sind definiert durch

$$\overline{S^\pm} f := \overline{S^\pm \overline{f}}, \; f \in \mathcal{C}_0^\infty(DM) \tag{17}$$

$$\overline{S_\pm} h := \overline{S_\pm \overline{h}}, \; h \in \mathcal{C}_0^\infty(D^*M) \tag{18}$$

Die Operatoren $S^\pm, S_\pm$ sind reell, d.h. $\overline{S^\pm} = S^\pm$, $\overline{S_\pm} = S_\pm$, denn

$$\mathrm{id} = \overline{(-i\not{\nabla} + m)S^\pm} = (-i\not{\nabla} + m)\overline{S^\pm}$$
$$\mathrm{id} = \overline{(i\not{\nabla} + m)S_\pm} = (i\not{\nabla} + m)\overline{S_\pm}$$

Dies folgt aus der Eindeutigkeit der Fundamentallösungen $S^\pm$. Die Propagatoren erfüllen die Relationen:

a) $\langle S_\pm h, f\rangle_M = \langle h, S^\mp f\rangle_M$, $h \in \mathcal{C}_0^\infty(D^*M), f \in \mathcal{C}_0^\infty(DM)$

b) $S_\sharp u^+ = (Su)^+$, $u \in \mathcal{C}_0^\infty(DM)$

c) $\Gamma S^\pm = S^\pm \Gamma$

d) $\Gamma S_\pm = S_\pm \Gamma$

[4] Dabei ist für $N \subset M$ $\mathrm{J}^\pm(N)$ die Menge der Punkte in M, die mit N durch eine zukunftsgerichtete (+) bzw. vergangenheitsgerichtete (-) kausale Kurve verbunden werden können

c) und d) folgen aus der Tatsache, daß $S^{\pm}, S_{\pm}$ reell sind. Für den Beweis von a) beachte man, daß $\mathrm{supp}(S_{\pm}h) \cap \mathrm{supp}(S^{\mp}f)$ kompakt ist, da (M,g) global hyperbolisch angenommen wird. Damit gilt

$$\langle S_{\pm}h, f\rangle_M = \langle S_{\pm}h, (-i\nabla\!\!\!/ + m)S^{\mp}f\rangle_M = \langle (i\nabla\!\!\!/ + m)S_{\pm}h, S^{\mp}f\rangle_M = \langle h, S^{\mp}f\rangle_M$$

Der Adjungierte Operator S' zu S bzgl. $\langle\, .\,,.\rangle_M$ ist $-S_{\sharp}$, denn

$$\begin{aligned}\langle S_{\sharp}h, f\rangle_M &= \langle (S_+ - S_-)h, f\rangle_M = \langle h, (S^- - S^+)f\rangle_M \\ &= -\langle h, (S^+ - S^-)f\rangle_M = -\langle h, Sf\rangle_M\end{aligned}$$

Es bleibt b) zu zeigen: seien $u, f \in \mathcal{C}_0^{\infty}(DM)$

$$\begin{aligned}\langle (Su)^+, f\rangle_M &= -\langle \overline{f}^+, \overline{Su}\rangle_M = -\langle \overline{f}^+, S\overline{u}\rangle_M \\ &= \langle S_{\sharp}\overline{f}^+, \overline{u}\rangle_M = -\langle u^+, \overline{(S_{\sharp}\overline{f}^+)^+}\rangle_M \\ &= -\langle u^+, \overline{S\overline{f}}\rangle_M = -\langle u^+, Sf\rangle_M \\ &= \langle S_{\sharp}u^+, f\rangle_M\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, daß gilt

$$\begin{aligned}(S_{\sharp}\overline{f}^+)^{+A} &= -\overline{(S_{\sharp}\overline{f}^+)_B}\gamma_0^{BA} = -(S_{\sharp}\overline{\overline{f}^+})_B\gamma_0^{BA} \\ &= (S_{\sharp}f^+)_B\gamma_0^{BA} = (S_{\sharp}\overline{f^C}\gamma_{0CB})\gamma_0^{BA} \\ &= (S\overline{f^C})\gamma_{0CB}\gamma_0^{BA} = S\overline{f^C}\delta_C^A \\ &= S\overline{f^A}\end{aligned}$$

Das Cauchy-Problem für die Dirac-Gleichung ist dann wohldefiniert:

Theorem 2 (Dimock, 1982). *Sei $u_0 \in \mathcal{C}_0^{\infty}(DM_{\Sigma})$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $u \in \mathcal{C}^{\infty}(DM)$ mit*

$$(-i\nabla\!\!\!/ + m)u = 0 \quad \textit{und} \quad u|_{\Sigma} = u_0 \tag{19}$$

Zusätzlich gilt supp$(u) \subset J^+($supp$(u_0)) \cup J^-($supp$(u_0))$.

Jede Lösung $u \in \mathcal{C}^{\infty}(DM)$ der Dirac-Gleichung erfüllt automatisch die spinorielle Klein-Gordon-Gleichung. Dies wurde von Dimock zur Konstruktion der Fundamentallösungen benutzt.

2.4 Quantisierung

Wir führen nun den Prähilbertraum K ein, der der Quantisierungsprozedur unterliegt. Sei S der Raum aller $u \in \mathcal{C}^{\infty}(DM)$, die Lösungen der Dirac-Gleichung sind und zudem die Eigenschaft besitzen, daß ihre Einschränkung auf eine beliebige Cauchy-Fläche kompakten Träger hat. Für eine Cauchy-Fläche $\Sigma \subset M$ kann man dann eine Sesquilinearform auf S definieren durch:

$$(u_1, u_2)_{\mathsf{S}} := (u_1|\Sigma, u_2|\Sigma)_{\Sigma},\ u_1, u_2 \in \mathsf{S} \tag{20}$$

Es gilt das folgende Lemma

Lemma 1. $(.,.)_{\mathsf{S}}$ *ist ein Skalarprodukt auf* S *und unabhänig von der Wahl von* Σ.

Offensichtlich ist $(.,.)_{\mathsf{S}}$ ein Skalarprodukt, da schon $(.,.)_\Sigma$ diese Eigenschaft besitzt. Die Unabhänigkeit von der Cauchyfläche Σ wird bei Verch [24] gezeigt.

Die antilineare Abbildung Γ ist eine komplexe Konjugation ($\Gamma^2 = 1$) auf $(\mathsf{S},(.,.)_{\mathsf{S}})$. Mit K bezeichnen wir im folgenden den Raum $\mathcal{C}_0^\infty(DM)/\mathrm{Ker}(S)$. $[\,.\,] : \mathcal{C}^\infty(DM) \to \mathsf{K}$ sei die zugehörige Quotientenabbildung. Auf K wird eine Sesquilinearform wie folgt definiert:

$$([f_1],[f_2])_{\mathsf{K}} := -i\langle f_1^+, Sf_2\rangle_M \tag{21}$$

Die Sesquilinearform $(.,.)_{\mathsf{K}}$ ist nicht entartet, da wir modulo $\mathrm{Ker}(S)$ rechnen. Darüber hinaus gilt

Lemma 2. $(.,.)_{\mathsf{K}}$ *ist ein Skalarprodukt auf* K.

Beweis: Folgende 3 Eigenschaften sind zu zeigen

1) $([f_1],[f_2])_{\mathsf{K}} = \overline{([f_2],[f_1])_{\mathsf{K}}}$

2) $([f_1],c[f_2])_{\mathsf{K}} = c([f_1],[f_2])_{\mathsf{K}},\ c \in \mathbf{C}$

3) $([f],[f])_{\mathsf{K}} > 0, \quad ([f],[f])_{\mathsf{K}} = 0$, für $[f] = [0]$

zu 1):

$$\begin{aligned}([f_1],[f_2])_{\mathsf{K}} &= -i\langle f_1^+, Sf_2\rangle_M = i\langle S_\sharp f_1^+, f_2\rangle_M \\ &= -i\langle \overline{f_2}^+, \overline{(S_\sharp f_1^+)^+}\rangle_M = -i\langle \overline{f_2}^+, S\overline{f_1}\rangle_M \\ &= i\langle \overline{f_2^+}, \overline{Sf_1}\rangle_M = i\overline{\langle f_2^+, Sf_1\rangle_M} \\ &= \overline{-i\langle f_2^+, Sf_1\rangle_M} = \overline{([f_2],[f_1])_{\mathsf{K}}}\end{aligned}$$

zu 2):

$$([f_1],c[f_2])_{\mathsf{K}} = ([f_1],[cf_2])_{\mathsf{K}} = -i\langle f_1^+, Scf_2\rangle_M = -ic\langle f_1^+, Sf_2\rangle_M = c([f_1],[f_2])_{\mathsf{K}}$$

zu 3):

$$\begin{aligned}([f],[f])_{\mathsf{K}} &= -i\langle f^+, Sf\rangle_M = -i(i\langle S_\sharp f^+|_\Sigma, Sf|_\Sigma\rangle_\Sigma) \\ &= \langle (Sf)^+|_\Sigma, Sf|_\Sigma\rangle_\Sigma = (Sf|_\Sigma, Sf|_\Sigma)_\Sigma\end{aligned}$$

Dies ist positiv definit, da $(.,.)_\Sigma$ ein Skalarprodukt auf Σ ist[5].

Dann induziert Γ eine komplexe Konjugation auf $(\mathsf{K},(.,.)_{\mathsf{K}})$ durch $\Gamma[f] := [\Gamma f]$. Dies ist wegen Relation c) wohldefiniert, und es gilt:

$$-i\langle \Gamma f_1^+, S\Gamma f_2\rangle_M = i\langle f_2^+, Sf_1\rangle_M, \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(DM) \tag{22}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\langle \Gamma f_1^+, S\Gamma f_2\rangle_M &= \langle \overline{f_1^+}, S\overline{f_2}\rangle_M = -\langle \overline{f_1}^+, S\overline{f_2}\rangle_M \\ &= \langle S_\sharp \overline{f_1}^+, \overline{f_2}\rangle_M = -\langle f_2^+, \overline{(S_\sharp \overline{f_1}^+)^+}\rangle_M \\ &= -\langle f_2^+, Sf_1\rangle_M\end{aligned}$$

[5] Für das zweite Gleichheitszeichen beachte man Prop.2.2. von Dimock [7]

Für das letzte Gleichheitszeichen beachte man den Beweis von Relation b), (siehe Seite 10). Dann gilt für eine Cauchy-Fläche Σ mit zukunftsgerichtetem Einheitsnormalenfeld n

Satz 1 (Verch, 1996). *Die Räume* S, K *und* $\mathcal{C}_0^\infty(DM_\Sigma)$ *mit den zugehörigen Skalarprodukten* $(.,.)_\mathsf{S}$, $(.,.)_\mathsf{K}$ *sowie* $(.,.)_{n,\Sigma}$ *sind Prähilberträume und die Abbildungen*

$$\mathbf{K} : \mathsf{K} \to \mathsf{S}, \quad [f] \mapsto Sf \tag{23}$$

$$P_\Sigma : \mathsf{S} \to \mathcal{C}_0^\infty(DM_\Sigma), \quad u \mapsto u|\Sigma \tag{24}$$

sind unitär und respektieren die Wirkung von Γ *in diesen Räumen.*

Die Quantisierung des Dirac-Feldes auf einer global hyperbolischen Raumzeit (M,g) mit Majorana-Dirac-Bündel DM geht nun wie folgt. Die Vervollständigung $\overline{\mathsf{K}}$ von K zusammen mit der auf $\overline{\mathsf{K}}$ ausgedehnten antiunitären Involution Γ machen $(\overline{\mathsf{K}},(.,.)_\mathsf{K})$ zu einem komplexen Hilbertraum mit Involution Γ. Nach Araki gehört zu diesen Daten eine $\mathcal{C}^*$-Algebra $\mathcal{F}[\overline{\mathsf{K}},\Gamma]$, die von Elementen $\{B(f) : f \in \overline{\mathsf{K}}\}$[6] erzeugt wird. Für diese gelten folgende Relationen:

I) $\overline{\mathsf{K}} \ni f \mapsto B(f) \in \mathcal{F}[\overline{\mathsf{K}},\Gamma]$ ist komplex linear

II) $B(f)^* = B(\Gamma f)$, $f \in \overline{\mathsf{K}}$

III) $B(g)B(f)^* + B(f)^*B(g) = (f,g)_\mathsf{K}$, $f,g \in \overline{\mathsf{K}}$

III) ist die kanonische Antivertauschungsrelation (CAR). II) besagt, daß die Elemente von $\mathcal{F}[\overline{\mathsf{K}},\Gamma]$ selbstdual sind. $\mathcal{F}[\overline{\mathsf{K}},\Gamma]$ heißt deswegen selbstduale CAR-Algebra. Es gilt folgende Konsequenz der CAR-Relationen:

$$||B(f)|| \leq c||f||_\mathsf{K}, \; f \in \overline{\mathsf{K}} \tag{25}$$

wobei $||\,.\,||$ die $\mathcal{C}^*$-Norm in $\mathcal{F}[\overline{\mathsf{K}},\Gamma]$ bezeichnet. Diese $\mathcal{C}^*$-Algebra ist bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt, d.h. zu einem weiteren Hilbertraum $\overline{\mathsf{K}}'$ mit komplexer Konjugation Γ' sowie einer unitären Abbildung $U : \overline{\mathsf{K}} \to \overline{\mathsf{K}}'$ mit $U \circ \Gamma = \Gamma' \circ U$, existiert ein kanonischer Isomorphismus $\alpha_U : \mathcal{F}[\overline{\mathsf{K}},\Gamma] \to \mathcal{F}[\overline{\mathsf{K}}',\Gamma']$, so daß $\alpha_U(B(f)) = B_{\overline{\mathsf{K}}'}(Uf)$, $f \in \overline{\mathsf{K}}$. Dabei sind $B_{\overline{\mathsf{K}}'}(Ug)$, $g \in \overline{\mathsf{K}}$ die Erzeuger der CAR-Algebra $\mathcal{F}[\overline{\mathsf{K}}',\Gamma']$ mit den analogen Relationen I)-III). Ein Netz von Feldalgebren $\mathcal{R} \to \mathcal{F}(\mathcal{R})$ erhält man nun indem man jeder offenen relativ kompakten Teilmenge $\mathcal{R} \subset M$ die $\mathcal{C}^*$-Unteralgebra $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ von $\mathcal{F}[\overline{\mathsf{K}},\Gamma]$ zuordnet, die von Elementen $\{B(f) : f \in \mathcal{C}_0^\infty(DM,\mathcal{R})\}$ erzeugt wird. Das Netz von Observablenalgebren $\mathcal{R} \to \mathcal{A}(\mathcal{R})$ ist dann definiert als der gerade Anteil von $\mathcal{F}(\mathcal{R})$, der von Elementen $\{B(h)^*B(f) : h,f \in \mathcal{C}_0^\infty(DM,\mathcal{R})\}$ erzeugt wird. Die Algebren $\mathcal{A}(\mathcal{R}_1)$ und $\mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$ kommutieren, falls die Gebiete $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ nicht durch eine kausale Kurve miteinander verbunden werden können. Dies folgt aus der Tatsache, daß $(h,f)_\mathsf{K}$ verschwindet, falls die Träger von h und f kausal disjunkt sind.

Damit im folgenden der Kontakt dieser algebraischen Sichtweise der QFT zur gewöhnlichen Beschreibung im Rahmen der Wightman-Felder hergestellt

[6] zur Vereinfachung der Notation schreiben wir f für ein Element $[f] \in \overline{\mathsf{K}}$

werden kann, soll nun eine äquivalente Darstellung der CAR-Algebra über einem reellen Hilbertraum erläutert werden. Definiere nun zunächst Symbole $D(f)$, $f \in \overline{\mathsf{K}}$ durch

$$D(f) = 2^{-1/2}(B(f) + B(f)^*) \tag{26}$$

$$D(f)^* = D(f) \tag{27}$$

Dann folgt aus den CAR-Relationen III)

$$\{D(f), D(g)\} = \mathrm{Re}(f,g)_{\mathsf{K}} \tag{28}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\{D(f), D(g)\} &= D(f)D(g) + D(g)D(f) \\
&= \frac{1}{2}((B(f) + B(f)^*)(B(g) + B(g)^*) \\
&\quad + (B(g) + B(g)^*)(B(f) + B(f)^*)) \\
&= \frac{1}{2}(B(f)B(g) + B(f)B(g)^* + B(f)^*B(g) + B(f)^*B(g)^* \\
&\quad + B(g)B(f) + B(g)B(f)^* + B(g)^*B(f) + B(g)^*B(f)^*) \\
&= \frac{1}{2}(\{B(f), B(g)^*\} + \{B(g), B(f)^*\}) \\
&= \frac{1}{2}((g,f)_{\mathsf{K}} + (f,g)_{\mathsf{K}}) \\
&= \frac{1}{2}((f,g)_{\mathsf{K}} + \overline{(f,g)_{\mathsf{K}}}) \\
&= \mathrm{Re}(f,g)_{\mathsf{K}}
\end{aligned}$$

Sei nun H der reelle Hilbertraum der Elemente $f \in \overline{\mathsf{K}}$ für die gilt

$$\Gamma f = f \tag{29}$$

mit Skalarprodukt $(\cdot\,,\cdot)_{\mathsf{H}} := (\cdot\,,\cdot)_{\mathsf{K}}|_{\mathsf{H}\times\mathsf{H}}$. Zu $(\mathsf{H}, (\cdot\,,\cdot)_{\mathsf{H}})$ gehört dann die CAR-Algebra $\mathcal{F}[\mathsf{H}]$. Dies ist die von den Symbolen $D(f)$ erzeugte, assoziative, unitale $\mathcal{C}^*$-Algebra, für deren Elemente gilt

1) $f \mapsto D(f)$ ist $\mathbf{R}$-linear und $\mathcal{F}[\mathsf{H}]$ wird von den Symbolen $D(f)$ algebraisch erzeugt

2) $D(f)^* = D(f)$

3) $\{D(f), D(g)\} = (f,g)_{\mathsf{H}}\mathbf{1}$

3 Zustände des Dirac-Feldes

Ein Zustand auf der Feldalgebra $\mathcal{F}[\mathsf{H}]$ ist ein positives, normiertes, lineares Funktional ω, d.h. eine Abbildung $\omega : \mathcal{F}[\mathsf{H}] \to \mathbf{C}$ mit

1) $\omega(D(f)^*D(f)) \geq 0,\ f \in \mathsf{H}$ (Positivität)

2) $\omega(\mathbf{1}) = 1$, $\mathbf{1}$ ist das Einselement in $\mathcal{F}[\mathsf{H}]$ (Normierung)

3.1 Quasifreie Zustände und Fockraum

Die Menge der Zustände ist sehr groß und eine wesentliche Aufgabe der Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit ist es, Eigenschaften zu finden, die physikalische Zustände erfüllen müssen. Üblicherweise beschränkt man sich zunächst auf quasifreie Zustände, d.h. auf solche die durch ihre Zweipunktfunktion vollständig bestimmt sind. Diese Einschränkung ist zunächst nicht physikalisch motiviert, jedoch hat es sich als bequem herausgestellt nur mit quasifreien Zuständen zu rechnen. Die Klasse der quasifreien Zustände ist immer noch sehr groß, so sind z.B. gewöhnliche Vakuumzustände auf stationären Raumzeiten sowie Zustände die durch Modenzerlegung der Feldoperatoren erhalten werden darin enthalten. Darüber hinaus wurde von Junker [14] gezeigt, daß alle adiabatischen Vakuumzustände des Klein-Gordon-Feldes auf einer Robertson-Walker-Raumzeit quasifreie Hadamard-Zustände sind. Die Hadamard-Bedingung wird als Kriterium benutzt, um physikalische Zustände auszuzeichnen.

Nach Araki's Definition heißt ein Zustand quasifrei, wenn gilt: ω verschwindet auf allen ungeraden Monomen $D(f_1)\ldots D(f_{2n+1})$, $n \in \mathbf{N}_0$ und auf den geraden Monomen hat ω die folgende Darstellung:

$$\omega(D(f_1)\ldots D(f_{2n})) = (-1)^{n(n-1)} \sum \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \omega(D(f_{\sigma(j)})D(f_{\sigma(j+n)})),\ n \in \mathbf{N} \tag{30}$$

wobei die Summe über alle Permutationen σ von $\{1,\ldots,2n\}$ läuft mit der Bedingung $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(n)$ und $\sigma(j) < \sigma(j+n)$, $j = 1,\ldots,n$. $\operatorname{sgn}(\sigma)$ ist $+1(-1)$, falls σ eine gerade(ungerade) Permutation von $\{1,\ldots,2n\}$ ist.

