

Zustände niedriger Energie auf Bianchi Raumzeiten

Diplomarbeit

vorgelegt von

Kolja Them

II. Institut für theoretische Physik
Universität Hamburg

21. März 2010

Gutachter der Diplomarbeit:

Prof. Dr. Klaus Fredenhagen
Dr. Mattias N. R. Wohlfarth

Abstract

In this diploma thesis we will extend the states of low energy. These states were introduced by Olbermann in 2007 [26]. The extension is near to the maximum, so that the mathematical methods, used by Olbermann, are still valid. We will extend the states, from isotropic to non-isotropic states, the curves, from timelike geodesics to arbitrary timelike curves and the spacetimes. We will compute the states of low energy for spacetimes with killing vectorfields and for spacetimes without symmetries seperately. After we found out the state of the lowest energy, we will proof that it is a Hadamard state.

Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit werden die Zustände niedriger Energie, welche von 2007 von Olbermann eingeführt wurden [26], auf einen größeren Gültigkeitsbereich ausgeweitet. Bei der Erweiterung werden die mathematischen Methoden, welche von Olberman benutzt wurden, weitestgehend ausgeschöpft. Es werden die Zustände, auf nicht-isotrope Zustände, die Kurven, von der zeitartigen Geodäte auf beliebige zeitartige Kurven und die Raumzeiten erweitert. Für Raumzeiten, welche Killingvektorfelder besitzen und für Raumzeiten, welche keine Symmetrien besitzen, werden die Zustände getrennt aufgestellt. Anschließend wird deren Hadamardeigenschaft bewiesen.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	4
1. Einleitung	6
2. Allgemeine Relativitätstheorie	8
2.1. Die mathematische Struktur der Raumzeit	8
2.1.1. Global hyperbolische Raumzeiten	9
2.2. Das Cauchyproblem	10
2.3. Phasenräume	11
3. Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit	12
3.1. Die Algebra der Observablen	12
3.2. Zustände	13
3.2.1. Die 2-Punktverteilung	14
3.2.2. Hadamardzustände	15
3.2.3. Quasifreie Zustände	16
3.3. Die Darstellung der Algebra durch Zustände	17
4. Energie von skalaren Quantenfeldern in gekrümmter Raumzeit	19
4.1. Der Energie-Impuls-Tensor	19
4.2. Quanten-Energie Ungleichungen	22
5. Skalare Quantenfelder in Robertson-Walker Raumzeiten	24
5.1. Homogene, isotrope, quasifreie Zustände	24
5.2. Zustände niedriger Energie	29
5.3. Zustände niedriger Energie für beliebige Kurven	35
6. Skalare Quantenfelder in der allgemeineren räumlich geschlossenen Welt	40
6.1. Die Konstruktion von quasifreien Zuständen	40
6.2. Die Energiedichte entlang zeitartiger Kurven	43
6.3. Der Zustand zur niedrigsten Energie	46
6.4. Zustände niedriger Energie für homogene Räume	50
6.5. Beweis der Hadamard-Eigenschaft I	54
6.6. Beweis der Hadamard-Eigenschaft II	62
7. Zusammenfassung	65

A. Anhang	67
A.1. Mikrolokale Analysis	67
A.1.1. Grundlegende Operationen mit Distributionen	67
A.1.2. Fouriertransformation und Wellenfrontmenge	68
A.2. Berechnung des Energie-Impuls Tensors aus einer gegebenen Metrik . .	70
A.3. Bianchi Räume	75
A.4. Variation nach der Kurve	76
Literaturverzeichnis	78

1. Einleitung

Die Relativitätstheorie, welche 1916 von Albert Einstein aufgestellt wurde, beschreibt das Verhalten von Raum und Zeit. Sie ist im Wesentlichen eine Theorie der Gravitation. Einstein stand dem zufälligen Eintreffen von Ereignissen, wie es von der Quantentheorie beschrieben wird, sehr skeptisch gegenüber und entwickelte eine Theorie, in welcher jedes zukünftige Ereignis (theoretisch) exakt vorhergesagt werden kann. Diese Theorie findet im makroskopischen Bereich eine sehr gute experimentelle Bestätigung. Im mikroskopischen Bereich ist jedoch die Quantenfeldtheorie eine experimentell hervorragend bestätigte Theorie. Sie besagt, dass sämtliche Materie aus Quanten besteht, deren Verhalten sich nicht eindeutig vorhersagen lässt. Fasst die gesamten, unserem Bewusstsein zugänglichen, physikalischen Phänomene lassen sich mit einer der beiden Theorien beschreiben und erklären.

Eine Theorie, in welcher die Raumzeit durch die Relativitätstheorie beschrieben wird und in welcher die Materie durch Quantenfelder beschrieben wird, erscheint in diesem Licht extrem sinnvoll. Aus dem direkten Zusammenführen dieser beiden unterschiedlichen Theorien, entsteht die Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit. Sie beschreibt das Verhalten von Quantenfeldern, welche durch ein Gravitationsfeld propagieren. Die beobachtbaren Ereignisse in der Theorie können nur, wie in der Quantentheorie, mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit vorhergesagt werden. Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein stattgefundenes Ereignis ein anderes Ereignis in der Zukunft beeinflussen kann, hängt stark von den geometrischen Eigenschaften der Raumzeit ab. Die Information, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Ereignis beobachtet wird, ist in den Zuständen enthalten.

In der Kosmologie wird die Raumzeit des Universums oft durch die Robertson-Walker Raumzeiten beschrieben. Sie sind exakte Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen. Die sich im Universum befindende Materie wird dabei als absolut gleichmäßig verteilt angenommen. Diese Raumzeiten eignen sich zur Modellierung der Geschichte des Universums, zu welchen Zeiten es wie stark expandiert oder sich zusammenzieht. Die Untersuchung von Quantenfeldern lässt sich auf einer solchen Raumzeit, aufgrund der hohen Symmetrie, gut durchführen. Werden für die Zustände, die ein skalares Quantenfeld annehmen kann, die Symmetrieeigenschaften dieser Raumzeit gefordert, so lassen sich diese in expliziter Form angeben [25]. Mit der Kenntnis dieser Zustände lassen sich dann weitere Eigenschaften, wie der Energie-Impuls Tensor des Quantenfeldes berechnen. Im Allgemeinen ist über den Energie-Impuls Tensor von Quantenfeldern in gekrümmter Raumzeit noch nicht viel bekannt. Es gibt jedoch plausible Methoden, wie er aus einem gegebenen Zustand berechnet werden kann. Gesichert ist, dass für einen, nach dieser Methode berechneten, Energie-Impuls Tensor die Energiemenge, welche auf einer zeitartigen Kurve, mit einer Gewichtung detektiert wird, nach un-

ten beschränkt ist. Auf Robertson-Walker Raumzeiten wurde bereits, innerhalb der in [25] konstruierten Klasse von Zuständen, der Zustand bestimmt, bei welchem die verschmierte Energiedichte minimal ist, wenn sie entlang einer Geodäten gemessen wird [26]. Die Zustände bilden für die gegebene Situation eine Art Grundzustand und könnten als Ersatz für den fehlenden Vakuumzustand dienen.

Auf extrem große Distanzen mögen die Robertson-Walker Raumzeiten eine annehmbare Approximation sein, auf kleineren Längenskalen ergeben sich jedoch erhebliche Abweichungen. So liefert z.B. der Virgo-Galaxienhaufen eine relativ große Ansammlung an Energie und Materie, während über weite Strecken im Universum nur wenige Atome pro Kubikmeter anzutreffen sind. Auch gibt es viele andere physikalische Situationen, welche besser durch eine andere Symmetrie, als die der Robertson-Walker Raumzeiten, beschrieben werden können. Es ist also sinnvoll das vorhandene Wissen, über die Zustände niedriger Energie, auf Raumzeiten auszuweiten, welche keine oder andere Symmetrien besitzen. Mit der Erweiterung der Raumzeiten ist es auch sinnvoll die entsprechenden Symmetrieeigenschaften der Zustände aufzuheben.

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist daher die Konstruktion von Zuständen niedriger Energie auf einer möglichst großen Klasse von Raumzeiten und Zuständen. Auch soll die Einschränkung auf die Geodäte aufgehoben und auf beliebige zeitartige Kurven erweitert werden. Dazu wird als erstes eine Menge von Zuständen auf einer möglichst großen Menge von Raumzeiten konstruiert. Dabei wird die Methode aus [25] verwendet, welche für kompakte Cauchyflächen maximal erweitert wird. Die Einschränkung auf kompakte Cauchyflächen geschieht deshalb, weil für diese viel über die Eigenwerte und Eigenfunktionen des zugehörigen Laplace-Beltrami Operators bekannt ist. Ein prominentes Beispiel einer Raumzeit, für welche ein Zustand niedriger Energie konstruiert werden kann, ist Einsteins statisches Universum von 1917. Weiterhin befinden sich Bianchi-Raumzeiten unter den Raumzeiten, welche von den mathematischen Methoden zugelassen werden. Insgesamt haben die zugelassenen Raumzeiten jedoch noch eine gewisse Ähnlichkeit mit der Struktur der Robertson-Walker Raumzeiten. Als nächstes wird der Energie-Impuls Tensor für die konstruierten Zustände ausgerechnet und bestimmt, welche verschmierte Energiemenge auf einer beliebigen, zeitartigen Kurve gemessen wird. Verschmiert wird dabei mit einer Testfunktion. Der Zustand zur niedrigsten Energie wird dadurch gefunden, dass die gesamte Menge der Zustände geeignet parametrisiert wird und dann nach dem Minimum der verschmierten Energie, analog zu [26], gesucht wird. Der Zustand zur niedrigsten Energie wird für homogene Raumzeiten und für Raumzeiten, welche keine Symmetrien besitzen, getrennt angefertigt. Dieses geschieht, weil der Energie-Impuls Tensor im ersteren Fall von den räumlichen Koordinaten unabhängig sein muss. Nachdem die Zustände bestimmt wurden, wird die Hadamardeigenschaft dieser Zustände bewiesen. Dieses geschieht entsprechend in zwei getrennten Beweisen.

2. Allgemeine Relativitätstheorie

2.1. Die mathematische Struktur der Raumzeit

Die allgemeine Relativitätstheorie beschreibt wie sich Licht und materielle Körper, in einem Gravitationsfeld, durch Raum und Zeit bewegen. Jede Form von Energie ist äquivalent zu Masse und nimmt Einfluss auf die geometrische Struktur der Raumzeit, welche den Massen vorgibt, wie sie sich zu bewegen haben.

Raum und Zeit werden zur Raumzeit zusammengefasst, welche durch eine zusammenhängende, vierdimensionale, zeitorientierte, differenzierbare Mannigfaltigkeit (M, A) modelliert wird. M ist hierbei ein parakompakter Hausdorffraum und A ein Atlas, also eine Familie von Karten $A = \{(U_\lambda, \Phi_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$, $\Lambda \neq \emptyset, \forall \lambda \in \Lambda$ ist $\Phi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^4$ bijektiv und ordnet den Punkten der Raumzeit ihre Koordinaten zu. Diese Zuordnung ist in hohem Maße willkürlich. Tatsächlich ist die Mannigfaltigkeit durch eine Äquivalenzklasse von Atlanten definiert, was eine mathematische Formulierung, der physikalischen Forderung, der allgemeinen Kovarianz ist. Die Geometrie der Raumzeit ist durch die Metrik gegeben, welche durch die Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{ab} + \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa T_{ab} \quad (2.1)$$

mit dem Energie-Impuls-Tensor verknüpft ist. Die Metrik g besitzt die Signatur $(+ - - -)$. Viele wichtige Größen werden mit Hilfe von Tensorfeldern beschrieben, welche als Schnitte in Vektorbündeln aufgefasst werden können. Daher ist es hilfreich Vektorbündel $T_s^r M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \bigotimes_s^r T_p M$ zu konstruieren, bei denen die Basis die Menge aller Raumzeitpunkte M und die Fasern r -fach kontravariante und s -fach kovariante Tensorprodukte des Tangentialraumes $T_p M$ sind. Tensorfelder sind \mathcal{C}^∞ -Abbildungen $t : M \rightarrow T_s^r M$ mit $\prod \circ t = 1$, wobei \prod die Surjektion von $T_s^r M$ nach M ist. Die Menge der r, s -Tensorfelder sei mit $\Gamma_s^r M$ bezeichnet. Wir werden $\Gamma_0^0 M$ später mit $\mathcal{E}(M)$ bezeichnen. Von großem praktischem Nutzen ist auch die lokale Basisdarstellung $t = t_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \partial_{x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$. Ein Kartenwechsel induziert Abbildungen zwischen den Tensorfeldern. Die Tangentialräume sind an jedem Punkt isomorph zum Minkowskiraum. Mit dem metrischen Tensorfeld $g \in \Gamma_2^0 M$ lassen sich ihre Elemente in zeitartige ($g_{ab}u^a u^b > 0$), lichtartige ($g_{ab}u^a u^b = 0$) und Raumartige ($g_{ab}u^a u^b < 0$) Vektoren aufteilen. Dadurch kann mit Hilfe eines zeitartigen, zukunftsgerichteten Vektorfeldes $Z \in \Gamma_0^1 M$ eine Kegelschar $J^+ := \{J_p^+ | p \in M\}$, wobei $J_p^+ := \{u \in T_p M | g(u, Z_p) > 0, g(u, u) > 0\}$, ausgezeichnet werden. Analoges gilt für die Vergangenheitslichtkegel. Mit der kovarianten Ableitung ∇ lässt sich die Änderung eines Tensorfeldes t in eine bestimmte Richtung X ausrechnen. Es gilt $\nabla :$

$\Gamma_0^1 M \times \Gamma_s^r M \rightarrow \Gamma_s^r M, (X, t) \mapsto \nabla_X t$ ist linear in X und t , sowie die Produktregel $\nabla_X (ft) = (\nabla_X f)t + f(\nabla_X t)$, $f \in \Gamma_0^0 M$. Eine Geodäte ist eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M, I \subset \mathbb{R}$, deren Tangentialvektoren $\dot{\gamma}$ an jedem Punkt $\gamma(\tau) \in M, \tau \in I$, durch Paralleltransport, $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$, aus einem beliebigen Punkt der Kurve hervorgehen. Eine kausale Kurve ist eine Kurve deren Tangentialvektoren alle in J^+ liegen. Ein Beobachter ist ein, mit Notizblock und Meßinstrumenten ausgestatteter Physiker, welcher sich auf einer kausalen, zeitartigen Kurve bewegt. Die kausale Zukunft $\mathcal{J}^+(U)$ von $U \subset M$ ist die Menge aller $q \in M$, die durch eine kausale zukunftsgerichtete Kurve mit einem Punkt $p \in U$ verbunden werden können. Die chronologische Zukunft $\mathcal{I}^+(U)$ von $U \subset M$ ist die Menge aller Punkte $q \in M$, welche durch eine zeitartige, zukunftsgerichtete Kurve mit Punkten $p \in U$ verbunden werden können. Analoges gilt für die Vergangenheiten $\mathcal{J}^-(U)$ und $\mathcal{I}^-(U)$. Ein Punkt $q \in M$ heißt Zukunftsendpunkt einer kausalen zukunftsgerichteten Kurve γ , wenn für jede Umgebung U von q ein t_0 existiert, sodass $\gamma(t) \in U$ für $t > t_0$ gilt. Eine Kurve, welche keinen Zukunftsendpunkt besitzt, heißt nicht in die Zukunft erweiterbar. Analoges gilt für die Vergangenheit. Eine kausale Kurve, die keinen Zukunfts- und Vergangenheitsendpunkt besitzt, heißt nicht erweiterbare kausale Kurve.

2.1.1. Global hyperbolische Raumzeiten

Eine Cauchyfläche $\Sigma \subset M$ ist eine raumartige Hyperfläche, die von jeder nicht erweiterbaren kausalen Kurve genau einmal geschnitten wird. Eine Raumzeit (M, g) , die eine Cauchyfläche besitzt, heißt global hyperbolisch.

Satz 2.1.1 ([2],[31]) *Wenn (M, g) global hyperbolisch ist, mit Cauchyfläche Σ , dann ist M diffeomorph zu $\mathbb{R} \times \Sigma$. Weiterhin kann M durch eine einparametrische Familie von glatten Cauchyflächen Σ_t aufgeblättert werden.*

Beispiele für global hyperbolische Raumzeiten sind Robertson-Walker Raumzeiten. Sie genügen dem kosmologischen Prinzip [12]. Das kosmologische Prinzip besagt, dass unser Universum homogen und isotrop ist. Auf riesigen Längenskalen ist dieses, für den sichtbaren Bereich des Universums, eine annehmbare Approximation. Robertson-Walker Raumzeiten sind Raumzeitmodelle mit maximal symmetrischen, dreidimensionalen Untermannigfaltigkeiten, welche Cauchyflächen und riemannsche Mannigfaltigkeiten sind. Sie sind Schnitte zu bestimmten Zeitpunkten und haben räumlich konstante Krümmung. Das Linienelement der Robertson-Walker-Raumzeit ist

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right) \quad (2.2)$$

Der Skalenparameter $a(t)$ lässt sich so wählen, dass der Krümmungsskalar k die Werte $\{1, 0, -1\}$ annehmen kann. $k = 1$ entspricht einem unbegrenzten, endlichen Universum, dessen Cauchyflächen sphärisch (positiv) gekrümmt sind. $k = 0$ entspricht einem unendlichen, flachen Universum, also ohne räumliche Krümmung und $k = -1$ entspricht einem räumlich unbegrenzten Universum, dessen Cauchyflächen hyperbolisch

(negativ) gekrümmt sind. Schreibt man die Metrik als

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 h_{ij}^k dx^i dx^j, \quad (2.3)$$

so ist die, auf den Cauhyflächen $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^{-1}$ induzierte Metrik, durch

$$s_{ij}^k = a(t)^2 h_{ij}^k \quad (2.4)$$

gegeben.

2.2. Das Cauchyproblem

Das Cauchyproblem für die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square_g + m^2)\phi = 0, \quad (2.5)$$

mit $\square_g = g^{ab}\nabla_a\nabla_b$, ist auf einer global hyperbolischen Raumzeit eindeutig lösbar. Wir bezeichnen den Raum aller glatten Lösungen ϕ der Klein-Gordon-Gleichung mit $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}^\infty(M)$. Den Raum aller Testfunktionen mit kompaktem Träger bezeichnen wir mit $\mathcal{D}(M) := \mathcal{C}_0^\infty(M)$. Jede Lösung $\phi \in \mathcal{L}$ der Klein-Gordon-Gleichung kann über einen Operator

$$E : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{L}, f \mapsto Ef = \phi \quad (2.6)$$

erzeugt werden. Falls $Ef = 0$ ist, gilt $f = (\square_g + m^2)g, g \in \mathcal{D}(M)$. Der Operator E ist die Differenz, $E = E^+ - E^-$, zwischen avancierter Fundamentallösung E^+ und retardierter Fundamentallösung E^- , welche Operatoren von $\mathcal{D}(M)$ nach $\mathcal{C}^\infty(M)$ sind [13]. Für E, E^+, E^- und $f \in \mathcal{D}(M)$ gelten die Eigenschaften [24]

$$E^\pm(\square_g + m^2)f = f = (\square_g + m^2)E^\pm f \quad (2.7)$$

$$\text{supp}(E^+ f) \subset \mathcal{J}^+(\text{supp}(f)) \quad (2.8)$$

$$\text{supp}(E^- f) \subset \mathcal{J}^-(\text{supp}(f)) \quad (2.9)$$

$$E(\square_g + m^2)f = 0 = (\square_g + m^2)Ef \quad (2.10)$$

$$\text{supp}(Ef) \subset (\mathcal{J}^+(\text{supp}(f)) \cup \mathcal{J}^-(\text{supp}(f))). \quad (2.11)$$

Der Integralkern $E(x, y)$ ist eine antisymmetrische Distribution auf $\mathcal{D}(M) \otimes \mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(M \times M)$. Jedes $\phi \in \mathcal{L}$ kann eindeutig auf seine Anfangsdaten auf einer Cauchyfläche abgebildet werden.

Satz 2.1.2 ([32]): Sei (M, g) eine global hyperbolische Raumzeit mit glatter, raumartiger Cauchyfläche Σ . Dann gibt es zu jedem Paar $\phi_0, \dot{\phi}_0 \in \mathcal{D}(\Sigma)$ eine eindeutige Lösung $\phi \in \mathcal{L}$ von (1.5), die auf ganz M definiert ist. Dabei ist $\phi_0 = \phi|_\Sigma$ und $\dot{\phi}_0 = n^a \nabla_a \phi|_\Sigma$, mit der Einheitsflächennormale n^a auf Σ . Weiterhin variiert ϕ kontinuierlich mit seinen Anfangsdaten.

Es lassen sich zwei Operatoren ρ_0, ρ_1 definieren, mit denen die glatten Lösungen auf ihre Cauchydaten abgebildet werden können:

$$\rho_0 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{D}(\Sigma, \mathbb{R}), \phi \mapsto \rho_0(\phi) = \phi|_{\Sigma} := \phi_0 \quad (2.12)$$

$$\rho_1 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{D}(\Sigma, \mathbb{R}), \phi \mapsto \rho_1(\phi) = n^a \nabla_a \phi|_{\Sigma} := \dot{\phi}_0 \quad (2.13)$$

Der Träger von ϕ liegt in der kausalen Zukunft und kausalen Vergangenheit der Träger von ϕ_0 und $\dot{\phi}_0$ [24]:

$$\text{supp}(\phi) \subset \left(\bigcup_{\pm} \mathcal{I}^{\pm}(\text{supp}(\phi_0)) \cup \left(\bigcup_{\pm} \mathcal{I}^{\pm}(\text{supp}(\dot{\phi}_0)) \right) \right) \quad (2.14)$$

Der Raum der Cauchydaten wird mit L bezeichnet.

2.3. Phasenräume

Unter einem klassischen Phasenraum versteht man einen symplektischen Vektorraum $(\mathcal{V}, \sigma_{\mathcal{V}})$. Ein symplektischer Vektorraum ist ein Vektorraum \mathcal{V} , auf welchem eine symplektische Form $\sigma_{\mathcal{V}}$ definiert ist. Eine symplektische Form ist eine schiefsymmetrische Bilinearform, welche nichtentartet ist. Schiefsymmetrisch bedeutet

$$\sigma_{\mathcal{V}}(f, g) = -\sigma_{\mathcal{V}}(g, f), \quad f, g \in \mathcal{V} \quad (2.15)$$

und nichtentartet bedeutet

$$\sigma_{\mathcal{V}}(f, g) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{V} \Rightarrow g = 0. \quad (2.16)$$

Der Raum der glatten Lösungen \mathcal{L} und der Raum der Cauchydaten L können zu Phasenräumen ausgebaut werden. Die symplektische Form $\sigma_{\mathcal{L}}$ ist durch

$$\sigma_{\mathcal{L}}(\phi_1, \phi_2) := \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{|h|} n^a (\phi_1 \nabla_a \phi_2 - \phi_2 \nabla_a \phi_1), \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{L} \quad (2.17)$$

gegeben. Für die Integration ist es dabei egal, welche Cauchyfläche Σ gewählt wird. Auf dem Raum der Cauchydaten L werden je zwei Elemente ϕ_0 und $\dot{\phi}_0$ zu einem Element $F = (\phi_0, \dot{\phi}_0) \in L$ zusammengefasst. Die symplektische Form auf L ist durch

$$\sigma_L(F_1, F_2) := - \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{|h|} (\phi_{01} \dot{\phi}_{02} - \phi_{02} \dot{\phi}_{01}) \quad (2.18)$$

gegeben, wobei $F_i = (\phi_{0i}, \dot{\phi}_{0i}) \in L$ ist. Die beiden Phasenräume $(\mathcal{L}, \sigma_{\mathcal{L}})$ und (L, σ_L) sind zueinander isomorph.

3. Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit

In der Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit wird das Verhalten von Quantenfeldern untersucht, welche in einem Gravitationsfeld propagieren, dass durch die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben wird.