Wir betrachten nun folgende Menge von reell-linearen Operatoren auf H:

$$Q(\mathsf{H}) := \{A \in \mathcal{B}(\mathsf{H}) : ||A|| \leq 1, A^\dagger = -A\}$$

Nach Balslev, Manuceau und Verbeure [2] besteht eine Bijektion zwischen $Q(\mathsf{H})$ und der Menge der quasifreien Zustände auf $\mathcal{F}[\mathsf{H}]$, die durch folgende Zuordnung gegeben ist:

$$\begin{aligned} A &\mapsto \omega_A \\ \omega_A(D(f)D(g)) &:= (f,g)_{\mathsf{H}} - i(f,Ag)_{\mathsf{H}},\ \forall f,g \in \mathsf{H} \end{aligned}$$

In $Q(\mathsf{H})$ sind die sog. komplexen Strukturen enthalten, d.h. die Operatoren $J \in Q(\mathsf{H})$ für die zusätzlich gilt:

$$J^2 = -1$$

Mit Hilfe dieser komplexen Strukturen kann H zu einem komplexen Hilbertraum gemacht werden, vermöge der Definitionen:

$$\begin{aligned} i\,f &:= Jf,\ f \in \mathsf{H} \\ (f,g)^J_{\mathsf{H}} &:= \omega_J(D(f)D(g)),\ \forall f,g \in \mathsf{H} \end{aligned}$$

Wir sind insbesondere an reinen quasifreien Zuständen auf $\mathcal{F}[\mathsf{H}]$ interessiert. Von Manuceau, Rocca, Testard wurde gezeigt, daß der quasifreie Zustand ω_J genau dann rein ist, wenn $J \in Q(\mathsf{H})$ ist und die Bedingung $J^2 = -1$ erfüllt. Man kann nun Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren definieren durch

$$D_J(f) := 2^{-1/2}(D(f) + iD(Jf)) \tag{31}$$

$$D_J(g)^* := 2^{-1/2}(D(g) - iD(Jg)) \tag{32}$$

Diese erfüllen die Antivertauschungsrelationen

$$\{D_J(f), D_J(g)^*\} = (f,g)_{\mathsf{H}} + i(f,Jg)_{\mathsf{H}} \tag{33}$$

Also entspricht $(f,g)_{\mathsf{H}}$ dem Realteil von $(f,g)_{\mathsf{K}}$ und $(f,Jg)_{\mathsf{H}}$ entspricht dem Imaginärteil von $(f,g)_{\mathsf{K}}$. Die komplexe Struktur J auf H ist der Wahl einer Basisprojektion P in $\overline{\mathsf{K}}$ äquivalent [3]. Dies ist eine orthogonale Projektion auf $\mathsf{H} \subset \overline{\mathsf{K}}$ mit der Eigenschaft

$$P + \Gamma P \Gamma = 1 \tag{34}$$

In der Quantenfeldtheorie nach Gårding und Wightman sind Quantenfelder operatorwertige Distributionen auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, die den sogenannten Wightman-Axiomen genügen [29]. Ein Zustand wird charakterisiert durch die Angabe einer Familie von Vakuumerwartungswerten bzgl. eines Referenzvektors $\Omega \in \mathcal{H}$. Wir wählen nun einen reinen quasifreien Zustand ω_J auf $\mathcal{F}[\mathsf{H}]$ und erhalten mittels GNS-Konstruktion eine Darstellung $(\pi_J, \mathcal{F}_-(\mathsf{H}), \Omega_J)$ der CAR-Algebra $\mathcal{F}[\mathsf{H}]$ auf dem antisymmetrischen Fockhilbertraum $\mathcal{F}_-(\mathsf{H})$. Ω_J ist der Vakuumvektor in $\mathcal{F}_-(\mathsf{H})$. Die Elemente der CAR-Algebra werden dargestellt durch beschränkte Operatoren auf dem Fockhilbertraum $\mathcal{F}_-(\mathsf{H})$ gemäß

$$\pi_J(D(f)) = 2^{-1/2}\,(a_J(f) + a_J(f)^*)\,,\ f \in \mathsf{H}$$

mit dem Vernichtungsoperator $a_J(f) = \pi_J(D_J(f))$ und dem Erzeugungsoperator $a_J(f)^* = \pi_J(D_J(f)^*)$ auf $\mathcal{F}_-(\mathsf{H})$.

3.2 Hadamard-Zustände

Es sollen nun solche Zustände betrachtet werden, deren Zweipunktfunktion die Hadamard-Singularitätenstruktur aufweisen [5]. Dies sind die sog. Hadamard-Zustände. Zunächst werden Bi-Spinoren eingeführt. Sei N eine offene Teilmenge von M. Dann ist $DN \boxtimes D^*N$ definiert als das äußere Tensorprodukt der Bündel DN und D^*N. Dies ist das Bündel über der Produktmannigfaltigkeit $N \times N$. Die Fasern am Punkt $(p,p') \in N \times N$ sind $(DN)_p \otimes (D^*N)_{p'}$. π ist die Produkt-Projektion, d.h. $\pi((p,f),(p',f')) = (p,p')$. Glatte Schnitte in $DN \boxtimes D^*N$ heißen Bi-Spinoren. Durch die Wahl von induzierten mitbewegten Rahmen (E_A) um p und $({E'}^{B'})$ um p', wird die Menge der Schnitte $(q,q') \mapsto (E \boxtimes E')_A{}^{B'}(q,q') := E_A(q) \otimes {E'}^{B'}(q')$, $A, B' = 0, \ldots, 3$ ein induzierter mitbewegter Rahmen in $DN \boxtimes D^*N$ um (p,p'). Schnitte $v \in \mathcal{C}^\infty(DN \boxtimes D^*N)$ werden ausgedrückt durch

$$v(q,q') = v^A{}_{B'}(q,q')(E \boxtimes E')_A{}^{B'}(q,q') \tag{35}$$

mit $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen $v^A{}_{B'}$.

Wir geben nun die Definition eines Hadamard-Zustandes für das Dirac-Feld auf (M,g) an. Eine genaue Definition wurde zuerst von Köhler [16] bzw. Verch [24] aufgestellt. Eine mathematisch strenge Definition der heuristischen Version von DeWitt und Brehme eines Hadamard-Zustandes für das Klein-Gordon-Feld auf einer gekrümmten Raumzeit geht auf Kay und Wald [15] zurück.

Eine offene Umgebung N einer Cauchy-Fläche Σ in (M,g) heißt kausal normale Umgebung für Σ, wenn Σ eine Cauchy-Fläche für N ist und falls für jede

Wahl von $p, q \in N$ mit $p \in \mathrm{J}^+(q)$ eine konvex normale Umgebung[7] $\mathcal{R} \subset M$ existiert, so daß $\mathrm{J}^-(p) \cap \mathrm{J}^+(q) \subset \mathcal{R}$. Von Kay und Wald wurde gezeigt, daß jede Cauchy-Fläche eine kausal normale Umgebung besitzt. Sei nun X die Menge der Punkte $(p, q) \in M \times M$, die durch eine kausale Kurve verbunden werden können und für die $\mathrm{J}^+(p) \cap \mathrm{J}^-(q)$, falls $q \in \mathrm{J}^+(p)$ oder $\mathrm{J}^-(p) \cap \mathrm{J}^+(q)$, falls $p \in \mathrm{J}^+(q)$, in einer konvex normalen Umgebung enthalten ist. Das Quadrat des geodätischen Abstandes $s(p, q)$ von p und q ist dann wohldefiniert und glatt in $X \subset M \times M$.

Sei nun N eine kausal normale Umgebung einer Cauchy-Fläche Σ. Dann heißt eine glatte Funktion χ auf $N \times N$ eine N-Regularisierungsfunktion, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt: Es existiert eine offene Umgebung Y in $N \times N$ der Menge der kausal zusammenhängenden Punkte in N, so daß $\overline{Y} \subset X$ und $\chi \equiv 1$ auf Y und $\chi \equiv 0$ außerhalb von X. χ ist dann wohldefiniert, denn Y und das Komplement von X in $N \times N$ sind disjunkte abgeschlossene Teilmengen von $N \times N$. Es kann gezeigt werden, daß eine solche N-Regularisierungsfunktion stets existiert [22].

Die Quadratwurzel der bi-Spinor-wertigen VanVleck-Morette Determinante sei mit $U^A{}_{B'}$ bezeichnet und ist definiert durch

$$U^A{}_{B'} = \Delta^{1/2}(q, q') \mathcal{J}^A{}_{B'} \tag{36}$$

wobei $\Delta^{1/2}(q, q') = g(q)^{1/2} \det(\sigma(q, q')_{;ab}) g(q')^{1/2}$ die skalare VanVleck-Morette-Determinante ist und $\sigma(q, q') = 1/2 s(q, q')$. Der Bi-Spinor des Paralleltransportes $\mathcal{J}^A{}_{B'}$ ist definiert durch

1) $\sigma^{;\mu} \mathcal{J}^A{}_{B';\mu} = 0$

2) $\mathcal{J}^A{}_{B'}(q, q) = \mathbf{1}^A{}_{B'}$

${V_m}^A{}_{B'}$, $m \in \mathbf{N}_0$ sei eine Folge von Bi-Spinoren die durch die Hadamard Rekursionsrelationen bestimmt sind [16]. $U^A{}_{B'}$ und ${V_m}^A{}_{B'}$ sind definiert auf X. Dann definiert man für alle $n \in \mathbf{N}$

$$V^{(n)A}{}_{B'}(q, q') := \sum_{m=0}^{n} {V_m}^A{}_{B'}(q, q')(s(q, q'))^m, \; (q, q') \in X \tag{37}$$

Weiter sei $T : M \to \mathbf{R}$ eine zukunftsgerichtete globale Zeitfunktion, d.h. ihr Gradientenfeld ist überall von 0 verschieden, zeitartig und zukunftsgerichtet. Schließlich sei

$$r^T_\epsilon(q, q') := -2i\epsilon(T(q) - T(q')) - \epsilon^2, \; q, q' \in M, \; \epsilon > 0 \tag{38}$$

Mit der nun folgenden Definition wird die Singularitätenstruktur einer Zweipunktfunktion fürs Dirac-Feld charakterisiert, wobei die Hadamard-Form der Singularitätenstruktur zunächst für einen hyperbolischen Operator (im Sinne von Leray) angegeben wird.

Definition 1. Sei Λ eine Sesquilinearform auf $\mathcal{C}_0^\infty(DM)$. Λ hat Hadamard-Form (für den spinoriellen Klein-Gordon-Operator), falls folgende Daten existieren:

1) eine kausal normale Umgebung N einer Cauchy-Fläche Σ

[7] $N \subset M$ heißt konvex normale Umgebung von $p \Leftrightarrow$ es existiert eine eindeutige Geodäte zwischen p und q, $\forall q \in N$ die vollständig in N liegt

2) eine N-Regularisierungsfunktion χ

3) eine glatte zukunftsgerichtete globale Zeitfunktion T auf M

4) eine Folge $H^{(n)} \in \mathcal{C}^n(DN \boxtimes D^*N)$, $n \in \mathbf{N}$, so daß für alle $n \in \mathbf{N}$ und alle $f, h \in \mathcal{C}_0^\infty(DM, N)$

$$\Lambda(f,h) = \lim_{\epsilon \to 0} \int \left(\Lambda_\epsilon^{T,n}\right)^A{}_{B'}(q,q') f_A^+(q) h^{B'}(q') d\mu(q) d\mu(q'), \text{ wobei}$$

$$(\Lambda_\epsilon^{T,n})^A{}_{B'}(q,q') := \chi(q,q') \left(G_\epsilon^{T,n}\right)^A{}_{B'}(q,q') + H^{(n)A}{}_{B'}(q,q') \text{ mit}$$

$$\left(G_\epsilon^{T,n}\right)^A{}_{B'}(q,q') := \frac{1}{4\pi^2}\Big(\frac{U^A{}_{B'}(q,q')}{s(q,q') + r_\epsilon^T(q,q')} + V^{(n)A}{}_{B'}(q,q') \ln(s(q,q') + r_\epsilon^T(q,q'))\Big)$$

für $(q,q') \in X \cap (N \times N)$; ln ist der Hauptzweig des Logarithmus

Betrachtet man die Zweipunktfunktion $\omega(D(f_1)^* D(f_2))$ als Hermitesche Form $f_1, f_2 \mapsto (f_1, Q f_2)_{\mathsf{H}}$ über H so sieht man, daß sie in beiden Argumenten eine Lösung der Dirac-Gleichung ist, d.h.

$$((-i\nabla\!\!\!/ + m) f_1, Q f_2)_{\mathsf{H}} = (f_1, Q(-i\nabla\!\!\!/ + m) f_2)_{\mathsf{H}} = 0 \tag{39}$$

Dies ist richtig, weil schon $(\,.\,,\,.\,)_{\mathsf{H}}$ diese Eigenschaft hat. Die folgende Definition erklärt nun was ein Hadamard-Zustand des Dirac-Feldes ist.

Definition 2. Ein quasifreier Zustand ω auf $\mathcal{F}[\mathsf{H}]$ heißt Hadamard-Zustand des Dirac-Feldes, wenn es eine Lösung Λ der spinoriellen Klein-Gordon-Gleichung von Hadamard-Form gibt, so daß die Zweipunktfunktion von ω folgende Gestalt besitzt:

$$\omega(D(f_1)^* D(f_2)) = \Lambda((i\nabla\!\!\!/ + m) f_1, f_2),\ f_1, f_2 \in \mathsf{H} \tag{40}$$

Λ ist eine Lösung der Dirac-Gleichung in beiden Argumenten, denn Λ löst die Dirac-Gleichung im ersten Argument wegen der Identität von Lichnerowicz und im zweiten Argument wegen Hermitizität. Der singuläre Anteil von Λ wird ausschließlich durch geometrische Größen wie Metrik und Spinzusammenhang fixiert und ist insbesondere unabhänig vom Zustand ω. Ein Zustand wird also festgelegt, indem der glatte Teil von Λ bestimmt wird.

3.3 Charakterisierung der Hadamard-Bedingung über Wellenfrontenmengen

Die bisherige Charakterisierung von Hadamard-Zuständen beruhte ausschließlich auf algebraischen Eigenschaften der zugehörigen n-Punktfunktionen. Seit der Arbeit von Radzikowski wissen wir, daß man diese Zustände auch mit Hilfe der sog. Mikrolokalen Analysis beschreiben kann. Diese Methode besteht im wesentlichen in einer Lokalisierung der Distributionen

$$f_1, \ldots, f_n \mapsto \Lambda_n^\omega(f_1, \ldots, f_n) := \langle \Omega_\omega, \Psi_\omega(f_1) \ldots \Psi_\omega(f_n) \Omega_\omega \rangle_{\mathcal{H}_\omega} \tag{41}$$

im Ortsraum um den singulären Träger und einer anschließenden Analyse der Richtungen im Fourierraum, die diese Singularitäten verursachen. Dies führt auf das Konzept der Wellenfrontenmenge einer Distribution. Der Vorteil dieser Beschreibung von Hadamard-Zuständen ist es, daß nur lokale Konzepte verwendet werden. Im folgenden soll am Beispiel der Zweipunktfunktion des Dirac-Feldes auf (M, g) diese Technik der Mikrolokalen Analysis erläutert werden. Sei dazu ω ein quasifreier Hadamard-Zustand auf $\mathcal{F}[\mathsf{H}]$ mit zugehörigem GNS-Hilbertraum $\mathcal{H}_\omega$, dichtem invariantem Unterraum D_ω, zyklischem Vektor Ω_ω sowie Feldoperatoren Ψ_ω und Ψ_ω^+. Der Zustand ω wird dann vollständig durch den Satz von n-Punktfunktionen $\{\Lambda_n^\omega\}$ beschrieben, wobei $\Lambda_n^\omega \in \bigotimes^n \mathcal{C}_0^\infty(DM)'$.

Wellenfrontenmengen wurden Anfang der 70er Jahre von Hörmander [12] entwickelt, um damit partielle Differentialgleichungen zu untersuchen. Darüber hinaus liefern Wellenfrontenmengen ein hinreichendes Kriterium für die Existenz des Produktes zweier Distributionen. Duistermaat und Hörmander [8] fanden 1972 einen Zusammenhang zwischen ihrer Mikrolokalen Analysis und der QFT. Für die QFT auf GRZ sind diese Methoden besonders deshalb von großem Nutzen, weil die Untersuchung der Singularitäten vom Ortsraum in das Co-Tangentialbündel der unterliegenden Mannigfaltigkeit übertragen werden kann. Man erhält auf diese Weise diffeomorphismeninvariante Aussagen über das singuläre Verhalten der in der QFT auftretenden Distributionen.

Wellenfrontenmengen werden jetzt zunächst allgemein für Distributionen über dem $\mathbf{R}^n$ eingeführt. Sei $u \in D'(\mathbf{R}^n)$ eine Distribution und sei $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger in $V \subset \mathbf{R}^n$. Dann definiert

$$\widehat{\phi u}(\xi) = \langle u, e^{-i(\cdot,\xi)}\phi\rangle \tag{42}$$

eine glatte Funktion in ξ. Dies ist die sog. Fourier-Laplace-Transformierte von u (siehe Hörmander [13],Thm.7.1.14). $(\cdot,\cdot)$ ist das übliche Skalarprodukt in $\mathbf{R}^n$: $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \ldots x_n\xi_n$. Für eine Distribution $u \in D'(\mathbf{R}^n)$ definiert man den singulären Träger singsupp(u) als die Menge der Punkte in $\mathbf{R}^n$, die keine offene Umgebung X besitzen, so daß $u|X \in \mathcal{C}_0^\infty(X)$ ist. Dabei bedeutet $u|X(\phi) = u(\phi)$, $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(X)$. Das Konzept der Wellenfrontenmenge liefert jetzt nicht nur Informationen über die Lokalisation der Singularitäten, sondern macht zusätzlich noch eine Aussage über die Fouriermoden, durch die diese entstehen. Die Wellenfrontenmenge einer Distribution ist wie folgt definiert:

Definition 3. Sei $u \in D'(X), X$ eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$. Die Wellenfrontenmenge WF(u) von u ist das Komplement in $X \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ der Menge der Punkte $(x_0, \xi_0) \in X \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, so daß für eine offene Umgebung U von x_0 und eine konische Umgebung Σ von ξ_0 sowie jede Testfunktion $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ eine ganze Zahl $N \geq 0$ und eine Konstante $C_{\phi,N}$ existieren mit

$$|\langle u, e^{-i(\cdot,\xi)}\phi\rangle| \leq C_{\phi,N}(1 + |\xi|)^{-N}, \forall \xi \in \Sigma \tag{43}$$

Dabei ist eine konische Umgebung Σ von ξ_0 eine Umgebung von ξ_0, so daß mit $(x, \xi) \in X \times \Sigma$ auch $(x, t\xi) \in X \times \Sigma$, $\forall t > 0$.

Bemerkungen:

1. Die Projektion der Wellenfrontenmenge WF(u) auf den ersten Faktor gibt singsupp(u)

2. WF(u) ist eine abgeschlossene Menge in $X \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, denn die Komplemente von WF(u) sind offene Mengen.

3. Für alle Testfunktionen ϕ mit kompaktem Träger gilt:

$$\mathrm{WF}(\phi u) \subset \mathrm{WF}(u)$$

4. Sei P ein Differentialoperator mit $\mathcal{C}^\infty$-Koeffizienten, dann gilt:

$$\mathrm{WF}(Pu) \subset \mathrm{WF}(u),$$

d.h. die Anwendung eines linearen Differentialoperators auf u vergrößert nicht die Wellenfrontenmenge von u

Beispiel:

1) Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ eine glatte Funktion. Dann ist $\mathrm{WF}(f) = \emptyset$

2) Sei δ die Dirac'sche Deltadistribution auf $\mathbf{R}^2$. Dann erhält man für die Wellenfrontenmenge $\mathrm{WF}(\delta(x,y)) = \{(x,k;y,k') \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} | x = y, k = -k'\}$

Für die Wellenfrontenmenge des Tensorproduktes von zwei Distributionen $u, v \in D'(\mathbf{R}^n)$ gilt die Formel (siehe Hörmander [13])

$$\begin{aligned} \mathrm{WF}(u \otimes v) \subseteq\ & \mathrm{WF}(u) \cup \mathrm{WF}(v) \\ & \cup ((\mathrm{supp}(u) \times \{0\} \times \mathrm{WF}(v)) \\ & \cup (\mathrm{WF}(u) \times (\mathrm{supp}(v) \times \{0\}))) \end{aligned} \tag{44}$$

Als nächstes betrachten wir Distributionen auf einer n-dimensionalen $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit M, die mit einer Metrik g mit Lorentz-Signatur versehen ist. Dazu geben wir zunächst die Definition von $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen auf M. Eine Funktion f auf M heißt glatt oder $\mathcal{C}^\infty$, falls für jedes Koordinatensystem (U, κ) die Funktion $(\kappa^{-1})^* f$, definiert durch

$$(\kappa^{-1})^* f(x) = f(\kappa^{-1}(x)),\ x \in \tilde{U} \subset \mathbf{R}^n$$

aus $\mathcal{C}^\infty(\tilde{U})$ ist. Eine Funktion f auf M kann man auch dadurch angeben, daß man eine Familie von Funktionen $f_\kappa \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{U}_\kappa)$, für alle κ aus einem Atlas $\{(U_\kappa, \kappa)\}$, vorgibt die das richtige Transformationsverhalten haben:

$$f_{\kappa'} = f_\kappa \circ (\kappa \circ \kappa'^{-1}) \quad \text{in} \quad \kappa'(U_\kappa \cap U_{\kappa'})$$

Die Funktion ist dann eindeutig bestimmt. Diese Sichtweise von Funktionen motiviert nun die Definition einer Distribution auf einer Mannigfaltigkeit M.

Sei $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von M und sei (U_i, κ_i) ein lokales Koordinatensystem, d.h. κ_i ist ein Homöomorphismus einer offenen Menge $U_i \subset M$ auf eine offene Teilmenge $\tilde{U}_i$ des $\mathbf{R}^n$. Falls nun zu jedem Koordinatensystem (U_i, κ_i) in M eine Distribution $u_{\kappa_i} \in D'(\tilde{U}_i)$ gegeben ist, so daß bzgl. einer Koordinatentransformation $(U_i, \kappa_i) \to (U_j, \kappa_j)$ gilt:

$$u_{\kappa_j} = (\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})^* u_{\kappa_i} \quad \text{in} \quad \kappa_j(U_i \cap U_j)$$

dann heißt das System u_{κ_i} eine Distribution u in M. Die Menge aller Distributionen in M sei mit $D'(M)$ bezeichnet. Wie im Fall von Funktionen benutzen wir die Notation $u_\kappa = u \circ \kappa^{-1}$. Die auf diese Weise definierten Distributionen sind ein Spezialfall von sog. Distributionsdichten der Ordnung α, für die folgendes Transformationsgesetz gilt:

$$u_{\kappa_j} = |\det \psi'_{ij}|^{\alpha} \psi^*_{ij} u_{\kappa_i},\ \psi_{ij} = \kappa_i \circ \kappa_j^{-1} \text{ in } \kappa_j(U_i \cap U_j)$$

Die Betrachtung von Distributionsdichten ist nützlich auf Mannigfaltigkeiten ohne Metrik. Dort existiert zunächst keine invariante Definition des Integrals über eine Funktion $f \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$. Ist, wie in unserem Fall, M jedoch mit einer Metrik g versehen so definiert $d\mu(x) = \sqrt{|g(x)|}dx^0 \otimes \ldots \otimes dx^3$ in natürlicher Weise ein invariantes Volumenelement auf M. Die Dichte $\sqrt{|g(x)|}$ dient im folgenden zur Identifikation von Distributionen mit Distributionsdichten.