3.1. Die Algebra der Observablen

Wegen der fehlenden Translationsinvarianz in gekrümmter Raumzeit, lässt sich der Weg, wie auf dem flachen Minkowskiraum, über die unitären Darstellungen der Poincare-Gruppe zur Konstruktion der Hilberträume, in denen sich die Zustände befinden, nicht nutzen. Es ist daher geeigneter den algebraischen Formalismus der Quantenfeldtheorie zu benutzen [14], [17]. Hier sind die Zustände keine Hilbertraumvektoren, sondern positive, stetige, lineare Funktionale auf der Algebra der Observablen. An die Funktionale werden Bedingungen gestellt, welche die Menge aller zur Verfügung stehenden Funktionale einschränkt. Auf global hyperbolischen Raumzeiten gibt es ein allgemeines Verfahren, um die Algebra der Observablen zu konstruieren. Zunächst werden wir einige grundlegende Begriffe über Algebren einführen.

Eine Algebra \mathcal{A} ist ein Vektorraum, in welchem noch eine weitere Abbildung $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (Multiplikation) mit den Eigenschaften $(a_1 + a_2)b = a_1b + a_2b$, $a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2$, $a(bc) = (ab)c$, $(\alpha a)b = a(\alpha b) = \alpha ab$, $a, a_i, b, b_i \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{C}$ definiert ist. Eine *-Algebra ist eine Algebra, in der eine Abbildung $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ mit den Eigenschaften $(ab)^* = b^*a^*$, $(a + b)^* = a^* + b^*$, $(\alpha a)^* = \alpha^*a^*$, $a^{**} = a$ definiert ist. a^* nennt man das zu a adjungierte Element. Eine C*-Algebra ist eine *-Algebra und auch ein Banachraum, wobei die Norm die Bedingungen $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$, $\|a^*\| = \|a\|$, $\|aa^*\| = \|a\| \|a^*\|$ und $\|e\| = 1$ erfüllt. Mit e ist das Einselement gemeint.

Die Lösung ϕ von (1.5) wird in der Quantenfeldtheorie als operatorwertige Distribution interpretiert, welche einer Testfunktion einen Operator auf einem Hilbertraum zuordnet. Dieser Hilbertraum ist aber auf gekrümmten Raumzeiten nicht eindeutig festgelegt, so dass eine hohe Zahl an verschiedenen Hilberträumen gleichberechtigt sind. Daher wird die Zielmenge der operatorwertigen Distributionen zunächst noch eine abstrakte Algebra sein, für die später eine geeignete Darstellung, die GNS-Darstellung, gefunden wird. Uns interessieren insbesondere drei C*-Algebren, welche mit den drei Phasenräumen assoziiert werden. Diese sind die Feldalgebra \mathcal{A} und zwei Weylalgebren $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}$ und \mathcal{W}_L . Die Feldalgebra \mathcal{A} , welche mit dem Raum der Testfunktionen assoziiert wird, wird von den Elementen $\phi(f)$, $f \in \mathcal{D}(M)$ erzeugt, wobei man noch durch das

Ideal, welches von den Feldgleichungen und den Vertauschungsrelationen erzeugt wird, dividiert [13]. Die Elemente erfüllen die Bedingungen [24]

1. $\phi(f)$ ist linear
2. ϕ erfüllt (1.5) im Sinne von Distributionen: $\phi((\square_g + m^2)f) = 0$
3. $[\phi(f), \phi(g)] = iE(f, g)$
4. $\phi(f)^* = \phi(\bar{f})$.

Die Weylalgebra $\mathscr{W}_{\mathscr{L}}$ wird mit dem Raum der glatten Lösungen assoziiert und ist die, unter der C^* -Norm vervollständigte Menge, welche durch die Elemente $W(\phi), \phi \in \mathscr{L}$ erzeugt wird. Die Elemente $W(\phi) \in \mathscr{W}_{\mathscr{L}}$ genügen den folgenden Bedingungen:

1. $W(0) = 1$
2. $W(\phi)^* = W(-\phi)$
3. $W(\phi_1)W(\phi_2) = e^{-\frac{i}{2}\sigma_{\mathscr{L}}(\phi_1, \phi_2)}W(\phi_1 + \phi_2)$.

Die Elemente $W(F)$ der Weylalgebra \mathscr{W}_L , welche mit dem Raum der Cauchydaten assoziiert wird, genügen den selben Bedingungen wie oben, bloß dass $\sigma_{\mathscr{L}}$ durch σ_L zu ersetzen ist. Diese beiden Algebren sind, wie die zugehörigen Phasenräume, isomorph. Über die Exponentialabbildung lässt sich auch ein Zusammenhang zur Feldalgebra herstellen.

3.2. Zustände

Ein Zustand ω ist ein lineares Funktional auf der Algebra der Observablen:

$$\omega : \mathscr{A} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

Es soll die Normierung

$$\omega(e) = 1 \quad (3.2)$$

und die Positivitätsbedingung

$$\omega(A^*A) \geq 0 \quad (3.3)$$

gelten. Ein Zustand ist eindeutig bestimmt, wenn alle seine n-Punktfunktionen

$$\omega(\phi(f_1)\dots\phi(f_n)) = \omega_n(f_1, \dots, f_n) \quad (3.4)$$

bekannt sind. Die n-Punktfunktionen sind wohldefinierte Distributionen in n Argumenten aus M und sind in jedem Argument Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung. Sie erfüllen wegen der kanonischen Vertauschungsrelationen die Bedingung [13]

$$\omega_{n+2}(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+2}) - \omega_{n+2}(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots) \quad (3.5)$$

$$= iE(x_i, x_{i+1})\omega_n(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+2}). \quad (3.6)$$

3.2.1. Die 2-Punktdistribution

Eine der wichtigsten Charakterisierungen der Zustände geschieht durch die 2-Punktdistribution. Aus ihr lässt sich auch der Energie-Impuls Tensor eines Zustandes bestimmen. Sie ist durch

$$\omega(\phi(f)^*\phi(g)) = \int d^4x d^4x' \omega_2(x, x') \bar{f}(x) g(x') \quad (3.7)$$

gegeben. $\omega_2(x, x')$ ist eine Bilösung der Klein-Gordon-Gleichung (im Sinne von Distributionen) und muss die Positivitätsbedingung erfüllen:

$$\int d^4x d^4x' \omega_2(x, x') \bar{f}(x) f(x') \geq 0, \quad f \in \mathcal{D}(M) \quad (3.8)$$

Der antisymmetrische Anteil einer jeden 2-Punktdistribution muss mit der Kommutatorfunktion übereinstimmen.

$$\omega_2(x, x') - \omega_2(x', x) = \frac{i}{2} E(x, x') \quad (3.9)$$

Der symmetrische Anteil wird im weiteren Verlauf mit μ bezeichnet, wodurch sich die Zweipunktfunktion in

$$\omega_2(f, g) = \mu(f, g) + \frac{i}{2} E(f, g) \quad (3.10)$$

zerlegen lässt. Der symmetrische Anteil lässt sich in einen singulären und einen glatten Anteil zerlegen. Der singuläre, symmetrische Anteil muss gemeinsam mit der Kommutatorfunktion die mikrolokale Spektrumsbedingung erfüllen, welche weiter unten erklärt wird. Eine 2-Punktdistribution, welche die mikrolokale Spektrumsbedingung erfüllt, liefert einen Hadamardzustand. Der glatte Anteil ist nicht eindeutig bestimmt und zwei Hadamardzustände können sich in ihren 2-Punktdistributionen nur um einen glatten Anteil unterscheiden. Jede 2-Punktdistribution, welche zu einem Hadamardzustand gehört, lässt sich in der allgemeinen Form

$$H = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Delta^{1/2}}{\sigma_+} + \sum_{j=0}^{\infty} v_j \frac{\sigma^j}{l^{2(j+1)}} \ln \left(\frac{\sigma_+}{l^2} \right) + \sum_{j=0}^{\infty} w_j \frac{\sigma^j}{l^{2(j+1)}} \right) \quad (3.11)$$

schreiben. Die Distributionen $\Delta^{1/2}$, σ_+ , v_j , σ^j und w_j hängen dabei von den Variablen $(x, x') \in M \times M$ ab. Die Reihen v und w konvergieren im Allgemeinen nicht. σ ist das Quadrat des geodätischen Abstandes und für eine Funktion der Art $F(\sigma_+)$ gilt

$$F(\sigma_+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F(\sigma_\epsilon), \quad \sigma_\epsilon(x, x') = \sigma(x, x') + 2i\epsilon(t(x) - t(x')) + \epsilon^2. \quad (3.12)$$

Die Funktion t ist eine Zeitfunktion, was bedeutet, dass $\nabla^a t$ ein normiertes, zukunftsgerichtetes, zeitartiges Vektorfeld ist. $\Delta^{1/2}$, v_j und w_j sind glatte Funktionen und es gilt $\Delta^{1/2}(x, x) = 1$ und

$$\Delta^{1/2}(x, y) = \frac{1}{4} |g(x)|^{-1/4} |g(y)|^{-1/4} \left| \det \frac{\partial}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial y^b} \sigma(x, y) \right|^{1/2}. \quad (3.13)$$

Die hier auftretende Determinante ist unter dem Namen van Vleck Morette Determinante bekannt. Die Funktion v ist für alle Hadamardzustände die selbe und die $v^n(x, y) = \sum_{m=0}^n v_m(x, y) \sigma(x, y)^m$, $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v^n$ sind durch die Hadamardschen Rekursionsformeln gegeben, welche z.B. in [11] zu finden sind. Die 2-Punktdistributionen können sich also nur in

$$w(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(x, y) \sigma(x, y)^j \quad (3.14)$$

unterscheiden. Wird w_0 vorgegeben, so ist die gesamte Reihe eindeutig festgelegt. Somit lässt sich ein Zustand eindeutig identifizieren, wenn sein w_0 bekannt ist. Die Funktion w_0 muss daher so gewählt sein, dass ω_2 eine Bilösung der Klein-Gordon-Gleichung ist, welche die Positivitätsbedingung erfüllt. Die explizite Angabe solcher Funktionen ist, bis jetzt, im Allgemeinen nicht möglich.

3.2.2. Hadamardzustände

Wie oben bereits gesehen wurde, muss die Zweipunktdistribution eines Hadamardzustandes eine bestimmte Singularitätsstruktur besitzen. Radzikowski hat gezeigt, dass die Hadamardeigenschaft äquivalent und auf sehr schöne Weise, in der Sprache der mikrolokalen Analysis formuliert werden kann. Kay und Wald geben in [23] eine genaue Definition eines Hadamardzustandes über die Singularitätsstruktur an, wobei sie darauf Rücksicht nehmen, dass das Quadrat des geodätischen Abstandes, σ , nur auf normal konvexen Mengen sinnvoll definiert werden kann. Hier soll die Definition aus [5] kurz wiedergegeben werden:

Lemma 2.1.1 Zu jeder Cauchyfläche Σ einer global hyperbolischen Raumzeit (M, g) existiert eine Umgebung \mathcal{N} von Σ , sodass für zwei Punkte $x_1, x_2 \in \mathcal{N}$ mit $x_1 \in \mathcal{I}^+(x_2)$ eine normal konvexe Umgebung von $\mathcal{I}^-(x_1) \cap \mathcal{I}^+(x_2)$ existiert. \mathcal{N} heißt kausal normale Umgebung von Σ .

Lemma 2.1.2 Sei $\mathcal{V} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ die Menge der kausal verbundenen Punkte $x, x' \in M$, sodass für $\mathcal{I}^+(x) \cap \mathcal{I}^-(x')$ und $\mathcal{I}^-(x_1) \cap \mathcal{I}^+(x_2)$ normal konvexe Umgebungen existieren. Es gibt eine Umgebung O von \mathcal{V} , auf der σ wohldefiniert ist. Sei W die Menge der kausal verbundenen Punkte in M , in $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ existiert jetzt eine offene Umgebung O' von $W \cap \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, sodass $\bar{O}' \subset O \cap \mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

Mit einer $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ -Funktion χ , für die $\chi(x, x') = 1$, $(x, x') \in O'$ und $\chi(x, x') = 0$, $(x, x') \notin O$ gilt, lässt sich nun die Definition für einen Hadamardzustand angeben:

Definition 2.1.3 Ein Zustand ω heißt Hadamardzustand, falls seine Zweipunktdistribution ω_2 existiert, und falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine $\mathcal{C}^n(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ -Funktion $w^n(x, x')$ existiert, sodass für $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{N})$ gilt:

$$\omega_2(f_1, f_2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{N}} \times \mathcal{N} d^4x d^4x' \Lambda_\epsilon^{T,n}(x, x') f_1(x) f_2(x') \sqrt{-g} \sqrt{-g'}, \quad (3.15)$$

mit

$$\Lambda_\epsilon^{T,n}(x, x') = \chi(x, x') H_\epsilon^{T,n}(x, x') + w^n(x, x'), \quad (3.16)$$

$H_\epsilon^{T,n}$ ist wie in (2.11) gegeben, nur dass v durch v^n zu ersetzen und w nicht enthalten ist.

Die Hadamardbedingung ist nach Radzikowski äquivalent zur mikrolokalen Spektrumsbedingung [28]. Mit den Begriffen über Wellenfrontmengen aus dem Anhang sei hier das Ergebnis angegeben:

Theorem 2.2.1 [28] *Sei (M, g) eine vierdimensionale global hyperbolische Raumzeit, \mathscr{W} die Weylalgebra über M und $\omega_2 \in \mathscr{D}'(M \times M)$ die Zweipunktdistribution eines Zustandes auf \mathscr{W} . Dann sind äquivalent:*

- ω_2 erfüllt die Hadamardbedingung und ist Lösung der Klein-Gordon-Gleichung
- $WF(\omega_2) = \{((x_1, k_1), (x_2, k_2)) \in T^*M \setminus \mathbf{0} \times T^*M \setminus \mathbf{0} \mid (x_1, k_1) \approx (x_2, -k_2), k_1 \triangleright 0\}$

Die Notation $(x_1, k_1) \approx (x_2, -k_2)$ bedeutet, dass x_1 und x_2 durch eine Nullgeodäte verbunden sind, wobei k_1 tangential zur Geodäte bei x_1 ist und $-k_2$ ist das negative vom Paralleltransport von k_1 , entlang der Geodäte, bei x_2 . $k_1 \triangleright 0$ bedeutet, dass k_1 im Vorwärtslichtkegel von $T_{x_1}^*M$ liegt.

Mit Sobolev-Wellenfrontmengen lassen sich die Zweipunktdistributionen genauer untersuchen [11]. Ist ω_2 ein Hadamardzustand, dann gilt

$$WF^s(\omega_2) = C^{+-} \quad s \geq -1/2, \quad (3.17)$$

$$WF^s(\omega_2) = \emptyset \quad s < -1/2. \quad (3.18)$$

Wird die 2-Punktdistribution wie in (2.11) dargestellt, so gilt für die einzelnen Bestandteile

$$WF^s\left(\frac{1}{\sigma_+}\right) = C^{+-} \quad s \geq -\frac{1}{2}, \quad (3.19)$$

$$WF^s\left(\frac{1}{\sigma_+}\right) = \emptyset \quad s < -\frac{1}{2}, \quad (3.20)$$

$$WF^s(\sigma^j \ln(\sigma_+)) \subset C^{+-} \quad s \geq \frac{1}{2} + j, \quad (3.21)$$

$$WF^s(\sigma^j \ln(\sigma_+)) \subset \emptyset \quad s < \frac{1}{2} + j. \quad (3.22)$$

3.2.3. Quasifreie Zustände

Eine wichtige Klasse von Zuständen bilden die quasifreien Zustände. Sie sind vollständig durch ihre 2-Punktfunktionen bestimmt. Bei einem quasifreien Zustand verschwinden alle ungeraden n-Punktfunktionen und die geraden sind durch

$$\omega_{2j}(\phi(f_1) \dots \phi(f_2)) = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^j \omega_2(f_{\sigma(i)}, f_{\sigma(i+j)}) \quad (3.23)$$

gegeben, wobei die Summe über alle Permutationen σ geht. Ein quasifreier Zustand auf $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}$ ist als das Funktional

$$\omega_{\mu} : \mathcal{W}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{C} \quad (3.24)$$

$$\omega_{\mu}(W(\phi)) = e^{-\frac{1}{2}\mu(\phi, \phi)}, \quad \phi \in \mathcal{L} \quad (3.25)$$

definiert.

3.3. Die Darstellung der Algebra durch Zustände

Ein Zustand liefert durch $\omega(\mathcal{A}) = \langle \Omega | \pi(\mathcal{A}) \Omega \rangle$ eine Darstellung der Algebra durch Operatoren in einem Hilbertraum. Die Abbildung π ordnet also jedem Quantenfeld, welches zunächst noch ein abstraktes Element einer C^* -Algebra ist, einen Hilbertraum-Operator $\pi(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zu. Gelfand, Neumark und Segal konstruierten die nach ihnen benannte GNS-Darstellung:

Satz 2.3.1([32]) *Sei ω ein Zustand auf einer C^* -Algebra \mathcal{A} . Dann existiert ein Hilbertraum \mathcal{H} , eine Darstellung $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und ein Vektor $\Omega \in \mathcal{H}$, sodass*

$$\omega(A) = \langle \Omega | \pi(A) \Omega \rangle \quad (3.26)$$

und $\mathcal{H} = \overline{\pi(\mathcal{A})\Omega}$. Diese Darstellung ist bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig. $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ heißt GNS-Tripel zu ω

Verschiedene Zustände müssen dabei nicht unitär äquivalent sein. Eine ausführliche Darlegung des Themas ist in [3] zu finden. Wir verwenden als Darstellungsraum der Algebra den symmetrischen Fockraum $\mathcal{F}(\mathcal{H})^+$ über einem Raum \mathcal{H} , welcher als Einteilchen-Hilbertraum bezeichnet wird. Für die Darstellung der Algebra muss jedoch eine konkrete Bilinearform μ gewählt werden, allerdings gibt es auf gekrümmten Raumzeiten, welche kein zeitartiges Killingvektorfeld besitzen, keine bevorzugte Wahl von μ . Da μ aber zur Teilchendefinition benutzt wird, lässt sich keine eindeutige Teilcheninterpretation aufstellen. Wird ein μ gewählt, so lässt sich mit dem folgenden Theorem auch der Hilbertraum \mathcal{H} genauer spezifizieren.

Theorem 2.3.2([5]) *Sei \mathcal{V} ein reeller Vektorraum, auf dem eine symplektische Form $\sigma_{\mathcal{V}}$ und eine positive symmetrische Bilinearform μ , welche die Positivitätsbedingung erfüllen, definiert sind. Dann kann man immer einen komplexen Hilbertraum \mathcal{H} mit einer Abbildung $K : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}$ finden, sodass*

1. $K\mathcal{V} + iK\mathcal{V}$ ist dicht in \mathcal{H}
2. $\mu(\phi_1, \phi_2) = \Re \langle K\phi_1 | K\phi_2 \rangle_{\mathcal{H}}, \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{V}$
3. $\sigma_{\mathcal{V}}(\phi_1, \phi_2) = 2\Im \langle K\phi_1 | K\phi_2 \rangle_{\mathcal{H}}, \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{V}$.

Der Realteil des Skalarproduktes auf \mathcal{H} ist also durch μ und der Imaginärteil durch $\sigma_{\mathcal{V}}$ gegeben:

$$\langle K\phi_1 | K\phi_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \mu(\phi_1, \phi_2) + \frac{i}{2}\sigma_{\mathcal{V}}(\phi_1, \phi_2). \quad (3.27)$$

Weiterhin gibt es zu jedem Trippel $(\mathcal{V}, \mu, \sigma_{\mathcal{V}})$ ein Paar (\mathcal{H}, K) , welches bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt ist. Es gibt immer ein μ welches die Positivitätsbedingung erfüllt.

Der Fockraum $\mathcal{F}(\mathcal{H})^+$ wird jetzt wie auf der flachen Raumzeit konstruiert. Man bildet die orthogonale Summe von allen n-fach symmetrischen Tensorprodukten des Einteilchen-Hilbertraumes

$$\mathcal{F}(\mathcal{H})^+ = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n, \quad (3.28)$$

mit

$$\mathcal{H}_n = S_n \mathcal{H}^{\otimes n} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} U(\pi)_n \mathcal{H}^{\otimes n}, \quad (3.29)$$

wobei die Summe über alle Elemente aus der Permutationsgruppe geht und $U(\pi)_n$ ihre unitäre Darstellung auf dem Hilbertraum ist. Die Elemente des Fockraumes sind Folgen

$$\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})^+, \quad \Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots) \quad (3.30)$$

und das Skalarprodukt auf $\mathcal{F}(\mathcal{H})^+$ lautet

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \Phi_n | \Psi_n \rangle. \quad (3.31)$$

Die Elemente $\phi(f)$ der Feldalgebra \mathcal{A} werden auf eine Linearkombination von Erzeuger-, $a^*(f)$, und Vernichteroperatoren, $a(f)$, abgebildet:

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H})^+) \quad (3.32)$$

$$\phi(f) \mapsto \pi(\phi(f)) = \varphi(f) \quad (3.33)$$

$$\varphi(f) = a(f) + a^*(f) \quad (3.34)$$

Für die Erzeuger- und Vernichteroperatoren auf dem Fockraum gilt [13]:

$$(a(f)\Phi)_n(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{n+1} \int dx dy \omega_2(x, y) f(x) \Phi_{n+1}(y, x_1, \dots, x_n) \quad (3.35)$$

$$(a^*(f)\Phi)_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Phi_{n-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (3.36)$$

4. Energie von skalaren Quantenfeldern in gekrümmter Raumzeit

In den Einsteinschen Feldgleichungen ist der Energie-Impuls Tensor der klassischen Materie die Quelle des Gravitationsfeldes. In der Quantenfeldtheorie besteht jedoch jegliche Art von Materie aus Quantenfeldern. Es ist also sinnvoll in der Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit, die klassische Quelle des Gravitationsfeldes durch eine Quelle aus Quantenfeldern zu ersetzen. Dieses geschieht durch den Erwartungswert des Energie-Impuls Tensors, wodurch die semiklassischen Einsteingleichungen entstehen:

$$G_{ab} = 8\pi \langle T_{ab} \rangle. \quad (4.1)$$

4.1. Der Energie-Impuls-Tensor

Die Methoden der Feldtheorie im Minkowskiraum, wo der klassische Energie-Impuls Tensor über das Noethersche Theorem und raumzeitlichen Translationen der Lagrange-Dichte gewonnen wird, sind in gekrümmter Raumzeit nicht anwendbar. In der klassischen Feldtheorie in gekrümmter Raumzeit lässt sich Energie-Impuls-Tensor durch die Variation der Wirkung nach der Metrik gewinnen. Die Lagrangedichte, welche die Klein-Gordon-Gleichung (1.5) liefert, wenn sie nach dem Feld variiert wird, ist

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - m^2 \phi^2). \quad (4.2)$$

Der Energie-Impuls Tensor ist nun durch die Variation der Wirkung $S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}$ nach der Metrik gegeben.

$$T_{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial S}{\partial g_{ab}} \quad (4.3)$$

Bei dem entstehenden Ausdruck treten allerdings Produkte von Feldern auf

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - 1/2 g_{ab} (\nabla^c \phi \nabla_c \phi + m^2 \phi^2), \quad (4.4)$$

was bei der Quantisierung ein Problem ist, weil Produkte von Distributionen an den selben Raumzeitpunkten nicht wohldefiniert sind. Dieses Problem wird durch die Point-Splitting-Methode behoben, welches eine Regularisierung ist [32]. Hierbei betrachtet man die Produkte der Distributionen an unterschiedlichen Raumzeitpunkten und betrachtet den entstehenden Ausdruck als Bidistribution, etwa nach der Art $\langle \phi(x) \phi(x') \rangle$

anstatt $\langle [\phi(x)]^2 \rangle$. Durch diese Point-Splitting-Prozedur ist eine wohldefinierte Distribution auf $\mathcal{D}(M \times M)$ entstanden. Nun muss der entstandene Ausdruck noch renormiert werden. In flacher Raumzeit geschieht dieses durch die Subtraktion des Vakuum Erwartungswertes.

$$\langle T_{ab}(x, y) \rangle - \langle \Omega_{Mink} | T_{ab}(x, y) | \Omega_{Mink} \rangle \quad (4.5)$$

Dieses ist äquivalent zur Normalordnung. Der Ausdruck (3.5) besitzt einen endlichen Limes. In gekrümmter Raumzeit gibt es jedoch keinen Vakuumzustand und es ist zunächst nicht klar, was man statt dessen subtrahieren soll. Eine Renormierung lässt sich jedoch trotzdem durchführen, indem von der Zweipunktdistribution eine andere Bidistribution subtrahiert wird. Man könnte den Energie-Impuls Tensor so durch

$$\langle \hat{T}_{ab}(x) \rangle_\omega = \lim_{x' \rightarrow x} \left(\nabla_a \nabla'_b F_\omega(x, x') - \frac{1}{2} g_{ab} (\nabla_c \nabla'^c + m^2) F(x, x')_\omega \right) \quad (4.6)$$

$$F_\omega(x, x') = \omega_2(x, x') - H(x, x') \quad (4.7)$$

definieren. Die gestrichenen, vektoriellen Größen sind Elemente aus dem Tangentialraum am Punkt x' , die ungestrichenen entsprechend aus dem Tangentialraum am Punkt x . Bei der Limesbildung sind die gestrichenen Größen entlang der eindeutigen Geodäte parallel zu transportieren. Damit dieser Ausdruck als Differenz zweier Zustände mit Zweipunktdistributionen $\omega_2(x, x')$ und $H(x, x')$ eine glatte Funktion liefert, muss $H(x, x')$, für $x' \rightarrow x$, dieselbe Singularitätsstruktur wie $\omega_2(x, x')$ besitzen, wodurch die Äquivalenzrelation

$$\omega_{2,A} \sim \omega_{2,B} \Leftrightarrow \forall x \in M \exists \mathcal{O} \in \mathcal{U}(x) \quad (4.8)$$

$$\omega_{2,A}(x, x') - \omega_{2,B}(x, x') \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \quad (4.9)$$

entsteht. $\mathcal{U}(x)$ ist die Menge aller hinreichend kleinen Umgebungen von x . Mit der Vorgabe eines $H(x, x')$, wird eine Klasse von Zuständen ausgezeichnet, für die der Erwartungswert des Energie-Impuls Tensors wohldefiniert ist. Ihre Zweipunktdistributionen liegen in der von H erzeugten Äquivalenzklasse

$$[H]_\sim = \{ \omega_2 \in \mathcal{D}'(M \times M) | \omega_2 \sim H \}. \quad (4.10)$$

Da es keinen offensichtlichen Weg gibt um $\langle T_{ab} \rangle$ zu definieren stellte Wald in den 70ern 4 Eigenschaften auf, welche $\langle T_{ab} \rangle$ erfüllen sollte und nimmt dadurch in [7] eine axiomatische Herangehensweise um $\langle T_{ab} \rangle$ zu definieren. Akzeptiert man diese Eigenschaften, lässt sich auch $H(x, x')$ genauer spezifizieren. Die 4 Eigenschaften sind:

1. Der wohldefinierte Ausdruck für die Differenz der Energie-Impuls-Tensoren zweier Zustände sollte richtig sein. Immer wenn $\langle \phi(x)\phi(x') \rangle_1 - \langle \phi(x)\phi(x') \rangle_2$ eine glatte Funktion ist, sollte $\langle T_{ab} \rangle_1 - \langle T_{ab} \rangle_2$ durch die oben genannte Point-Splitting-Prozedur gegeben sein.