Eine intrinsische Definition der Wellenfrontenmenge einer Distribution $u \in D'(M)$ kann nun wie folgt formuliert werden (siehe [4]).

Definition 4. Sei (M, g) eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit zugehörigem Cotangentialbündel T^*M. Sei $u \in D'(M)$. Dann heißt ein Punkt $(x_0, k_0) \in T^*M \setminus \{0\}$ ein regulär gerichteter Punkt von $u \in D'(M)$ genau dann, wenn gilt: Für alle $\lambda_0 \in \mathbf{R}^n$ und für jede Funktion $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ mit $d_x\phi(x_0, \lambda_0) = k_0$ existiert eine Umgebung U von x_0 in M und eine Umgebung Λ von λ_0 in $\mathbf{R}^n$, so daß für alle $\rho \in \mathcal{C}^\infty(U)$ und alle $N \geq 0$ gleichmäßig in $\lambda \in \Lambda$ gilt:

$$|\langle u, \rho \exp^{-i\tau\phi(\cdot,\lambda)}\rangle| = \mathrm{o}(\tau^{-N}) \quad \text{für} \quad \tau \to \infty \tag{45}$$

Die Wellenfrontenmenge $\mathrm{WF}(u)$ ist dann das Komplement in $T^*M \setminus \{0\}$ der Menge der regulär gerichteten Punkte von u.

Seien nun $u, v \in D'(M)$ mit jeweiligen Wellenfrontenmengen $\mathrm{WF}(u)$ bzw. $\mathrm{WF}(v)$ derart, daß $(x, 0) \notin \mathrm{WF}(u) \oplus \mathrm{WF}(v) := \{(x, \xi_1 + \xi_2) \in T^*M \setminus \{0\} | (x, \xi_1) \in \mathrm{WF}(u), (x, \xi_2) \in \mathrm{WF}(v)\}$ dann kann das punktweise Produkt von u und v auf folgende Art und Weise definiert werden. Sei $\delta : M \to M \times M,\ x \mapsto (x, x)$ die Einschränkungsabbildung auf die Diagonale in $M \times M$. Das punktweise Produkt von u und v ist dann das mit δ zurückgezogene Tensorprodukt $u \otimes v \in D'(M \times M)$, d.h.

$$(u \cdot v)(\phi) := \delta^*(u \otimes v)(\phi) := (u \otimes v)(\phi \circ \delta^{-1}),\ \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(M) \tag{46}$$

Für die Wellenfrontenmenge von $u \cdot v$ gilt nun

Theorem 3. *Seien $u, v \in D'(M)$ mit Wellenfrontenmengen $WF(u)$ bzw. $WF(v)$ und das punktweise Produkt sei wohldefiniert, d.h. $(x, 0) \notin WF(u) \oplus WF(v)$. Dann gilt*

$$WF(u \cdot v) \subseteq WF(u) \oplus WF(v) \cup WF(u) \cup WF(v) \tag{47}$$

Den Beweis findet man in [13].

Mit Hilfe der Wellenfrontenmengen sollen nun die Hadamard-Zustände des Dirac-Feldes charakterisiert werden. Dazu betrachten wir zunächst Hadamard-Zustände des Klein-Gordon-Feldes auf (M, g). Wie oben beschrieben erhält man die n-Punktfunktion des Dirac-Feldes aus denen des Klein-Gordon-Feldes durch Anwendung des adjungierten Dirac-Operators:

$$\Lambda^\omega_{n,\mathrm{Dirac}}(f_1, \ldots, f_n) = (i\not\nabla + m)\Lambda^\omega_{n,\mathrm{KG}}(f_1, \ldots, f_n),\ f_1, \ldots, f_n \in \mathsf{H} \tag{48}$$

$\Lambda^{\omega}_{n,\mathrm{KG}}$ ist eine Lösung der spinoriellen Klein-Gordon-Gleichung in allen Argumenten, also

$$(\Box - \frac{1}{4}R + m^2)\Lambda^{\omega}_{n\mathrm{KG}}(f_1, \dots, f_n) = \Lambda^{\omega}_{n,\mathrm{KG}}(f_1, \dots, (\Box - \frac{1}{4}R + m^2)f_j, \dots, f_n)$$
$$= 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \tag{49}$$

Aufgrund der Tatsache, daß die Anwendung eines linearen Differentialoperators auf eine Distribution $u \in D'(M)$ die Wellenfrontenmenge von u nicht vergrößert, ist es hinreichend die n-Punktfunktion des Klein-Gordon-Feldes zu untersuchen. Eine vollständig lokale Beschreibung der Hadamard-Zustände des Klein-Gordon-Feldes wurde 1992 von Radzikowski [22] gegeben:

Theorem 4. *Ein quasifreier Zustand des Klein-Gordon-Feldes auf einer global hyperbolischen Raumzeit (M, g) ist genau dann ein Hadamard-Zustand, wenn er eine Zweipunktfunktion $\Lambda^{\omega}_{2,KG}$ mit folgender Wellenfrontenmenge besitzt:*

$$WF(\Lambda^{\omega}_{2,KG}) = \{(x_1, \xi_1; x_2, -\xi_2) \in T^*M^2 \setminus \{0\}; (x_1, \xi_1) \sim (x_2, \xi_2), \xi_1^0 \geq 0\} \tag{50}$$

Dabei bedeutet $(x_1, \xi_1) \sim (x_2, \xi_2)$, daß x_1 und x_2 durch eine lichtartige Geodäte γ verbunden werden können, so daß ξ_1^{μ} tangential an γ in x_1 ist und ξ_2^{μ} ist ξ_1^{μ} parallel transportiert nach x_2. Auf der Diagonalen $x_1 = x_2$ bedeutet $(x_1, \xi_1) \sim (x_2, \xi_2)$, daß $\xi_1 = \xi_2$ und $(\xi_1)^2 = 0$. Zur weiteren Diskussion von Hadamard-Zuständen des Klein-Gordon-Feldes siehe [14].

Ein Hadamard-Zustand des Dirac-Feldes ist nun definiert als Zustand ω auf $\mathcal{F}[\mathsf{H}]$, dessen 2-Punktfunktion Λ^{ω}_2 die Wellenfrontenmenge (50) besitzt. Die Wellenfrontenmenge einer m-Punktfunktion findet man mit Hilfe von (44). Sei dazu $\Lambda^{\omega}_m(x_1, \dots, x_m)$ der Integralkern der m-Punktfunktion eines quasifreien Zustandes des Dirac-Feldes auf $\mathcal{F}[\mathsf{H}]$. Dann hat Λ^{ω}_m die folgende Wellenfrontenmenge

$$\mathrm{WF}(\Lambda^{\omega}_m(x_1, \dots, x_m)) \subseteq \bigcup_{\sigma} \bigoplus_{j=1}^{n} \mathrm{WF}(\Lambda_2^{\sigma(j)}), \; n = m/2 \tag{51}$$

wobei $\Lambda_2^{\sigma(j)}$ die Zweipunktfunktion in den Variablen $x_{\sigma(j)}, x_{\sigma(j+n)}$ bezeichnet, aufgefaßt als Distribution über M^m mit der Wellenfrontenmenge

$$\mathrm{WF}(\Lambda_2^{\sigma(j)}) = \{(x_1, 0; \dots; x_{\sigma(j)}, k_{\sigma(j)}; \dots; x_{\sigma(j+n)}, k_{\sigma(j+n)}; \dots; x_m, 0)|$$
$$(x_{\sigma(j)}, k_{\sigma(j)}; x_{\sigma(j+n)}, k_{\sigma(j+n)}) \in \mathrm{WF}(\Lambda_2^{\sigma(j)})\} \tag{52}$$

Das Λ^{ω}_m diese Wellenfrontenmenge besitzt ist klar, weil sich Λ^{ω}_m als Summe über Tensorprodukte von Zweipunktfunktionen schreiben läst.

4 Das Dirac-Feld auf einer Robertson-Walker Raumzeit

In diesem Abschnitt betrachten wir das Dirac-Feld auf einer Robertson-Walker Raumzeit. Zunächst wird die explizite Form der Dirac-Gleichung in chronometrischen Koordinaten (siehe Anhang A.4) angegeben. Es werden explizite Lösungen dieser Gleichung konstruiert. Dabei benutzen wir die Methode der Separation der Variablen wie bei Villalba und Percoco [26].

4.1 Christoffelsymbole

Das Abstandsquadrat ist in den Koordinaten $\tau, \chi, \theta, \varphi$ gegeben durch

$$ds^2 = \mathrm{e}^{\alpha(\tau)}[d\tau^2 - d\chi^2 - \xi^2(\chi)d\Omega^2] \tag{53}$$

Dabei ist $d\Omega^2$ gegeben durch

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{54}$$

und $\alpha(\tau)$ ist eine glatte reellwertige Funktion. Die Funktion $\xi(\chi)$ ist je nach Wahl des Parameters κ bestimmt durch

$$\xi(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & \text{falls } \kappa = +1 \\ \chi & \text{falls } \kappa = 0 \\ \sinh\chi & \text{falls } \kappa = -1 \end{cases}$$

Die Metrik ist also durch folgenden Ausdruck gegeben

$$(g_{\mu\nu}) = \mathrm{e}^{\alpha(\tau)}\mathrm{diag}(1, -1, -\xi^2(\chi), -\xi^2(\chi)\sin^2\theta) \tag{55}$$

Die Christoffelsymbole berechnen sich nach folgender Formel [27]

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left\{\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right\} \tag{56}$$

Die inverse Metrik lautet

$$(g^{\mu\nu}) = \mathrm{e}^{-\alpha(\tau)}\mathrm{diag}(1, -1, -\xi^{-2}(\chi), -\xi^{-2}(\chi)\sin^{-2}\theta) \tag{57}$$

Man berechnet nun leicht folgende Ableitungen der Metrik

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\tau} = \dot\alpha g_{\mu\nu},\ \forall\,\mu,\nu = 0,1,2,3 \\
\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = 0 \\
\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} &= \frac{\partial g_{22}}{\partial\chi} = -\mathrm{e}^\alpha\frac{\partial\xi^2(\chi)}{\partial\chi} \\
\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} &= \frac{\partial g_{33}}{\partial\chi} = -\mathrm{e}^\alpha\sin^2\theta\frac{\partial\xi^2(\chi)}{\partial\chi} \\
\frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = 0 \\
\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} &= \frac{\partial g_{33}}{\partial\theta} = -2\mathrm{e}^\alpha\xi^2(\chi)\sin\theta\cos\theta \\
\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3} &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\varphi} = 0,\ \forall\,\mu,\nu = 0,1,2,3
\end{aligned}$$

Die nichtverschwindenden Christoffelsymbole lauten bzgl. dieser Koordinatenbasis

$$\begin{array}{ll}
\Gamma^\tau{}_{\tau\tau} = 1/2\dot\alpha & \Gamma^\chi{}_{\tau\chi} = 1/2\dot\alpha \\
\Gamma^\tau{}_{\chi\chi} = 1/2\dot\alpha & \Gamma^\chi{}_{\chi\tau} = 1/2\dot\alpha \\
\Gamma^\tau{}_{\theta\theta} = 1/2\dot\alpha\xi^2 & \Gamma^\chi{}_{\theta\theta} = -\xi\xi' \\
\Gamma^\tau{}_{\varphi\varphi} = 1/2\dot\alpha\xi^2\sin^2\theta & \Gamma^\chi{}_{\varphi\varphi} = -\sin^2\theta\xi\xi'
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma^{\theta}{}_{\tau\theta} = 1/2\dot{\alpha} & \Gamma^{\varphi}{}_{\tau\varphi} = 1/2\dot{\alpha} \\
\Gamma^{\theta}{}_{\chi\theta} = \xi^{-1}\xi' & \Gamma^{\varphi}{}_{\chi\varphi} = \xi^{-1}\xi' \\
\Gamma^{\theta}{}_{\theta\tau} = 1/2\dot{\alpha} & \Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi} = \cot\theta \\
\Gamma^{\theta}{}_{\theta\chi} = \xi^{-1}\xi' & \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\tau} = 1/2\dot{\alpha} \\
\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta & \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\chi} = \xi^{-1}\xi' \\
 & \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta} = \cot\theta
\end{array}
$$

4.2 Spinzusammenhang

Die Berechnung des Spinzusammenhanges wird in einer Nichtkoordinatenbasis durchgeführt, so daß zunächst die Christoffelsymbole in dieser neuen Basis angegeben werden müssen. Der Zusammenhang zwischen beiden Basen kommt in der folgenden Formel zum Ausdruck[8]

$$
\Gamma^{b}{}_{ac} = e^{b}_{\nu} e^{\mu}_{a} \left(\partial_\mu e^{\nu}_{c} + e^{\lambda}_{c}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda}\right) \tag{58}
$$

Dabei sind die Vierbeine $(e^{b}_{\mu}) \in \mathrm{GL}(4, \mathbf{R})$, definiert durch

$$
e^{a}_{\mu} e^{b}_{\nu} \eta_{ab} = g_{\mu\nu} \tag{59}
$$

Es wird nun folgende Wahl der Vierbeine getroffen:

$$
e^{a}_{\mu} = \mathrm{e}^{\alpha/2}(\delta^{a0}\delta_{\mu 0} + \delta^{a1}\delta_{\mu 1} + \xi(\chi)\delta^{a2}\delta_{\mu 2} + \xi(\chi)\sin\theta\delta^{a3}\delta_{\mu 3}) \tag{60}
$$

$$
e^{\nu}_{b} = \mathrm{e}^{-\alpha/2}(\delta^{\nu 0}\delta_{b0} + \delta^{\nu 1}\delta_{b1} + \xi^{-1}(\chi)\delta^{\nu 2}\delta_{b2} + \xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta^{\nu 3}\delta_{b3}) \tag{61}
$$

Zur Berechnung der Christoffelsymbole in Vierbeinbasis werden nun zuerst die Ableitungen der Vierbeine nach den Koordinaten $\tau, \chi, \theta, \varphi$ benötigt.

$$
\begin{aligned}
\partial_0 e^{\nu}_{c} &= -\frac{1}{2}\dot{\alpha} e^{\nu}_{c} \\
\partial_1 e^{\nu}_{c} &= \mathrm{e}^{-\alpha/2}(\partial_1 \xi^{-1}(\chi)\delta^{\nu 2}\delta_{c2} + \partial_1 \xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta^{\nu 3}\delta_{c3}) \\
&= -\mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-2}(\chi)\xi'(\chi)(\delta^{\nu 2}\delta_{c2} + \sin^{-1}\theta\delta^{\nu 3}\delta_{c3}) \\
\partial_2 e^{\nu}_{c} &= \mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-1}(\chi)\partial_2 \sin^{-1}\theta\delta^{\nu 3}\delta_{c3} \\
&= -\mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-1}\sin^{-2}\theta\cos\theta\delta^{\nu 3}\delta_{c3} \\
\partial_3 e^{\nu}_{c} &= 0
\end{aligned}
$$

Es wird nun der Term $e^{\mu}_{a}\partial_\mu e^{\nu}_{c}$ berechnet:

$$
\begin{aligned}
e^{\mu}_{a}\partial_\mu e^{\nu}_{c} = {}& \mathrm{e}^{-\alpha/2}\delta_{a0}\Big(-\frac{1}{2}\dot{\alpha}e^{\nu}_{c}\Big) + \mathrm{e}^{-\alpha/2}\delta_{a1}\Big[-\mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-2}(\chi)\xi'(\chi)\Big(\delta^{\nu 2}\delta_{c2} + \sin^{-1}\theta\delta^{\nu 3}\delta_{c3}\Big)\Big] \\
& + \mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-1}(\chi)\delta_{a2}\Big(-\mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-1}(\chi)\sin^{-2}\theta\cos\theta\delta^{\nu 3}\delta_{c3}\Big) \\
= {}& -\mathrm{e}^{-\alpha/2}\Big\{\frac{1}{2}\delta_{a0}\dot{\alpha}e^{\nu}_{c} + \delta_{a1}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-2}(\chi)\xi'(\chi)\Big(\delta^{\nu 2}\delta_{c2} + \sin^{-1}\theta\delta^{\nu 3}\delta_{c3}\Big) \\
& + \delta_{a2}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-2}(\chi)\sin^{-2}\theta\cos\theta\delta^{\nu 3}\delta_{c3}\Big\}
\end{aligned}
$$

[8]griechische Buchstaben $\mu, \nu, \rho, \sigma, \ldots$ als Indizes beziehen sich auf eine Koordinatenbasis, wohingegen lateinische Buchstaben $a, b, c, d, \ldots$ Indizes bzgl. einer Vierbeinbasis bezeichnen.

Es folgt die Berechnung von $e^b_\nu(e^\mu_a\partial_\mu e^\nu_c)$:

$$\begin{aligned}
e^b_\nu e^\mu_a\partial_\mu e^\nu_c = {} & \mathrm{e}^{\alpha/2}\delta^{b0}\left(-\mathrm{e}^{-\alpha/2}\frac{1}{2}\delta_{a0}\dot\alpha\mathrm{e}^{-\alpha/2}\delta_{c0}\right) + \mathrm{e}^{\alpha/2}\delta^{b1}\left(-\mathrm{e}^{-\alpha/2}\frac{1}{2}\delta_{a0}\dot\alpha\mathrm{e}^{-\alpha/2}\delta_{c1}\right) \\
& + \mathrm{e}^{\alpha/2}\xi(\chi)\delta^{b2}\left[-\mathrm{e}^{-\alpha/2}\left\{\frac{1}{2}\delta_{a0}\dot\alpha\mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-1}(\chi)\delta_{c2} + \delta_{a1}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-2}(\chi)\xi'(\chi)\delta_{c2}\right\}\right] \\
& + \mathrm{e}^{\alpha/2}\xi(\chi)\sin\theta\delta^{b3}\left[-\mathrm{e}^{-\alpha/2}\left\{\frac{1}{2}\delta_{a0}\dot\alpha\mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{c3}\right.\right. \\
& \left.\left. + \delta_{a1}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-2}(\chi)\xi'(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{c3} + \delta_{a2}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-2}(\chi)\sin^{-2}\theta\cos\theta\delta_{c3}\right\}\right] \\
= {} & -\mathrm{e}^{-\alpha/2}\left\{\frac{1}{2}\dot\alpha\delta^{b0}\delta_{a0}\delta_{c0} + \frac{1}{2}\dot\alpha\delta^{b1}\delta_{a0}\delta_{c1} + \frac{1}{2}\dot\alpha\delta^{b2}\delta_{a0}\delta_{c2} + \xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\delta^{b2}\delta_{a1}\delta_{c2}\right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\dot\alpha\delta^{b3}\delta_{a0}\delta_{c3} + \xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\delta^{b3}\delta_{a1}\delta_{c3} + \xi^{-1}(\chi)\cot\theta\delta^{b3}\delta_{a2}\delta_{c3}\right\}
\end{aligned}$$

Nun wird der Term $e^\lambda_c\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}$ berechnet:

$$\begin{aligned}
e^\lambda_c\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} &= \mathrm{e}^{-\alpha/2}\delta_{c0}\Gamma^\nu{}_{\mu0} + \mathrm{e}^{-\alpha/2}\delta_{c1}\Gamma^\nu{}_{\mu1} + \mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-1}(\chi)\delta_{c2}\Gamma^\nu{}_{\mu2} + \mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{c3}\Gamma^\nu{}_{\mu3} \\
&= \mathrm{e}^{-\alpha/2}\left\{\delta_{c0}\Gamma^\nu{}_{\mu0} + \delta_{c1}\Gamma^\nu{}_{\mu1} + \xi^{-1}(\chi)\delta_{c2}\Gamma^\nu{}_{\mu2} + \xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{c3}\Gamma^\nu{}_{\mu3}\right\}
\end{aligned}$$

Es folgt der Term $e^\mu_a(e^\lambda_c\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda})$:

$$\begin{aligned}
e^\mu_a e^\lambda_c\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} = {} & \mathrm{e}^{-\alpha}\delta_{a0}\left\{\delta_{c0}\Gamma^\nu{}_{00} + \delta_{c1}\Gamma^\nu{}_{01} + \xi^{-1}(\chi)\delta_{c2}\Gamma^\nu{}_{02} + \xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{c3}\Gamma^\nu{}_{03}\right\} \\
& + \mathrm{e}^{-\alpha}\delta_{a1}\left\{\delta_{c0}\Gamma^\nu{}_{10} + \delta_{c1}\Gamma^\nu{}_{11} + \xi^{-1}(\chi)\delta_{c2}\Gamma^\nu{}_{12} + \xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{c3}\Gamma^\nu{}_{13}\right\} \\
& + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-1}(\chi)\delta_{a2}\left\{\delta_{c0}\Gamma^\nu{}_{20} + \delta_{c1}\Gamma^\nu{}_{21} + \xi^{-1}(\chi)\delta_{c2}\Gamma^\nu{}_{22} + \xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{c3}\Gamma^\nu{}_{23}\right\} \\
& + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{a3}\left\{\delta_{c0}\Gamma^\nu{}_{30} + \delta_{c1}\Gamma^\nu{}_{31} + \xi^{-1}(\chi)\delta_{c2}\Gamma^\nu{}_{32} + \xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{c3}\Gamma^\nu{}_{33}\right\}
\end{aligned}$$

Schließlich ist noch der Term $e^b_\nu(e^\mu_a e^\lambda_c\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda})$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
e^b_\nu e^\mu_a e^\lambda_c\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} = {} & \mathrm{e}^{\alpha/2}\delta^{b0}\left\{\mathrm{e}^{-\alpha}\delta_{a0}\delta_{c0}\Gamma^0{}_{00} + \mathrm{e}^{-\alpha}\delta_{a1}\delta_{c1}\Gamma^0{}_{11}\right. \\
& \left. + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-2}(\chi)\delta_{a2}\delta_{c2}\Gamma^0{}_{22} + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-2}(\chi)\sin^{-2}\theta\delta_{a3}\delta_{c3}\Gamma^0{}_{33}\right\} \\
& + \mathrm{e}^{\alpha/2}\delta^{b1}\left\{\mathrm{e}^{-\alpha}\delta_{a0}\delta_{c1}\Gamma^1{}_{01} + \mathrm{e}^{-\alpha}\delta_{a1}\delta_{c0}\Gamma^1{}_{10}\right. \\
& \left. + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-2}(\chi)\delta_{a2}\delta_{c2}\Gamma^1{}_{22} + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-2}(\chi)\sin^{-2}\theta\delta_{a3}\delta_{c3}\Gamma^1{}_{33}\right\} \\
& + \mathrm{e}^{\alpha/2}\xi(\chi)\delta^{b2}\left\{\mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-1}(\chi)\delta_{a0}\delta_{c2}\Gamma^2{}_{02} + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-1}(\chi)\delta_{a1}\delta_{c2}\Gamma^2{}_{12}\right. \\
& + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-1}(\chi)\delta_{a2}\delta_{c0}\Gamma^2{}_{20} + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-1}(\chi)\delta_{a2}\delta_{c1}\Gamma^2{}_{21} \\
& \left. + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-2}(\chi)\sin^{-2}\theta\delta_{a3}\delta_{c3}\Gamma^2{}_{33}\right\} \\
& + \mathrm{e}^{\alpha/2}\xi(\chi)\sin\theta\delta^{b3}\left\{\mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{a0}\delta_{c3}\Gamma^3{}_{03} + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{a1}\delta_{c3}\Gamma^3{}_{13}\right. \\
& + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-2}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{a2}\delta_{c3}\Gamma^3{}_{23} + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{a3}\delta_{c0}\Gamma^3{}_{30} \\
& \left. + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{a3}\delta_{c1}\Gamma^3{}_{31} + \mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-2}(\chi)\sin^{-1}\theta\delta_{a3}\delta_{c2}\Gamma^3{}_{32}\right\}
\end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen der Christoffelsymbole erhält man folgenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
e^b_\nu e^\mu_a e^\lambda_c \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} = {} & \mathrm{e}^{-\alpha/2}\delta^{b0}\Big\{\delta_{a0}\delta_{c0}\frac{1}{2}\dot\alpha + \delta_{a1}\delta_{c1}\frac{1}{2}\dot\alpha \\
& + \delta_{a2}\delta_{c2}\xi^{-2}(\chi)\frac{1}{2}\dot\alpha\xi^2(\chi) + \delta_{a3}\delta_{c3}\xi^{-2}(\chi)\sin^{-2}\theta\frac{1}{2}\dot\alpha\xi^2(\chi)\sin^2\theta\Big\} \\
& + \mathrm{e}^{-\alpha/2}\delta^{b1}\Big\{\delta_{a0}\delta_{c1}\frac{1}{2}\dot\alpha + \delta_{a1}\delta_{c0}\frac{1}{2}\dot\alpha \\
& + \delta_{a2}\delta_{c2}\xi^{-2}(\chi)(-\xi(\chi)\xi'(\chi)) + \delta_{a3}\delta_{c3}\xi^{-2}(\chi)\sin^{-2}\theta(-\sin^2\theta\xi(\chi)\xi'(\chi))\Big\} \\
& + \mathrm{e}^{-\alpha/2}\delta^{b2}\Big\{\delta_{a0}\delta_{c2}\frac{1}{2}\dot\alpha + \delta_{a1}\delta_{c2}\xi^{-2}(\chi)\xi(\chi)\xi'(\chi) \\
& + \delta_{a2}\delta_{c0}\frac{1}{2}\dot\alpha + \delta_{a2}\delta_{c1}\xi^{-2}(\chi)\xi(\chi)\xi'(\chi) + \delta_{a3}\delta_{c3}\xi^{-1}(\chi)\sin^{-2}\theta(-\sin\theta\cos\theta)\Big\} \\
& + \mathrm{e}^{-\alpha/2}\delta^{b3}\Big\{\delta_{a0}\delta_{c3}\frac{1}{2}\dot\alpha + \delta_{a1}\delta_{c3}\xi^{-2}(\chi)\xi(\chi)\xi'(\chi) + \delta_{a2}\delta_{c3}\xi^{-1}(\chi)\cot\theta \\
& + \delta_{a3}\delta_{c0}\frac{1}{2}\dot\alpha + \delta_{a3}\delta_{c1}\xi^{-2}(\chi)\xi(\chi)\xi'(\chi) + \delta_{a3}\delta_{c2}\xi^{-1}(\chi)\cot\theta\Big\}
\end{aligned}
$$

Dies kann noch zu folgendem Ausdruck vereinfacht werden

$$
\begin{aligned}
e^b_\nu e^\mu_a e^\lambda_c \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} = {} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\dot\alpha\delta^{b0}\Big\{\delta_{a0}\delta_{c0} + \delta_{a1}\delta_{c1} + \delta_{a2}\delta_{c2} + \delta_{a3}\delta_{c3}\Big\} \\
& + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\delta^{b1}\Big\{\delta_{a0}\delta_{c1}\dot\alpha + \delta_{a1}\delta_{c0}\dot\alpha \\
& - 2\delta_{a2}\delta_{c2}\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) - 2\delta_{a3}\delta_{c3}\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\Big\} \\
& + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\delta^{b2}\Big\{\delta_{a0}\delta_{c2}\dot\alpha + 2\delta_{a1}\delta_{c2}\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) + \delta_{a2}\delta_{c0}\dot\alpha \\
& + 2\delta_{a2}\delta_{c1}\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) - 2\delta_{a3}\delta_{c3}\xi^{-1}(\chi)\cot\theta\Big\} \\
& + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\delta^{b3}\Big\{\delta_{a0}\delta_{c3}\dot\alpha + 2\delta_{a1}\delta_{c3}\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) + 2\delta_{a2}\delta_{c3}\xi^{-1}(\chi)\cot\theta \\
& + \delta_{a3}\delta_{c0}\dot\alpha + 2\delta_{a3}\delta_{c1}\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) + 2\delta_{a3}\delta_{c2}\xi^{-1}(\chi)\cot\theta\Big\}
\end{aligned}
$$

Für die Christoffelsymbole in Vierbeinbasis findet man nun

$$
\begin{aligned}
\Gamma^b{}_{ac} = {} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\Big\{\dot\alpha\delta^{b0}\Big[\delta_{a1}\delta_{c1} + \delta_{a2}\delta_{c2} + \delta_{a3}\delta_{c3}\Big] \\
& + \delta^{b1}\Big[\delta_{a1}\delta_{c0}\dot\alpha - 2\delta_{a2}\delta_{c2}\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) - 2\delta_{a3}\delta_{c3}\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\Big] \\
& + \delta^{b2}\Big[\delta_{a2}\delta_{c0}\dot\alpha + 2\delta_{a2}\delta_{c1}\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) - 2\delta_{a3}\delta_{c3}\xi^{-1}(\chi)\cot\theta\Big] \\
& + \delta^{b3}\Big[\delta_{a3}\delta_{c0}\dot\alpha + 2\delta_{a3}\delta_{c1}\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) + 2\delta_{a3}\delta_{c2}\xi^{-1}(\chi)\cot\theta\Big]\Big\}
\end{aligned} \tag{62}
$$

Die Spinzusammenhangskomponenten sind bzgl. mitbewegter Rahmen definiert durch (siehe Abschnitt 1.2):

$$
\sigma_a{}^B{}_A := -\frac{1}{4}\Gamma_{ca}{}^b\gamma_b{}^B{}_D\gamma^{cD}{}_A \tag{63}
$$

Dabei sind γ_a die Komponenten des Spinor-Tensors γ bzgl. mitbewegter Rahmen. Mit dem obigen Ausdruck für die Christoffelsymbole in Vierbeinbasis ergibt sich nun folgender Ausdruck für die Spinzusammenhangskomponenten

$$\begin{aligned}\sigma_a = &-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\Big\{\dot{\alpha}\Big[\delta_{a1}\gamma_0\gamma^1 + \delta_{a2}\gamma_0\gamma^2 + \delta_{a3}\gamma_0\gamma^3\Big] \\ &+ \delta_{a1}\gamma_1\gamma^0\dot{\alpha} - 2\delta_{a2}\gamma_1\gamma^2\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) - 2\delta_{a3}\gamma_1\gamma^3\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) \\ &+ \delta_{a2}\gamma_2\gamma^0\dot{\alpha} + 2\delta_{a2}\gamma_2\gamma^1\xi^{-1}\xi'(\chi) - 2\delta_{a3}\gamma_2\gamma^3\xi^{-1}(\chi)\cot\theta \\ &+ \delta_{a3}\gamma_3\gamma^0\dot{\alpha} + 2\delta_{a3}\gamma_3\gamma^1\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) + 2\delta_{a3}\gamma_3\gamma^2\xi^{-1}(\chi)\cot\theta\Big\}\end{aligned} \tag{64}$$

Für die jeweilige Wahl des Parameters κ erhält man daraus folgendes Ergebnis für die Spinzusammenhangskomponenten: 1)$\kappa = +1$

$$\begin{aligned}\sigma_a = &-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\Big\{\dot{\alpha}\Big[\delta_{a1}\gamma_0\gamma^1 + \delta_{a2}\gamma_0\gamma^2 + \delta_{a3}\gamma_0\gamma^3\Big] \\ &- 2\delta_{a2}\gamma_1\gamma^2\cot\chi - 2\delta_{a3}\gamma_1\gamma^3\cot\chi - 2\delta_{a3}\gamma_2\gamma^3\sin^{-1}\chi\cot\theta\Big\}\end{aligned} \tag{65}$$

2)$\kappa = 0$

$$\begin{aligned}\sigma_a = &-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\Big\{\dot{\alpha}\Big[\delta_{a1}\gamma_0\gamma^1 + \delta_{a2}\gamma_0\gamma^2 + \delta_{a3}\gamma_0\gamma^3\Big] \\ &- 2\delta_{a2}\gamma_1\gamma^2\chi^{-1} - 2\delta_{a3}\gamma_1\gamma^3\chi^{-1} - 2\delta_{a3}\gamma_2\gamma^3\chi^{-1}\cot\theta\Big\}\end{aligned} \tag{66}$$

3)$\kappa = -1$

$$\begin{aligned}\sigma_a = &-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\Big\{\dot{\alpha}\Big[\delta_{a1}\gamma_0\gamma^1 + \delta_{a2}\gamma_0\gamma^2 + \delta_{a3}\gamma_0\gamma^3\Big] \\ &- 2\delta_{a2}\gamma_1\gamma^2\coth\chi - 2\delta_{a3}\gamma_1\gamma^3\coth\chi - 2\delta_{a3}\gamma_2\gamma^3\sinh^{-1}\chi\cot\theta\Big\}\end{aligned} \tag{67}$$

Dabei wurden die Antivertauschungsrelationen der Dirac-Matrizen benutzt.

4.3 Dirac-Gleichung

Die Dirac-Gleichung auf einer Robertson-Walker Raumzeit lautet

$$(-i\gamma^a\nabla_a + m)\Psi(x) = 0 \tag{68}$$

Dabei ist die kovariante Ableitung auf dem Spinorbündel DM definiert durch

$$\nabla_a = \partial_a + \sigma_a \tag{69}$$

Es wird nun zuerst der Term $\gamma^a\sigma_a$ berechnet.

$$\begin{aligned}\gamma^a\sigma_a = &-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\Big\{\dot{\alpha}\Big[\gamma^1\gamma_0\gamma^1 + \gamma^2\gamma_0\gamma^2 + \gamma^3\gamma_0\gamma^3 + \gamma^1\gamma_1\gamma^0 + \gamma^2\gamma_2\gamma^0 + \gamma^3\gamma_3\gamma^0\Big] \\ &- 2\gamma^2\gamma_1\gamma^2\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) - 2\gamma^3\gamma_1\gamma^3\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) + 2\gamma^2\gamma_2\gamma^1\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) \\ &- 2\gamma^3\gamma_2\gamma^3\xi^{-1}(\chi)\cot\theta + 2\gamma^3\gamma_3\gamma^1\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) + 2\gamma^3\gamma_3\gamma^2\xi^{-1}(\chi)\cot\theta\Big\} \\ = &-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\Big\{3\dot{\alpha}\gamma^0 + 4\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\gamma^1 + 2\xi^{-1}(\chi)\cot\theta\gamma^2\Big\}\end{aligned}$$

Der Ableitungsoperator nimmt folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}\gamma^a \partial_a &= \gamma^a e_a^\mu \partial_\mu \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha/2}\Big[\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 + \gamma^2\xi^{-1}(\chi)\partial_2 + \gamma^3\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\partial_3\Big]\end{aligned}$$

Insgesamt lautet der Dirac-Operator nun wie folgt:

$$\begin{aligned}(-i\gamma^a\nabla_a + m) = &-i\mathrm{e}^{-\alpha/2}\Big[\gamma^0\Big(\partial_0 - \frac{3}{4}\dot{\alpha}\Big) + \gamma^1\Big(\partial_1 - \xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\Big) \\ &+ \gamma^2\xi^{-1}(\chi)\Big(\partial_2 - \frac{1}{2}\cot\theta\Big) + \gamma^3\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\partial_3\Big] + m\end{aligned} \tag{70}$$

Wir definieren nun einen neuen Spinor Φ durch

$$\Phi(x) = \xi^{-1}(\chi)\sin^{-1/2}\theta\mathrm{e}^{-3\alpha/4}\Psi(x) \tag{71}$$

Dann lautet die Dirac-Gleichung

$$\Big\{-i\mathrm{e}^{-\alpha/2}\Big[\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 + \gamma^2\xi^{-1}(\chi)\partial_2 + \gamma^3\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\partial_3\Big] + m\Big\}\Phi(x) = 0 \tag{72}$$

Dies ist sofort ersichtlich, wenn man folgendes beachtet:

$$\begin{aligned}\partial_0\Phi &= \xi^{-1}(\chi)\sin^{-1/2}\theta\mathrm{e}^{-3\alpha/4}\Big(-\frac{3}{4}\dot{\alpha} + \partial_0\Big)\Psi \\ \partial_1\Phi &= \mathrm{e}^{-3\alpha/4}\sin^{-1/2}\theta\xi^{-1}(\chi)\Big(-\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) + \partial_1\Big)\Psi \\ \partial_2\Phi &= \mathrm{e}^{-3\alpha/4}\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1/2}\theta\Big(-\frac{1}{2}\sin^{-1}\theta\cos\theta + \partial_2\Big)\Psi \\ \partial_3\Phi &= \xi^{-1}(\chi)\sin^{-1/2}\theta\mathrm{e}^{-3\alpha/4}\partial_3\Psi\end{aligned}$$

Setzt man dies in (72) ein so erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{gathered}-i\mathrm{e}^{-\alpha/2}\Big[\gamma^0\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1/2}\theta\mathrm{e}^{-3\alpha/4}\Big(-\frac{3}{4}\dot{\alpha} + \partial_0\Big) + \\ \gamma^1\mathrm{e}^{-3\alpha/4}\sin^{-1/2}\theta\xi^{-1}(\chi)\Big(-\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) + \partial_1\Big) + \\ \gamma^2\mathrm{e}^{-3\alpha/4}\xi^{-2}(\chi)\sin^{-1/2}\theta\Big(-\frac{1}{2}\sin^{-1}\theta\cos\theta + \partial_2\Big) + \\ \gamma^3\xi^{-2}(\chi)\sin^{-3/2}\theta\mathrm{e}^{-3\alpha/4}\partial_3\Big]\Psi + m\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1/2}\theta\mathrm{e}^{-3\alpha/4}\Psi = 0\end{gathered}$$

Nach Multiplikation dieser Gleichung mit $\xi(\chi)\sin^{1/2}\theta\mathrm{e}^{3\alpha/4}$ ergibt sich der Dirac-Operator (70).

4.4 Separation der Variablen

Im folgenden wird eine spezielle Lösung der Dirac-Gleichung (Gl.72) mittels Separation der Variablen konstruiert. Diese Lösungsmethode wird vollständig im Ortsraum durchgeführt. Die allgemeine Lösung ist dann eine Überlagerung der Fouriermoden dieser speziellen Lösung. Die Vorgehensweise ist ähnlich wie bei [26]. Der Dirac-Operator in der obigen Form wird zunächst in zwei kommutierende Differentialoperatoren $D^1(\theta,\varphi)$ und $D^2(\tau,\chi)$ zerlegt. Danach wird jeder dieser Operatoren separat behandelt. Wir benutzen nun folgende explizite Darstellung der Dirac-Matrizen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,3$$

Dabei sind σ^j die Pauli-Spinmatrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen erfüllen die folgende Relation

$$\sigma^j\sigma^k = i\epsilon^{jkl}\sigma^l + \delta^{jk} \tag{73}$$

Der Dirac-Operator (Gl.72) läßt sich nun in zwei Differentialoperatoren $D^1(\theta,\varphi)$ und $D^2(\tau,\chi)$ zerlegen:

$$D^1(\theta,\varphi) = -i\left[\gamma^2\partial_2 + \gamma^3\sin^{-1}\theta\partial_3\right]\gamma^1\gamma^0 \tag{74}$$

$$D^2(\tau,\chi) = -i\xi(\chi)\left[\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 + im\mathrm{e}^{\alpha/2}\right]\gamma^1\gamma^0 \tag{75}$$

Man beachte, daß der Operator $D^1(\theta,\varphi)$ unabhängig von der Wahl von κ ist. Die Dirac-Gleichung lautet dann

$$\left[D^1(\theta,\varphi) + D^2(\tau,\chi)\right]\tilde{\Phi}(x) = 0 \tag{76}$$

Dabei wurde $\tilde{\Phi} = \gamma^1\gamma^0\Phi$ gesetzt. Wir haben das folgende Lemma:

Lemma 3. *Die Operatoren D^1 und D^2 auf $\mathcal{C}_0^\infty(DM)$ kommutieren miteinander, d.h. es gilt:*

$$[D^1(\theta,\varphi), D^2(\tau,\chi)] = 0$$

Beweis: Wir berechnen das Produkt D^1D^2:

$$\begin{aligned} D^1D^2 &= -\left[\gamma^2\gamma^1\gamma^0\partial_2 + \gamma^3\gamma^1\gamma^0\sin^{-1}\theta\partial_3\right]\xi(\chi)\left[\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 + im\mathrm{e}^{\alpha/2}\right]\gamma^1\gamma^0 \\ &= -\gamma^1\gamma^0\left[\gamma^2\partial_2 + \gamma^3\sin^{-1}\theta\partial_3\right]\xi(\chi)\left[\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 + im\mathrm{e}^{\alpha/2}\right]\gamma^1\gamma^0 \\ &= \gamma^1\gamma^0\xi(\chi)\left[\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 - im\mathrm{e}^{\alpha/2}\right]\left[\gamma^2\partial_2 + \gamma^3\sin^{-1}\theta\partial_3\right]\gamma^1\gamma^0 \\ &= \gamma^1\xi(\chi)\left[\gamma^0\partial_0 - \gamma^1\partial_1 - im\mathrm{e}^{\alpha/2}\right]\gamma^0\left[\gamma^2\partial_2 + \gamma^3\sin^{-1}\theta\partial_3\right]\gamma^1\gamma^0 \\ &= -\xi(\chi)\left[\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 + im\mathrm{e}^{\alpha/2}\right]\gamma^1\gamma^0\left[\gamma^2\partial_2 + \gamma^3\sin^{-1}\theta\partial_3\right]\gamma^1\gamma^0 \\ &= D^2D^1 \end{aligned}$$

Aufgrund des Lemmas sollte es nun möglich sein, einen gemeinsamen Satz von Eigenspinoren dieser beiden Operatoren zu finden. Wir machen deshalb den folgenden Ansatz zur Lösung von Gl.(76):

$$D^1(\theta,\varphi)\tilde{\Phi}(x) = \lambda\tilde{\Phi}(x) = -D^2(\tau,\chi)\tilde{\Phi}(x),\ \lambda \in \mathbf{C} \tag{77}$$

Es soll nun zuerst der winkelabhängige Anteil D^1 betrachtet werden.

$$D^1(\theta,\varphi)\tilde{\Phi} = \lambda\tilde{\Phi} \Leftrightarrow -i\Big\{\gamma^2\partial_2 + \gamma^3\sin^{-1}\theta\partial_3\Big\}\gamma^1\gamma^0\tilde{\Phi} - \lambda\tilde{\Phi} = 0 \tag{78}$$

Sei nun U die folgende unitäre Matrix:

$$U \equiv \frac{1}{2}\left(\gamma^2\gamma^1 + \gamma^3\gamma^2 + \gamma^1\gamma^3 + \mathbf{1}_4\right) \tag{79}$$

Dann gilt:

$$U\gamma^0U^{-1} = \gamma^0,\ U\gamma^1U^{-1} = \gamma^3,\ U\gamma^2U^{-1} = \gamma^1,\ U\gamma^3U^{-1} = \gamma^2$$