2. $\langle T_{ab} \rangle$ sollte im folgenden Sinne lokal sein: Seien (M, g) und (M', g') zwei global hyperbolische Raumzeiten und $O \subset M$ eine global hyperbolische, offene Umgebung von $p \in M$, mit Cauchyflächen der Form $O \cap \Sigma$, wobei Σ eine Cauchyfläche von M ist. Weiterhin sei O isometrisch zu einer global hyperbolischen, offenen Umgebung $O' \subset M'$ von $p' \in M'$, mit Cauchyflächen der Form $O' \cap \Sigma'$, wobei Σ' eine Cauchyfläche von M' ist. Mit der Isometrie $i : O \rightarrow O'$, $i(p) = p'$ können wir die Weyl-Unteralgebra $\mathscr{W}_O \subset \mathscr{W}$ von M mit der Weyl-Unteralgebra $\mathscr{W}'_{O'} \subset \mathscr{W}'$ von M' identifizieren. Betrachtet man jetzt zwei Zustände ω auf \mathscr{W} und ω' auf \mathscr{W}' für die gilt, dass ihre Einschränkungen auf \mathscr{W}_O und $\mathscr{W}'_{O'}$ gleich sind, dann soll, unter der Identifikation von O und O' durch i , $\langle T_{ab} \rangle_\omega$ an der Stelle p gleich $\langle T_{ab} \rangle_{\omega'}$ an der Stelle p' sein.
3. Für alle Zustände soll $\nabla^a \langle T_{ab} \rangle = 0$ sein.
4. In dem Minkowskiraum soll $\langle 0 | T_{ab} | 0 \rangle = 0$ gelten.

Die ersten beiden Punkte sind von größerer Bedeutung, weil sie den Energie-Impuls Tensor, bis auf einen lokalen Term, welcher nur von der Geometrie der Raumzeit abhängt, eindeutig festlegen. Sind nämlich $\langle T_{ab} \rangle$ und $\langle \tilde{T}_{ab} \rangle$ zwei auf unterschiedliche Arten gebildete Energie-Impuls-Tenoren, welche die ersten beiden Eigenschaften besitzen, dann gilt für irgendwelche zwei Zustände ω_A und ω_B nach Eigenschaft 1

$$\langle T_{ab} \rangle_A - \langle T_{ab} \rangle_B = \langle \tilde{T}_{ab} \rangle_A - \langle \tilde{T}_{ab} \rangle_B. \quad (4.11)$$

Diese Gleichung bedeutet aber, dass

$$t_{ab} \equiv \langle T_{ab} \rangle_\omega = \langle \tilde{T}_{ab} \rangle_\omega \quad (4.12)$$

unabhängig vom Zustand ω ist. Eigenschaft 2 impliziert nun, dass t_{ab} nur von der Raumzeitgeometrie einer beliebig kleinen offenen Umgebung von p abhängt. Damit Eigenschaft 3 erfüllt ist, muss $\nabla^a t_{ab} = 0$ sein, und Eigenschaft 4 impliziert, dass für den Minkowskiraum $t_{ab} = 0$ gilt. Man erhält damit das folgende Eindeutigkeitstheorem:

Theorem 3.1.1 ([32]) *Seien $\langle T_{ab} \rangle$ und $\langle \tilde{T}_{ab} \rangle$ zwei, durch unterschiedliche Vorschriften gebildete, Energie-Impuls-Tensoren, welche die oben genannten Eigenschaften 1-4 erfüllen. Dann ist $t_{ab} \equiv \langle T_{ab} \rangle_\omega = \langle \tilde{T}_{ab} \rangle_\omega$ ein erhaltener, lokaler Krümmungsterm, also unabhängig vom Zustand ω , es gilt $\nabla^a t_{ab} = 0$ und seine Werte hängen, an jedem Punkt p , nur von der Geometrie der Raumzeit in einer beliebig kleinen offenen Umgebung von p ab. Ist die Umgebung von p flach, so ist dort $t_{ab}(p) = 0$.*

Wenn nun für $H(x, x')$ aus (3.6) eine lokal konstruierte Bidistribution mit passender singularer Struktur gewählt wird, welche in x und x' die Wellengleichung erfüllt und für den Minkowskiraum gleich $\langle 0 | T_{ab} | 0 \rangle$ ist, dann sind alle von den vier oben genannten Eigenschaften erfüllt. Die Singularitätsstruktur von H ist diejenige der Hadamardzustände.

4.2. Quanten-Energie Ungleichungen

Die klassische Energiedichte in der allgemeinen Relativitätstheorie, die ein Beobachter mit vierer-Geschwindigkeit u^a , am Punkt x der Raumzeit misst, ist durch

$$T_{ab}(x)u^a(x)u^b(x) \geq 0 \quad (4.13)$$

gegeben. Diese Gleichung besagt, dass die Energiedichte an jedem Punkt der Raumzeit unabhängig von der Art der (klassischen) Materie oder des (klassischen) Mediums, welcher ihr Ursprung ist, positiv ist. Diese Bedingung an die Energie trägt den Namen schwache Energiebedingung. Im Gegensatz zur klassischen Feldtheorie wird die schwache Energiebedingung in der Quantenfeldtheorie verletzt. Aus Gleichung (3.13) folgt die klassische Energiedichte für einen Beobachter entlang einer glatten zeitartigen Kurve γ mit vierer-Geschwindigkeit u^a

$$\varrho(\tau) = T_{ab}(\gamma(\tau))u^a(\tau)u^b(\tau). \quad (4.14)$$

Den Rest des Abschnittes folgen wir Fewster [10]. Durch die Wahl eines orthogonalen Vierbeins v_μ^a , $\mu = 0, 1, 2, 3$, für welches $g^{ab} = \eta^{\mu\nu}v_\mu^a v_\nu^b$ gilt und dessen Einschränkung von v_0^a auf γ gleich der vierer-Geschwindigkeit u^a ist, lässt sich (3.14) als

$$\varrho(\tau) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\mu=0}^3 v_\mu^a v_\mu^b \right) \nabla_a \phi \nabla_b \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (4.15)$$

schreiben. Dieser Ausdruck ist die Einschränkung auf die Diagonale $\tau = \tau'$ des Biskalarfeldes

$$\varrho(\tau, \tau') = \frac{1}{2} \left(\sum_{\mu=0}^3 v_\mu^a(\gamma(\tau)) v_\mu^b(\gamma(\tau')) \right) \nabla_a \phi(\gamma(\tau)) \nabla_b \phi(\gamma(\tau')) + \frac{1}{2} m^2 \phi(\gamma(\tau))(\gamma(\tau')). \quad (4.16)$$

Die Parametrisierung der Weltlinie an zwei verschiedenen Weltpunkten ist durch den Diffeomorphismus

$$\zeta : \mathbb{R}^2 \rightarrow M \times M, \quad (\tau, \tau') \mapsto \zeta(\tau, \tau') = (\gamma(\tau), \gamma(\tau')) \quad (4.17)$$

gegeben. Die quantisierte Version $\langle T \rangle_\omega$ von $\varrho(\tau, \tau')$, für einen Zustand ω , dessen 2-Punkt-distribution die mikrolokale Spektrumsbedingung erfüllt, ist eine Distribution auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, welche durch den von ζ induzierten Pullback gewonnen wird. $\langle T \rangle_\omega$ ist durch

$$\langle T \rangle_\omega = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \zeta^* \left((v_\mu^a \nabla_a \otimes v_\mu^{b'} \nabla_{b'}) \omega_2 \right) + \frac{1}{2} m^2 \zeta^* \omega_2 \quad (4.18)$$

definiert. ζ^* ist der Pullback von $M \times M$ nach $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Das Ergebnis aus Fewsters Arbeit in [10] ist das

Theorem 3.2.1 ([10]) *Seien ω und ω_0 globale Hadamardzustände auf der Algebra $\mathcal{A}(M, g)$ und $\langle : T : \rangle_\omega = \langle T \rangle_\omega - \langle T \rangle_{\omega_0}$ die bzgl. ω_0 normalgeordnete Energiedichte. Dann ist $\langle : T : \rangle_\omega$ glatt und die Quantenenergie-Ungleichung*

$$\int d\tau (g(\tau))^2 \langle : T : \rangle_\omega(\tau, \tau) \geq - \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\pi} [(g \otimes g) \widehat{\langle T \rangle_{\omega_0}}](-\alpha, \alpha) \quad (4.19)$$

gilt für alle reellwertigen $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

5. Skalare Quantenfelder in Robertson-Walker Raumzeiten

5.1. Homogene, isotrope, quasifreie Zustände

Roberts und Lüders konstruierten in [25] eine spezielle Klasse von 2-Punktfunktionen auf Robertson-Walker Raumzeiten, welche zu homogenen, isotropen, quasifreien Zuständen führen. Diese Zustände besitzen bestimmte Symmetrieeigenschaften, welche durch die Homogenität und Isotropie dieser Raumzeiten motiviert ist. Robertson-Walker Raumzeiten haben die topologische Struktur $M = \mathbb{R} \times \sum^\epsilon$, wobei $\epsilon \in +, 0, -$ ein homogener Raum ist und $+, 0, -$ wieder für konstante positive, keine und konstante negative Krümmung stehen. Die Cauchyflächen lassen sich in den \mathbb{R}^4 einbetten.

$$\sum^+ = x \in \mathbb{R}^4 | (x^0)^2 + \sum_{i=1}^3 = 1 \quad (5.1)$$

$$\sum^0 = x \in \mathbb{R}^4 | x^0 = 0 \quad (5.2)$$

$$\sum^- = x \in \mathbb{R}^4 | (x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 = 1, x^0 > 0 \quad (5.3)$$

Für jedes \sum^ϵ gibt es eine isometrische Symmetriegruppe G^ϵ . Für $+$ ist es die $SO(4)$, für 0 die euklidische Gruppe $E(3)$ und für $-$ die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe $SO(1, 3)$. Über $g(t, x) = (t, gx), g \in G^\epsilon$ ist die Abbildung auf M^ϵ erklärt und mit $gf(x) = f(g^{-1}x), f \in \mathcal{D}(M), g \in G$ auf dem Phasenraum. Die Transformationen g kommutieren mit E , also $[E, g] = 0$ und G ist eine Gruppe von Bogoliubov-Transformationen auf dem Phasenraum. Weiterhin wird ein Automorphismus α_g auf der Algebra induziert.

$$\alpha_g(W(Ef)) = W(g \circ Ef) \quad (5.4)$$

$$\alpha_g(\phi(f)) = \phi(g \circ f) \quad (5.5)$$

Die homogenen und isotropen 2-Punktfunktion erfüllen die Bedingung

$$\omega_2(Ef_1, Ef_2) = \omega_2(g \circ Ef_1, g \circ Ef_2), g \in G, f_1, f_2 \in \mathcal{D}(M) \quad (5.6)$$

und ein homogener und isotroper Zustand ist invariant unter α_g

$$\omega \circ \alpha_g = \omega, g \in G^\epsilon. \quad (5.7)$$

G hat auch eine Darstellung $U \oplus U$ in $L^2(\Sigma) \oplus L^2(\Sigma)$, welche durch $U(g)f = f \circ g^{-1}$ gegeben ist. Die invarianten Unterräume von U in $L^2(\Sigma)$ sind die Eigenräume des Laplaceoperators. Die Eigenfunktionen $Y_{\vec{k}}$ des Laplaceoperators bilden eine Orthonormalbasis. Es gelten die Vollständigkeitsrelationen

$$\int d^3k Y_{\vec{k}}(\vec{x}) \overline{Y_{\vec{k}}(\vec{x}')} = \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (5.8)$$

$$\int d^3x Y_{\vec{k}}(\vec{x}) \overline{Y_{\vec{k}'}(\vec{x})} = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (5.9)$$

und die Eigenwertgleichung

$$\Delta Y_{\vec{k}}(\vec{x}) = -E(k) Y_{\vec{k}}(\vec{x}). \quad (5.10)$$

Es lässt sich somit eine verallgemeinerte Fouriertransformation angeben.

$$\tilde{f}(\vec{k}) := \langle Y_{\vec{k}}, f \rangle_{L^2} = \int d^3x \overline{Y_{\vec{k}}(\vec{x})} f(\vec{x}) \quad (5.11)$$

Ein Operator, welcher mit den Elementen aus der Darstellung von G vertauscht, ist durch einen Multiplikationsoperator auf den fouriertransformierten Chauchydaten gegeben, welcher nur vom Betrag $|\vec{k}|$ abhängt. Damit lässt sich die Zweipunktdistribution eines homogenen und isotropen Zustandes durch

$$\omega_2(F, H) = \int d^3k \sum_{i,j=0}^1 \langle \tilde{F}_i(\vec{k}), S_{ij}(k) \tilde{H}_j(\vec{k}) \rangle, F, H \in L. \quad (5.12)$$

ausdrücken. Die Erfüllung der Kommutatorbedingung ist durch

$$S_{01}(k) - S_{10}(k) = i \quad (5.13)$$

gewährleistet und die Positivitätsbedingung ist durch die Forderung

$$S_{01}(k) = \overline{S_{10}(k)} \quad (5.14)$$

$$S_{00}(k) \geq 0 \quad (5.15)$$

$$S_{00}(k) S_{11}(k) \geq |S_{01}(k)|^2 \quad (5.16)$$

erfüllt. Die Matrixeinträge von S lassen sich durch zwei Funktionen p und q ausdrücken.

$$S_{11}(k) = a^6(t_0) |q(k)|^2, S_{00}(k) = |p(k)|^2, \quad (5.17)$$

$$S_{01}(k) = \overline{S_{10}(k)} = -a^3(t_0) q(k) \overline{p(k)}. \quad (5.18)$$

p und q sind hierbei wesentlich beschränkte messbare Funktionen auf $\tilde{\Sigma}$ für die

$$\overline{q(k)p(k)} - q(k)\overline{p(k)} = i \quad (5.19)$$

gilt.

Durch eine Umformung des Klein-Gordon Operators auf Robertson-Walker-Raumzeiten,

$$\square_g + m^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 3H \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Delta_h}{a^2} + m^2, \quad (5.20)$$

lässt sich durch einen Separationsansatz, $\phi(x) = T_k(t)Y_{\vec{k}}(\vec{x})$, eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten für $T_k(t)$ gewinnen.

$$\ddot{T}_k + 3H\dot{T}_k + \omega_k^2 T_k = 0, \quad \omega_k^2 = \frac{E(k)}{a^2} + m^2 \quad (5.21)$$

Hier ist $a(t)$ der Skalenparameter und $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ der Hubbleparameter. Der Laplaceoperator Δ_h ist mit der Riemannmetrik h auf Σ zu bilden. Wählt man die Anfangsbedingungen

$$T_k(t_0) = q(k), \dot{T}_k(t_0) = p(k)a^{-3}(t_0), \quad (5.22)$$

so gilt für die Wronskideterminante

$$\bar{T}_k(t)\dot{T}_k(t) - \dot{\bar{T}}_k(t)T_k(t) = \frac{i}{a^3(t)} \quad (5.23)$$

für alle Zeiten. Roberts und Lüders geben in [25] eine explizite Form des Feldoperators an:

$$\varphi(x) = \int d^3k (\bar{T}_{\vec{k}}(t)Y_{\vec{k}}(\vec{x})a(\vec{k}) + T_k(t)\bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{x})a^*(\vec{k})) \quad (5.24)$$

$$\varphi(f) = \int d\vec{k} \int dx (\bar{T}_{\vec{k}}(t)Y_{\vec{k}}(\vec{x})a(\vec{k})f(x) + T_k(t)\bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{x})a^*(\vec{k})f(x)) \quad (5.25)$$

Die Kommutatorfunktion ist durch

$$E(t, t', \vec{x}, \vec{x}') = i \int d^3k (T_k(t)\bar{T}_k(t') - \bar{T}_k(t)T_k(t'))Y_{\vec{k}}(\vec{x})\bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{x}') \quad (5.26)$$

gegeben. Die Zweipunktdistribution auf dem Testfunktionenraum, welche durch einen homogenen, isotropen quasifreien Zustand erhalten wird ist durch

$$\int d^3k \bar{T}_k(t)T_k(t')Y_{\vec{k}}(\vec{x})\bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{x}') \quad (5.27)$$

gegeben. Die Berechnung, wie man zu dieser Form kommt, ist z.B. in dem Anhang von Olberman [26] zu finden.

Die Eigenfunktionen $Y_{\vec{k}}$ des Laplaceoperators Δ_h seien hier kurz in ihrer expliziten Form angegeben.

$\epsilon = 1$: Hier hat die Cauchyfläche ein endliches Volumen und die Funktionen $Y_{\vec{k}}$ hängen von diskreten k -Werten ab.

$$Y_{\vec{k}}(\psi, \vartheta, \varphi) = A_{kl}\Pi_{kl}^+(\psi)Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad E(k) = k(k+2) \quad (5.28)$$

Die Indizes nehmen die Werte ($k = 0, 1, \dots; l = 0, 1, \dots; m = -l, -l + 1, \dots, l$) an. Y_{lm} sind die Kugelflächenfunktionen auf der 2-Sphäre, Π_{kl}^+ sind reelle Polynome in $\sin(\psi)$ und $\cos(\psi)$ und A_{kl} sind reelle Normierungskonstanten.

$\epsilon = 0$: Auf den Cauchyflächen ohne Krümmung gilt

$$Y_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\vec{x}}, \quad E(k) = \vec{k} \cdot \vec{k} \quad (5.29)$$

Hier ist $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ und die Eigenwerte $E(k)$ sind hier kontinuierlich. Es gelten die beiden wichtigen Relationen $\bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{x}) = Y_{-\vec{k}}(\vec{x})$ und $|Y_{\vec{k}}(\vec{x})|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}$.

$\epsilon = -1$: Für das offene Universum, in dem die Cauchyflächen negative Krümmung haben, gilt

$$Y_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} (x^0 - \frac{\vec{x}\vec{k}}{k})^{-1+ik}, \quad E(k) = \vec{k} \cdot \vec{k} + 1, \quad (5.30)$$

wobei $x^0 = \sqrt{1 + \vec{x}^2}$.

Beispielrechnung: Der Energie-Impuls Tensor für die Robertson/Walker Raumzeiten beschreibt das Verhalten einer klassischen idealen Flüssigkeit und ist durch

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b) \quad (5.31)$$

gegeben. P ist dabei der Druck und ρ die Dichte der Flüssigkeit. Es wird angenommen, dass das frühe Universum strahlungsdominiert war [31], was für den Energie-Impuls Tensor $P = \frac{1}{3}\rho$ bedeutet. Für sehr kleine Zeiten wird der Skalenparameter in guter Näherung unabhängig von der kosmologischen Konstante und der räumlichen Geometrie ($\epsilon = +, 0, -$) und ist durch

$$a(t) = \sqrt{2H_0 t} \quad (5.32)$$

gegeben. Die Konstante vor dem t nimmt dabei in der unterschiedlichen Literatur die unterschiedlichsten Formen an. Wird dieser Skalenparameter in Gleichung (5.21) eingesetzt, ergibt sich

$$\ddot{S}_k + \frac{3}{2t} \dot{S}_k + (\frac{E(k)}{2H_0 t} + m^2) S_k = 0. \quad (5.33)$$

Diese Gleichung lässt sich mit Mathematica leicht lösen und ein Fundamentalsystem ist durch

$$S_{k1}(t) = t^{-\frac{1}{4}} J_{\frac{1}{4}}(z) \quad (5.34)$$

und

$$S_{k1}(t) = t^{-\frac{1}{4}} Y_{\frac{1}{4}}(z) \quad (5.35)$$

gegeben. Das Argument z ist durch die Funktion

$$z = \sqrt{\frac{E(k)}{2H_0} t + m^2 t^2} \quad (5.36)$$

gegeben und $J_{\frac{1}{4}}$ ist die Besselfunktion und $Y_{\frac{1}{4}}$ die von-Neumann Funktion zur Ordnung $\frac{1}{4}$. Ein komplexes Fundamentalsystem ist damit durch

$$t^{-\frac{1}{4}}(J_{\frac{1}{4}}(z) + iY_{\frac{1}{4}}(z)) = t^{-\frac{1}{4}}H_{\frac{1}{4}}^{(1)}(z) \quad (5.37)$$

und

$$t^{-\frac{1}{4}}(J_{\frac{1}{4}}(z) - iY_{\frac{1}{4}}(z)) = t^{-\frac{1}{4}}H_{\frac{1}{4}}^{(2)}(z) \quad (5.38)$$

gegeben. $H_{\frac{1}{4}}^{(1)}$ und $H_{\frac{1}{4}}^{(2)}$ sind die erste und zweite Hankelfunktion zur Ordnung $\frac{1}{4}$. Auf dem nächsten Bild ist der Realteil der Funktion $t^{-\frac{1}{4}}H_{\frac{1}{4}}^{(1)}(z)$ zu sehen, wobei zur Vereinfachung $m = 1$ und $H_0 = 1/2$ gesetzt wurde. Die Parameter k und t laufen jeweils von 5 bis 10. Auf der Vertikalen Achse ist der Funktionswert abgebildet.

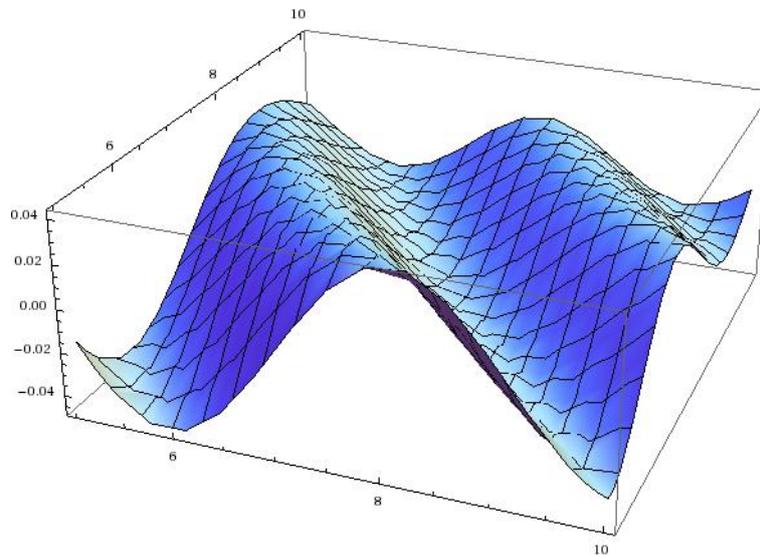


Abbildung 5.1.: Die Funktion $t^{-\frac{1}{4}}J_{\frac{1}{4}}(\sqrt{E(k)t + t^2})$

Auf der nächsten Abbildung ist der Imaginärteil der Funktion $t^{-\frac{1}{4}}H_{\frac{1}{4}}^{(1)}(z)$ zu sehen. Die sonstigen Einstellungen sind wie bei der oberen Funktion gewählt.

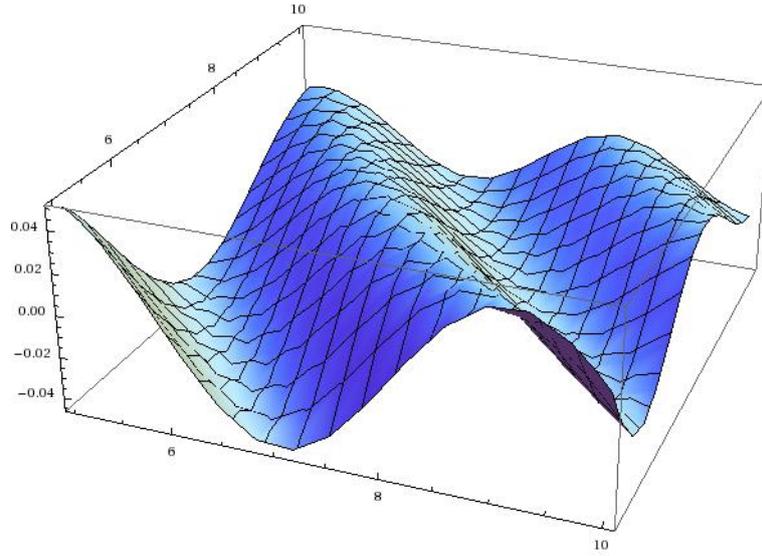


Abbildung 5.2.: Die Funktion $t^{-\frac{1}{4}} Y_{\frac{1}{4}}(\sqrt{E(k)t + t^2})$

5.2. Zustände niedriger Energie

In vielen Systemen, in denen die Natur einen quantenhaften Charakter besitzt, gibt es einen Zustand zur niedrigsten Energie. Mit den Resultaten von Fewster ([10], [11]) stellt sich die Frage, in welchem Zustand ω ein Beobachter die minimale Energie detektiert. Es soll also der Ausdruck

$$\int d\tau \langle T^{ren} \rangle_{\omega}(\gamma(\tau)) f^2(\tau) \quad (5.39)$$

minimal sein. Innerhalb der Klasse der homogenen, isotropen, quasifreien Zustände fand Olberman [26] diesen Zustand, für einen isotropen Beobachter in einer Robertson-Walker Raumzeit und bewies dessen Hadamardeigenschaft. Ein isotroper Beobachter in einer Robertson-Walker Raumzeit, ist ein Beobachter welcher sich auf einer Geodäten bewegt.

Bei der Berechnung von Energiedifferenzen zwischen zwei Hadamardzuständen, sollten nach Walds Axiomen die richtigen Werte herauskommen, daher lässt sich die Frage mathematisch durch die Gleichung

$$\int d\tau f^2(\tau) \{ \langle T^{ren} \rangle_{\omega}(\gamma(\tau)) - \langle T^{ren} \rangle_{\omega_0}(\gamma(\tau)) \} \geq 0, \quad (5.40)$$

$$\forall \omega \in [\omega_0]_{\sim} = \{ \omega \in \mathcal{A} \mid \omega \sim \omega_0 \} \quad (5.41)$$

ausdrücken. Die Äquivalenzrelation ist hier die selbe wie in (3.10). Ausgeschrieben ergibt sich für den isotropen Beobachter

$$\int d(\tau) f^2(\tau) \lim_{\tau' \rightarrow \tau} \left(\nabla_0 \nabla'_0 F(x, x') - \frac{1}{2} g_{00} (\nabla_c (\nabla')^c + m^2) F(x, x') \right) \Big|_{x=\gamma(\tau), x'=\gamma(\tau')} \geq 0. \quad (5.42)$$

Hier ist $F(x, x') = \omega_2(x, x') - \omega_{2,0}(x, x')$. Die 2 als Index am ω deutet an, dass es sich um die Zweipunktdistribution im Zustand ω handelt, und die 0 deutet an, dass dieses der Zustand zur niedrigsten Energie ist. Es soll jetzt die 00-Komponente des Energie Impuls-Tensors berechnet werden. Sie ist die einzige Komponente, von welcher ein isotroper Beobachter Notiz nimmt, was an seiner vierer-Geschwindigkeit $(1, 0, 0, 0)$ liegt. Wird die Funktion

$$F(x, x') = \int d^3 k \bar{T}_k(t) Y_{\vec{k}}(\vec{x}) T_k(t') \bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{x}') - \int d^3 k \bar{T}_{k,0}(t) Y_{\vec{k},0}(\vec{x}') T_{k,0}(t') \bar{Y}_{\vec{k},0}(\vec{x}') \quad (5.43)$$

in die einzelnen Terme des Energie-Impuls-Differentialoperators eingesetzt, so werden die Terme

$$\lim_{x' \rightarrow x} F(x, x') = \int d^3 k |T_k(x^0)|^2 - \int d^3 k |T_{k,0}(x'^0)|^2 \quad (5.44)$$

$$\lim_{x' \rightarrow x} \nabla_0 \nabla'_0 F(x, x') = \int d^3 k |\dot{T}_k(x^0)|^2 - \int d^3 k |\dot{T}_{k,0}(x'^0)|^2 \quad (5.45)$$

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{h^{ab}}{a^2(x^0)} \nabla_a \nabla'_b F(x, x') = \frac{1}{a^2(x^0)} \left(\int d^3 k E(k) |T_k(x^0)|^2 - \int d^3 k E(k) |T_{k,0}(x'^0)|^2 \right) \quad (5.46)$$

erhalten. Dieses gilt unabhängig davon, welche der drei Robertson-Walker-Raumzeiten man gewählt hat. Die genaueren Rechnungen dazu sind bei Olberman [26] zu finden. Damit erhält man insgesamt das Ergebnis

$$\int dt f(t)^2 \left(\langle \hat{T}_{00} \rangle_\omega - \langle \hat{T}_{00} \rangle_{\omega_0} \right) = \int d^3 k \int dt f(t)^2 (\varrho_k(t) - \varrho_{k,0}(t)). \quad (5.47)$$

Die Energiedichten sind durch

$$\varrho_k(t) = |\dot{T}_k(t)|^2 + \left(\frac{E(k)}{a^2(t)} + m^2 \right) |T_k(t)|^2 \quad (5.48)$$

gegeben.

Es sind jetzt Lösungen $T_{k,0}$ gesucht, welche den gesuchten Zustand ω_0 liefern. Die Differentialgleichung (4.21) besitzt einen reellen zweidimensionalen Lösungsraum. Wird das reelle Fundamentalsystem mit $\{S_{k1}, S_{k2}\}$ bezeichnet, so lässt sich durch die Linearkombination $S_k = S_{k1} + iS_{k2}$ und $\bar{S}_k = S_{k1} - iS_{k2}$, ein komplexes Fundamentalsystem, welches einen komplexen Lösungsraum der (reellen) Dimension vier aufspannt, gewinnen. Die allgemeinste Lösung lässt sich mit zwei Parametern λ und μ darstellen.

$$T_k = \lambda S_k + \mu \bar{S}_k, \lambda, \mu \in \mathbb{C}. \quad (5.49)$$

Die Wronskideterminante liefert eine Bedingung an die Parameter

$$\bar{T}_k(t)\dot{T}_k(t) - \dot{\bar{T}}_k(t)T_k(t) = \frac{i}{a^3(t)} \Rightarrow |\lambda|^2 - |\mu|^2 = 1. \quad (5.50)$$

Wegen der Tatsache, dass $\exp(i\alpha)T_k$, $\alpha \in \mathbb{R}$ die Wronskideterminante und (4.48) invariant lässt, darf der Parameter μ reell gewählt werden. Um das Problem zu lösen, wird $T_{k,0} = \lambda S_k + \mu \bar{S}_k$ gesetzt, und untersucht für welche Koeffizienten λ und μ der Ausdruck

$$\int dt f(t)^2 \varrho_{k,0}(t) \quad (5.51)$$

minimal wird. Ist für jedes \vec{k} das Minimum und das entsprechende $T_{k,0}$ bestimmt, so ist damit auch der Zustand ω_0 gefunden. Man erhält den Ausdruck

$$\int dt f(t)^2 \varrho_{k,0}(t) = (2\mu^2 + 1)c_1 + 2\mu \Re(\lambda c_2), \quad (5.52)$$

wobei $c_1 \in \mathbb{R}$ und $c_2 \in \mathbb{C}$ durch

$$c_1 = \frac{1}{2} \int dt f(t)^2 (|\dot{S}_k(t)|^2 + \omega_k^2 |S_k(t)|) \quad (5.53)$$

und

$$c_2 = \frac{1}{2} \int dt f(t)^2 (\dot{S}_k(t)^2 + \omega_k^2 S_k(t)) \quad (5.54)$$

gegeben sind. Der Ausdruck (4.52) ist für ein gegebenes μ minimal, wenn $\Re\{\lambda c_2\}$ minimal ist. Schreibt man λ und c_2 in Polarkoordinaten, erkennt man, dass $\text{Arg}(\lambda) = -\text{Arg}(c_2) + \pi$ sein muss. Das Minimum ergibt sich durch Differentiation der Funktion

$$\int dt f(t)^2 \varrho_{k,0}(t) = (2\mu^2 + 1)c_1 - 2\mu\sqrt{\mu^2 + 1}|c_2| \quad (5.55)$$

nach μ . Es werden 4 Lösungen erhalten, wobei zwei wegen $c_1 > |c_2|$ ausscheiden und sich die anderen beiden nur durch ein Vorzeichen unterscheiden, wobei die mit dem positiven Vorzeichen durch

$$\mu = \sqrt{\frac{c_1}{2\sqrt{c_1^2 - |c_2|^2}} - \frac{1}{2}} \quad (5.56)$$

gegeben ist. Damit ergibt sich für λ

$$\lambda = \exp(i\alpha) \sqrt{\frac{c_1}{2\sqrt{c_1^2 - |c_2|^2}} + \frac{1}{2}}. \quad (5.57)$$

Das Ergebnis von Olberman [26] ist im nächsten Satz wiedergegeben.

Satz 5.2.1 Sei \mathcal{W} die Weylgebra des freien Klein-Gordon-Feldes auf der Robertson-Walker-Raumzeit (M, g) und $f(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. In der Menge der homogenen, isotropen, quasifreien Zustände auf \mathcal{W} gibt es genau einen Zustand ω_0 , für den die verschmierte Energiedichte

$$\int dt f(t)^2 \langle T^{ren} \rangle_\omega(t) \quad (5.58)$$

minimal ist. Dieser Zustand ist durch die Zweipunktdistribution

$$\omega_2(x, y) = \int d^3k \bar{T}_k(x^0) T_k(y^0) Y_{\vec{k}}(\vec{x}) \bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{y}) \quad (5.59)$$

mit $T_k(t) = \lambda S_k(t) + \mu \bar{S}_k(t)$ gegeben. S_k ist eine beliebige Lösung von (4.21), welche die Bedingung (4.23) erfüllt. μ und λ sind dabei durch (4.45) und (4.46) gegeben. Der Zustand ω_0 wird Zustand niedriger Energie zur Testfunktion $f(t)$ genannt.

Beispielrechnung 2:

Für den Skalenparameter $a(t) = t$ wird Gleichung (4.21) zu

$$t^2 \ddot{S}_k + 3t \dot{S}_k + (E(k) + t^2 m^2) S_k = 0, \quad (5.60)$$

wobei mit t^2 multipliziert wurde, damit das nachstehende Lösungsverfahren besser zu handhaben ist. Diese Gleichung hat einen schwach singulären Punkt an der Stelle $t = 0$ und lässt sich daher durch den Potenzreihenansatz

$$S_{r(k)}(t) = t^{r(k)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad (5.61)$$

lösen. Das Einsetzen der Potenzreihe in die Differentialgleichung liefert

$$t^{r(k)} \sum_{n=0}^{\infty} [r(r-1) + 2nr + n(n-1)] c_n t^n + 3t^{r(k)} \sum_{n=0}^{\infty} [r+n] c_n t^n + \quad (5.62)$$

$$E(k) t^{r(k)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n + m^2 t^{r(k)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+2} \quad (5.63)$$

$$= t^r [r(r-1) + 3r + E(k)] c_0 + t^r [r(r-1) + 2r + 3(r+1) + E(k)] c_1 + \quad (5.64)$$

$$t^r \sum_{n=0}^{\infty} ([r(r-1) + 2nr + n(n-1) + 3(r+n) + E(k)] c_n + m^2 c_{n-2}) t^n = 0 \quad (5.65)$$

Damit diese Gleichung erfüllt ist, müssen die Bedingungen

$$[r(r-1) + 3r + E(k)] c_0 = 0 \Rightarrow r^2 + 2r + E(k) = 0 \quad (5.66)$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - E(k)} \quad (5.67)$$

$$(r(r-1) + 2r + 3(r+1) + E(k)) c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad (5.68)$$

erfüllt sein. Aus einem Koeffizientenvergleich erhalten wir die Rekursionsrelation

$$c_n = -\frac{m^2}{(\pm 2\sqrt{1 - E(k)} + n)n} c_{n-2}, n \in \{2, 4, 6, 8, \dots\}. \quad (5.69)$$

Damit erhalten wir die beiden linear unabhängigen Lösungen, welche den gesamten Lösungsraum von (2.45) aufspannen, durch

$$S_{k1}(t) = 1 + t^{(-1+\sqrt{1-E(k)})} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n m^{2n} \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{(2\sqrt{1-E(k)}+2j)2j} \right) t^{2n} \quad (5.70)$$

$$S_{k1}(t) = 1 + t^{(-1-\sqrt{1-E(k)})} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n m^{2n} \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{(-2\sqrt{1-E(k)}+2j)2j} \right) t^{2n} \quad (5.71)$$

Die Linearkombination

$$T_{k1}(t) = S_{k1}(t) + iS_{k2}(t) \quad (5.72)$$

$$T_{k2}(t) = S_{k1}(t) - iS_{k2}(t) \quad (5.73)$$

bildet eine Basis von komplexwertigen Funktionen. Um nun ein Fundamentalsystem zu finden, welches der Wronskideterminante genügt, suchen wir die Funktion T_k , welche die Anfangsbedingungen (4.22) erfüllt. Es soll also gelten

$$q(k) = \alpha S_{k1}(t_0) + i\beta S_{k2}(t_0) \quad (5.74)$$

$$\frac{p(k)}{a^3(t_0)} = \alpha \dot{S}_{k1}(t_0) + i\beta \dot{S}_{k2}(t_0) \quad (5.75)$$

Wenn man $p(k) = \frac{i}{2}e^{ik^2}$ und $q(k) = e^{ik^2}$ setzt, genügen diese Funktionen (4.19). Setzt man zum Beispiel $\bar{E}(k) = 3/4$ und $t_0 = 1$, so erhält man mit diesen beiden Funktionen die folgenden genäherten Koeffizienten:

$$\alpha = 0.70815100842355157891 - i0.19991231803822011238 \quad (5.76)$$

$$\beta = -0.06533101007927317933 + i0.25687317837197827530. \quad (5.77)$$

Um die Zahlen c_1 und c_2 zu bestimmen, wird noch eine geeignete Funktion f benötigt, welche einen kompakten Träger haben soll. Wenn man zum Beispiel $f(t) = -(t-2)^2+1$ für $t \in (1, 3)$ und $f(t) = 0$ für $t \notin (1, 3)$ wählt, erhält man

$$c_1 = 0,440769 \quad (5.78)$$

$$c_2 = 0,067806 + i0,0872097. \quad (5.79)$$

Beispielrechnung 3:

In dieser Beispielrechnung werden explizit Singularitäten eines Hadamarzustandes ausgerechnet. Als Beispiel dient ein Zustand niedriger Energie, welcher von A. Degner ausgerechnet wurde [8]. Das prinzipielle Vorgehen ist sogar allgemein, für Zustände der Form

$$\int d^3k \bar{T}_k(t) T_k(t') Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}') \quad (5.80)$$

auf der flachen Robertson-Walker Raumzeit, anwendbar. In [8] wurde der Skalenparameter

$$a(t) = e^t \quad (5.81)$$

verwendet. Eine Lösung von (4.21), welches die Bedingung (4.22) erfüllt, ist mit

$$S_k(t) = A(k)e^{-t} \cos(e^{-t}k) + B(k)e^{-t} \sin(e^{-t}k) \quad (5.82)$$

angegeben. Die Funktionen A und B sind durch

$$A(k) = \frac{(2i+1)\sin(k)}{2k} + \frac{\cos(k)}{2} \quad (5.83)$$

und

$$B(k) = \frac{-(2i+1)\cos(k)}{2k} + \frac{\sin(k)}{2} \quad (5.84)$$

gegeben. Ein Zustand niedriger Energie lässt sich wie folgt zerlegen:

$$\int d^3k \bar{T}_k(t) T_k(t') Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}') \quad (5.85)$$

$$= \int d^3k \overline{(\lambda S_k(t) + \mu \bar{S}_k(t))} (\lambda S_k(t') + \mu \bar{S}_k(t')) Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}') \quad (5.86)$$

$$= \int d^3k \left(\bar{S}_k(t) S_k(t') + 2\mu^2 \Re(\bar{S}_k(t) S_k(t')) + 2\mu \Re(\lambda S_k(t) S_k(t')) \right) Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}'). \quad (5.87)$$

Dabei wurde die Bedingung $|\lambda|^2 - \mu^2 = 1$ ausgenutzt. In dem Ausdruck treten Singularitäten auf, wenn über Funktionen integriert wird, welche nicht schnell abfallen. Der erste Term aus der letzten Zeile ist ein solcher. Er lässt sich in eine symmetrische und eine antisymmetrische Funktion zerlegen.

$$\int d^3k \bar{S}_k(t) S_k(t') Y_{\vec{k}}(\vec{x}) \bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{x}') \quad (5.88)$$

$$= \int d^3k (S_{k_1}(t) S_{k_1}(t') + S_{k_2}(t) S_{k_2}(t')) \quad (5.89)$$

$$+ i(S_{k_1}(t) S_{k_2}(t') - S_{k_2}(t) S_{k_1}(t')) Y_{\vec{k}}(\vec{x}) \bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{x}') \quad (5.90)$$

Hier wurde eine Zerlegung von S_k in Real- und Imaginärteil vorgenommen.

$$\Re(S_k) := S_{k_1} \quad (5.91)$$

$$\Im(S_k) := S_{k_2} \quad (5.92)$$

Wir können die antisymmetrische Funktion mit der Kommutatorfunktion identifizieren. Für die Integration wählen wir die flache Robertson-Walker Raumzeit. Auf ihr haben die Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami Operators und der geodätische Abstand auf einer Cauchyfläche eine sehr einfache Form.

$$Y_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (5.93)$$

$$\sigma(t, \vec{x}, t, \vec{x}') = |\vec{x} - \vec{x}'|^2 \quad (5.94)$$

Jetzt können wir ausnutzen, dass die Funktionen S_k nur von $|\vec{k}|$ abhängen, also in diesem Argument eine Rotationssymmetrie besitzen. Das erleichtert das Problem sehr, da es für Fouriertransformationen von rotationssymmetrischen Funktionen eine Transformationsformel gibt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} f(|\vec{k}|) e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}|\vec{x}-\vec{x}'|} \int_0^{\infty} dk k f(k) \sin(k|\vec{x}-\vec{x}'|). \quad (5.95)$$

Jetzt können wir die Lösungen von Degner [8] einsetzen. Wenn wir $b(t) = 1 - e^{-t}$ setzen, ergibt sich für den einen Teil der symmetrischen Distribution

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} S_{k2}^2(t) e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \quad (5.96)$$

$$= \frac{2e^{-2t}}{\sqrt{2\pi}|\vec{x}-\vec{x}'|} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \sin(|\vec{x}-\vec{x}'|k) \sin^2(b(t)k) \quad (5.97)$$

$$= -\frac{2e^{-2t}}{\sqrt{2\pi}|\vec{x}-\vec{x}'|} \left(3\pi i + i(\text{sign}(2b(t) + |\vec{x}-\vec{x}'|)) \right) \quad (5.98)$$

$$- \text{sign}(|\vec{x}-\vec{x}'|) + \text{sign}(-|\vec{x}-\vec{x}'|) + \text{sign}(-2b(t) + |\vec{x}-\vec{x}'|) \quad (5.99)$$

$$- \text{sign}(2b(t) - |\vec{x}-\vec{x}'|) - \text{sign}(-2b(t) - |\vec{x}-\vec{x}'|) \Big). \quad (5.100)$$

Dabei wurde die Formel 3.721 aus dem Gradshteyn/Ryzhik [16] verwendet:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{s} \text{sign}(a). \quad (5.101)$$

Deutlich lässt sich die führende Singularität $\frac{1}{\sigma}$ aus der Hadamardform (2.11) erkennen.