Die Anwendung von U auf Gl.(78) liefert:

$$\begin{aligned} -i\Big\{U\gamma^2\partial_2 + U\gamma^3\sin^{-1}\theta\partial_3\Big\}U^{-1}U\gamma^1U^{-1}U\gamma^0U^{-1}U\tilde{\Phi} - \lambda U\tilde{\Phi} = \\ -i\Big\{\gamma^1\partial_2 + \gamma^2\sin^{-1}\theta\partial_3\Big\}\gamma^3\gamma^0\Xi - \lambda\Xi = 0 \end{aligned} \tag{80}$$

Dabei ist

$$U\tilde{\Phi} = \Xi \tag{81}$$

In der obigen Darstellung der Dirac-Matrizen ergibt sich

$$\gamma^1\gamma^3\gamma^0 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \gamma^2\gamma^3\gamma^0 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix}$$

Mit $\Xi = \binom{\Xi_1}{\Xi_2}$ lautet die Gl.(80) dann

$$\left\{\begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}\partial_2 + \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix}\sin^{-1}\theta\partial_3\right\}\begin{pmatrix} \Xi_1 \\ \Xi_2 \end{pmatrix} - i\lambda\begin{pmatrix} \Xi_1 \\ \Xi_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{82}$$

Ausgeschrieben bedeutet dies

$$\begin{aligned} \Big[i\sigma^2\partial_2 - i\sigma^1\sin^{-1}\theta\partial_3\Big]\Xi_1 - i\lambda\Xi_1 = 0 \\ \Big[-i\sigma^2\partial_2 + i\sigma^1\sin^{-1}\theta\partial_3\Big]\Xi_2 - i\lambda\Xi_2 = 0 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Pauli-Matrizen ergibt sich

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\partial_2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\sin^{-1}\theta\partial_3 - \lambda\right]\Xi_1 = 0 \\ \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\partial_2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\sin^{-1}\theta\partial_3 + \lambda\right]\Xi_2 = 0 \end{aligned}$$

Die Variable φ tritt nur als Ableitungsoperator in diesen Gleichungen auf. Das rechtfertigt den folgenden Ansatz für den Spinor Ξ:

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} \chi_1(\theta) \\ \chi_2(\theta) \end{pmatrix}W(\varphi), \quad \Xi_2 = \begin{pmatrix} \chi_3(\theta) \\ \chi_4(\theta) \end{pmatrix}W(\varphi)$$

Das führt auf das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -iW\partial_2\chi_2 - \sin^{-1}\theta\chi_2\partial_3 W - \lambda\chi_1 W &= 0 \\ iW\partial_2\chi_1 - \sin^{-1}\theta\chi_1\partial_3 W - \lambda\chi_2 W &= 0 \\ -iW\partial_2\chi_4 - \sin^{-1}\theta\chi_4\partial_3 W + \lambda\chi_3 W &= 0 \\ iW\partial_2\chi_3 - \sin^{-1}\theta\chi_3\partial_3 W + \lambda\chi_4 W &= 0 \end{aligned} \tag{83}$$

Daraus folgt sofort

$$\chi_1 = \chi_3 \quad \chi_2 = -\chi_4$$

Es bleibt das folgende System von Differentialgleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned} -iW\partial_2\chi_2 - \sin^{-1}\theta\chi_2\partial_3 W - \lambda\chi_1 W &= 0 \\ iW\partial_2\chi_1 - \sin^{-1}\theta\chi_1\partial_3 W - \lambda\chi_2 W &= 0 \end{aligned} \tag{84}$$

Dies ist gleichwertig zu

$$\begin{aligned} -i\chi_2^{-1}\partial_\theta\chi_2 - \sin^{-1}\theta W^{-1}\partial_\varphi W - \lambda\frac{\chi_1}{\chi_2} &= 0 \\ i\chi_1^{-1}\partial_\theta\chi_1 - \sin^{-1}\theta W^{-1}\partial_\varphi W - \lambda\frac{\chi_2}{\chi_1} &= 0 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem kann nun auf eine Form gebracht werden, bei der die eine Seite nur von θ und die andere Seite nur von φ abhängt. Also muß es eine Konstante n geben, so daß gilt:

$$\begin{aligned} -\sin\theta\chi_2^{-1}\partial_\theta\chi_2 + i\lambda\sin\theta\frac{\chi_1}{\chi_2} &= n = -iW^{-1}\partial_\varphi W \\ \sin\theta\chi_1^{-1}\partial_\theta\chi_1 + i\lambda\sin\theta\frac{\chi_2}{\chi_1} &= n = -iW^{-1}\partial_\varphi W \end{aligned}$$

Daraus folgt die Lösung für W:

$$W_n(\varphi) = \exp(in\varphi) \tag{85}$$

Von dem Spinor Ψ wird verlangt, daß er bei einer Rotation um 2π in Richtung φ in sein negatives übergeht, also

$$\Psi(\tau,\chi,\theta,\varphi_0) = -\Psi(\tau,\chi,\theta,\varphi_0 + 2\pi)$$

Daraus folgt, daß n die Werte $n = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$ annimmt. Es bleibt noch folgendes System von Gleichungen für die θ-abhängigen Funktionen χ_1 und χ_2 zu lösen:

$$\Big(\partial_\theta + \frac{n}{\sin\theta}\Big)\chi_2 - \tilde{\lambda}\chi_1 = 0 \tag{86}$$

$$\Big(\partial_\theta - \frac{n}{\sin\theta}\Big)\chi_1 + \tilde{\lambda}\chi_2 = 0 \tag{87}$$

Dabei wurde $\tilde{\lambda} := i\lambda$ gesetzt. Als Ansatz für χ_1 und χ_2 wählen wir nun

$$\chi_{1n}(\theta) = \sin^n\theta\cos(\theta/2)g(\theta) \tag{88}$$

$$\chi_{2n}(\theta) = \sin^n\theta\sin(\theta/2)f(\theta) \tag{89}$$

Dabei sind f und g zunächst noch unbestimmte skalare Funktionen von θ. Die Ableitung von χ_{1n} nach θ ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{d\chi_{1n}}{d\theta} &= \Big(\frac{d}{d\theta}\sin^n\theta\Big)\cos(\theta/2)g(\theta)+\sin^n\theta\Big(\frac{d}{d\theta}\cos(\theta/2)\Big)g(\theta)+\sin^n\theta\cos(\theta/2)g'(\theta)\\ &= \sin^{n-1}\theta\Big[g(\theta)\Big(n\cos\theta\cos(\theta/2)-\frac{1}{2}\sin\theta\sin(\theta/2)\Big)+\sin\theta\cos(\theta/2)g'(\theta)\Big]\end{aligned}$$

Setzt man dies in Gl.(87) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}&\sin^{n-1}\theta\Big[g(\theta)\Big(n\cos\theta\cos(\theta/2)-\frac{1}{2}\sin\theta\sin(\theta/2)-n\cos(\theta/2)\Big)+\\ &\qquad\sin\theta\cos(\theta/2)g'(\theta)\Big]+\tilde{\lambda}\sin^n\theta\sin(\theta/2)f(\theta)=0\end{aligned}$$

Dies kann man zu folgender Gleichung umformen:

$$\begin{aligned}&\cos(\theta/2)\Big[ng(\theta)\Big(\cos\theta-1\Big)-\sin^2\theta\dot{g}(\theta)\Big]+\\ &\qquad\sin(\theta/2)\Big[\sin\theta\Big(\tilde{\lambda}f(\theta)-\frac{1}{2}g(\theta)\Big)\Big]=0\end{aligned} \tag{90}$$

Dabei wurde folgendes verwendet

$$g'(\theta)=\frac{dg}{d\cos\theta}\frac{d\cos\theta}{d\theta}\equiv-\dot{g}(\theta)\sin\theta \tag{91}$$

Gl.(90) wird nun noch etwas umgeformt:

$$\cot(\theta/2)\Big[ng(\theta)\frac{(\cos\theta-1)}{\sin\theta}-\sin\theta\dot{g}(\theta)\Big]+\tilde{\lambda}f(\theta)-\frac{1}{2}g(\theta)=0$$

Mit der Identität

$$\cot(\theta/2)=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \tag{92}$$

ergibt sich

$$-ng(\theta)-(1+\cos\theta)\dot{g}(\theta)+\tilde{\lambda}f(\theta)-\frac{1}{2}g(\theta)=0 \tag{93}$$

Wir setzen nun $\cos\theta =: x$ und erhalten folgende Gleichung

$$(1+x)\frac{dG}{dx}+\left(\frac{1}{2}+n\right)G=\tilde{\lambda}F \tag{94}$$

Dabei sind die Funktionen F, G definiert durch

$$F(x) := f(\theta) \tag{95}$$
$$G(x) := g(\theta) \tag{96}$$

Mit Gl.(86) verfahren wir genauso:

$$\begin{aligned}\frac{d\chi_{2n}}{d\theta} &= \Big(\frac{d}{d\theta}\sin^n\theta\Big)\sin(\theta/2)f(\theta)+\sin^n\theta\Big(\frac{d}{d\theta}\sin(\theta/2)\Big)f(\theta)+\sin^n\theta\sin(\theta/2)f'(\theta)\\ &= \sin^{n-1}\theta\Big[f(\theta)\Big(n\cos\theta\sin(\theta/2)+\frac{1}{2}\sin\theta\cos(\theta/2)\Big)+\sin\theta\sin(\theta/2)f'(\theta)\Big]\end{aligned}$$

Dies setzen wir wieder in Gl.(86) ein und erhalten

$$\sin^{n-1}\theta\Big[f(\theta)\Big(n\cos\theta\sin(\theta/2)+\frac{1}{2}\sin\theta\cos(\theta/2)+n\sin(\theta/2)\Big)+ \\ \sin\theta\sin(\theta/2)f'(\theta)\Big]-\tilde{\lambda}\sin^n\theta\cos(\theta/2)g(\theta)=0$$

Mit Benutzung von $f'(\theta)=-\dot{f}(\theta)\sin\theta$ ergibt sich analog wie oben

$$\begin{aligned}\sin(\theta/2)\Big[nf(\theta)\Big(\cos\theta+1\Big)-\sin^2\theta\dot{f}(\theta)\Big]+ \\ \cos(\theta/2)\Big[\sin\theta\Big(\frac{1}{2}f(\theta)-\tilde{\lambda}g(\theta)\Big)\Big]=0\end{aligned} \tag{97}$$

Mit der Identität (92) erhält man folgende Gleichung

$$nf(\theta)-(1-\cos\theta)\dot{f}(\theta)+\frac{1}{2}f(\theta)-\tilde{\lambda}g(\theta)=0 \tag{98}$$

Mit der Abkürzung $x=\cos\theta$ erhält man folgende Differentialgleichung

$$(x-1)\frac{dF}{dx}+\left(\frac{1}{2}+n\right)F=\tilde{\lambda}G \tag{99}$$

Es sollen nun die beiden gekoppelten Differentialgleichungen (94),(99) für die Funktionen F und G gelöst werden. Dazu setzen wir zunächst Gl.(94) in (99) ein und erhalten

$$\begin{aligned}(x-1)\tilde{\lambda}^{-1}\frac{d}{dx}\Big[(1+x)\dot{G}+\Big(\frac{1}{2}+n\Big)G\Big]+ \\ \Big(\frac{1}{2}+n\Big)\tilde{\lambda}^{-1}\Big[(1+x)\dot{G}+\Big(\frac{1}{2}+n\Big)G\Big]-\tilde{\lambda}G= \\ (x-1)\tilde{\lambda}^{-1}\Big[\dot{G}+(1+x)\ddot{G}+\Big(\frac{1}{2}+n\Big)\dot{G}\Big]+ \\ \Big(\frac{1}{2}+n\Big)\tilde{\lambda}^{-1}\Big[(1+x)\dot{G}+\Big(\frac{1}{2}+n\Big)G\Big]-\tilde{\lambda}G=0\end{aligned}$$

Dies kann man weiter vereinfachen zu

$$\ddot{G}(1-x^2)+\dot{G}[1-2x-2nx]+G[\tilde{\lambda}^2-(1/2+n)^2]=0$$

Diese Gleichung ist von dem Typ

$$(1-x^2)\ddot{G}+(\beta_2-\beta_1-(\beta_1+\beta_2+2)x)\dot{G}+l(l+\beta_1+\beta_2+1)G=0 \tag{100}$$

Dazu werden die folgenden Definitionen verwendet

$$\begin{aligned}\beta_1 &:= |n|-\frac{1}{2} \\ \beta_2 &:= |n|+\frac{1}{2} \\ l &:= |\tilde{\lambda}|-|n|-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Die Gl.(100) wird nun von den sog. Jacobi-Polynomen $P_l^{(\beta_1,\beta_2)}(x)$ der Ordnung l gelöst, siehe z.B. bei Abramowitz/Stegun [1] (Gl.22.6.1). Die explizite Form dieser Polynome lautet[9]:

$$\begin{aligned} P_l^{(\beta_1,\beta_2)}(x) &= 2^{-l}\sum_{m=0}^{l} c_m(\beta_1,\beta_2)g_m(x), \quad \text{wobei} \\ c_m(\beta_1,\beta_2) &= \binom{l+\beta_1}{m}\binom{l+\beta_2}{l-m} \\ g_m(x) &= (x-1)^{l-m}(x+1)^m \end{aligned}$$

Die Parameter β_1, β_2 unterliegen der folgenden Einschränkung

$$\beta_1 > -1, \quad \beta_2 > -1$$

Also lautet die Lösung für G:

$$G_{nl}(x) = NP_l^{(\beta_1,\beta_2)}(x) \tag{101}$$

Dabei ist N eine Normierungskonstante. Die Separationskonstante $|\tilde{\lambda}|$, die mit der Ordnung der Jacobi-Polynome l sowie dem Parameter n über $l = |\tilde{\lambda}| - |n| - \frac{1}{2}$ zusammenhängt muß ganzzahlig sein, da l als Ordnung eines Polynoms ganzzahlig ist und n die Werte $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \dots$ annimmt. Die Funktion F erhält man dann durch Einsetzen von G_{nl} in Gl. (94). Das Ergebnis ist

$$F_{nl}(x) = NP_l^{(\beta_2,\beta_1)}(x)$$

Die Eigenfunktionen des winkelabhängigen Operators D^1 lauten also

$$\Xi_1(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} C_{nl}^1(\theta,\varphi) \\ C_{nl}^2(\theta,\varphi) \end{pmatrix}, \quad \Xi_2(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} C_{nl}^1(\theta,\varphi) \\ -C_{nl}^2(\theta,\varphi) \end{pmatrix} \tag{102}$$

Die skalaren Funktionen C_{nl}^1, C_{nl}^2 sind dabei definiert durch:

$$\begin{aligned} C_{nl}^1(\theta,\varphi) &= \sin^n\theta\cos(\theta/2)G_{nl}(\cos\theta)W_n(\varphi) \\ C_{nl}^2(\theta,\varphi) &= \sin^n\theta\sin(\theta/2)F_{nl}(\cos\theta)W_n(\varphi) \end{aligned}$$

Die Jacobi-Polynome kann man mit den Kugelflächenfunktionen in Verbindung bringen [26]. Diese bilden ein vollständiges, orthogonales Funktionensystem auf $L^2(S^1)$, den quadratintegrablen Funktionen auf dem Einheitskreis.

Wir betrachten nun den Differentialoperator $D^2(\tau,\chi)$. Gl.(77) lautet

$$\begin{aligned} D^2(\tau,\chi)\tilde{\Phi} + \lambda\tilde{\Phi} &= \\ \left[\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 + ime^{\alpha/2}\right]\gamma^1\gamma^0\tilde{\Phi} + \tilde{\lambda}/\xi\tilde{\Phi} &= 0 \end{aligned}$$

Die Anwendung des Operators U (Gl.(79)) auf diese Gleichung liefert dann

$$\left[-\gamma^3\partial_0 - \gamma^0\partial_1 + \gamma^3\gamma^0 ime^{\alpha/2} + \tilde{\lambda}/\xi\right]\Xi = 0 \tag{103}$$

[9] zu den Jacobi-Polynomen siehe auch Anhang A.6

Dabei wurde $\Xi = U\tilde{\Phi}$ gesetzt. Nach dem Einsetzen der Dirac-Matrizen erhält man mit $\Xi = \binom{\Xi_1}{\Xi_2}$ folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\sigma^3\partial_0\Xi_2 - \partial_1\Xi_1 - \sigma^3 ime^{\alpha/2}\Xi_2 + \tilde{\lambda}/\xi\Xi_1 &= 0 \\ \sigma^3\partial_0\Xi_1 + \partial_1\Xi_2 - \sigma^3 ime^{\alpha/2}\Xi_1 + \tilde{\lambda}/\xi\Xi_2 &= 0 \end{aligned} \tag{104}$$

Wir machen nun den folgenden Ansatz für den Spinor Ξ:

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} a_1(\tau)b_1(\chi)C^1_{nl}(\theta,\varphi) \\ a_2(\tau)b_2(\chi)C^2_{nl}(\theta,\varphi) \end{pmatrix} \tag{105}$$

$$\Xi_2 = \begin{pmatrix} a_3(\tau)b_3(\chi)C^1_{nl}(\theta,\varphi) \\ -a_4(\tau)b_4(\chi)C^2_{nl}(\theta,\varphi) \end{pmatrix} \tag{106}$$

Das Gleichungssystem (104) geht dann über in:

$$\begin{aligned} -b_3C^1_{nl}\partial_0 a_3 - a_1C^1_{nl}\partial_1 b_1 - ime^{\alpha/2}a_3b_3C^1_{nl} + \tilde{\lambda}/\xi a_1b_1C^1_{nl} &= 0 \\ -b_4C^2_{nl}\partial_0 a_4 - a_2C^2_{nl}\partial_1 b_2 - ime^{\alpha/2}a_4b_4C^2_{nl} + \tilde{\lambda}/\xi a_2b_2C^2_{nl} &= 0 \\ b_1C^1_{nl}\partial_0 a_1 + a_3C^1_{nl}\partial_1 b_3 - ime^{\alpha/2}a_1b_1C^1_{nl} + \tilde{\lambda}/\xi a_3b_3C^1_{nl} &= 0 \\ -b_2C^2_{nl}\partial_0 a_2 - a_4C^2_{nl}\partial_1 b_4 + ime^{\alpha/2}a_2b_2C^2_{nl} - \tilde{\lambda}/\xi a_4b_4C^2_{nl} &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2, \qquad & b_1 &= b_2 \\ a_3 &= a_4, \qquad & b_3 &= b_4 \end{aligned}$$

Dann bleibt noch folgendes System von Differentialgleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned} b_1\partial_0 a_1 + a_3\partial_1 b_3 - ime^{\alpha/2}a_1b_1 + \tilde{\lambda}/\xi a_3b_3 &= 0 \\ -b_3\partial_0 a_3 - a_1\partial_1 b_1 - ime^{\alpha/2}a_3b_3 + \tilde{\lambda}/\xi a_1b_1 &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen kann man umformen zu

$$\begin{aligned} a_3^{-1}\partial_0 a_1 + b_1^{-1}\partial_1 b_3 - ime^{\alpha/2}a_1a_3^{-1} + \tilde{\lambda}/\xi b_3b_1^{-1} &= 0 \\ -a_1^{-1}\partial_0 a_3 - b_3^{-1}\partial_1 b_1 - ime^{\alpha/2}a_3a_1^{-1} + \tilde{\lambda}/\xi b_1b_3^{-1} &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben in jeder der Gleichungen jeweils zwei Terme die nur von τ bzw. nur von χ abhängen. Also muss es zwei Konstanten $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ geben, so daß das System in zwei Paare von gekoppelten Differentialgleichungen zerfällt. Für die Variable τ erhalten wir:

$$\left(\frac{d}{d\tau} - ime^{\alpha/2}\right)a_1(\tau) = z_1a_3(\tau) \tag{107}$$

$$\left(\frac{d}{d\tau} + ime^{\alpha/2}\right)a_3(\tau) = z_2a_1(\tau) \tag{108}$$

Für die Variable χ erhalten wir

$$\left(\frac{d}{d\chi} + \tilde{\lambda}\xi^{-1}(\chi)\right)b_3(\chi) = -z_1b_1(\chi) \tag{109}$$

$$\left(\frac{d}{d\chi} - \tilde{\lambda}\xi^{-1}(\chi)\right)b_1(\chi) = -z_2b_3(\chi) \tag{110}$$

Die Gleichungen für die Funktionen b_1 und b_3 können für die drei verschiedenen Werte von κ durch Hypergeometrische Funktionen gelöst werden. Setzen wir nun Gleichung (110) in (109) ein, so erhält man die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion b_1.

$$\left(\frac{d}{d\chi} + \tilde{\lambda}\xi^{-1}(\chi)\right)\frac{1}{z_2}\left(\tilde{\lambda}\xi^{-1}(\chi) - \frac{d}{d\chi}\right)b_1(\chi) + z_1 b_1(\chi) = 0 \tag{111}$$

Diese Gleichung kann man umformen zu

$$b_1'' - b_1\left(\tilde{\lambda}^2\xi^{-2} - \tilde{\lambda}\xi^{-2}\xi' + z\right) = 0 \tag{112}$$

Die gestrichenen Größen bedeuten Ableitungen nach χ und $z := z_1 z_2$. Wir betrachten nun den Fall $\kappa = 0$. Die Gleichung (112) lautet dann

$$b_1'' - b_1\left(\tilde{\lambda}^2\chi^{-2} - \tilde{\lambda}\chi^{-2} + z\right) = 0 \tag{113}$$

Für $z \in \mathbf{R}_- := \{z \in \mathbf{R}\,|\, z < 0\}$[10] setzen wir nun $-z = w > 0$ und definieren eine neue Variable y durch $y := \pm\sqrt{w}\chi$. Die Ableitung von b_1 nach y wird mit $\dot{b}_1$ bezeichnet. Dann geht Gl.(113) über in

$$y^2\ddot{B}_1(y) + B_1(y)[\tilde{\lambda}(1-\tilde{\lambda}) + y^2] = 0 \tag{114}$$

Dabei ist die Funktion B_1 definiert durch: $B_1(y) := b_1(\chi)$. Wird nun noch $\tilde{\lambda} = -k = -k(n,l)$ gesetzt, so erhalten wir die Riccati-Besselsche Differentialgleichung (siehe Abramowitz/Stegun [1] Gl.10.3.1).

$$y^2\ddot{B}_1(y) + B_1(y)[y^2 - k(k+1)] = 0 \tag{115}$$

Deren Lösungen lassen sich durch sphärische Besselfunktionen 1. und 2. Art, $\mathsf{j}_k(y)$ und $\mathsf{y}_k(y)$ ausdrücken. Die allgemeine Lösung ist dann eine Linearkombination dieser beiden Lösungen:

$$B_{1w}(y) = B_k\left(d_1 y \mathsf{j}_k(y) + d_2 y \mathsf{y}_k(y)\right), \quad k \in \mathbf{Z},\ \text{d.h. } \lambda \in i\mathbf{Z},\ d_1, d_2 \in \mathbf{R} \tag{116}$$

Dabei ist B_k eine Normierungskonstante und die $\mathsf{j}_k(y), \mathsf{y}_k(y)$ hängen wie folgt mit den gewöhnlichen Besselfunktionen rationaler Ordnung 1. und 2. Art $\mathsf{J}_{k+1/2}(y)$ und $\mathsf{Y}_{k+1/2}(y)$ zusammen:

$$\mathsf{j}_k(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}y^{-1/2}\mathsf{J}_{k+1/2}(y), \quad \mathsf{y}_k(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}y^{-1/2}\mathsf{Y}_{k+1/2}(y) \tag{117}$$

Die Lösung für b_{3w} erhält man, wenn man die Funktion b_{1w} in Gl. (110) einsetzt. Das Ergebnis ist, ausgedrückt durch die Funktion $B_{3w}(y) := b_{3w}(\chi)$,

$$B_{3w}(y) = B_k\sqrt{\frac{\pi}{2}}y^{-1/2}\left(d_1\mathsf{J}_{k-1/2}(y) + d_2\mathsf{Y}_{k-1/2}(y)\right) \tag{118}$$

Wir fassen das Ergebnis der obigen Rechnung in dem folgenden Satz zusammen:

[10] Aus physikalischen Gründen werden hier nur negative Werte von z betrachtet, denn es ergibt sich aus der Behandlung der Differentialgleichungen für die Funktionen a_1 und a_3, daß $-z$ das Betragsquadrat des Wellenvektors $\vec{k}$ ist und deshalb positiv sein muß.