5.3. Zustände niedriger Energie für beliebige Kurven

Es sei noch einmal die Zweipunktdistribution für einen homogenen, isotropen, quasi-freien Zustand auf einer Robertson-Walker Raumzeit angegeben:

$$\omega_2(x, x') = \int d^3 k \left(\bar{T}_k(t) T_k(t') Y_{\vec{k}}(\vec{x}) \bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{x}') \right) =: \int d^3 k \omega_{2k}(x, x'). \quad (5.102)$$

Durch die Zerlegung des Zustandes in Moden, ist der Limes für jede einzelne Mode

$$\langle \hat{T}_{ab}(x) \rangle_{\omega_{2k}} = \lim_{x' \rightarrow x} \left[\left(\nabla_a \nabla'_b - \frac{1}{2} g_{ab} \left(\nabla_c \nabla'^c - m^2 \right) \right) \bar{T}_k(t) T_k(t') Y_{\vec{k}}(\vec{x}) \bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{x}') \right] \quad (5.103)$$

eine glatte Funktion. Der Zusammenhang zum gesamten Energie-Impuls Tensor ist durch

$$\langle \hat{T}_{ab}(x) \rangle_{\omega} = \int d^3 k \langle \hat{T}_{ab}(x) \rangle_{\omega_{2k}}, \quad (5.104)$$

gegeben, wobei dieser Ausdruck divergiert. Bei Olbermann lässt sich das Ergebnis

$$\lim_{x' \rightarrow x} \left(g^{cd'} \nabla_c \nabla'_d - m^2 \right) \omega_k(x, x') = (|\dot{T}_k(t)|^2 - \omega_k^2 |T_k(t)|^2) |Y_k(\vec{x})|^2, \quad (5.105)$$

finden, welches für alle drei Robertson-Walker Raumzeiten gültig ist. Damit ergibt sich die allgemeine Form des Energie-Impuls Tensors zur Mode k

$$\langle \hat{T}_{ab}(x) \rangle_{\omega_{2k}} = \lim_{x' \rightarrow x} \nabla_a \nabla'_b \omega_{2k}(x, x') - \frac{g_{ab}}{2} \left(|\dot{T}_k(t)|^2 - \omega_k^2 |T_k(t)|^2 \right) \bar{Y}_k(\vec{x}'). \quad (5.106)$$

Hier sollte die Funktion ω_{2k} nicht mit $\omega_k^2 = \frac{E(k)}{a^2} + m^2$ verwechselt werden. Da es bei homogenen isotropen Zuständen keine Energie-Impuls-Ströme geben darf, muss der Energie-Impuls Tensor diagonal sein. Es ist auch mathematisch einsichtig, dass die nichtdiagonalen Elemente verschwinden. So gilt z.B im flachem Fall

$$\lim_{x' \rightarrow x} \nabla_0 \nabla'_j \bar{T}_k(t) T_k(t') e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')} = -ik_j \dot{\bar{T}}_k(t) T_k(t), \quad (5.107)$$

$$\lim_{x' \rightarrow x} \nabla_i \nabla'_0 \bar{T}_k(t) T_k(t') e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')} = ik_i \bar{T}_k(t) \dot{T}_k(t) \quad (5.108)$$

und

$$\lim_{x' \rightarrow x} \nabla_i \nabla'_j \bar{T}_k(t) T_k(t') e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')} = |T_k(t)|^2 k_i k_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.109)$$

In den beiden ersten Fällen und im Letztere, für $i \neq j$, ist jeweils eine gerade mit einer ungeraden Funktion multipliziert. Nach der Integration über k verschwinden diese Einträge im Energie-Impuls Tensor. Für den flachen Fall $\epsilon = 0$ gilt daher:

$$\langle \hat{T}_{00}(t) \rangle_{\omega_{2k}} = \frac{1}{2} (|\dot{T}_k(t)|^2 + \omega_k^2 |T_k(t)|^2), \quad (5.110)$$

$$\langle \hat{T}_{ii}(t) \rangle_{\omega_{2k}} = \frac{a^2(t)}{2} \left(|\dot{T}_k(t)|^2 + \left(\frac{2k_i^2}{a^2(t)} - \omega_k^2 \right) |T_k(t)|^2 \right) \quad (5.111)$$

Für den Fall negativer Krümmung $\epsilon = -1$ gilt [25]

$$Y_{\vec{k}}(\vec{x}) \bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \left(x^0 - \frac{\vec{x} \cdot \vec{k}}{k} \right)^{-1+ik} \left(x'^0 - \frac{\vec{x}' \cdot \vec{k}}{k} \right)^{-1-ik}. \quad (5.112)$$

Mit diesen Funktionen berechnen sich die einzelnen Komponenten des Energie-Impuls Tensors zu

$$\lim_{x' \rightarrow x} \nabla_i \nabla'_j \omega_{2k}(x, x') = \frac{|T_k(t)|^2}{(2\pi)^3} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} + k_i k_j \right) \left(x^0 - \frac{\vec{x} \cdot \vec{k}}{k} \right)^{-4} \quad (5.113)$$

$$= \frac{|T_k(t)|^2}{(2\pi)^3} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} + k_i k_j \right) |Y_k(\vec{x})|^2 |Y_k(\vec{x}')|^2 \quad (5.114)$$

Wegen den Symmetrieeigenschaften der Zustände darf der Energie-Impuls Tensor nicht von \vec{x} abhängen. Mit den Techniken aus dem Anhang von Roberts und Lüders

können wir diesen Ausdruck von \vec{x} unabhängig machen. Es sei $h \in \mathcal{D}(S)$ und $\tilde{h}_k(\vec{\xi}) \in L^2(S^2, d\Omega)$ durch

$$\tilde{h}_k(\vec{\xi}) = \int d\vec{x} Y_{k\xi} h(\vec{x}) \quad (5.115)$$

definiert, mit der 2-Sphäre S^2 und dem darauf induzierten Maß $d\Omega$, welches dadurch entsteht, wenn S^2 als Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 aufgefasst wird. Auf $L^2(S^2, d\Omega)$ ist durch $U_k(g)\tilde{h}_k = (U(\tilde{g})h)_k$ eine irreduzible, unitäre Darstellung von G^- gegeben. Mit der Lorentztransformation $g_x \in G^-$, welche den Vektor $x = (\sqrt{1 + \vec{x}^2}, \vec{x})$ in den Vektor $(1, 0, 0, 0)$ überführt, gilt

$$\int d\Omega(\vec{\xi}) |Y_{k\xi}(\vec{x})|^4 = \int d\Omega(\vec{\xi}) (x \cdot \xi)^{-4} = \int d\Omega(\vec{\xi}) (x \cdot (g_x^{-1}\xi))^{-4} \quad (5.116)$$

$$= \int d\Omega(\vec{\xi}) ((g_x x) \cdot \xi)^{-4} = \int d\Omega(\vec{\xi}) = 4\pi \quad (5.117)$$

Bei dem zweiten Gleichheitszeichen wurde die Unitarität von $U_k(g)$ ausgenutzt. Jetzt lässt sich der Energie-Impuls Tensor zur Mode k für den Fall der negativen Krümmung angeben, wobei der Faktor 4π , wie bei Olbermann, mit in das Maß dk einbezogen wird.

$$\langle \hat{T}_{00}(t) \rangle_{\omega_{2k}} = \frac{1}{2} (|\dot{T}_k(t)|^2 + \omega_k^2 |T_k(t)|^2) \quad (5.118)$$

$$\langle \hat{T}_{ii}(t) \rangle_{\omega_{2k}} = \frac{h_{ii} a^2(t)}{2} \left(|\dot{T}_k(t)|^2 + \left(\frac{2}{h_{ii} a^2(t)} \left(\frac{k_i^2}{k^2} + k_i^2 \right) - \omega_k^2 \right) |T_k(t)|^2 \right) \quad (5.119)$$

Die Komponenten der Energie-Impuls Tensoren sind also in beiden Fällen von der Form

$$\langle \hat{T}_{aa}(x) \rangle_{\omega_{2k}} = \alpha_a(t) |\dot{T}_k(t)|^2 + \beta_a(k, t) |T_k(t)|^2 \quad (5.120)$$

Für den Energie-Impuls Differentialoperator $(Q \otimes Q)_{ab'}$ (ohne der Limesbildung) und dem zeitartigen Vektorfeld $\dot{\gamma}$ gilt die Gleichungskette

$$\omega_{2k} \in \mathcal{C}^\infty(M \times M) \Rightarrow \dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^{b'} \left((Q \otimes Q)_{ab'} \omega_{2k} \right) \in \mathcal{C}^\infty(M \times M) \quad (5.121)$$

$$\Rightarrow \left(\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle \hat{T}_{ab} \rangle_{\omega_{2k}} \right) \in \mathcal{C}^\infty(M) \Rightarrow WF(\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle \hat{T}_{ab} \rangle_{\omega_k}) = \emptyset. \quad (5.122)$$

Der Pullback $\gamma^*(\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle \hat{T}_{ab} \rangle_{\omega_{2k}})$, induziert durch die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$, $\tau \mapsto \gamma(\tau) \in M$, ist wegen

$$WF(\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle \hat{T}_{ab} \rangle_{\omega_{2k}}) \cap N_{\gamma_I} = \emptyset. \quad (5.123)$$

eindeutig, wohldefiniert und durch die gewöhnliche Verkettung gegeben. Im Folgenden ist $\gamma(I)$ ein Kurvenstück einer Integralkurve von $\dot{\gamma}$. Dadurch lässt sich der Ausdruck

$$W_k := \int d\tau f^2(\tau) (\gamma^*(\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle \hat{T}_{ab} \rangle_{\omega_{2k}}))(\tau) \quad (5.124)$$

als der Beitrag der Mode k , des Zustandes ω , für einen beliebig bewegten Beobachter γ , parametrisiert durch seine Eigenzeit τ , zu der, mit $f \in \mathcal{D}(I)$ verschmierten, Energiedichte des nicht renormierten Energie-Impuls Tensors interpretieren. Die gesamte Menge der Funktionen ω_{2k} lässt sich mit der Hilfe von zwei Parametern $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ darstellen:

$$\omega_{2k}[\lambda, \mu](x, x') = \bar{T}_k[\lambda, \mu](t) T_k[\lambda, \mu](t') Y_{\vec{k}}(\vec{x}) \bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{x}'), \quad (5.125)$$

mit

$$T_k[\lambda, \mu](t) = \lambda S_k(t) + \mu \bar{S}_k(t) \quad (5.126)$$

und

$$S_k(t) = S_{k1}(t) + S_{k2}(t). \quad (5.127)$$

Die Wronskideterminante des allgemeinen, parametrisierten Fundamentalsystems muss dieselbe sein, wie die des alten Fundamentalsystems. Daraus folgt die Bedingung

$$|\lambda|^2 - |\mu|^2 = 1 \quad (5.128)$$

an die Koeffizienten λ und μ . Da $e^{i\phi} T_k$, $\phi \in \mathbb{R}$, bzgl. der Bedingung (27) und der Funktion W_k eine Symmetrietransformation ist, darf der Parameter μ reell gewählt werden. Durch die Parametrisierung des Fundamentalsystems ist automatisch auch die Funktion $W_k[\lambda, \mu]$ parametrisiert. Dadurch wird jedem zulässigem Fundamentalsystem ein Energiewert zugeordnet.

$$W_k[\lambda, \mu] = \int d\tau f^2(\tau) (\gamma^* (\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle \hat{T}_{ab}[\lambda, \mu] \rangle_{\omega_{2k}}))(\tau) \quad (5.129)$$

Ist das Fundamentalsystem bekannt, welches jedem Funktionswert von W_k ein Minimum zuordnet, so ist der Zustand ω bekannt, welcher für die Kurve γ und die Testfunktion f den niedrigsten Energiewert liefert. Mit Hilfe der Gleichung

$$|\lambda S_k + \mu \bar{S}_k|^2 = (1 + 2\mu^2) |S_k|^2 + 2\mu \Re(\lambda S_k^2) \quad (5.130)$$

ist der allgemeinste Ausdruck für $W_k[\lambda, \mu]$ durch

$$W_k[\lambda, \mu] = \frac{1}{2} \int d\tau f^2(\tau) \left(\sum_{a=0}^3 (\dot{\gamma}^a)^2(\tau) \right) \quad (5.131)$$

$$(\alpha_a(\tau) ((1 + 2\mu^2) |\dot{S}_k(\tau)|^2 + 2\mu \Re(\lambda \dot{S}_k^2(\tau))) \quad (5.132)$$

$$+ \beta_a(k, \tau) ((1 + 2\mu^2) |S_k(\tau)|^2 + 2\mu \Re(\lambda S_k^2(\tau)))) \quad (5.133)$$

gegeben. Diese Funktion lässt sich in die Form

$$W_k[\lambda, \mu] = (1 + 2\mu^2) c_1 + 2\mu \Re(\lambda c_2) \quad (5.134)$$

bringen, wobei c_1 und c_2 durch

$$c_1 = \frac{1}{2} \int d\tau f^2(\tau) \left(\psi^\epsilon(\tau) |\dot{S}_k(t(\tau))|^2 + \chi_k^\epsilon(\tau) |S_k(t)|^2 \right), \quad (5.135)$$

und

$$c_2 = \frac{1}{2} \int d\tau f^2(\tau) \left(\psi^\epsilon(\tau) \dot{S}_k(t(\tau))^2 + \chi_k^\epsilon(\tau) S_k(t)^2 \right) \quad \epsilon = 0, -1. \quad (5.136)$$

gegeben sind. Die Funktionen ψ^ϵ und χ_k^ϵ hängen von der gewählten Robertson-Walker Raumzeit ab und sind durch

$$\psi^\epsilon(\tau) = \sum_{a=0}^3 (\dot{\gamma}^a)^2(\tau) \alpha_a^\epsilon(\tau), \quad (5.137)$$

sowie

$$\chi_k^\epsilon(\tau) = \sum_{a=0}^3 (\dot{\gamma}^a)^2(\tau) \beta_a^\epsilon(k, \tau) \quad (5.138)$$

gegeben. Durch einen Vergleich mit den berechneten Energie-Impuls Tensoren ergibt sich die explizite Form. Es gilt

$$\alpha_0^\epsilon(\tau) = \beta_0^\epsilon(k, \tau) = 1 \quad \epsilon = 0, -, \quad (5.139)$$

$$\alpha_i^0(\tau) = a^2(\tau) \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.140)$$

$$\beta_i^0(k, \tau) = 2k_i^2 - a^2(\tau) \omega_k^2 \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.141)$$

$$\alpha_i^-(\tau) = h_{ii} a^2(\tau) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.142)$$

und

$$\beta_i^-(k, \tau) = \frac{k_i^2}{k^2} + k_i^2 - h_{ii} a^2(\tau) \omega_k^2 \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.143)$$

Für eine Vierergeschwindigkeit $\dot{\gamma}^a = (1, 0, 0, 0)$ gehen die Koeffizienten c_1 und c_2 offensichtlich in die von Olberman über, so dass diese als Spezialfall enthalten sind. Für ein gegebenes $\mu > 0$ wird $W_k[\lambda, \mu]$ minimal, wenn $Arg(\lambda) = -Arg(c_2) + \pi = \phi$ ist. Das gesuchte Fundamentalsystem (\bar{T}_k, T_k) lässt sich jetzt, wie in [26] finden, indem das Minimum der Funktion

$$W = (1 + 2\mu^2)c_1 - 2\mu\sqrt{\mu^2 + 1}|c_2|, \quad (5.144)$$

durch Differenzieren nach μ aufgesucht wird. Analog erhält man

$$\mu = \sqrt{\frac{c_1}{2\sqrt{c_1^2 - |c_2|^2}} - \frac{1}{2}} \quad (5.145)$$

und

$$\lambda = e^{i\phi} \sqrt{\frac{c_1}{2\sqrt{c_1^2 - |c_2|^2}} + \frac{1}{2}}. \quad (5.146)$$

6. Skalare Quantenfelder in der allgemeineren räumlich geschlossenen Welt

6.1. Die Konstruktion von quasifreien Zuständen

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Klasse von Zweipunktdistributionen, für quasifreie Zustände auf der Observablenalgebra $\mathcal{A}(M)$, über einer Raumzeit (M, g) der Form (5.1) zu konstruieren. (M, g) ist eine global hyperbolische Raumzeit eines räumlich geschlossenen Universums, wobei der Fundamentaltensor g die allgemeine Form

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t)h_{11}(\vec{x}) & -a^2(t)h_{21}(\vec{x}) & -a^2(t)h_{31}(\vec{x}) \\ 0 & -a^2(t)h_{21}(\vec{x}) & -a^2(t)h_{22}(\vec{x}) & -a^2(t)h_{32}(\vec{x}) \\ 0 & -a^2(t)h_{31}(\vec{x}) & -a^2(t)h_{32}(\vec{x}) & -a^2(t)h_{33}(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

hat. Die Funktion a ist der Skalenparameter und die Funktionen h_{ij} beschreiben die Geometrie einer beliebigen, aber kompakten, 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Insbesondere muss diese 3-dimensionale Mannigfaltigkeit keine Symmetrieeigenschaften besitzen. Bei der Konstruktion folgen wir im Wesentlichen Roberts und Lüders [25], wobei deren Ergebnisse entsprechend verallgemeinert werden.

Bei der Quantisierung der skalaren Feldtheorie stehen uns drei Phasenräume zur Verfügung. Diese sind der Testfunktionenraum $(\mathcal{K}, \sigma_{\mathcal{K}}, \mu_{\mathcal{K}})$, welcher hier, wegen der Analogie zu [25], mit \mathcal{K} bezeichnet wird, der Raum der glatten Lösungen $(\mathcal{L}, \sigma_{\mathcal{L}}, \mu_{\mathcal{L}})$ und der Raum der Cauchydaten (L, σ_L, μ_L) . Mit jedem Phasenraum wird je ein Hilbertraum $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$, $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$ und \mathcal{H}_L , über die Abbildung $K_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{V}}$, verknüpft. Für \mathcal{V} ist der entsprechende Vektorraum einzusetzen. Die Skalarprodukte auf den Hilberträumen sind mit den symplektischen und positiven symmetrischen Bilinearformen, $\sigma_{\mathcal{V}}$ und $\mu_{\mathcal{V}}$, durch

$$\langle K_{\mathcal{V}}(v_1), K_{\mathcal{V}}(v_2) \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{V}}} = \mu_{\mathcal{V}}(v_1, v_2) + \frac{i}{2} \sigma_{\mathcal{V}}(v_1, v_2), \quad v_1, v_2 \in \mathcal{V} \quad (6.2)$$

verknüpft. Aufgrund der Abbildungen

$$E : K \rightarrow \mathcal{L}, \quad \rho_1, \rho_2 : \mathcal{L} \rightarrow L \quad (6.3)$$

zwischen den Vektorräumen, lassen sich die Skalarprodukte miteinander in Beziehung setzen

$$\langle K_{\mathcal{K}}(f_1), K_{\mathcal{K}}(f_2) \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}} = \langle K_{\mathcal{L}}(Ef_1), K_{\mathcal{L}}(Ef_2) \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}} \quad (6.4)$$

$$= \langle K_L(\rho_1 E f_1, \rho_2 E f_1), K_L(\rho_1 E f_2, \rho_2 E f_2) \rangle_{\mathcal{H}_L}, \quad (6.5)$$

wodurch auch ein Zusammenhang zwischen den symplektischen und positiven symmetrischen Bilinearformen, $\sigma_{\mathcal{V}}$ und $\mu_{\mathcal{V}}$, besteht. Um den Energie-Impuls Tensor zu bestimmen, werden die Zweipunktdistributionen ω_2 , der quasifreien Zustände auf der Feldalgebra $\mathcal{A}(M)$ benötigt. Sie hängen mit dem Skalarprodukt auf $\mathcal{H}_{\mathcal{X}}$ über

$$\omega(\varphi(f_1)\varphi(f_2)) = \omega_2(f_1, f_2) = \mu_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) + \frac{i}{2}\sigma_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) \quad (6.6)$$

zusammen. Auf dem Raum L ist, mit der riemannschen Metrik h , durch

$$(F, G) = \int d^3x \sqrt{|h|} (\bar{F}_1 G_1 + \bar{F}_2 G_2), \quad F = (F_1, F_2), G = (G_1, G_2), \quad (6.7)$$

wobei $F_i, G_i \in \mathcal{D}(\Sigma)$ gilt, ein Skalarprodukt gegeben, wodurch dieser unter der entsprechenden Norm zu einem Hilbertraum ausgebaut werden kann. Nach dem Kerntheorem von Schwartz liefert die Zweipunktdistribution S auf dem Raum der Cauchydaten L eine Abbildung in seinen Dualraum L^* :

$$S : L \rightarrow L^*, \quad F \mapsto S(\cdot, F) \in L^*. \quad (6.8)$$

Mit dem Darstellungssatz von Riezs wissen wir aber, dass jedem stetigem, linearem Funktional $S(\cdot, F) \in L^*$ genau ein Element $\hat{S}(F) \in L$ zugeordnet werden kann, sodass

$$S(G, F) = (G, \hat{S}(F)), \quad \forall G \in L \quad (6.9)$$

gilt. Die Funktionen $F_i, G_i \in \mathcal{D}(\Sigma)$ lassen sich nach den Eigenfunktionen Y_k des Laplace-Beltrami-Operators entwickeln,

$$F_i = \sum_k \tilde{F}_{ik} Y_k, \quad (6.10)$$

wobei die Koeffizienten \tilde{F}_{ik} durch

$$(Y_k, F_i) := \tilde{F}_{ik} \quad (6.11)$$

gegeben sind. Mit der letzten Gleichung wird eine verallgemeinerte Fouriertransformation definiert und es gilt

$$\tilde{F} : \widetilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (6.12)$$

Die Menge $\widetilde{\Sigma}$ besteht dabei aus den Zahlen k , welche die Funktionen Y_k parametrisieren. Es kann also sein, dass k ein Tupel von Zahlen ist. Mit den obigen Ergebnissen lässt sich die Zweipunktdistribution S jetzt wie folgt ausdrücken:

$$S(F, G) = \sum_k \langle \tilde{F}(k), \hat{S}(G)(k) \rangle, \quad (6.13)$$

mit

$$\langle \widetilde{F}(k), \widetilde{S}(G)(k) \rangle = \sum_{i=1}^2 \widetilde{F}_i(k) (\widetilde{S}(G))_i(k). \quad (6.14)$$

In dieser Form lässt sich die Positivitäts- und Kommutatorbedingung, welche die Zweipunktdistribution erfüllen muss, leicht angeben. Zuerst zerlegen wir die Zweipunktdistribution in seinen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil

$$\sum_k \langle \widetilde{F}(k), \widetilde{S}(G)(k) \rangle = \sum_k \langle \widetilde{F}(k), \widetilde{S}(G)_s(k) \rangle + \sum_k \langle \widetilde{F}(k), \widetilde{S}(G)_{as}(k) \rangle. \quad (6.15)$$

Der antisymmetrische Anteil muss mit der symplektischen Form σ_L übereinstimmen:

$$i \int d\mu_x (\bar{F}_1(x) G_2(x) - \bar{F}_2(x) G_1(x)) = \sum_k \langle \widetilde{F}(k), \widetilde{S}(G)_{as}(k) \rangle. \quad (6.16)$$

Mit den Normierungs- und Vollständigkeitsbedingungen,

$$\int d^3x \sqrt{h} \bar{Y}_k(\vec{x}) Y_{k'}(\vec{x}) = \delta_{kk'} \quad (6.17)$$

und

$$\sum_k \bar{Y}_k(\vec{x}) Y_k(\vec{x}') = h^{-1/2} \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (6.18)$$

lässt sich herausfinden, dass der antisymmetrische Anteil des Operators \widetilde{S}_{as} durch die Multiplikation der Koeffizienten G_k mit der negativen Paulimatrix $-\sigma_y \frac{1}{2}$ gegeben ist:

$$(\widetilde{S}_{as}(G))(k) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{G}_1(k) \\ \widetilde{G}_2(k) \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

Die Positivitätsbedingung wird durch die Forderung

$$\langle \widetilde{F}(k), \widetilde{S}(F)(k) \rangle \geq 0 \quad \forall F \wedge k \quad (6.20)$$

eingehalten. Ein Beispiel für einen derartigen Operator ist durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} |p(k)|^2 & -a^3(t_0) q(k) \overline{p(k)} \\ -a^3(t_0) p(k) \overline{q(k)} & a^6(t_0) |q(k)|^2 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

gegeben, welche in [25] angegeben ist. Hier sind p und q polynomial beschränkte, messbare Funktionen auf $\widetilde{\Sigma}$, welche der Bedingung

$$p(k) \overline{q(k)} - q(k) \overline{p(k)} = i \quad (6.22)$$

genügen. Eine solche Matrix lässt sich auch in der Form

$$S(k) := \begin{pmatrix} S_{00}(k) & S_{01}^{\Re}(k) \\ S_{01}^{\Re}(k) & S_{11}(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

schreiben, wobei $S_{01}^{\mathfrak{R}}$ eine reelle Funktion ist. Wird die erste Matrix mit S_1 bezeichnet so lautet die Positivitätsbedingung jetzt $\det(S_1) \geq \frac{1}{4}$. Der Zustand ist rein, falls

$$\det(S_1) = \frac{1}{4}. \quad (6.24)$$

Die Zweipunktdistribution für solche Zustände ist durch

$$\omega_2(x, x') = \sum_k \left(\bar{T}_k(t) T_k(t') Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}') \right) \quad (6.25)$$

gegeben. Die Rechnungen um auf diese Form zu kommen sind analog zu denen für die Robertson-Walker-Raumzeiten.

6.2. Die Energiedichte entlang zeitartiger Kurven

Es soll jetzt, aus der im vorigen Abschnitt konstruierten Menge von Zuständen, derjenige Zustand ausfindig gemacht werden, welcher auf einer solchen Raumzeit die niedrigste gemittelte Energiemenge liefert, wenn die Energiedichte auf einer beliebigen zeitartigen Kurve detektiert wird. Mathematisch lässt sich diese Frage mit dem Auffinden des Minimums des Funktional

$$\mathbb{T}(\omega) = \int d\tau f^2(\tau) \left(\gamma^* (\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle T_{ab}^{ren} \rangle_\omega) \right) (\tau) \quad (6.26)$$

beantworten.

Eine weitere Verallgemeinerung dieses Problems ist die Mittelung über mehrere zeitartige Kurven. Diese Verallgemeinerung soll jetzt kurz besprochen werden, wegen der besseren Übersichtlichkeit, aber bloß seine Ergebnisse am Ende präsentiert werden. $\gamma_i : I_i \rightarrow M$, $\tau_i \mapsto \gamma_i(\tau_i) \in M$ seien u beliebige zeitartige Kurven in der Raumzeit (M, g) und $f_i \in \mathcal{D}(I_i)$ u Testfunktionen. Die Paare (γ_i, f_i) , $i = 1, \dots, u$, können mit einem statistischen Gewicht $n_i(\gamma_i, f_i)$ versehen werden, wobei $\sum_{i=1}^u n_i = N$ gelten soll. Es kann der quasifreie Zustand ω_0 , aus der im vorigen Abschnitt konstruierten Klasse von Zuständen bestimmt werden, welcher das Funktional

$$\mathbb{T}_u(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^u n_i \int_{I_i} d\tau_i f_i^2(\tau) \left(\gamma_i^* (\dot{\gamma}_i^a \dot{\gamma}_i^b \langle T_{ab}^{ren} \rangle_\omega) \right) (\tau_i) \quad (6.27)$$

minimiert. Die physikalische Bedeutung dieses Funktional ist die folgende: Es wird die Energiedichte des Zustandes ω entlang der Kurven γ_i mit den Intensitätsverteilungen f_i gemessen, wobei auf der Kurve γ_i n_i mal gemessen wird.

Für den allgemeinen Ansatz für die Zweipunktdistribution nehmen wir

$$\omega_2(x, x') = \sum_k \left(\bar{T}_k(t) T_k(t') Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}') \right) =: \sum_k \omega_{2k}(x, x'). \quad (6.28)$$

Die Funktionen T_k sind Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{T}_k + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{T}_k + \omega_k^2 T_k = 0, \quad \omega_k^2 = \frac{\lambda_k}{a^2(t)} + m^2, \quad (6.29)$$

wobei λ_k die Eigenwerte des Laplace-Beltrami Operators sind und mit den Eigenfunktionen Y_k durch

$$\Delta_h Y_k = -\lambda_k Y_k. \quad (6.30)$$

verknüpft sind. Die T_k sollen die Bedingung

$$\bar{T}_k(t)\dot{T}_k(t) - T_k(t)\dot{\bar{T}}_k(t) = \frac{i}{a^3(t)} \quad (6.31)$$

erfüllen. Durch die Zerlegung des Zustandes in Moden, ist der Limes für jede einzelne Mode

$$\langle \hat{T}_{ab}(x) \rangle_{\omega_{2k}} = \lim_{x' \rightarrow x} \left[\left(\nabla_a \nabla'_b - \frac{1}{2} g_{ab} \left(\nabla_c \nabla'^c - m^2 \right) \right) \bar{T}_k(t) T_k(t') Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}') \right] \quad (6.32)$$

eine glatte Funktion und kann ohne Probleme berechnet werden. Der Zusammenhang zum nicht renormierten Energie-Impuls Tensor ist durch

$$\langle \hat{T}_{ab}(x) \rangle_{\omega} = \sum_k \langle \hat{T}_{ab}(x) \rangle_{\omega_{2k}}, \quad (6.33)$$

gegeben. Es werden jetzt die einzelnen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors für ω_{2k} berechnet, wobei i und j die Werte 1, 2, 3 durchlaufen:

$$\lim_{x' \rightarrow x} (\nabla_0 \nabla'_0 \omega_{2k})(x, x') = |\dot{T}_k(t)|^2 |Y_k(\vec{x})|^2, \quad (6.34)$$

$$\lim_{x' \rightarrow x} (\nabla_0 \nabla'_j \omega_{2k})(x, x') = \dot{\bar{T}}_k(t) T_k(t) Y_k(\vec{x}) (\partial_j \bar{Y}_k)(\vec{x}), \quad (6.35)$$

$$\lim_{x' \rightarrow x} (\nabla_i \nabla'_0 \omega_{2k})(x, x') = \bar{T}_k(t) \dot{T}_k(t) (\partial_i Y_k)(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}), \quad (6.36)$$

$$\lim_{x' \rightarrow x} (\nabla_i \nabla'_j \omega_{2k})(x, x') = |T_k(t)|^2 (\partial_i Y_k)(\vec{x}) (\partial_j \bar{Y}_k)(\vec{x}), \quad (6.37)$$

$$\lim_{x' \rightarrow x} (\nabla_i \nabla'_i \omega_{2k})(x, x') = |T_k(t)|^2 |(\partial_i Y_k)(\vec{x})|^2, \quad (6.38)$$

$$\lim_{x' \rightarrow x} (m^2 \omega_{2k})(x, x') = |T_k(t)|^2 |Y_k(\vec{x})|^2. \quad (6.39)$$

In dem Ausdruck

$$\lim_{x' \rightarrow x} \left(\frac{h^{ij'}}{a^2} \nabla_i \nabla'_j \omega_{2k} \right)(x, x') = \frac{h^{ij}}{a^2} |T_k(t)|^2 (\partial_i Y_k)(\vec{x}) (\partial_j \bar{Y}_k)(\vec{x}) \quad (6.40)$$

ist über i und j von eins bis drei zu summieren. Mit den Abkürzungen

$$\xi_{,i} := (\partial_i Y_k) \bar{Y}_k, \quad (6.41)$$

$$\xi_{,j'} := Y_k (\partial_j \bar{Y}_k), \quad (6.42)$$

$$\xi_{,i,j'} := (\partial_i Y_k)(\partial_j \bar{Y}_k), \quad (6.43)$$

$$\xi := |Y_k|^2 \quad (6.44)$$

und

$$\kappa = \frac{h^{ij}}{a^2} (\partial_i Y_k)(\partial_j \bar{Y}_k) + m^2 |Y_k|^2, \quad (6.45)$$

wobei der Strich am j andeutet, dass nach der gestrichenen Variable abgeleitet wurde, lässt sich der Energie-Impuls-Tensor zur Mode k übersichtlicher schreiben. Werden einige Terme eingesetzt, so erhält man

$$\langle \hat{T}_{ab}(x) \rangle_{\omega_{2k}} = \lim_{x' \rightarrow x} \nabla_a \nabla'_b \omega_{2k}(x, x') - \frac{g^{ab}}{2} \left(|\dot{T}_k(t)|^2 \xi(\vec{x}) - \kappa(\vec{x}) |T_k(t)|^2 \right). \quad (6.46)$$

Mit

$$\zeta := |\dot{T}_k|^2 \xi - \kappa |T_k|^2 \quad (6.47)$$

und

$$s_{ij} := \frac{a^2 h_{11}}{2} \quad (6.48)$$

ist der gesamte Tensor $\langle \hat{T}_{ab} \rangle_{\omega_{2k}}$ ist durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\xi}{2} |\dot{T}_k|^2 + \frac{\kappa}{2} |T_k|^2 & \dot{T}_k T_k \xi_{1'} & \dot{T}_k T_k \xi_{2'} & \dot{T}_k T_k \xi_{3'} \\ \bar{T}_k \dot{T}_k \xi_1 & |T_k|^2 \xi_{1,1'} + s_{11} \zeta & |T_k|^2 \xi_{1,2'} + s_{12} \zeta & |T_k|^2 \xi_{1,3'} + s_{13} \zeta \\ \bar{T}_k \dot{T}_k \xi_2 & |T_k|^2 \xi_{2,1'} + s_{21} \zeta & |T_k|^2 \xi_{2,2'} + s_{22} \zeta & |T_k|^2 \xi_{2,3'} + s_{23} \zeta \\ \bar{T}_k \dot{T}_k \xi_3 & |T_k|^2 \xi_{3,1'} + s_{31} \zeta & |T_k|^2 \xi_{3,2'} + s_{32} \zeta & |T_k|^2 \xi_{3,3'} + s_{33} \zeta \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

gegeben.

Für den Energie-Impuls Differentialoperator $(Q \otimes Q)_{ab'}$ (ohne der Limesbildung) und einem zeitartigen Vektorfeld $\dot{\gamma}$, gilt die Gleichungskette

$$\omega_{2k} \in \mathcal{C}^\infty(M \times M) \Rightarrow \dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^{b'} \left((Q \otimes Q)_{ab'} \omega_{2k} \right) \in \mathcal{C}^\infty(M \times M) \quad (6.50)$$

$$\Rightarrow \left(\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle \hat{T}_{ab} \rangle_{\omega_{2k}} \right) \in \mathcal{C}^\infty(M) \Rightarrow WF(\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle \hat{T}_{ab} \rangle_{\omega_k}) = \emptyset. \quad (6.51)$$

$$\Rightarrow WF(\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle \hat{T}_{ab} \rangle_{\omega_{2k}}) \cap N_{\gamma_I} = \emptyset. \quad (6.52)$$

Der Pullback $\gamma^*(\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle \hat{T}_{ab} \rangle_{\omega_{2k}})$, induziert durch die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$, $\tau \mapsto \gamma(\tau) \in M$, ist dadurch eindeutig, wohldefiniert und durch die gewöhnliche Verkettung gegeben. Der Ausdruck

$$W_k := \int d\tau f^2(\tau) (\gamma_i^* (\dot{\gamma}_i^a \dot{\gamma}_i^b \langle \hat{T}_{ab} \rangle_{\omega_{2k}}))(\tau) \quad (6.53)$$

lässt sich als der Beitrag der Mode k , des Zustandes ω , für einen beliebig bewegten Beobachter γ_i , parametrisiert durch seine Eigenzeit τ , zu der, mit $f \in \mathcal{D}(I)$ verschmierten, Energiedichte des nicht renormierten Energie-Impuls Tensors interpretieren.

6.3. Der Zustand zur niedrigsten Energie

Die gesamte Menge der Funktionen ω_{2k} lässt sich mit der Hilfe von zwei Parametern $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ darstellen:

$$\omega_{2k}[\lambda, \mu](x, x') = \bar{T}_k[\lambda, \mu](t)T_k[\lambda, \mu](t')Y_{\bar{k}}(\bar{x})\bar{Y}_{\bar{k}}(\bar{x}'), \quad (6.54)$$

mit

$$T_k[\lambda, \mu](t) = \lambda S_k(t) + \mu \bar{S}_k(t). \quad (6.55)$$

Die Wronskideterminante des allgemeinen, parametrisierten Fundamentalsystems muss dieselbe sein, wie die des alten Fundamentalsystems.

$$W(T_k[\lambda, \mu], \bar{T}_k[\lambda, \mu]) = W(S_k, \bar{S}_k) \quad (6.56)$$

Daraus folgt die Bedingung

$$|\lambda|^2 - |\mu|^2 = 1 \quad (6.57)$$

an die Koeffizienten λ und μ . Die Transformation

$$T_k \mapsto e^{i\phi}T_k, \quad \phi \in \mathbb{R} \quad (6.58)$$

ist bzgl. der Bedingung (5.58) und der Funktion W_k eine Symmetrietransformation, wodurch der Parameter μ reell gewählt werden darf. Durch die Parametrisierung von ω_{2k} ist automatisch auch die Funktion W_k parametrisiert. Dadurch wird jedem zulässigen Fundamentalsystem ein Energiewert zugeordnet.

$$W_k[\lambda, \mu] = \int d\tau f^2(\tau) (\gamma_i^* (\dot{\gamma}_i^a \dot{\gamma}_i^b \langle \hat{T}_{ab} \rangle_{\omega_{2k}[\lambda, \mu]}))(\tau) \quad (6.59)$$

Sind die Werte λ und μ bekannt, welche jedem Funktionswert von W ein Minimum zuordnen, so ist der Zustand ω bekannt, welcher für die Kurve γ und die Testfunktion f , den niedrigsten Energiewert liefert.

Es soll jetzt das Funktional W_k explizit durch die Parameter λ und μ ausgedrückt werden. Dazu werden die Gleichungen

$$\bar{T}_k T_k = |\lambda S_k + \mu \bar{S}_k|^2 = (1 + 2\mu^2)|S_k|^2 + 2\mu \Re(\lambda S_k^2), \quad (6.60)$$

$$\dot{\bar{T}}_k \dot{T}_k = |\lambda \dot{S}_k + \mu \dot{\bar{S}}_k|^2 = (1 + 2\mu^2)|\dot{S}_k|^2 + 2\mu \Re(\lambda \dot{S}_k^2), \quad (6.61)$$

$$\dot{\bar{T}}_k T_k = \dot{\bar{S}}_k S_k + 2\mu^2 \Re(\dot{\bar{S}}_k S_k) + 2\mu \Re(\lambda \dot{S}_k S_k) \quad (6.62)$$

und

$$\bar{T}_k \dot{T}_k = \bar{S}_k \dot{S}_k + 2\mu^2 \Re(\bar{S}_k \dot{S}_k) + 2\mu \Re(\lambda \bar{S}_k \dot{S}_k) \quad (6.63)$$

in das Funktional W_k eingesetzt, wodurch sich der Ausdruck

$$W_k(\omega_{2k})[\lambda, \mu] = \int d\tau f^2(\tau) \quad (6.64)$$

$$\left[\frac{(\dot{\gamma}^0)^2}{2} \left(\xi((1+2\mu^2)|\dot{S}_k|^2 + 2\mu\Re(\lambda\dot{S}_k^2)) \right) \right. \quad (6.65)$$

$$\left. + \kappa((1+2\mu^2)|S_k|^2 + 2\mu\Re(\lambda S_k^2)) \right) \quad (6.66)$$

$$+ \dot{\gamma}^0 \dot{\gamma}^j \xi_{j'} (\dot{S}_k S_k + 2\mu^2 \Re(\dot{S}_k S_k) + 2\mu \Re(\lambda \dot{S}_k S_k)) \quad (6.67)$$

$$+ \dot{\gamma}^0 \dot{\gamma}^i \xi_i (\bar{S}_k \dot{S}_k + 2\mu^2 \Re(\bar{S}_k \dot{S}_k) + 2\mu \Re(\lambda \dot{S}_k S_k)) \quad (6.68)$$

$$+ \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \xi_{i,j'} ((1+2\mu^2)|S_k|^2 + 2\mu \Re(\lambda S_k^2)) \quad (6.69)$$

$$+ \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \frac{a^2 h_{ij}}{2} \xi((1+2\mu^2)|\dot{S}_k|^2 + 2\mu \Re(\lambda \dot{S}_k^2)) \quad (6.70)$$

$$\left. - \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \frac{a^2 h_{ij}}{2} \zeta((1+2\mu^2)|S_k|^2 + 2\mu \Re(\lambda S_k^2)) \right] \circ \gamma(\tau) \quad (6.71)$$

ergibt. Wird ausgenutzt, dass für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\dot{\bar{f}}\dot{f} = \dot{f}_R \dot{f}_R + i(\dot{f}_R \dot{f}_I - \dot{f}_I \dot{f}_R) + \dot{f}_I \dot{f}_I \quad (6.72)$$

und

$$\bar{\dot{f}}\dot{f} = \dot{f}_R \dot{f}_R + i(-\dot{f}_R \dot{f}_I + \dot{f}_I \dot{f}_R) + \dot{f}_I \dot{f}_I \quad (6.73)$$

gilt, wobei f_R und f_I den Real- und Imaginärteil bezeichnen, so lässt sich $W_k(\omega_{2k})$ in die Form

$$W_k(\omega_{2k})[\lambda, \mu] = c + 2\mu^2 c_1 + 2\mu \Re(\lambda c_2) \quad (6.74)$$

bringen, wobei die Konstanten c , c_1 und c_2 durch

$$c = \int d\tau f^2(\tau) \left[\frac{(\dot{\gamma}^0)^2}{2} (\xi + \kappa) + 2\dot{\gamma}^0 \dot{\gamma}^i \Re(\xi_i \bar{S}_k \dot{S}_k) \right. \quad (6.75)$$

$$\left. + (\dot{\gamma}^0)^2 |\partial_i Y|^2 + \sum_{i \neq j} 2\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Re(\xi_{i,j'}) + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \frac{a^2 h_{ij}}{2} (-\zeta + \xi) \right] \circ \gamma(\tau), \quad (6.76)$$

$$c_1 = \int d\tau f^2(\tau) \left[\frac{(\dot{\gamma}^0)^2}{2} (\xi |\dot{S}_k|^2 + \kappa |S_k|^2) \right. \quad (6.77)$$

$$\left. + 2\dot{\gamma}^0 \dot{\gamma}^i \Re(\xi_i) \Re(\dot{S}_k S_k) + ((\dot{\gamma}^0)^2 |\partial_i Y|^2 + \sum_{i \neq j} 2\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Re(\xi_{i,j'})) |S_k|^2 \right. \quad (6.78)$$

$$\left. + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \frac{a^2 h_{ij}}{2} (-\zeta |S_k|^2 + \xi |\dot{S}_k|^2) \right] \circ \gamma(\tau) \quad (6.79)$$

und

$$c_2 = \int d\tau f^2(\tau) \left[\frac{(\dot{\gamma}^0)^2}{2} (\xi \dot{S}_k^2 + \kappa S_k^2) \right. \quad (6.80)$$

$$+ 2\dot{\gamma}^0 \dot{\gamma}^i \Re(\xi_i) \dot{S}_k S_k + ((\dot{\gamma}^0)^2 |\partial_i Y|^2 + \sum_{i \neq j} 2\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Re(\xi_{i,j'})) S_k^2 \quad (6.81)$$

$$\left. + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \frac{a^2 h_{ij}}{2} (-\zeta S_k^2 + \xi \dot{S}_k^2) \right] \circ \gamma(\tau). \quad (6.82)$$

gegeben sind. Es lässt sich erkennen, dass die Funktionen c_1 und c_2 von Olberman [26] als Spezialfall für $\dot{\gamma} = (1, 0, 0, 0)$ und der homogenen, isotropen Robertson-Walker Raumzeit positiver Krümmung enthalten sind, wenn über die Ortsabhängigkeit, durch Integration, gemittelt wird. Ähnlich wie in [26] ist für ein gegebenes $\mu > 0$ $W_k(\omega_k)[\lambda, \mu]$ minimal, wenn $Arg(\lambda) = -Arg(c_2) + \pi = \phi$ ist. Das gesuchte Fundamentalsystem (\bar{T}_k, T_k) lässt sich finden, indem das Minimum der Funktion

$$W_k = c + 2\mu^2 c_1 - 2\mu \sqrt{\mu^2 + 1} |c_2|, \quad (6.83)$$

durch Differenzieren nach μ aufgesucht wird. Die entstehende Funktion vierten Grades in μ besitzt vier Nullstellen. Zwei können wegen $c_1 > |c_2|$ ausgeschlossen werden und die anderen beiden unterscheiden sich nur um ein Vorzeichen, wobei die positive Nullstelle durch

$$\mu = \sqrt{\frac{c_1}{2\sqrt{c_1^2 - |c_2|^2}} - \frac{1}{2}} \quad (6.84)$$

gegeben ist. Für λ ergibt sich folglich

$$\lambda = e^{i\phi} \sqrt{\frac{c_1}{2\sqrt{c_1^2 - |c_2|^2}} + \frac{1}{2}}. \quad (6.85)$$

Es sollen jetzt die entsprechenden Ergebnisse präsentiert werden, wenn über u Kurven

gemittelt wird. Die Funktion W_{uk} lautet dementsprechend

$$W_{uk}(\omega_{2k})[\lambda, \mu] = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^u n_m \int_{I_m} d\tau_m f_m^2(\tau_m) \quad (6.86)$$

$$\left[\frac{(\dot{\gamma}_m^0)^2}{2} \left(\xi((1+2\mu^2)|\dot{S}_k|^2 + 2\mu\Re(\lambda\dot{S}_k^2)) \right) \right. \quad (6.87)$$

$$\left. + \kappa((1+2\mu^2)|S_k|^2 + 2\mu\Re(\lambda S_k^2)) \right) \quad (6.88)$$

$$+ \dot{\gamma}_m^0 \dot{\gamma}_m^j \xi_{j'} (\dot{S}_k S_k + 2\mu^2 \Re(\dot{S}_k S_k) + 2\mu \Re(\lambda \dot{S}_k S_k)) \quad (6.89)$$

$$+ \dot{\gamma}_m^0 \dot{\gamma}_m^i \xi_i (\bar{S}_k \dot{S}_k + 2\mu^2 \Re(\bar{S}_k \dot{S}_k) + 2\mu \Re(\lambda \dot{S}_k S_k)) \quad (6.90)$$

$$+ \dot{\gamma}_m^i \dot{\gamma}_m^j \xi_{i,j'} ((1+2\mu^2)|S_k|^2 + 2\mu \Re(\lambda S_k^2)) \quad (6.91)$$

$$+ \dot{\gamma}_m^i \dot{\gamma}_m^j \frac{a^2 h_{ij}}{2} \xi ((1+2\mu^2)|\dot{S}_k|^2 + 2\mu \Re(\lambda \dot{S}_k^2)) \quad (6.92)$$

$$- \dot{\gamma}_m^i \dot{\gamma}_m^j \frac{a^2 h_{ij}}{2} \zeta ((1+2\mu^2)|S_k|^2 + 2\mu \Re(\lambda S_k^2)) \Big] \circ \gamma(\tau_m). \quad (6.93)$$

Auch hier lässt sich der Ausdruck in die Form

$$W_k(\omega_{2k})[\lambda, \mu] = c + 2\mu^2 c_1 + 2\mu \Re(\lambda c_2) \quad (6.94)$$

bringen, wobei die Konstanten c , c_1 und c_2 in diesem Fall durch

$$c = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^u n_m \int_{I_m} d\tau_m f_m^2(\tau_m) \left[\frac{(\dot{\gamma}_m^0)^2}{2} (\xi + \kappa) + 2\dot{\gamma}_m^0 \dot{\gamma}_m^i \Re(\xi_i \bar{S}_k \dot{S}_k) \right. \quad (6.95)$$

$$\left. + (\dot{\gamma}_m^0)^2 |\partial_i Y|^2 + \sum_{i \neq j} 2\dot{\gamma}_m^i \dot{\gamma}_m^j \Re(\xi_{i,j'}) + \dot{\gamma}_m^i \dot{\gamma}_m^j \frac{a^2 h_{ij}}{2} (-\zeta + \xi) \right] \circ \gamma(\tau_m), \quad (6.96)$$

$$c_1 = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^u n_m \int_{I_m} d\tau_m f_m^2(\tau_m) \left[\frac{(\dot{\gamma}_m^0)^2}{2} (\xi |\dot{S}_k|^2 + \kappa |S_k|^2) \right. \quad (6.97)$$

$$\left. + 2\dot{\gamma}_m^0 \dot{\gamma}_m^i \Re(\xi_i) \Re(\dot{S}_k S_k) + ((\dot{\gamma}_m^0)^2 |\partial_i Y|^2 + \sum_{i \neq j} 2\dot{\gamma}_m^i \dot{\gamma}_m^j \Re(\xi_{i,j'})) |S_k|^2 \right. \quad (6.98)$$

$$\left. + \dot{\gamma}_m^i \dot{\gamma}_m^j \frac{a^2 h_{ij}}{2} (-\zeta |S_k|^2 + \xi |\dot{S}_k|^2) \right] \circ \gamma(\tau_m) \quad (6.99)$$

und

$$c_2 = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^u n_m \int_{I_m} d\tau_m f_m^2(\tau_m) \left[\frac{(\dot{\gamma}_m^0)^2}{2} (\xi \dot{S}_k^2 + \kappa S_k^2) \right. \quad (6.100)$$

$$\left. + 2\dot{\gamma}_m^0 \dot{\gamma}_m^i \Re(\xi_i) \dot{S}_k S_k + ((\dot{\gamma}_m^0)^2 |\partial_i Y|^2 + \sum_{i \neq j} 2\dot{\gamma}_m^i \dot{\gamma}_m^j \Re(\xi_{i,j'})) S_k^2 \right. \quad (6.101)$$

$$\left. + \dot{\gamma}_m^i \dot{\gamma}_m^j \frac{a^2 h_{ij}}{2} (-\zeta S_k^2 + \xi \dot{S}_k^2) \right] \circ \gamma(\tau_m) \quad (6.102)$$

gegeben sind. Für λ und μ ergeben sich wieder die obigen Ausdrücke.