Satz 2. *Die Lösung der Dirac-Gleichung (Gl.(76)) hat die folgende explizite Spinorstruktur:*

$$\Psi_{wnl}(x) = -e^{3\alpha/4}\chi \sin^{1/2}\theta M \Xi_{wnl}(x) \tag{119}$$

Dabei ist M die unitäre Matrix $M = \gamma^0\gamma^1 U^{-1}$ und $\Xi_{wnl}(x)$ ist durch die Gl.(105) und (106) gegeben. Wir suchen nun quadratintegrable Lösungen der Dirac-Gleichung $\Psi \in L^2(DM_\Sigma)$, der Vervollständigung von $\mathcal{C}_0^\infty(DM_\Sigma)$, d.h solche für die gilt:

$$\int_\Sigma d\mu_\Sigma |\Psi_{wnl}(\chi,\theta,\varphi)|^2 < \infty \tag{120}$$

Dabei ist $d\mu_\Sigma = \chi^2 \sin\theta d\chi d\theta d\varphi$ das Volumenelement der Cauchy-Fläche Σ. Unter Berücksichtigung der Unitarität von M muß also das folgende Integral berechnet werden:

$$\int_0^\infty d\chi\chi^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \chi^2 \sin\theta \sum_{A=0}^{3} |\Xi_{wnl}(\chi,\theta,\varphi)^A|^2 \tag{121}$$

Für den winkelabhängigen Anteil ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \sum_{A=0}^{3} |\Xi_{nl}(\theta,\varphi)^A|^2 &= 2\int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\big(|C_{nl}^1(\theta,\varphi)|^2 + |C_{nl}^2(\theta,\varphi)|^2\big) \\ &= 4\pi \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \big(\sin^{2n}\theta \cos^2(\theta/2) G_{nl}(\cos\theta)^2 \\ &\quad + \sin^{2n}\theta \sin^2(\theta/2) F_{nl}(\cos\theta)^2\big)\end{aligned}$$

Setzt man nun $\cos\theta = x$, so erhält man folgendes Integral

$$2\pi \int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} \big((1+x)G_{nl}(x)^2 + (1-x)F_{nl}(x)^2\big) \tag{122}$$

Man verlangt, daß dieses Integral positiv ist und erhält eine Bedingung an die Parameter n und l.[11] Die Integration über die Radialkoordinate χ führt auf Integrale der Form

$$\int_0^\infty d\chi\chi^5 (\mathrm{J}_{k+1/2}(\pm\sqrt{w}\chi))^2 \tag{123}$$

Wir können nun die allgemeine Lösung der Dirac-Gleichung folgendermaßen darstellen:

Satz 3. *Für eine flache Robertson-Walker Raumzeit hat der räumliche Anteil der Lösung der Dirac-Gleichung in den Koordinaten $\tau, \chi, \theta, \varphi$ die folgende Gestalt:*

$$\Psi(\vec{x}) = \int_0^\infty dw \sum_l \sum_{n\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}\setminus\{0\}} \Big(a_{nl}(w)\Psi_{wnl}(\vec{x}) + a_{nl}^*(w)\overline{\Psi_{wnl}(\vec{x})}\Big) \tag{124}$$

[11] Achtung: für $n \leq -\frac{3}{2}$ besitzt der Integrand Singularitäten an den Integrationsgrenzen.

Dabei sind die Basisspinoren Ψ_{wnl} gegeben durch:

$$\Psi_{wnl}(\vec{x}) = -\chi \sin^{1/2}\theta M \Xi_{wnl}(\vec{x})$$

mit

$$\Xi_{wnl}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \Xi_{1wnl}(\vec{x}) \\ \Xi_{2wnl}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

wobei

$$\Xi_{1wnl}(\vec{x}) = b_{1w}(\chi) \begin{pmatrix} C^1_{nl}(\theta,\varphi) \\ C^2_{nl}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}$$
$$\Xi_{2wnl}(\vec{x}) = b_{3w}(\chi) \begin{pmatrix} C^1_{nl}(\theta,\varphi) \\ -C^2_{nl}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}$$

Auf Fragen der Konvergenz des Integrals sowie der Summen soll hier nicht weiter eingegangen werden. Die Koeffizienten $a_{nl}(w)$ sowie $a^*_{nl}(w)$ sind spinorwertig. Ein solcher Ansatz für die allgemeine Lösung ist durch die Tatsache gerechtfertigt, daß sowohl die Jacobi-Polynome als auch die sphärischen Besselfunktionen ein vollständiges Funktionensystem bilden. Bei den Jacobi-Polynomen überträgt sich diese Eigenschaft von den Kugelflächenfunktionen zu denen man beim Übergang zur kartesischen Eichung der Spinoren und Dirac-Matrizen gelangt [26]. Die sphärischen Besselfunktionen 1. und 2. Art sind linear unabhängig und stellen als Linearkombination eine allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung dar. Mit diesem Ausdruck für eine allgemeine Lösung der Dirac-Gleichung erhält man nun den Feldoperator, wenn man die „Fourierkoeffizienten“ durch Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren ersetzt. Der Feldoperator lautet dann:

$$\hat{\Psi}(x^0,\vec{x}) = \int dw \sum_{l,n} \left[\hat{a}_{nl}(w)\overline{T_w(x^0)}\Psi_{wnl}(\vec{x}) + \hat{a}^+_{nl}(w)T_w(x^0)\overline{\Psi_{wnl}(\vec{x})} \right] \tag{125}$$

Dabei ist $T_w(x^0)$ ein Spinor mit den Komponenten bzgl. einer Vierbeinbasis E_A:

$$T_w(x^0)^0 = T_w(x^0)^1 = \mathrm{e}^{3\alpha/4} a_{1w}(x^0)$$
$$T_w(x^0)^2 = T_w(x^0)^3 = \mathrm{e}^{3\alpha/4} a_{3w}(x^0)$$

Die Operatoren $\hat{a}_{nl}(w)$ und $\hat{a}^+_{nl}(w)$ sind Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren auf dem antisymmetrischen Fockraum über dem Einteilchenhilbertraum $L^2(DM_\Sigma)$.

4.5 Homogene, isotrope Zustände des Dirac-Feldes

Wir betrachten in diesem Abschnitt homogene isotrope Raumzeiten, auf denen spezielle quasifreie Zustände des Dirac-Feldes ausgezeichnet werden sollen. Diese sog. homogenen und isotropen Zustände sind verträglich mit der Isometriegruppe dieser Raumzeiten, in einem Sinne der noch näher erläutert werden wird. Wie im Fall des Klein-Gordon-Feldes [18] kann man auch hier die homogenen isotropen Fockzustände des Dirac-Feldes mittels Modenzerlegung und unter Benutzung von Separationslösungen der Dirac-Gleichung erhalten. Als Beispiel für homogene isotrope Zustände betrachten wir dann adiabatische Vakuumzustände auf Robertson-Walker-Raumzeiten.

Die homogenen und isotropen Raumzeiten sind von der Form $M = \mathbf{R} \times \Sigma^\kappa$, wobei Σ^κ eine homogene riemannsche Mannigfaltigkeit bezeichnen soll. Die Metrik nimmt die folgende Form an (siehe Anhang A.4):

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^{*2}}{1 - \kappa r^{*2}} + r^{*2}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

Der Parameter κ kann die drei Werte $+1, 0, -1$ annehmen. Dementsprechend handelt es sich dann bei Σ^κ um einen Raum konstant positiver, verschwindender bzw. konstant negativer Krümmung. Zu diesen Räumen gehört dann eine entsprechende Isometriegruppe G^κ des $\mathbf{R}^4$, in den die Räume Σ^κ eingebettet werden können. Im Falle von $\kappa = +1$ ist dies die Rotationsgruppe in 4 Dimensionen SO(4). Bei verschwindender Krümmung ($\kappa = 0$) sind die 3-dimensionalen Hyperflächen Σ^0 flache Räume, die bzgl. der euklidischen Gruppe E(3) homogen sind. Ist κ dagegen -1 dann ist $\mathcal{L}_+^\uparrow$ die Isometriegruppe von der zugehörigen Raumzeit. Die Gruppe G^κ wirkt als Transformationsgruppe durch $g(t,x) = (t, gx), g \in G^\kappa$ auf der Raumzeit M. Die unitäre Darstellung U von G^κ auf $\mathcal{C}_0^\infty(DM)$, definiert durch

$$(U(g)f)(x) := f(g^{-1}x),\ g \in G^\kappa$$

kommutiert mit dem Dirac-Propagator für Spinoren $S : \mathcal{C}_0^\infty(DM) \to \mathcal{C}^\infty(DM)$. Die Darsteller $U(g)$ vertauschen zudem mit der antiunitären Involution Γ auf $\overline{\mathsf{K}}$ und bilden so eine Gruppe von Bogoliubov-Transformationen auf $\overline{\mathsf{K}}$. Durch diese Transformationen werden Automorphismen α_g der CAR-Algebra $\mathcal{F}[\overline{\mathsf{K}}, \Gamma]$, sog. Bogoliubov-Automorphismen, erzeugt

$$\alpha_g(B(f)) = B(U(g)f),\ g \in G^\kappa$$

Diese Bogoliubov-Automorphismen werden nun zur Charakterisierung von homogenen, isotropen Zuständen des Dirac-Feldes verwendet. Ein Zustand ω auf $\mathcal{F}[\overline{\mathsf{K}}, \Gamma]$ heißt homogen und isotrop, wenn er invariant unter allen Bogoliubov-Automorphismen α_g ist, d.h. wenn gilt:

$$\omega \circ \alpha_g = \omega,\ \forall g \in G^\kappa$$

Die Beschränkung auf quasifreie Zustände ermöglicht nun eine äquivalente Formulierung dieser Bedingung an die Zweipunktfunktion

$$\lambda(f_1, f_2) := \omega(B(f_1)^* B(f_2))$$

Definition 5. Ein quasifreier Zustand ω heißt homogen und isotrop, wenn für seine Zweipunktfunktion folgendes gilt:

$$\lambda(U(g)f_1, U(g)f_2) = \lambda(f_1, f_2),\ f_1, f_2 \in \overline{\mathsf{K}}, g \in G^\kappa$$

Dabei ist U die unitäre Darstellung von G^κ auf $\overline{\mathsf{K}}$.

Die Robertson-Walker-Metrik beschreibt ein sich zeitlich veränderndes isotropes und homogenes Universum. Das Auftreten der zeitabhängigen Skalierungsfunktion $a(t)$ spiegelt den nichtstatischen Charakter der Metrik wieder. Für $a(t) = 1, \forall t$ geht die Metrik jedoch in die Form einer ultrastatischen Metrik über. Im Fall verschwindender Krümmung ($\kappa = 0$) erhält man die Minkowski-Metrik und als Zustand des Dirac-Feldes würde man den üblichen Vakuumzustand wählen, der sich durch Invarianz unter Lorentz-Transformationen auszeichnet. In einer Phase langsamer zeitlicher Änderung des Universums erwartet man nun natürlicherweise, daß die physikalischen Zustände der Quantenfelder sich nur wenig von denen des statischen Falls unterscheiden. Für eine Robertson-Walker-Raumzeit hat Parker 1969 [20, 21] als physikalische Bedingung an die Zustände gefordert, daß die Teilchenproduktion durch das sich verändernde Universum minimiert werden soll. Er hat dies erreicht, indem er für den zeitlichen Anteil der Lösung der Klein-Gordon-Gleichung einen WKB-ähnlichen Ansatz machte. Es wurde inzwischen von verschiedenen Autoren [14, 18] gezeigt, daß dieser Ansatz in der Tat auf physikalische Zustände des Klein-Gordon-Feldes führt. Dies motiviert eine analoge Vorgehensweise beim Dirac-Feld. Wir betrachten dazu die Gleichungen (107) und (108) für die Funktionen a_1 und a_3. Setzt man Gl.(107) in Gl.(108), so erhält man folgende Differentialgleichung für $a_1(\tau)$:

$$\Big(\frac{d^2}{d\tau^2} - i\frac{\dot{\alpha}}{2} m \mathrm{e}^{\alpha/2} + m^2 \mathrm{e}^{\alpha}\Big) a_{1w}(\tau) = -w a_{1w}(\tau) \tag{126}$$

Dabei war $z_1 z_2 = z = -w < 0$. Im Gegensatz zum Minkowski-Raum ($\alpha(\tau) \equiv 0$) erhalten wir eine Differentialgleichung mit einem komplexen Zusatzterm. Dieser ist dafür verantwortlich , daß es keine reine oszillierende Zeitabhängigkeit mehr gibt. Stattdessen ergibt sich eine Lösung mit exponentieller Dämpfung. Wir machen nun folgenden Ansatz zur Lösung von Gl.(126):

$$a_{1w}(\tau) = \mathrm{e}^{-3\alpha/4} \left(2\Omega_w(\tau)\right)^{-1/2} \exp\left[i \int_0^{\tau} d\tau' \Omega_w(\tau')\right] \tag{127}$$

Dabei soll Ω_w eine komplexwertige glatte Funktion mit positivem Imaginärteil sein. Die erste Ableitung von a_{1w} nach τ lautet:

$$\begin{aligned} \frac{da_{1w}}{d\tau} &= \mathrm{e}^{-3\alpha/4} \big(2\Omega_w(\tau)\big)^{-1/2} \exp\Big[i \int_0^{\tau} d\tau' \Omega_w(\tau')\Big] \\ &\quad \times \Big\{-\frac{3\dot{\alpha}}{4} - \frac{1}{2}\frac{\dot{\Omega}_w(\tau)}{\Omega_w(\tau)} + i\Omega_w(\tau)\Big\} \\ &= a_{1w}(\tau)\Big\{-\frac{3\dot{\alpha}}{4} - \frac{1}{2}\frac{\dot{\Omega}_w(\tau)}{\Omega_w(\tau)} + i\Omega_w(\tau)\Big\} \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung findet man schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_{1w}}{d\tau^2} = a_{1w}(\tau)\Big[&\frac{9}{16}\dot{\alpha}^2 + \frac{3}{4}\dot{\alpha}\frac{\dot{\Omega}_w(\tau)}{\Omega_w(\tau)} - \frac{3i}{2}\dot{\alpha}\Omega_w(\tau) + \frac{1}{4}\Big(\frac{\dot{\Omega}_w(\tau)}{\Omega_w(\tau)}\Big)^2 \\ &- \Omega_w(\tau)^2 - \frac{3}{4}\ddot{\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\ddot{\Omega}_w(\tau)}{\Omega_w(\tau)} + \frac{1}{2}\frac{\dot{\Omega}_w(\tau)}{\Omega_w(\tau)^2}\Big] \end{aligned}$$

Wird dieser Ansatz in die Gl.(126) eingesetzt so ergibt sich die folgende Gleichung für $\Omega_w(\tau)$:

$$\begin{aligned} \Omega_w(\tau)^2 = &\frac{9}{16}\dot{\alpha}^2 + \frac{3}{4}\dot{\alpha}\frac{\dot{\Omega}_w(\tau)}{\Omega_w(\tau)} - \frac{3i}{2}\dot{\alpha}\Omega_w(\tau) + \frac{1}{4}\Big(\frac{\dot{\Omega}_w(\tau)}{\Omega_w(\tau)}\Big)^2 - \frac{3}{4}\ddot{\alpha} \\ &- \frac{1}{2}\frac{\ddot{\Omega}_w(\tau)}{\Omega_w(\tau)} + \frac{1}{2}\frac{\dot{\Omega}_w(\tau)}{\Omega_w(\tau)^2} - \frac{i}{2}\dot{\alpha} m \mathrm{e}^{\alpha/2} + m^2 \mathrm{e}^{\alpha} + w \end{aligned} \tag{128}$$

In einem sich nur langsam verändernden Universum sind die Ableitungsterme klein und man kann deshalb einen iterativen Ansatz zur Lösung dieser Gleichung versuchen:

$$
\begin{aligned}
\left(\Omega_w^{(0)}(\tau)\right)^2 &= w + m^2 \mathrm{e}^{\alpha} \\
\left(\Omega_w^{(r+1)}(\tau)\right)^2 &= w + m^2 \mathrm{e}^{\alpha} - \frac{i}{2}\dot{\alpha} m \mathrm{e}^{\alpha/2} + \frac{9}{16}\dot{\alpha}^2 - \frac{3}{4}\ddot{\alpha} + \frac{3}{4}\dot{\alpha}\frac{\dot{\Omega}_w^{(r)}(\tau)}{\Omega_w^{(r)}(\tau)} \\
&\quad - \frac{3i}{2}\dot{\alpha}\Omega_w^{(r)}(\tau) + \frac{1}{4}\Big(\frac{\dot{\Omega}_w^{(r)}(\tau)}{\Omega_w^{(r)}(\tau)}\Big)^2 - \frac{1}{2}\frac{\ddot{\Omega}_w^{(r)}(\tau)}{\Omega_w^{(r)}(\tau)} + \frac{1}{2}\frac{\dot{\Omega}_w^{(r)}(\tau)}{\left(\Omega_w^{(r)}(\tau)\right)^2}
\end{aligned}
$$

Mit der obigen Form des Feldoperators gelangt man in der Tat zu homogenen und isotropen Zuständen, denn die Separationslösungen sind bzgl. der homogenen und isotropen Cauchy-Flächen Σ konstruiert worden, und der zeitabhängige Anteil der Lösung hängt nur von w und nicht von den übrigen Quantenzahlen ab.

Analog wie beim Klein-Gordon-Feld besteht die einzige Freiheit bei der Angabe eines homogenen und isotropen Fockzustandes in der Wahl der Anfangsdaten für die Funktionen a_{1w} und a_{3w}. Wir machen nun folgende Definition:

Definition 6. Ein adiabatischer Vakuumzustand des Dirac-Feldes der Ordnung r auf einer Robertson-Walker-Raumzeit ist bestimmt durch Angabe der folgenden Anfangsdaten für die Funktion a_{1w} zur Zeit τ:

$$
\begin{aligned}
a_{1w}(\tau) &= W_w^{(r)}(\tau) \\
\dot{a}_{1w}(\tau) &= \dot{W}_w^{(r)}(\tau), \quad \text{wobei}
\end{aligned}
$$

$$
W_w^{(r)}(\tau) := \mathrm{e}^{-3\alpha/4}\left(2\Omega_w^{(r)}(\tau)\right)^{-1/2} \exp\left[i\int_0^{\tau} d\tau'\,\Omega_w^{(r)}(\tau')\right]
$$

Mit a_{1w} ist dann auch a_{3w} über Gl.(107) fixiert. Sei nun $f \in \mathsf{S}$ eine Lösung der Dirac-Gleichung. Dann lautet der räumlich verschmierte Feldoperator $\hat{\Psi}$:

$$
\begin{aligned}
\hat{\Psi}(x^0, f) = &\int_{\Sigma} d\mu_{\Sigma} \int dw \sum_{l,n} \left[\hat{a}_{nl}(w)\overline{T_w(x^0)}\Psi_{wnl}(\vec{x}) + (\hat{a}_{nl})^{+}(w) T_w(x^0)\overline{\Psi_{wnl}(\vec{x})}\right] f(\vec{x}) \\
= &\int dw \sum_{l,n} \Big[\overline{T_w(x^0)}\hat{a}_{nl}(w)\int_{\Sigma} d\mu_{\Sigma}\Psi_{wnl}(\vec{x}) f(\vec{x}) \\
&+ T_w(x^0)(\hat{a}_{nl})^{+}(w)\int_{\Sigma} d\mu_{\Sigma}\overline{\Psi_{wnl}(\vec{x})} f(\vec{x})\Big]
\end{aligned}
$$

Wir treffen nun folgende Wahl der positiv und negativ frequenten Anteile:

$$
\overline{f_{wnl}^{(-)}(x^0)} := \overline{T_w(x^0)}\int_{\Sigma} d\mu_{\Sigma}\Psi_{wnl}(\vec{x}) f(\vec{x}) \tag{129}
$$

$$
f_{wnl}^{(+)}(x^0) := T_w(x^0)\int_{\Sigma} d\mu_{\Sigma}\overline{\Psi_{wnl}(\vec{x})} f(\vec{x}) \tag{130}
$$

Der Feldoperator schreibt sich dann als:

$$
\hat{\Psi}(x^0, f) = \int dw \sum_{l,n}\left[\hat{a}_{nl}(w)\overline{f_{wnl}^{(-)}(x^0)} + (\hat{a}_{nl})^{+}(w) f_{wnl}^{(+)}(x^0)\right] \tag{131}
$$

Dafür schreiben wir abkürzend

$$\hat{\Psi}(x^0, f) = \hat{a}(\overline{f^{(-)}(x^0)}) + \hat{a}^+(f^{(+)}(x^0)) \tag{132}$$

Die Zweipunktfunktion ω_2 berechnet man nun zu

$$\begin{aligned}
\lambda(f_1, f_2) &= \langle 0|\hat{\Psi}(x^0, f_1)\hat{\Psi}(y^0, f_2)|0\rangle \\
&= \langle 0|\big(\hat{a}(\overline{f_1^{(-)}(x^0)}) + \hat{a}^+(f_1^{(+)}(x^0))\big)\big(\hat{a}(\overline{f_2^{(-)}(y^0)}) + \hat{a}^+(f_2^{(+)}(y^0))\big)|0\rangle \\
&= \langle 0|\hat{a}(\overline{f_1^{(-)}(x^0)})\hat{a}^+(f_2^{(+)}(y^0))|0\rangle \\
&= \langle 0|\Big\{\hat{a}(\overline{f_1^{(-)}(x^0)}),\, \hat{a}^+(f_2^{(+)}(y^0))\Big\}|0\rangle \\
&= \int dw \sum_{l,n} \overline{f_{1wnl}^{(-)}(x^0)} f_{2wnl}^{(+)}(y^0)
\end{aligned}$$

Dabei wurden die Antivertauschungsrelationen von $\hat{a}_{nl}(w)$ mit $\hat{a}^+_{nl}(w)$ benutzt:

$$\{\hat{a}_{nl}(w)\,,\, \hat{a}^+_{n'l'}(w')\} = \delta(w - w')\,\delta_{nn'}\,\delta_{ll'} \tag{133}$$

Mit der Angabe der Zweipunktfunktion ist nun die Quantisierung des Dirac-Feldes auf einer flachen Robertson-Walker-Raumzeit abgeschlossen. Die Behandlung der beiden übrigen Fälle ($\kappa = +1, -1$) ist im Prinzip genauso möglich, da auch dort die Separationslösungen der klassischen Gleichung konstruiert werden können. Von den adiabatischen Vakuumzuständen ist bekannt, daß sie für das Klein-Gordon-Feld eine geeignete Klasse von physikalischen Zuständen bilden [14]. Ob dies auch für das Dirac-Feld richtig ist, bleibt als ungelöstes Problem bestehen. Die Untersuchung des Kurzabstandsverhaltens der Zweipunktfunktion würde eine Entscheidung dieser Frage liefern. Damit die oben definierten adiabatischen Vakuumzustände des Dirac-Feldes als physikalisch bezeichnet werden können, müßten ihre Zweipunktfunktionen die Hadamard-Singularitätenstruktur aufweisen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist es, daß die Zweipunktfunktion, aufgefaßt als Distribution über $\mathcal{C}_0^\infty(DM) \otimes \mathcal{C}_0^\infty(DM)$, die Wellenfrontenmenge eines Hadamard-Zustandes (Gl.(50)) besitzt. Ein sehr direkter Weg die Singularitätenstruktur von ω_2 zu untersuchen, besteht darin, daß man den Integralkern $\lambda(x_1, x_2)$ von ω_2 durch die Reihenentwicklungen der Lösungen der Dirac-Gleichung ausdrückt. Diese Lösungen lassen sich, wie wir oben gesehen haben, durch orthogonale Polynome und Besselfunktionen ausdrücken, von denen die Reihenentwicklung für kleine Abstände bekannt ist. Zumindest für die Besselfunktionen kann man sagen, daß deren Entwicklung für kleine Abstände mit der Hadamard-Form übereinstimmt. Dies ist aus der Ortsraumdarstellung der Propagationsfunktionen im Minkowskiraum bekannt. Wir vermuten deswegen, daß die adiabatischen Vakuumzustände des Dirac-Feldes auf einer flachen Robertson-Walker-Raumzeit ebenfalls Hadamard-Zustände sind. Eine andere Möglichkeit die Singularitätenstruktur von ω_2 zu untersuchen, wäre eine Vorgehensweise wie sie von Junker [14] im Fall des skalaren Klein-Gordon-Feldes durchgeführt wurde. Dazu wäre es notwendig den spinoriellen Klein-Gordon-Operator geschickt in ein Produkt von zwei Pseudodifferentialoperatoren zu zerlegen und danach die Wellenfrontenmenge der Zweipunktfunktion, ausgedrückt durch diese Zerlegung, zu berechnen.

Anhang

A.1 Dirac-Matrizen

Die Standarddarstellung der Dirac-Matrizen ist definiert durch

$$\gamma_0^* = \gamma_0$$
$$\gamma_j^* = -\gamma_j,\ j = 1,2,3$$

Dies ist äquivalent zu

$$\overline{\gamma_0} = \gamma_0^t$$
$$\overline{\gamma_j} = -\gamma_j^t,\ j = 1,2,3$$

Dirac-Matrizen in Majorana-Darstellung haben zusätzlich zur Standarddarstellung die Eigenschaft

$$\overline{\gamma_a} = -\gamma_a,\ a = 0,1,2,3$$

Unter Benutzung der obigen Eigenschaften gilt also

$$\gamma_0^t = -\gamma_0$$
$$\gamma_j^t = \gamma_j,\ j = 1,2,3$$

Als nächstes zeigen wir, daß die Matrizen $(\Lambda^b{}_a)$, die in den Relationen der Matrizen $S \in \mathrm{Spin}(1,3)$ auftreten, Elemente der Lorentzgruppe $\mathcal{L}$ sind. Aus der Relation

$$S\gamma_a S^{-1} = \gamma_b \Lambda^b{}_a \Leftrightarrow \gamma_a = S^{-1}\gamma_b \Lambda^b{}_a S$$

zusammen mit den Antivertauschungsrelationen der Dirac-Matrizen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\{\gamma_a, \gamma_b\} &= \gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a \\
&= (S^{-1}\gamma_c\Lambda^c{}_a S)(S^{-1}\gamma_d\Lambda^d{}_b S) + (S^{-1}\gamma_d\Lambda^d{}_b S)(S^{-1}\gamma_c\Lambda^c{}_a S) \\
&= S^{-1}\gamma_c\Lambda^c{}_a\gamma_d\Lambda^d{}_b S + S^{-1}\gamma_d\Lambda^d{}_b\gamma_c\Lambda^c{}_a S \\
&= S^{-1}\Lambda^c{}_a\Lambda^d{}_b\{\gamma_c, \gamma_d\}S \\
&= 2S^{-1}\Lambda^c{}_a\Lambda^d{}_b\eta_{cd}\mathbf{1}_4 S \\
&= 2\Lambda^c{}_a\Lambda^d{}_b\eta_{cd}\mathbf{1}_4
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\Lambda^c{}_a\Lambda^d{}_b\eta_{cd} = \eta_{ab}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

A.2 Lichnerowicz' Identität

Der Spinor-Tensor γ ist konstant bzgl. der auf das Spinorbündel DM gelifteten kovarianten Ableitung ∇. Die Komponenten von γ in induzierten mitbewegten

Rahmen e_a, E_A seien $\gamma_b{}^A{}_B$.

$$\begin{aligned}
(\nabla\gamma)^A_{abB} &= \partial_a \gamma_b{}^A{}_B - \Gamma^c{}_{ab}\gamma_c{}^A{}_B + \sigma_a{}^A{}_C\gamma_b{}^C{}_B - \gamma_b{}^A{}_C\sigma_a{}^C{}_B \\
&= -\Gamma^c{}_{ab}\gamma_c{}^A{}_B - \frac{1}{4}\Gamma^d{}_{ae}\gamma^{eA}{}_D\gamma_d{}^D{}_C\gamma_b{}^C{}_B + \frac{1}{4}\gamma_b{}^A{}_C\Gamma^d{}_{ae}\gamma^{eC}{}_D\gamma_d{}^D{}_B \\
&= -\Gamma^c{}_{ab}\gamma_c{}^A{}_B - \frac{1}{4}\Gamma^d{}_{ae}(\gamma^e(-\gamma_b\gamma_d + 2\eta_{db}) - \gamma_b\gamma^e\gamma_d)^A{}_B \\
&= -\Gamma^c{}_{ab}\gamma_c{}^A{}_B - \frac{1}{4}\Gamma^d{}_{ae}(-\eta^{ef}\gamma_f\gamma_b\gamma_d + 2\eta_{db}\gamma^e - \gamma_b\gamma^e\gamma_d)^A{}_B \\
&= -\Gamma^c{}_{ab}\gamma_c{}^A{}_B - \frac{1}{4}\Gamma^d{}_{ae}(-\eta^{ef}(-\gamma_b\gamma_f + 2\eta_{fb})\gamma_d + 2\eta_{db}\gamma^e - \gamma_b\gamma^e\gamma_d)^A{}_B \\
&= -\Gamma^c{}_{ab}\gamma_c{}^A{}_B - \frac{1}{4}\Gamma^d{}_{ae}(\gamma_b\gamma^e\gamma_d - 2\delta^e_b\gamma_d + 2\eta_{db}\gamma^e - \gamma_b\gamma^e\gamma_d)^A{}_B \\
&= -\Gamma^c{}_{ab}\gamma_c{}^A{}_B + \frac{1}{2}\Gamma^d{}_{ab}\gamma_d{}^A{}_B - \frac{1}{2}\Gamma_{bae}\gamma^{eA}{}_B \\
&= -\Gamma^c{}_{ab}\gamma_c{}^A{}_B + \frac{1}{2}\Gamma^d{}_{ab}\gamma_d{}^A{}_B + \frac{1}{2}\Gamma^e{}_{ab}\gamma_e{}^A{}_B \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Identität von Lichnerowicz [17]:

$$(-i \not\nabla + m)(i \not\nabla + m)u = (\Box - \frac{1}{4}R + m^2)u,\ u \in DM$$

$\Box$ ist spinorielle Wellenoperator und R der Krümmungsskalar.

$$\begin{aligned}
((-i \not\nabla + m)(i \not\nabla + m)u)^A &= (-i\gamma^{aA}{}_B\nabla_a + m)(i\gamma^{bB}{}_C\nabla_b + m)u^C \\
&= (\gamma^{aA}{}_B\nabla_a\eta^{bc}\gamma_c{}^B{}_C\nabla_b + m^2)u^C \\
&= (\gamma^{aA}{}_B\gamma^{bB}{}_C\nabla_a\nabla_b + m^2)u^C
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil γ kovariant konstant ist.

$$\begin{aligned}
\gamma^{aA}{}_B\gamma^{bB}{}_C\nabla_a\nabla_b u^C &= \frac{1}{2}(\{\gamma^a,\gamma^b\}^A{}_C + [\gamma^a,\gamma^b]^A{}_C)\nabla_a\nabla_b u^C \\
&= (\eta^{ab}\nabla_a\nabla_b + \frac{1}{2}[\gamma^a,\gamma^b]\nabla_a\nabla_b)^A_C u^C
\end{aligned}$$

es bleibt zu zeigen das gilt:

$$[\gamma^a,\gamma^b]\nabla_a\nabla_b = -\frac{1}{2}R$$

Aufgrund der Antisymmetrie des Kommutators gilt:

$$[\gamma^a,\gamma^b]^A{}_C(\nabla_a\nabla_b)^C{}_D = \frac{1}{2}[\gamma^a,\gamma^b]^A{}_C[\nabla_a,\nabla_b]^C{}_D$$

Die Berechnung des Kommutators der kovarianten Ableitungen ergibt:

$$[\nabla_a,\nabla_b]^C{}_D = (\partial_a\sigma_b{}^C{}_D) - (\partial_b\sigma_a{}^C{}_D) + \sigma_a{}^C{}_E\sigma_b{}^E{}_D - \sigma_b{}^C{}_E\sigma_a{}^E{}_D - c_{ab}{}^c\sigma_c{}^C{}_D$$

Dabei sind $c_{ab}{}^c$ die Strukturkonstanten der Lie-Algebra der Orthonormalbasisvektoren, gegeben durch die Formel:

$$[e_a, e_b] = c_{ab}{}^c e_c = (\Gamma^c{}_{ab} - \Gamma^c{}_{ba})e_c$$

Nach einiger Rechnung läßt sich der Kommutator auf folgende Form bringen:

$$[\nabla_a, \nabla_b] = -\frac{1}{4}\left[(\partial_a \Gamma^d{}_{be}) - (\partial_b \Gamma^d{}_{ae}) - \Gamma^c{}_{ae}\Gamma^d{}_{bc} + \Gamma^c{}_{be}\Gamma^d{}_{ac} - c_{ab}{}^c\Gamma^d{}_{ce}\right](\gamma^e\gamma_d)$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern stellt jedoch gerade die Komponenten $R^d{}_{eab}$ des Riemann-Tensors bzgl. induzierter mitbewegter Rahmen dar. Somit ergibt sich:

$$[\nabla_a, \nabla_b]^C{}_D = -\frac{1}{4}R^d{}_{eab}(\gamma^e\gamma_d)^C{}_D = \frac{1}{4}R^e{}_{dab}(\gamma_e\gamma^d)^C{}_D$$

Es bleibt die Berechnung des folgenden Ausdrucks:

$$\frac{1}{8}R^e{}_{dab}([\gamma^a, \gamma^b]\gamma_e\gamma^d)^C{}_D$$

Mit den Antivertauschungsrelationen der Dirac-Matrizen ergibt sich schließlich:

$$\frac{1}{8}R^e{}_{dab}[\gamma^a, \gamma^b]\gamma_e\gamma^d = -\frac{1}{2}R$$

A.3 Faserbündel

Die Einführung von Spinoren auf einer gekrümmten Raumzeit läßt sich in eleganter Weise in der Sprache der Faserbündel formulieren. Dieser Abschnitt stellt die benötigten Begriffe bereit. Eine gute Einführung in die Theorie der Faserbündel findet man z.B. bei Nakahara [19]. Ein *Faserbündel* (E, π, M, F, G) beteht aus den folgenden Daten:

a) E ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (Mf), der *Totalraum*

b) M ist eine differenzierbare Mf, der *Basisraum*

c) F ist eine differenzierbare Mf, die *Faser*

d) $\pi : E \to M$ ist eine surjektive Abbildung, die *Projektion*. Das Urbild von $p \in M$ unter π, also $\pi^{-1}(p) \equiv F_p \cong F$ heißt Faser über p.

e) G ist eine Lie-Gruppe, die *Strukturgruppe*, die von links auf die Faser F wirkt.

f) Sei $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von M mit Diffeomorphismen $\phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i) \subset E$, so daß $\pi\phi_i(p, f) = p$. Die Abbildung ϕ_i heißt *lokale Trivialisierung*, denn lokal sieht E wie das direkte Produkt $U_i \times F$ aus.

g) Für festes $p \in M$ sei $\phi_{i,p} : F \to F_p$ definiert durch $\phi_{i,p}(f) := \phi_i(p, f)$. Auf $U_i \cap U_j$ wird verlangt, daß $t_{ij}(p) \cong \phi_{i,p}^{-1}\phi_{j,p} : F \to F$ ein Element von G ist. Die t_{ij} heißen *Übergangsfunktionen*.

In den Anwendungen werden Faserbündel abkürzend mit $E(M)$ notiert.

Ein Faserbündel $E(M)$, dessen Fasern K-Vektorräume sind ($K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$) heißt *Vektorbündel*. Sei F ein reeller Vektorraum und $d = \dim(F)$, dann sind die Übergangsfunktionen aus $\mathrm{GL}(d, \mathbf{R})$.

Ein *Hauptfaserbündel* $P(M, H)$ ist ein Faserbündel $P(M)$ auf dessen Fasern eine freie, transitive Rechtswirkung einer Lie-Gruppe H definiert ist. Eine *Wirkung* ist eine Abbildung

$$M \times \pi^{-1}(p) \ni (p, u) \mapsto (p, uh), \;\; h \in H$$

Die Wirkung ist *transitiv*, wenn gilt: zu je zwei Elementen $u_1, u_2 \in \pi^{-1}(p)$ existiert ein $h \in H$ mit $u_2 = u_1 h$. Die Faser über p ist der *Orbit* von u unter H, d.h. $\pi^{-1}(p) = \{uh | h \in H\}$. Die Wirkung heißt *frei*, wenn nur das neutrale Element von H einen Fixpunkt in $\pi^{-1}(p)$ besitzt.

Sei $P(M, H)$ ein Hauptfaserbündel und V ein d-dimensionaler reeller oder komplexer Vektorraum. Sei ρ eine Darstellung der Gruppe H auf V. Eine Wirkung der Gruppe auf $P \times V$ wird definiert durch:

$$(u, v) \mapsto (uh, \rho(h)^{-1} v), \;\; h \in H$$

Das *assoziierte Vektorbündel* $P \times_\rho V$ wird nun dadurch definiert, daß man die Punkte (u, v) und $(uh, \rho(h)^{-1} v)$ identifiziert, d.h.

$$P \times_\rho V := P \times V / H$$

$P \times_\rho V$ ist also die Menge der verschiedenen Orbits von $P \times V$ unter der Wirkung von H. Die Projektion π_E in $P \times_\rho V \equiv E$ ist definiert durch: $\pi_E(u, v) = \pi(u)$. π_E ist wohldefiniert, denn aus $\pi(u) = \pi(uh)$ folgt:

$$\pi_E(uh, \rho(h)^{-1} v) = \pi(uh) = \pi_E(u, v)$$

Die lokale Trivialisierung ist durch $\psi_i : U_i \times V \to \pi_E^{-1}(U_i)$ gegeben. Die Übergangsfunktionen von E sind $\rho'(t_{ij}(p))$, wobei $t_{ij}(p)$ die Übergangsfunktionen von P sind. ρ' ist eine Darstellung der Strukturgruppe G auf V.

A.4 Die Robertson-Walker Raumzeit

In diesem Abschnitt wird die Robertson-Walker Raumzeit eingeführt und erklärt wie die allgemeine Form des Linienelements der Metrik g_{ab} lautet. Die grundlegende Erfahrungstatsache, daß das beobachtbare Universum homogen und isotrop erscheint wird als kosmologisches Prinzip bezeichnet. Diese Annahme impliziert, daß die 3-dimensionalen raumartigen Hyperflächen Σ Räume konstanter Krümmung sind. Für diese nimmt der Riemann-Tensor eine einfache Form an [27]. Es gilt

$$^{(3)}R_{abcd} = K h_{c[a} h_{b]d}$$

Dabei ist h_{ab} die durch g_{ab} induzierte Metrik auf Σ. Die Krümmung K ist ein Skalar und kann positiv, negativ oder Null sein. Im Fall positiver Krümmung sind die Hyperflächen Σ 3-Sphären vom Radius R. Diese können in den 4-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbf{R}^4$ eingebettet werden, vermöge

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$$

In sphärischen Koordinaten lautet die Metrik auf Σ dann:

$$ds^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right)$$

Bei verschwindender Krümmung ist Σ der gewöhnliche 3-dimensionale flache Raum mit Metrik

$$ds^2 = d\chi^2 + \chi^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Ist K hingegen negativ, so sind die Hyperflächen Σ 3-dimensionale Hyperboloide, eingebettet im 4-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbf{R}^4$. Die definierende Gleichung lautet

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R^2$$

In hyperbolischen Koordinaten lautet die Metrik des Einheitshyperboloids ($R = 1$):

$$ds^2 = d\chi^2 + \sinh^2\chi \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Die Raumzeit-Metrik hat die allgemeine Form

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + \xi^2(\chi)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

Dabei ist $a(t)$ eine beliebige glatte positive Funktion, der sog. Skalenfaktor, der die Skala der räumlichen Geometrie vorgibt. Die Funktion $\xi(\chi)$ ist definiert durch

$$\xi(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & \text{falls } K \text{ positiv} \\ \chi & \text{falls } K = 0 \\ \sinh\chi & \text{falls } K \text{ negativ} \end{cases}$$

Die Metrik eines Raumes konstanter Krümmung kann auch noch in der folgenden Form dargestellt werden.