6.4. Zustände niedriger Energie für homogene Räume

In diesem Abschnitt werden Zustände niedriger Energie auf einer allgemeinen Klasse von Raumzeiten konstruiert, dessen Linienelement von der Form

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)h_{Gij}dx^i dx^j \quad (6.103)$$

ist, wobei h_G die Metrik eines 3-dimensionalen, *kompakten* und *homogenen* Raumes ist. Obwohl diese Raumzeiten in der Klasse von Raumzeiten, welche im vorangegangenen Abschnitt behandelt wurden, enthalten sind, wird ihnen ein Extra-Kapitel gewidmet. Das geschieht, weil sich auf solchen Raumzeiten, wegen der Homogenität der Chauchyflächen, sinnvolle Zustände konstruieren lassen, welche ebensolche Symmetrieeigenschaften besitzen und resultierende der Energie-Impuls Tensor nicht vom Ort abhängt. Die gewonnenen Zustände niedriger Energie eignen sich daher besonders gut für numerische Berechnungen. Auch steht über die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Laplace-Beltrami Operators auf solchen Räumen eine Vielfalt an Literatur zur Verfügung. Die mathematischen Grundlagen über die homogenen Räume werden aus dem Skript von H. Baum [1] entnommen.

Definition 6.4.1: Sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Liesche Gruppe. Man sagt: G wirkt von links auf M , falls eine glatte Abbildung $\theta: (g, x) \in G \times M \mapsto g \cdot x \in M$ gegeben ist, für die folgende Eigenschaften gelten:

1. Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $l_g: x \in M \mapsto g \cdot x \in M$ ein Diffeomorphismus.
2. $x = e \cdot x$ für alle $x \in M$, wobei e das 1-Element ist.
3. $g \cdot (a \cdot x) = g(a) \cdot x$ für alle $x \in M$, $g, a \in G$.

Eine solche Wirkung θ von G auf M heißt *transitiv*, falls zu jedem Paar $x, y \in M$ ein $g \in G$ existiert mit $g \cdot x = y$.

Definition 6.4.2: Eine Mannigfaltigkeit M , auf der eine Liesche Gruppe G transitiv wirkt, heißt *homogener Raum*.

Ein homogener Raum lässt sich als Faktorraum einer Lieschen Gruppe nach einer ihrer abgeschlossenen Untergruppen darstellen. Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, dann nennen wir zwei Elemente $g_1, g_2 \in G$ äquivalent ($g_1 \sim_H g_2$), falls es ein $h \in H$ mit $g_1 = g_2 \cdot h$ gibt. Die Äquivalenzklasse eines Elementes $g \in G$ sei mit $[g] := \{g \cdot h | h \in H\}$ bezeichnet. Der Faktorraum

$$G/H := \bigcup_{g \in G} [g] \quad (6.104)$$

ist ein homogener Raum und besitzt eine Mannigfaltigkeitsstruktur. Ein Beispiel für einen kompakten, homogenen Raum ist der 3-dimensionale Torus.

$$T^3 = \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3 \quad (6.105)$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen sind von der Form

$$e^{im\varphi}. \quad (6.106)$$

Sie sind den Eigenfunktionen auf dem euklidischen \mathbb{R}^3 sehr ähnlich, bloß dass die Eigenwerte diskret sind.

Es sollen jetzt die Zustände zur niedrigsten Energie konstruiert werden. Weil diese Zustände zur Verwendung numerischer Zwecke gedacht sind, werden sie für beliebige zeitartige Kurven aufgestellt, wenn der Energie-Impuls Tensor diagonal ist. Der oben aufgeführte Torus ist ein Beispiel dafür und die Argumente, warum der Energie-Impuls Tensor diagonal sein muss, sind mathematisch die selben wie beim \mathbb{R}^3 . Wenn der Energie-Impuls Tensor nicht diagonal ist, werden die Zustände für Kurven mit Vierergeschwindigkeit $\dot{\gamma} = (1, 0, 0, 0)$ aufgestellt, weil der entstehende Ausdruck sonst schnell zu kompliziert wird, um numerische Berechnungen ausführen zu können.

Die in Abschnitt (5.1) konstruierten Zustände bilden auf den oben genannten Raumzeiten eine Klasse von homogenen Zuständen. Es ist sinnvoll die Isotropie der Zustände aufzuheben, da die zugrunde liegenden Raumzeiten i.a. nicht isotrop sind. Die entstehende Zweipunktdistribution ist ebenfalls durch

$$\omega_2(x, x') = \sum_k \left(\bar{T}_k(t) T_k(t') Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}') \right) =: \sum_k \omega_{2k}(x, x') \quad (6.107)$$

gegeben, wobei hier die Y_k die Eigenfunktionen des Laplace-Operators Δ_{h_G} sind. Es soll jetzt der Energie-Impuls Tensor berechnet werden, welcher, wegen der Homogenität der Zustände, nicht vom Ort abhängen darf. Wir erreichen dieses, indem wir, ähnlich wie in [26], den Energie-Impuls Tensor über \vec{x} integrieren und durch das Volumen $V_{G/H}$ des homogenen Raumes dividieren. Dadurch werden Funktionen in k erhalten, welche mit

$$V_{kii} = \int d^3x \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\sqrt{h_G(\vec{x})}}{V_{G/H}} \nabla_i \nabla'_i Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}') \quad (6.108)$$

bezeichnet werden, wobei sich der Index ii auf die Ableitung bezieht. Werden die Eigenfunktionen nicht abgeleitet, so entsteht wegen der Orthogonalitätsrelation ein von k unabhängiger Faktor, welcher mit V_0 bezeichnet wird. Es werden jetzt die einzelnen Komponenten des Energie-Impuls Tensors berechnet.

$$\int d^3x \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\sqrt{h_G(\vec{x})}}{V_{G/H}} \nabla_0 \nabla'_0 \bar{T}_k(t) T_k(t') Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}') = V_0 |\dot{T}_k(t)|^2 \quad (6.109)$$

$$\int d^3x \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\sqrt{h_G(\vec{x})}}{V_{G/H}} \nabla_i \nabla'_i \bar{T}_k(t) T_k(t') Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}') = V_{kii} |T_k(t)|^2 \quad (6.110)$$

Bei der nächsten Rechnung wird im zweiten Schritt partiell integriert, wobei keine Oberflächenterme entstehen, da die betrachteten homogenen Räume kompakt sind und keinen Rand haben. Es wird ebenfalls ausgenutzt, dass Y_k Eigenfunktionen des

Laplace-Beltrami Operators zum Eigenwert $-\lambda_k$ sind.

$$\int d^3x \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\sqrt{h_G(\vec{x})}}{V_{G/H}} \frac{h_G^{ij}(\vec{x})}{a^2(t)} \nabla_i \nabla'_j \bar{T}_k(t) T_k(t') Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}') \quad (6.111)$$

$$= \int d^3x \frac{\sqrt{h_G(\vec{x})}}{V_{G/H}} \frac{h_G^{ij}(\vec{x})}{a^2(t)} |T_k(t)|^2 (\nabla_i Y_k)(\vec{x}) (\nabla_j \bar{Y}_k)(\vec{x}) \quad (6.112)$$

$$= \int d^3x \frac{\sqrt{h_G(\vec{x})}}{V_{G/H}} \frac{1}{a^2(t)} |T_k(t)|^2 \lambda_k |Y_k(\vec{x})|^2 \quad (6.113)$$

$$= V_0 \frac{\lambda_k}{a^2(t)} |T_k(t)|^2 \quad (6.114)$$

Werden die Frequenzen mit $\omega_k^2 = \frac{\lambda_k}{a^2(t)} + m^2$ bezeichnet, so ergibt sich für den Energie-Impuls Tensor zur Mode k

$$\langle \hat{T}_{00} \rangle_{\omega_{2k}} = \frac{V_0}{2} (|\dot{T}_k|^2 + \omega_k^2 |T_k|^2) \quad (6.115)$$

$$\langle \hat{T}_{ii} \rangle_{\omega_{2k}} = V_{kii} |T_k|^2 + \frac{a^2 h_{Gii}}{2} V_0 (|\dot{T}_k|^2 - \omega_k^2 |T_k|^2) \quad (6.116)$$

Jetzt lässt sich die verschmierte Energiedichte für einen beliebigen Beobachter γ angeben.

$$W_k = \int d\tau f^2(\tau) \gamma^* (\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle \hat{T}_{ab} \rangle_{\omega_{2k}}) (\tau) \quad (6.117)$$

$$= \int d\tau f^2(\tau) \left((\dot{\gamma}^0)^2 \frac{V_0}{2} (|\dot{T}_k|^2 + \omega_k^2 |T_k|^2) \right) \quad (6.118)$$

$$+ \sum_{i=1}^3 (\dot{\gamma}^i)^2 \left(V_{kii} |T_k|^2 + \frac{a^2 h_{Gii}}{2} V_0 (|\dot{T}_k|^2 - \omega_k^2 |T_k|^2) \right) \circ \gamma(\tau) \quad (6.119)$$

$$= \int d\tau f^2(\tau) \left(\left((\dot{\gamma}^0)^2 \frac{V_0}{2} + \sum_{i=1}^3 (\dot{\gamma}^i)^2 \frac{a^2 h_{Gii}}{2} V_0 \right) |\dot{T}_k|^2 \right) \quad (6.120)$$

$$+ \left((\dot{\gamma}^0)^2 \frac{V_0}{2} \omega_k^2 + \sum_{i=1}^3 (\dot{\gamma}^i)^2 (V_{kii} - \frac{a^2 h_{Gii}}{2} \omega_k^2) \right) |T_k|^2 \circ \gamma(\tau) \quad (6.121)$$

Wie im obigen Fall lassen sich die Zustände wieder parametrisieren, sodass mit

$$|\lambda S_k + \mu \bar{S}_k|^2 = (1 + 2\mu^2) |S_k|^2 + 2\mu \Re(\lambda S_k^2) \quad (6.122)$$

und

$$|\lambda \dot{S}_k + \mu \dot{\bar{S}}_k|^2 = (1 + 2\mu^2) |\dot{S}_k|^2 + 2\mu \Re(\lambda \dot{S}_k^2) \quad (6.123)$$

für die Energiedichte

$$W_k[\lambda, \mu] = \int d\tau f^2(\tau) \left(\left((\dot{\gamma}^0)^2 \frac{V_0}{2} + \sum_{i=1}^3 (\dot{\gamma}^i)^2 \frac{a^2 h_{Gii}}{2} V_0 \right) \right. \quad (6.124)$$

$$\left. (1 + 2\mu^2) |\dot{S}_k|^2 + 2\mu \Re(\lambda \dot{S}_k^2) \right) \quad (6.125)$$

$$+ \left((\dot{\gamma}^0)^2 \frac{V_0}{2} \omega_k^2 + \sum_{i=1}^3 (\dot{\gamma}^i)^2 \left(V_{kii} - \frac{a^2 h_{Gii}}{2} \omega_k^2 \right) \right) \quad (6.126)$$

$$\left. (1 + 2\mu^2) |S_k|^2 + 2\mu \Re(\lambda S_k^2) \right) \circ \gamma(\tau) \quad (6.127)$$

gilt. Die Energiedichte lässt sich umschreiben zu

$$W_k[\lambda, \mu] = (1 + 2\mu^2) c_1 + 2\mu \Re(\lambda c_2) \quad (6.128)$$

mit

$$c_1 = \int d\tau f^2(\tau) \left(\left((\dot{\gamma}^0)^2 \frac{V_0}{2} + \sum_{i=1}^3 (\dot{\gamma}^i)^2 \frac{a^2 h_{Gii}}{2} V_0 \right) |\dot{S}_k|^2 \right. \quad (6.129)$$

$$\left. + \left((\dot{\gamma}^0)^2 \frac{V_0}{2} \omega_k^2 + \sum_{i=1}^3 (\dot{\gamma}^i)^2 \left(V_{kii} - \frac{a^2 h_{Gii}}{2} \omega_k^2 \right) \right) |S_k|^2 \right) \circ \gamma(\tau) \quad (6.130)$$

und

$$c_2 = \int d\tau f^2(\tau) \left(\left((\dot{\gamma}^0)^2 \frac{V_0}{2} + \sum_{i=1}^3 (\dot{\gamma}^i)^2 \frac{a^2 h_{Gii}}{2} V_0 \right) \dot{S}_k^2 + \right. \quad (6.131)$$

$$\left. \left((\dot{\gamma}^0)^2 \frac{V_0}{2} \omega_k^2 + \sum_{i=1}^3 (\dot{\gamma}^i)^2 \left(V_{kii} - \frac{a^2 h_{Gii}}{2} \omega_k^2 \right) \right) S_k^2 \right) \circ \gamma(\tau). \quad (6.132)$$

Wieder lässt sich erkennen, dass die c_1 und c_2 , für $\dot{\gamma} = (1, 0, 0, 0)$ und $G/H = S^+$, in die von Olbermann übergehen, wobei in dem Fall $V_0 = 1$ zu setzen ist, da dieser Faktor bei Olbermann in die Definition des Maß mit einbezogen wurde.

In dem Fall, dass der Energie-Impuls Tensor nicht diagonal ist, sind in c_1 und c_2 die $\dot{\gamma}^i = 0$ zu setzen und man erhält den Zustand zur niedrigsten Energie für die Kurve mit Vierergeschwindigkeit $\dot{\gamma} = (1, 0, 0, 0)$.

Damit der Beweis der Hadamardeigenschaft der eben gewonnenen Zustände einheitlicher und gemeinsam mit den Zuständen aus Abschnitt 4.3 geführt werden kann,

schreiben wir die Funktionen c_1 und c_2 in einer ähnlichen Form:

$$c_1 = \frac{1}{2} \int d\tau f^2(\tau) \left(\psi^\epsilon(\tau) |\dot{S}_k(t(\tau))|^2 + \chi_k^\epsilon(\tau) |S_k(t)|^2 \right) \quad (6.133)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \int d\tau f^2(\tau) \left(\psi^\epsilon(\tau) \dot{S}_k(t(\tau))^2 + \chi_k^\epsilon(\tau) S_k(t)^2 \right) \quad (6.134)$$

$$\psi^\epsilon(\tau) = (\dot{\gamma}^0)^2 V_0 + (\dot{\gamma}^i)^2 a^2 h_{Gii} V_0 \quad (6.135)$$

$$\chi_k^\epsilon(\tau) = (\dot{\gamma}^0)^2 V_0 \omega_k^2 + (\dot{\gamma}^i)^2 \left(V_{kii} - a^2 h_{Gii} \omega_k^2 \right). \quad (6.136)$$

Das Symbol ϵ bedeutet an dieser Stelle, dass sich die Funktionen für die unterschiedlichen kompakten und homogenen Räume unterscheiden. Es soll jetzt das Hauptergebnis der Diplomarbeit in dem n -'achsten Satz wiedergegeben werden.

Für λ und μ ergeben sich wieder die selben Funktionen und die Zweipunktdistribution wird auf die selbe Art erhalten.

Satz 6.4.3 *Sei \mathcal{W} die Weylalgebra des freien Klein-Gordon-Feldes auf einer Raumzeit (M, g) der Form (6.1), γ eine beliebige, zeitartige Kurve und $f(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. In der Menge der in Kapitel 6.1 konstruierten Zustände auf \mathcal{W} gibt es genau einen Zustand ω_0 , für den die verschmierte Energiedichte*

$$\mathbb{T}(\omega) = \int d\tau f^2(\tau) \left(\gamma^* (\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle T_{ab}^{ren} \rangle_{\omega_0}) \right) (\tau) \quad (6.137)$$

minimal ist. Dieser Zustand ist durch die Zweipunktdistribution

$$\omega_{20}(x, y) = \int d^3k \bar{T}_k(x^0) T_k(y^0) Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{y}) \quad (6.138)$$

mit $T_k(t) = \lambda S_k(t) + \mu \bar{S}_k(t)$ gegeben. S_k ist eine beliebige Lösung von (5.21), welche die Bedingung (5.23) erfüllt. μ und λ sind dabei durch (6.84) und (6.85) gegeben.

6.5. Beweis der Hadamareigenschaft I

In diesem Abschnitt wird die Hadamardeigenschaft für Zustände niedriger Energie bewiesen, bei welchen der Energie-Impuls Tensor nicht von den räumlichen Koordinaten abhängt. Dieses sind Zustände auf Raumzeiten, welche homogene Cauchyflächen besitzen und in den Abschnitten 4.3 und 5.5 konstruiert wurden. In dem nächsten Abschnitt, "Beweis der Hadamareigenschaft II", werden die Zustände analysiert, bei welchen der Energie-Impuls Tensor ortsabhängig ist.

Zunächst werden einige wichtige Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami Operators auf kompakten Riemann-Mannigfaltigkeiten untersucht und einige wichtige Resultate von Roberts und Lüders und Olbermans Arbeiten zusammengefasst. Diese Resultate werden anschließend auf die allgemeineren Raumzeiten ausgeweitet. Der Beweis der Hadamard-Eigenschaft wird danach in zwei Schritte

aufgeteilt. Im ersten Schritt wird das Verhalten der Funktionen λ und μ für $k \rightarrow \infty$ analysiert. Im zweiten Schritt wird gezeigt, dass aus diesem Verhalten die Befriedigung der mikrolokalen Spektrumsbedingung folgt.

Für eine kompakte, in den \mathbb{R}^{m+p} , $p \geq 1$, eingebettete, zusammenhängende, m -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit (Σ, h) wird mit

$$\text{Spec}(\Delta_h) = \{0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_K \leq \dots\} \quad (6.139)$$

das Spektrum des zugehörigen Laplace-Beltrami Operators bezeichnet. Es ist wichtig zu unterscheiden, dass sich der Buchstabe K auf den K -ten Eigenwert bezieht, während der Buchstabe k ein mögliches Tupel von Zahlen beschreibt, welche die Eigenfunktionen charakterisieren. Sind die Eigenwerte nicht entartet, gilt $K = k$. Es sei mit X der Raum aller kompakten, eingebetteten, zusammenhängenden, m -dimensionalen Mannigfaltigkeiten bezeichnet und mit

$$\Upsilon_K : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\Sigma, h) \mapsto \lambda_K \quad (6.140)$$

das Funktional, welches der Mannigfaltigkeit (Σ, h) den K -ten Eigenwert λ_K des zugehörigen Laplace-Beltrami Operators zuordnet.

Definition 6.5.1 [7]:

Der *Überschneidungs-Index* $U(\Sigma)$ einer Mannigfaltigkeit $(\Sigma, h) \in X$ ist über die Gleichung

$$U(\Sigma) = \sup_{\Pi} \# \Sigma \cap \Pi \quad (6.141)$$

definiert. Π ist dabei eine p -Ebene, welche zu Σ diagonal verläuft, also so, dass der Durchschnitt $\Sigma \cap \Pi$ aus einer endlichen Anzahl an Punkten besteht.

Für den Beweis der Hadamard-Eigenschaft werden für das Funktional Υ_K die folgenden zwei Theoreme benötigt:

Theorem 6.5.2 [7]:

Es sei $(\Sigma, h) \in X$ und K eine positive ganze Zahl, dann gilt

$$\left(\Sigma, h \right) \mapsto \Upsilon_K \left(\Sigma, h \right) = \lambda_K \leq \frac{c(m)U(\Sigma)^{2/m}}{\text{Vol}(\Sigma)^{2/m}} K^{2/m}, \quad (6.142)$$

wobei $c(m)$ eine Konstante ist, die nur von der Dimension von Σ abhängt.

Theorem 6.5.3 [6]:

Es sei $(\Sigma, h) \in X$ und K eine positive ganze Zahl, dann gibt es eine Konstante $\alpha(m)$, welche nur von der Dimension von Σ abhängt, und eine Konstante C , welche nur von geometrischen Größen von Σ abhängt, so dass

$$\left(\Sigma, h \right) \mapsto \Upsilon_K \left(\Sigma, h \right) = \lambda_K \geq C \left(\frac{\alpha(m)}{\text{Vol}(\Sigma)} \right)^{2/m} K^{2/m} \quad (6.143)$$

gilt.

Die Spektralfunktionen eines selbstadjungierten, elliptischen Differentialoperators P sind durch

$$e(x, y, \lambda) := \sum_{\lambda_k \leq \lambda} Y_k(x) \bar{Y}_k(y) \quad (6.144)$$

definiert, wobei λ_k die Eigenwerte und Y_k die Eigenfunktionen dieses Operators sind. Hörmander gibt in [21] den Beweis an, dass für die Spektralfunktionen eines selbstadjungierten, elliptischen Differentialoperators P , welcher erster Ordnung ist, und für einen beliebigen Differentialoperator Q , der Ordnung μ , die Ungleichung

$$|Qe(\cdot, \cdot, \lambda)| \leq C_Q \lambda^{m+\mu} \quad (6.145)$$

gilt. Dabei ist m die Dimension der zugehörigen kompakten Mannigfaltigkeit, auf welcher die Spektralfunktionen definiert sind. In [33] befindet sich eine Erweiterung auf den Laplace-Beltrami Operator, welche durch

$$\sum_{\lambda_k \leq \lambda} |\partial^\alpha Y_k(\vec{x})|^2 = C_{m,\alpha} \lambda^{m+2|\alpha|} + \mathcal{O}(\lambda^{m+2|\alpha|-1}), \quad C_{m,\alpha} > 0, \quad (6.146)$$

gegeben ist. Wenn wir dieses Ergebnis mit dem Theorem kombinieren, erhalten wir

$$|\partial^\alpha Y_K(\vec{x})|^2 \leq \sum_{\lambda_j \leq \lambda_K} |\partial^\alpha Y_j(\vec{x})|^2 = C_{m,\alpha} \lambda_K^{m+2|\alpha|} + \mathcal{O}(\lambda_K^{m+2|\alpha|-1}) \quad (6.147)$$

$$\Rightarrow |\partial^\alpha Y_K| = \mathcal{O}(K^{1+\frac{2}{3}|\alpha|}), \quad (6.148)$$

wobei die Dimension der Mannigfaltigkeit gleich drei gesetzt wurde.

Es seien jetzt die bereits bekannten Ergebnisse aus [25] und [26] zusammengefasst, welche für die Robertson-Walker Raumzeiten gültig sind. Bei den Abschätzungen wird k den Betrag des Vektors $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$, $k = |\vec{k}|$, bezeichnen.

Definition 6.5.4:

Mit $\mathcal{Q}_n(I)$ sei die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty((k_{min}, \infty) \times I)$, $(k, t) \mapsto f(k, t)$ bezeichnet, für welche zu jedem $m \in \mathbb{N}$ Konstanten $c_m > 0$ existieren, sodass die Ungleichung

$$|(\partial_t^m f)(k, t)| \leq c_m k^n, \quad t \in I, k \geq k_{min} \quad (6.149)$$

gilt.