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Die Raumzeit-Metrik lautet dann

$$ds^2 = dt^2 - b^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

Der Zusammenhang zwischen beiden Darstellungen ist mit der dimensionslosen Koordinate $r^* = |K|^{1/2} r$ gegeben durch

$$ds^2 = dt^2 - \frac{b(t)^2}{|K|}\left[\frac{dr^{*2}}{1 - \kappa r^{*2}} + r^{*2}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

Dabei wurde $\kappa = K/|K|$ gesetzt. Der Parameter κ kann die Werte $\{+1, 0, -1\}$ annehmen. Sei nun

$$a(t) = \begin{cases} b(t)/|K|^{1/2} & \text{falls } K \neq 0 \\ b(t) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann lautet die Raumzeit-Metrik

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2\left[\frac{dr^{*2}}{1 - \kappa r^{*2}} + r^{*2}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

Der Übergang zu der neuen Radialkoordinate χ, definiert durch $r^* = \xi(\chi)$ führt dann auf die oben angegebene Metrik. Wir definieren nun noch eine neue Zeitkoordinate τ durch

$$d\tau = a(t)^{-1} dt$$

Dann bekommt die Metrik die Form

$$ds^2 = a(\tau)^2 \left[d\tau^2 - d\chi^2 - \xi(\chi)^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right) \right]$$

Die Koordinaten $\tau, \chi, \theta, \varphi$ heißen chronometrische Koordinaten. Für die Funktion $a(\tau)$ wurde in Abschnitt 4.1 die Funktion $\exp(\alpha(\tau)/2)$ gewählt.

A.5 Die spinorielle Klein-Gordon-Gleichung in chronometrischen Koordinaten

Die Hintereinanderausführung des Dirac-Operators sowie seines Adjungierten auf einen Spinor Ψ führt wegen der Identität von Lichnerowicz (siehe Anhang A.2) auf die spinorielle Klein-Gordon-Gleichung für Ψ. Dieser Operator spielt eine wichtige Rolle bei der Bestimmung der irreduziblen Darstellungen der Isometriegruppe G^κ auf dem Hilbertraum $L^2(DM)$, der Vervollständigung von $\mathcal{C}_0^\infty(DM)$. Hier soll nun die explizite Form dieses Operators auf einer Robertson-Walker-Raumzeit in den chronometrischen Koordinaten $\tau, \chi, \theta, \varphi$ angegeben werden. Die spinorielle Klein-Gordon-Gleichung lautet

$$(\Box - \frac{1}{4}R + m^2)\Psi(x) = 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad (\eta^{ab}\nabla_a\nabla_b - \frac{1}{4}R + m^2)\Psi(x) = 0$$

Dabei ist R der Krümmungsskalar und ∇_a ist die auf das Diracbündel DM geliftete kovariante Ableitung der Metrik g. Es gilt

$$\begin{aligned}
\eta^{ab}\nabla_a\nabla_b\Psi &= \eta^{ab}\nabla_a(\partial_b + \sigma_b)\Psi \\
&= \eta^{ab}\left[\partial_a(\partial_b + \sigma_b) - \Gamma^c{}_{ba}(\partial_c + \sigma_c) + \sigma_a(\partial_b + \sigma_b)\right]\Psi \\
&= \eta^{ab}\left[\partial_a\partial_b + (\partial_a\sigma_b) + \sigma_b\partial_a - \Gamma^c{}_{ba}(\partial_c + \sigma_c) + \sigma_a\partial_b + \sigma_a\sigma_b\right]\Psi \\
&= \left\{\Box_g + \eta^{ab}\left[(\partial_a\sigma_b) + 2\sigma_a\partial_b - \Gamma^c{}_{ba}\sigma_c + \sigma_a\sigma_b\right]\right\}\Psi \\
&= \left\{\Box_g + \eta^{ab}\left[2\sigma_a\partial_b - \Gamma^c{}_{ba}\sigma_c + \sigma_a\sigma_b\right]\right\}\Psi
\end{aligned}$$

Dabei ist $\Box_g$ der skalare Wellenoperator der Metrik g, und es wurde benutzt, daß der Term $\eta^{ab}(\partial_a\sigma_b)$ verschwindet (siehe Gl.64).

1) Berechnung des skalaren Wellenoperators:

$$\Box_g = |g|^{-1/2}\partial_\mu(|g|^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu), \quad g \equiv \det(g_{\mu\nu})$$

Die Komponenten $g_{\mu\nu}$ der Metrik g sind durch Gl.(55) gegeben und man findet nun leicht

$$g = \prod_{\mu=0}^{3} g_{\mu\mu} = -\mathrm{e}^{4\alpha(\tau)}\xi^4(\chi)\sin^2\theta$$

Nach Berechnung der entsprechenden Ableitungen und Summation aller Terme ergibt sich folgender Ausdruck für den skalaren Wellenoperator

$$\begin{aligned}\Box_g = \mathrm{e}^{-\alpha}\big[&\dot\alpha\partial_0 + \partial_0^2 - 2\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\partial_1 - \partial_1^2 \\ &- \xi^{-2}(\chi)\cot\theta\partial_2 - \xi^{-2}(\chi)\partial_2^2 - \xi^{-2}(\chi)\sin^{-2}\theta\partial_3^2\big]\end{aligned}$$

2) Berechnung von $\eta^{ab}\sigma_a\partial_b$:

$$\begin{aligned}\eta^{ab}\sigma_a\partial_b &= \eta^{ab}\sigma_a e_b^{\mu}\partial_\mu \\ &= -\Big\{-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\alpha}\big[\dot\alpha\gamma_0\gamma^1 + \dot\alpha\gamma_1\gamma^0\big]\partial_1 \\ &\quad - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-1}(\chi)\big[\dot\alpha\gamma_0\gamma^2 - 2\gamma_1\gamma^2\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) + \dot\alpha\gamma_2\gamma^0 + 2\gamma_2\gamma^1\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\big]\partial_2 \\ &\quad - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\big[\dot\alpha\gamma_0\gamma^3 - 2\gamma_1\gamma^3\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) - 2\gamma_2\gamma^3\xi^{-1}(\chi)\cot\theta \\ &\quad + \dot\alpha\gamma_3\gamma^0 + 2\gamma_3\gamma^1\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) + 2\gamma_3\gamma^2\xi^{-1}(\chi)\cot\theta\big]\partial_3\Big\} \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\alpha}\Big\{\dot\alpha\gamma_0\gamma^1\partial_1 + \big(\dot\alpha\gamma_0\gamma^2 - 2\gamma_1\gamma^2\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\big)\xi^{-1}(\chi)\partial_2 \\ &\quad + \big(\dot\alpha\gamma_0\gamma^3 - 2\gamma_1\gamma^3\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) - 2\gamma_2\gamma^3\xi^{-1}(\chi)\cot\theta\big)\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\partial_3\Big\}\end{aligned}$$

3) Berechnung von $\eta^{ab}\Gamma^c{}_{ba}\sigma_c$:

$$\begin{aligned}\eta^{ab}\Gamma^c{}_{ba}\sigma_c &= \mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\Big[-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\big(\dot\alpha\gamma_0\gamma^1 + \dot\alpha\gamma_1\gamma^0\big)\Big] \\ &\quad + \mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\Big[-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\big(\dot\alpha\gamma_0\gamma^1 + \dot\alpha\gamma_1\gamma^0\big)\Big] \\ &\quad + \mathrm{e}^{-\alpha/2}\xi^{-1}(\chi)\cot\theta\Big[-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\alpha/2}\big(\dot\alpha\gamma_0\gamma^2 - 2\gamma_1\gamma^2\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) \\ &\quad + \dot\alpha\gamma_2\gamma^0 + 2\gamma_2\gamma^1\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\big)\Big] \\ &= -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-1}(\chi)\Big\{2\xi'(\chi)\dot\alpha\gamma_0\gamma^1 + \cot\theta\big(\dot\alpha\gamma_0\gamma^2 - 2\gamma_1\gamma^2\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\big)\Big\}\end{aligned}$$

4) Berechnung von $\eta^{ab}\sigma_a\sigma_b$:

$$\begin{aligned}\eta^{ab}\sigma_a\sigma_b &= -\frac{1}{64}\mathrm{e}^{-\alpha}\Big\{\big(\dot\alpha\gamma_0\gamma^1 + \dot\alpha\gamma_1\gamma^0\big)^2 \\ &\quad + \big(\dot\alpha\gamma_0\gamma^2 - 2\gamma_1\gamma^2\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) + \dot\alpha\gamma_2\gamma^0 + 2\gamma_2\gamma^1\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\big)^2 \\ &\quad + \big(\dot\alpha\gamma_0\gamma^3 - 2\gamma_1\gamma^3\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) - 2\gamma_2\gamma^3\xi^{-1}(\chi)\cot\theta \\ &\quad + \dot\alpha\gamma_3\gamma^0 + 2\gamma_3\gamma^1\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) + 2\gamma_3\gamma^2\xi^{-1}(\chi)\cot\theta\big)^2\Big\} \\ &= -\frac{1}{64}\mathrm{e}^{-\alpha}\Big\{4\dot\alpha^2\gamma_0\gamma^1\gamma_0\gamma^1 + \big(2\dot\alpha\gamma_0\gamma^2 - 4\gamma_1\gamma^2\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\big)^2 \\ &\quad + \big(2\dot\alpha\gamma_0\gamma^3 - 4\gamma_1\gamma^3\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi) - 4\gamma_2\gamma^3\xi^{-1}(\chi)\cot\theta\big)^2\Big\}\end{aligned}$$

Nach dem Ausmultiplizieren der Quadrate und dem Zusammenfassen aller Terme ergibt sich folgender Ausdruck

$$\eta^{ab}\sigma_a\sigma_b = -\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-\alpha}\Big\{3\dot\alpha^2 - 8\xi^{-2}(\chi)\xi'^2(\chi) - 4\xi^{-2}(\chi)\cot^2\theta\Big\}$$

Für den Krümmungsskalar findet man mit Hilfe des Programms `Maple V` den folgenden Ausdruck (siehe Anhang A.7):

$$R = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha}\xi^{-2}(\chi)\big[6\ddot{\alpha}\xi^2(\chi) - 8\xi(\chi)\xi''(\chi) + 3\dot{\alpha}^2\xi^2(\chi) + 4 - 4\xi'^2(\chi)\big]$$

Werden nun alle Beiträge zusammengesammelt so lautet die spinorielle Klein-Gordon-Gleichung:

$$\begin{aligned}
(\Box - \frac{1}{4}R + m^2)\Psi = \Big\{ &\mathrm{e}^{-\alpha}\Big[\partial_0^2 - \partial_1^2 - \xi^{-2}(\chi)\partial_2^2 - \xi^{-2}(\chi)\sin^{-2}\theta\partial_3^2 \\
&+ \dot{\alpha}\partial_0 + \Big(\frac{1}{2}\dot{\alpha}\gamma_0\gamma^1 - 2\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\Big)\partial_1 \\
&+ \Big(\frac{1}{2}\dot{\alpha}\xi^{-1}(\chi)\gamma_0\gamma^2 - \xi^{-2}(\chi)\xi'(\chi)\gamma_1\gamma^2 - \xi^{-2}(\chi)\cot\theta\Big)\partial_2 \\
&+ \frac{1}{2}\xi^{-1}(\chi)\sin^{-1}\theta\Big(\dot{\alpha}\gamma_0\gamma^3 - 2\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\gamma_1\gamma^3 - 2\xi^{-1}(\chi)\cot\theta\gamma_2\gamma^3\Big)\partial_3 \\
&+ \frac{1}{4}\xi^{-1}(\chi)\Big(2\xi'(\chi)\dot{\alpha}\gamma_0\gamma^1 + \cot\theta\big(\dot{\alpha}\gamma_0\gamma^2 - 2\xi^{-1}(\chi)\xi'(\chi)\gamma_1\gamma^2\big)\Big) \\
&+ \frac{3}{4}\ddot{\alpha} - \xi^{-1}(\chi)\xi''(\chi) + \frac{3}{16}\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\xi^{-2}(\chi) + \frac{1}{4}\xi^{-2}(\chi)\cot^2\theta\Big] + m^2\Big\}\Psi \\
= 0 &
\end{aligned}$$

A.6 Jacobi-Polynome

Die Jacobi-Polynome, die im winkelabhängigen Anteil des Dirac-Spinors auftraten, haben noch eine andere explizite Darstellung [1]:

$$P_l^{(\beta_1,\beta_2)}(x) = \frac{\Gamma(\beta_1+l+1)}{l!\Gamma(\beta_1+\beta_2+l+1)}\sum_{m=0}^{l}\binom{l}{m}\frac{\Gamma(\beta_1+\beta_2+l+m+1)}{2^m\Gamma(\beta_1+m+1)}(x-1)^m$$

Unter Benutzung von

$$(x-1)^m = (-1)^m\sum_{q=0}^{m}\binom{m}{q}(-1)^q x^q$$

gilt:

$$P_l^{(\beta_1,\beta_2)}(x) = c_1(\beta_1,\beta_2,l)\sum_{m=0}^{l}c_2(\beta_1,\beta_2,l,m)\sum_{q=0}^{m}c_3(m,q)x^q, \qquad \text{dabei ist}$$

$$\begin{aligned}
c_1(\beta_1,\beta_2,l) &= \frac{\Gamma(\beta_1+l+1)}{l!\Gamma(\beta_1+\beta_2+l+1)} \\
c_2(\beta_1,\beta_2,l,m) &= (-1)^m\binom{l}{m}\frac{\Gamma(\beta_1+\beta_2+m+1)}{2^m\Gamma(\beta_1+m+1)} \\
c_3(m,q) &= (-1)^q\binom{m}{q}
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck für die Jacobi-Polynome läßt sich in die normale Form eines Polynoms der Ordnung l bringen, wenn man die Doppelsumme ausschreibt und nach Potenzen von x sortiert:

$$P_l^{(\beta_1,\beta_2)}(x) = c_1(\beta_1,\beta_2,l)\sum_{r=0}^{l} b_r x^r$$

Die Koeffizienten b_r sind dabei gegeben durch:

$$b_r = \sum_{s=r}^{l} c_2(\beta_1,\beta_2,l,s)c_3(s,r)$$

A.7 Listing des `Maple V`-Programms zur Berechnung des Ricci-Skalars

Wir berechnen in diesem Anhang den Krümmungsskalar R der Robertson-Walker Metrik mit dem Computerprogramm `Maple V`.

```
> with (tensor):
> coords :=[tau, chi, theta, phi]:
> g:=array (symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
> g[1,1]:=exp(alpha(tau)):
> g[2,2]:=-exp(alpha(tau)):
> g[3,3]:=-exp(alpha(tau))*xi(chi)^2:
> g[4,4]:=-exp(alpha(tau))*xi(chi)^2*sin(theta)^2:
> metric:=create([-1,-1], eval(g));
```

$metric :=$ table([

$index\_char = [-1, -1]$

$$compts = \begin{bmatrix} e^{\alpha(\tau)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\alpha(\tau)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{\alpha(\tau)}\,\xi(\chi)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{\alpha(\tau)}\,\xi(\chi)^2\sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

])

```
> tensorsGR(coords,metric,contra_metric,det_met , C1, C2, Rm, Rc,
R, G, C);
> displayGR(Riemann,Rm);
```

The Riemann Tensor

non − zero components :

$$R1212 = \frac{1}{2}\,(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\,\alpha(\tau))\,e^{\alpha(\tau)}$$

$$R1313 = \frac{1}{2}\,(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\,\alpha(\tau))\,e^{\alpha(\tau)}\,\xi(\chi)^2$$

$$R1414 = \frac{1}{2}\,(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\,\alpha(\tau))\,e^{\alpha(\tau)}\,\xi(\chi)^2\sin(\theta)^2$$

$$R2323 = e^{\alpha(\tau)}\,\xi(\chi)\,(\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}\,\xi(\chi)) - \frac{1}{4}\,(\frac{\partial}{\partial\tau}\,\alpha(\tau))^2\,e^{\alpha(\tau)}\,\xi(\chi)^2$$

$$R2424 = e^{\alpha(\tau)}\,\xi(\chi)\sin(\theta)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}\xi(\chi)\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\alpha(\tau)\right)^2 e^{\alpha(\tau)}\,\xi(\chi)^2\sin(\theta)^2$$

$$R3434 = -e^{\alpha(\tau)}\,\xi(\chi)^2\sin(\theta)^2 - \frac{1}{4}e^{\alpha(\tau)}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\alpha(\tau)\right)^2\xi(\chi)^4\sin(\theta)^2 + e^{\alpha(\tau)}\,\xi(\chi)^2\sin(\theta)^2\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\xi(\chi)\right)^2$$

$$character\ :\ [-1,\ -1,\ -1,\ -1]$$

```
> displayGR(Ricci,Rc);
```

The Ricci tensor

non − zero components :

$$R11 = \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\alpha(\tau)\right)$$

$$R22 = -\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\alpha(\tau)\right)\xi(\chi) - 4\left(\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}\xi(\chi)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\alpha(\tau)\right)^2\xi(\chi)}{\xi(\chi)}$$

$$R33 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\alpha(\tau)\right)\xi(\chi)^2 + \xi(\chi)\left(\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}\xi(\chi)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\alpha(\tau)\right)^2\xi(\chi)^2 - 1 + \left(\frac{\partial}{\partial\chi}\xi(\chi)\right)^2$$

$$R44 = -\frac{1}{2}\sin(\theta)^2\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\alpha(\tau)\right)\xi(\chi)^2 - 2\,\xi(\chi)\left(\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}\xi(\chi)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\alpha(\tau)\right)^2\xi(\chi)^2 + 2 - 2\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\xi(\chi)\right)^2\right)$$

$$character\ :\ [-1,\ -1]$$

```
> displayGR(Ricciscalar,R);
```

The Ricci Scalar

$$R = \frac{1}{2}\,\frac{6\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\alpha(\tau)\right)\xi(\chi)^2 - 8\,\xi(\chi)\left(\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}\xi(\chi)\right) + 3\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\alpha(\tau)\right)^2\xi(\chi)^2 + 4 - 4\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\xi(\chi)\right)^2}{e^{\alpha(\tau)}\,\xi(\chi)^2}$$

Literatur

[1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables.* Dover, NY, 1964.

[2] E. Balslev, J. Manuceau, and A. Verbeure. Representations of anticommutation relations and bogolioubov transformations. *Comm. Math. Phys.*, 8:315–326, 1968.

[3] C. Binnenhei. Bogoliubov-transformationen und lokalisierte morhismen für freie dirac-felder. Master's thesis, Universität Bonn, 1993.

[4] R. Brunetti, K. Fredenhagen, and M. Köhler. The microlocal spectrum condition and wick polynomials of free fields on curved spacetimes. *gr-qc*, 9510056, 1995.

[5] B.S. DeWitt and R. Brehme. Radiation damping in a gravitational field. *Ann.Phys.(NY)*, 9:220–259, 1960.

[6] J. Dieckmann. Cauchy surfaces in a globally hyperbolic space-time. *J.Math.Phys.*, 29(3):578–579, 1988.

[7] J. Dimock. Dirac quantum fields on a manifold. *Transactions of the American Mathematical Society*, 269(1):133, 1982.

[8] J.J. Duistermaat and L. Hörmander. Fourier integral operators ii. *Acta Mathematica*, 128:183–269, 1972.

[9] R.H. Good. Properties of the dirac matrices. *Rev. Mod. Phys.*, 27:187, 1955.

[10] R. Haag, H. Narnhofer, and U. Stein. On quantum field theory in gravitational background. *Communications in Mathematical Physics*, 94:219–238, 1984.

[11] S. Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 43:199–220, 1975.

[12] L. Hörmander. Fourier integral operators i. *Acta Mathematica*, 127:79–183, 1971.

[13] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Springer, 2. edition, 1990.

[14] W. Junker. *Adiabatic Vacua and Hadamard States for Scalar Quantum Fields on Curved Spacetime.* PhD thesis, II. Institut f. Theoretische Physik, Hamburg, 1995. DESY-Preprint 95-144.

[15] B. S. Kay and R. M. Wald. Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate killing horizon. *Physics Reports*, 207(2):49–136, 1991.

[16] M. Köhler. *The Stress Energy Tensor of a Locally Supersymmetric Quantum Field on a Curved Spacetime.* PhD thesis, II. Institut f. Theoretische Physik, Hamburg, 1995. DESY-Preprint 95-080.

[17] Lichnerowicz. Champs spinoriel et propagateurs. *Bull. Soc. Math. France*, 92(11), 1964.

[18] C. Lüders and J. E. Roberts. Local quasiequivalence and adiabatic vacuum states. *Communications in Mathematical Physics*, 134:29–63, 1990.

[19] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics.* IOP, 1990.

[20] L. Parker. Quantized fields and particle creation in expanding universes i. *Phys.Rev.*, 183(5):1057–1068, 1969.

[21] L. Parker. Quantized fields and particle creation in expanding universes ii. *Phys.Rev.D*, 3(2):346–356, 1971.

[22] M. Radzikowski. *The Hadamard Condition and Kay's Conjecture in (Axiomatic) Quantum Field Theory on Curved Space-Time.* PhD thesis, Princeton University, 1992.

[23] G. Scharf. *Finite Quantum Electrodynamics.* Springer, 2. edition, 1995.

[24] R. Verch. *Scaling Analysis and Ultraviolet Behaviour of Quantum Field Theories in Curved Spacetime.* PhD thesis, II. Institut f. Theoretische Physik, Hamburg, 1996.

[25] R. Verch. Local definiteness, primarity and quasiequivalence of quasifree hadamard states in curved spacetime. *xxx*, xxx:xxx, 199x.

[26] V.M. Villalba and U. Percoco. Separation of variables and exact solution to dirac and weyl equations in robertson-walker space-times. *J.Math.Phys.*, 31(3):715–720, 1990.

[27] R. M. Wald. *General Relativity.* The University of Chicago Press, 1984.

[28] R. M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics.* The University of Chicago Press, 1994.

[29] A.S. Wightman and L. Gårding. Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum theory. *Arkiv för Fysik*, 28(13):129–184, 1964.