Parker entwickelte in [27] einen Ansatz für die Lösungen von (5.121), welche vom WKB-Typ sind. Sie sind durch

$$W_k^{(n)}(t) := (2a^3(t)\Omega_k^{(n)}(t))^{-1/2} \exp\left(i \int_{t_1}^t dt' \Omega_k^{(n)}(t')\right) \quad (6.150)$$

gegeben. Die Funktionen Ω_k müssen dafür die Bedingung

$$\Omega_k^2 = \omega_k^2 - \frac{3\dot{a}^2}{4a^2} - \frac{3\ddot{a}}{2a} + \frac{3\dot{\Omega}_k^2}{4\Omega_k^2} - \frac{1\ddot{\Omega}_k}{2\Omega_k} \quad (6.151)$$

erfüllen. Diese Gleichung ist iterativ zu lösen:

$$\Omega_k^0(t) = \omega_k \quad (6.152)$$

$$(\Omega_k^{n+1})^2 = \omega_k^2 - \frac{3\dot{a}^2}{4a^2} - \frac{3\ddot{a}}{2a} + \frac{3(\dot{\Omega}_k^n)^2}{4(\Omega_k^n)^2} - \frac{1(\ddot{\Omega}_k^n)}{2\Omega_k^n}. \quad (6.153)$$

Die zugehörigen Zustände sind unter dem Namen adiabatische Vacua bekannt. Unabhängig von n gilt $|W\rangle \in \mathcal{Q}_{-1/2}(I)$ und $|\dot{W}\rangle \in \mathcal{Q}_{1/2}(I)$. Es lässt sich durch

$$S_k^{(n)}(t) = \alpha_k^{(n)}(t)W_k^{(n)}(t) + \beta_k^{(n)}(t)\bar{W}_k^{(n)}(t) \quad (6.154)$$

ein Zusammenhang mit den exakten Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{S}_k + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{S}_k + \left(\frac{\lambda_k}{a^2} + m^2\right)S_k = 0 \quad (6.155)$$

herstellen. Für die Korrekturfaktoren gelten die Abschätzungen

$$|\alpha_k^{(n)}(t) - 1| \leq C_1(1+k)^{-2n-1}, \quad |\dot{\alpha}_k^{(n)}(t)| \leq C_2(1+k)^{-2n-1}, \quad (6.156)$$

$$|\beta_k^{(n)}(t)| \leq C_3(1+k)^{-2n-1}, \quad |\dot{\beta}_k^{(n)}(t)| \leq C_4(1+k)^{-2n-1}, \quad (6.157)$$

wobei die C_i Konstanten sind. Die Funktion S_k erfüllt

$$\partial_t^j S_k = \mathcal{O}(k^{-1/2+j}). \quad (6.158)$$

Bei Olbermann befinden sich die Rechnungen, dass

$$|S|^2 = |\alpha W + \beta \bar{W}|^2 = |W|^2 + \mathcal{O}(k^{-2n}), \quad (6.159)$$

$$|\dot{S}|^2 = \left|\frac{d}{dt}(\alpha W + \beta \bar{W})\right|^2 = |\dot{W}|^2 + \mathcal{O}(k^{-2n}), \quad (6.160)$$

gilt, womit auch

$$\dot{S}S = \dot{W}W + \mathcal{O}(k^{-2n}) \quad (6.161)$$

und

$$\dot{S}S = \dot{W}W + \mathcal{O}(k^{-2n}) \quad (6.162)$$

gilt.

Diese Ergebnisse sollen jetzt auf die allgemeineren Raumzeiten ausgeweitet werden. Dazu werden die obigen Ungleichungen für die Korrekturfaktoren durch die Eigenwerte des Laplace-Beltrami Operatos ausgedrückt und mit dem Theorem (5.5.3) kombiniert. Wird allgemein für die Korrekturfaktoren $b_i(k)$ geschrieben, so gilt für die Robertson-Walker Raumzeiten

$$b_i(k) \leq \frac{C_i}{(1 + \sqrt{\lambda_k})^{2n+1}}. \quad (6.163)$$

Für die allgemeineren Raumzeiten gilt jetzt

$$\sqrt{\lambda_K} \geq CK^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{C_i}{(1 + \sqrt{\lambda})^{2n+1}} \leq \frac{C_i}{(1 + CK^{\frac{1}{3}})^{2n+1}} \quad (6.164)$$

$$\Rightarrow b_i(k) \leq \frac{C_i}{(1 + CK^{\frac{1}{3}})^{2n+1}}, \quad (6.165)$$

wobei die Konstante aus dem obigen Theorem mit C abgekürzt wurde. Aus [25] entnehmen wir, dass sich die Funktionen $|\dot{W}_k|^2$ und $|W_k|^2$ sicher nach unten beschränken lassen:

$$A(1+k) \leq |\dot{W}_k|^2 \leq B(1+k), \quad A, B \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \wedge A < B, \quad (6.166)$$

$$A'(1+k)^{-1} \leq |W_k|^2 \leq B'(1+k)^{-1}, \quad A', B' \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \wedge A' < B'. \quad (6.167)$$

Mit Hilfe der Theoreme 5.5.2 und 5.5.3 verallgemeinern wir wieder auf

$$C'K^{\frac{1}{3}} \leq \sqrt{\lambda_K} \leq CK^{\frac{1}{3}}, \quad (6.168)$$

womit

$$D(b + K^{\frac{1}{3}}) \leq |\dot{W}_k|^2 \leq E(b + K^{\frac{1}{3}}), \quad D, E \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \wedge D < E, b > 0, \quad (6.169)$$

$$D'(b + K^{\frac{1}{3}})^{-1} \leq |W_k|^2 \leq E'(b + K^{\frac{1}{3}})^{-1}, \quad D', E' \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \wedge D' < E', b > 0 \quad (6.170)$$

gilt. Für die Funktion S gilt

$$\partial_t^j S_K = \mathcal{O}\left((\sqrt{\lambda_K})^{-1/2+j}\right) = \mathcal{O}\left((K)^{-1/6+j/3}\right). \quad (6.171)$$

Jetzt sind wir in der Lage eine Abschätzung für die Funktionen c_1 und c_2 vorzunehmen. Dazu werden die exakten Lösungen durch die adiabatischen Vakua mit Korrekturfaktoren ausgedrückt und in die Funktionen c_1 und c_2 eingesetzt. In allen hier behandelten Fällen lassen sich die Funktionen durch

$$c_1 = \frac{1}{2} \int d\tau f^2(\tau) \left(\psi^\epsilon(\tau) |\dot{S}_k(t(\tau))|^2 + \chi_k^\epsilon(\tau) |S_k(t)|^2 \right) \quad (6.172)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \int d\tau f^2(\tau) \left(\psi^\epsilon(\tau) \dot{S}_k(t(\tau))^2 + \chi_k^\epsilon(\tau) S_k(t)^2 \right) \quad (6.173)$$

ausdrücken. Es werden also noch Abschätzungen für die Funktionen $\psi_k^\epsilon(\tau)$ und $\chi_k^\epsilon(\tau)$ benötigt. Für die flache und negativ gekrümmte Robertson-Walker Raumzeit lässt sich das Verhalten direkt ablesen. Für die flache Raumzeit ($\epsilon = 0$) gilt

$$\psi^0 = (\dot{\gamma}^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (\dot{\gamma}^i)^2 a^2 = \mathcal{O}(k^0) \quad (6.174)$$

$$\chi_k^0 = (\dot{\gamma}^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (\dot{\gamma}^i)^2 (2k_i^2 - a^2 \omega_k^2) = \mathcal{O}(k^2) \quad (6.175)$$

und für die negativ gekrümmte Raumzeit ($\epsilon = -$) gilt

$$\psi^- = (\dot{\gamma}^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (\dot{\gamma}^i)^2 a^2 h_{ii} = \mathcal{O}(k^0) \quad (6.176)$$

$$\chi_k^- = (\dot{\gamma}^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (\dot{\gamma}^i)^2 \left(\frac{k_i^2}{k^2} + k_i^2 - h_{ii} a^2 \omega_k^2 \right) = \mathcal{O}(k^2). \quad (6.177)$$

Für die Abschätzung der Funktionen bei den homogenen Räumen werden die Ungleichungen für die Eigenfunktionen benötigt. Mit Gleichung (6.148) erkennt man

$$V_{kii} = \int d^3x \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\sqrt{h_G(\vec{x})}}{V_{G/H}} \nabla_i \nabla'_i Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}') = \mathcal{O}(K^{2+4/3}). \quad (6.178)$$

Mit

$$V_0 = \int d^3x \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\sqrt{h_G(\vec{x})}}{V_{G/H}} Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}') = \mathcal{O}(K^0) \quad (6.179)$$

gilt die allgemeine (freundliche) Abschätzung

$$\psi^\epsilon = \mathcal{O}(\lambda_K^0) \quad (6.180)$$

und

$$\chi_k^\epsilon = \mathcal{O}(\lambda_K). \quad (6.181)$$

$\mathcal{O}(\lambda_K^0)$ bedeutet, dass sich diese Funktion durch eine Konstante abschätzen lässt. Wird die Funktion c_1 durch die adiabatischen Vakua mit Korrekturfaktoren ausgedrückt, so gilt

$$c_1 = \frac{1}{2} \int d\tau f^2(\tau) \left(\psi^\epsilon(\tau) |\partial_\tau (\alpha_k^{(n)}(t) W_k^{(n)}(t) + \beta_k^{(n)}(t) \bar{W}_k^{(n)}(t))|^2 \quad (6.182)$$

$$+ \chi_k^\epsilon(\tau) |\alpha_k^{(n)}(t) W_k^{(n)}(t) + \beta_k^{(n)}(t) \bar{W}_k^{(n)}(t)|^2 \right). \quad (6.183)$$

Werden die Betragsquadrate ausmultipliziert, so ergibt sich mit den Gleichungen (5.161) und (5.162)

$$c_1 = \int d\tau f^2(\tau) (\psi^\epsilon(\tau) |\dot{W}_k^{(n)}(\tau)|^2 + \chi_k^\epsilon(\tau) |W_k^{(n)}(\tau)|^2 + \mathcal{O}(\lambda_K^{-n})). \quad (6.184)$$

Es gilt also

$$D(b + \sqrt{\lambda_K}) \leq c_1 \leq E(b + \sqrt{\lambda_K}), \quad D, E \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \wedge D < E, \quad b > 0. \quad (6.185)$$

Für die Funktion c_2 gilt

$$c_2 = \int d\tau f^2(\tau) (\psi^\epsilon(\tau) \dot{W}_k^{(n)}(\tau)^2 + \chi_k^\epsilon(\tau) W_k^{(n)}(\tau)^2 + \mathcal{O}(\lambda_K^{-n})) \quad (6.186)$$

$$= \int d\tau f^2(\tau) ((\psi^\epsilon(\tau) |\dot{W}_k^{(n)}(\tau)|^2 \quad (6.187)$$

$$+ \chi_k^\epsilon(\tau) |W_k^{(n)}(\tau)|^2) \exp\left(i \int_{t_1}^t dt' \Omega_k^{(n)}(t')\right) + \mathcal{O}(\lambda_K^{-n}). \quad (6.188)$$

Für die weitere Abschätzung ist das folgende Lemma sehr hilfreich:

Lemma 6.5.5 [26]:

Sei $P \in \mathcal{Q}_m(I)$. Dann gibt es für jedes $M \in \mathbb{N}$ ein $C_M > 0$, sodass

$$\left| \int dt f^2(t) P(k, t) \exp\left(i \int_{t_1}^t dt' \Omega_k^{(n)}(t')\right) \right|^2 \leq C_M (1+k)^{-M+m} \quad (6.189)$$

gilt.

Wird dieses Lemma auf die Funktion $P(k, t) = \psi^\varepsilon(\tau) |\dot{W}_k^{(n)}(\tau)|^2 + \chi_k^\varepsilon(\tau) |W_k^{(n)}(\tau)|^2$ angewendet, so ergibt sich $c_2 = \mathcal{O}(\lambda_K^{-n})$.

Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ist für $|x| < 1$ in eine Taylorreihe entwickelbar. Wird die Entwicklung auf den Term in der Wurzel von

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|c_2|^2}{c_1^2}}} - 1} \quad (6.190)$$

angewendet, so ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|c_2|^2}{c_1^2}}} - 1 = \frac{1}{2} \frac{|c_2|^2}{c_1^2} + \frac{1}{4} \frac{|c_2|^4}{c_1^4} + \dots \quad (6.191)$$

Es lässt sich jetzt erkennen, dass für die Bogoliubov-Transformation,

$$T_k(t) = \lambda S_k^{(n)}(t) + \mu \bar{S}_k^{(n)}(t), \quad (6.192)$$

durch welche die $S_k^{(n)}$ in die T_k überführt werden,

$$1 - \lambda, \mu = \mathcal{O}(\lambda_K^{-2n+1}) \quad (6.193)$$

gilt.

Für den zweiten Schritt seien zunächst die, für die Beweiskette

$$1 - \lambda, \mu = \mathcal{O}(\lambda_K^{-2n+1}) \Rightarrow WF(\omega_2) = C^+, \quad (6.194)$$

wichtigen Gleichungen und Formeln aufgestellt.

Lemma 6.5.6 [22]: Sind ω_{2H} und ω_{2n} die Zweipunktdistributionen eines Hadamard-zustandes und eines adiabatischen Vakuums n -ter Ordnung, so gilt

$$WF^s(\omega_{2H} - \omega_{2n}) = \emptyset, \quad \forall s < 2n + \frac{3}{2}. \quad (6.195)$$

Mit der Benutzung der gewöhnlichen Rechenregeln für Wellenfrontmengen und dem Zusammenhang zwischen Sobolev-Wellenfrontmengen lässt sich die Gleichungsfolge

$$WF(\omega_2) = WF(\omega_2 - \omega_{2H} + \omega_{2H}) \subseteq WF(\omega_2 - \omega_{2H}) + WF(\omega_{2H}) \quad (6.196)$$

$$= WF(\omega_2 - \omega_{2H}) + C^+ \subseteq WF(\omega_2 - \omega_{2n}) \cup WF(\omega_{2n} - \omega_{2H}) + C^+ \quad (6.197)$$

$$= \overline{\bigcup_{s \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\infty\}} WF^s(\omega_2 - \omega_{2n})} \cup \overline{\bigcup_{s \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\infty\}} WF^s(\omega_{2n} - \omega_{2H})} + C^+ \quad (6.198)$$

aufstellen. Falls gezeigt werden kann, dass

$$WF^s(\omega_2 - \omega_{2n}) = \emptyset \quad \forall s < f(n) \quad (6.199)$$

gilt, wobei f eine monoton steigende Funktion ist, so gelten in der Gleichungskette die Gleichheitszeichen und es folgt $WF(\omega_2) = C^+$. Mit der mikrolokalen Spektrumsbedingung gilt, dass ω_2 ein Hadamardzustand ist. Für Distributionen ω_a aus den Sobolevräumen $H_{loc}^s(M \times M)$ gilt

$$\omega_a \in H_{loc}^s(M \times M) \Leftrightarrow WF^s(\omega_a) = \emptyset. \quad (6.200)$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\omega_2 - \omega_{2n} \in H_{loc}^{f(n)}(M \times M)$ gilt. Bei diesem Teilbeweis ist die Formel

$$\mathcal{C}^m(X) \subset H_{loc}^s(X) \quad \forall s < m - \frac{1}{2} \dim(X) \quad (6.201)$$

vom großen Nutzen, denn mit ihr genügt es zu zeigen, dass $\omega_2 - \omega_{2n} \in \mathcal{C}^m(M \times M)$ für die Hadamardeigenschaft ausreichend ist. Konvergiert das Integral

$$\partial_{x,x'}^\alpha (\omega_2 - \omega_{2n})(x, x') = \int d^3k \partial_{x,x'}^\alpha \left[(\bar{T}_k(t) T_k(t') - \bar{S}_k^{(n)}(t) S_k^{(n)}(t')) Y_{\vec{k}}(\vec{x}) \bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{x}') \right], \quad (6.202)$$

so gilt $(\omega_2 - \omega_{2n}) \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(M \times M)$. Das Integral konvergiert absolut, falls sich der Integrand durch $\mathcal{O}((\sqrt{\lambda_k})^{-3-\delta})$, $\delta > 0$, abschätzen lässt. Mit

$$\partial_t^j S_k = \mathcal{O}\left((\sqrt{\lambda_K})^{j-1/2}\right) \quad (6.203)$$

und

$$|\partial^\alpha Y_K(\vec{x})|^2 = \mathcal{O}(\lambda_K^{3+2|\alpha|}) \quad (6.204)$$

sowie dem Ergebnis $1 - \lambda, \mu = \mathcal{O}(\lambda_K^{-2n+1})$, gilt jetzt

$$\partial_{x,x'}^\alpha \left[(\bar{T}_k(t) T_k(t') - \bar{S}_k^{(n)}(t) S_k^{(n)}(t')) Y_{\vec{k}}(\vec{x}) \bar{Y}_{\vec{k}}(\vec{x}') \right] = \mathcal{O}(\lambda_K^{\frac{3}{2}|\alpha| - 2n + \frac{7}{2}}). \quad (6.205)$$

Ein Vergleich mit dem Konvergenzkriterium liefert

$$\frac{3}{2}|\alpha| - 2n + \frac{7}{2} = -3 - \delta \quad (6.206)$$

$$\Rightarrow \delta = 2n - \frac{3}{2}|\alpha| - \frac{13}{2}. \quad (6.207)$$

Damit das Integral konvergiert muss also

$$\frac{4}{3}n - \frac{26}{6} > |\alpha| \quad (6.208)$$

gelten, woraus

$$\omega_2 - \omega_{2n} \in \mathcal{C}^{\lfloor \frac{4}{3}n - \frac{26}{6} \rfloor}(M \times M) \quad (6.209)$$

folgt. Die Funktion $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ist die Gaußklammer mit einer kleinen Modifikation:

$$\lfloor x \rfloor := \max_{k \in \mathbb{N}, k < x} (k), \quad x > 0 \quad (6.210)$$

$$\lfloor x \rfloor := 0, \quad x < 0. \quad (6.211)$$

Damit gilt auch

$$(\omega_2 - \omega_{2n}) \in H_{loc}^{\lfloor \frac{4}{3}n - \frac{40}{6} \rfloor}(M \times M). \quad (6.212)$$

Da sich die Iterationsordnung des adiabatischen Vakuums beliebig hoch wählen lässt, ist die mikrolokale Spektrumsbedingung erfüllt. \square

6.6. Beweis der Hadamardeigenschaft II

Jetzt soll der Beweis für die Zustände niedriger Energie, dessen Energie-Impuls Tensor ortsabhängig ist, geführt werden. Die Schwierigkeit besteht darin, dass sich die Funktion c_1 nicht mehr so einfach nach unten abschätzen lässt.

Die Menge aller Punkte $p \in \sum$, auf welchen die Eigenfunktionen Null sind, wird mit

$$\mathcal{N}_k := \{p \in \sum \mid Y_k(p) = 0\} \quad (6.213)$$

bezeichnet. Diese Mengen sind Untermannigfaltigkeiten und besitzen ein $n-1$ dimensionales Volumen, welches die Bedingung

$$C\sqrt{\lambda} \leq Vol^{n-1}(\mathcal{N}_k) \leq C'\sqrt{\lambda} \quad (6.214)$$

erfüllt [9].

Werden die Ausdrücke (5.161), (5.162) und (5.166) in c_1 eingesetzt, so ergibt sich

$$c_1 = \int d\tau f^2(\tau) \left[\frac{(\dot{\gamma}^0)^2}{2} (\xi |\dot{W}|^2 + \kappa |W|^2) \right] \quad (6.215)$$

$$+ 2\dot{\gamma}^0 \dot{\gamma}^i \Re(\xi_i) \Re(\dot{W}_k W_k) + ((\dot{\gamma}^0)^2 |\partial_i Y|^2 + \sum_{i \neq j} 2\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Re(\xi_{i,j'})) |W|^2 \quad (6.216)$$

$$+ \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \frac{a^2 h_{ij}}{2} (-\zeta |W|^2 + \xi |\dot{W}_k|^2) \Big] \circ \gamma(\tau) + \mathcal{O}(k^{-2n+2}) \quad (6.217)$$

$$\Rightarrow c_1 = \mathcal{O}(k^3). \quad (6.218)$$

Nutzt man die Gleichungen

$$W^2 = |W|^2 \exp(2i \int \Omega), \quad (6.219)$$

$$\dot{W}^2 = |\dot{W}|^2 \exp(2i \int \Omega) \quad (6.220)$$

und

$$\dot{W}W = \dot{W}W \exp(2i \int \Omega) \quad (6.221)$$

aus, so ergibt sich für die Funktion c_2

$$c_2 = \int d\tau f^2(\tau) \left[\left(\frac{(\dot{\gamma}^0)^2}{2} (\xi |\dot{W}|^2 + \kappa |W|^2) \right. \right. \quad (6.222)$$

$$\left. \left. + 2\dot{\gamma}^0 \dot{\gamma}^i \Re(\xi_i) \Re(\dot{W}_k W_k) + ((\dot{\gamma}^0)^2 |\partial_i Y|^2 + \sum_{i \neq j} 2\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Re(\xi_{i,j'})) |W|^2 \right. \right. \quad (6.223)$$

$$\left. \left. + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \frac{a^2 h_{ij}}{2} (-\zeta |W|^2 + \xi |\dot{W}_k|^2) \right) \exp(2i \int \Omega) \right] \circ \gamma(\tau) + \mathcal{O}(k^{-2n+2}) \quad (6.224)$$

Wird Lemma 5.5.5 auf c_2 angewendet, ergibt sich

$$|c_2| = \mathcal{O}(k^{-2n+2}) \quad (6.225)$$

für ein geeignetes M .

Das Verhalten der Funktion c_1 :

Besitzt die Funktion c_1 Nullstellen, so hat die Funktion $\frac{1}{c_1^2}$ Singularitäten, was die Hadamardeigenschaft zerstören kann. Ebenso ist ein, für die Funktion $\frac{1}{c_1^2}$, in k schnell abfallendes Verhalten für die Hadamardeigenschaft gefährlich. Es ist also ein passendes Verhalten der Funktion sicherzustellen.

Der Teil der Funktion c_1 , welcher nicht von der Ordnung $\mathcal{O}(k^{-2n+2})$ ist, lautet

$$\int d\tau f^2(\tau) \left[\frac{(\dot{\gamma}^0)^2}{2} (\xi |\dot{W}|^2 + \kappa |W|^2) + 2\dot{\gamma}^0 \dot{\gamma}^i \Re(\xi_i) \Re(\dot{W}_k W_k) \right. \quad (6.226)$$

$$\left. + ((\dot{\gamma}^0)^2 |\partial_i Y|^2 + \sum_{i \neq j} 2\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Re(\xi_{i,j'})) |W|^2 \right. \quad (6.227)$$

$$\left. + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \frac{a^2 h_{ij}}{2} (\xi |\dot{W}_k|^2 - \kappa |W|^2) \right] \circ \gamma(\tau). \quad (6.228)$$

Der letzte negative Term kann die positiven Terme wegen der Zeitartigkeit der Kurve nicht aufheben.

$$\frac{(\dot{\gamma}^0)^2}{2} \kappa |W|^2 - \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \frac{a^2 h_{ij}}{2} \kappa |W|^2 = (g_{ab} \dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b) \frac{\kappa |W|^2}{2} \geq 0 \quad (6.229)$$

$$\kappa(\vec{x})|W_k(t)|^2 = \left(\frac{h^{ij}}{a^2} (\partial_i Y_k) (\partial_j \bar{Y}_k) + m^2 |Y_k|^2 \right) (\vec{x}) |W_k(t)|^2 \geq 0, \quad \forall k, x \quad (6.230)$$

Der mittlere Term ist ebenfalls nie negativ.

$$((\dot{\gamma}^0)^2 |\partial_i Y|^2 + \sum_{i \neq j} 2\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Re(\xi_{i,j'})) |W|^2 = h^{ij} (\partial_i \bar{Y}) (\partial_j Y) |W|^2 \geq 0 \quad \forall k, x \quad (6.231)$$

Falls aber $Y_k \circ \gamma(\tau)$ und deren Ableitungen auf der ganzen Kurve identisch Null sind, besitzt die Funktion c_1 dort eine Nullstelle. Dazu muss die Projektion der Kurve auf den räumlichen Anteil der Raumzeit in der Nullmenge \mathcal{N}_k der Eigenfunktion Y_k liegen:

$$\gamma(\tau) \in \mathcal{N}_k \quad \forall \tau \in I. \quad (6.232)$$

Die Untermannigfaltigkeit ist jedoch 2 dimensional, so dass für ein passendes Koordinatensystem, und in dem Fall, in dem die Kurve durch ein endliches Gebiet von \sum verläuft,

$$\frac{1}{2} \int d\tau (\dot{\gamma}^0)^2 \frac{h^{ii}}{a^2} |\partial_i Y_k|^2 |W_k|^2 \circ \gamma(\tau) \quad (6.233)$$

einen positiven, von Null verschiedenen Beitrag liefert. Die Richtung i liegt dabei orthogonal auf der Hyperfläche. Dieses Integral kann nur dann Null sein, wenn auf der gesamten Kurve zusätzlich ein Extremum von Y_k verläuft, was nur dann nicht auszuschließen ist, wenn die Menge

$$\gamma(I) \cap \sum \quad (6.234)$$

nur aus einem einzigen Punkt besteht. Es ist also nicht auszuschließen, dass der Fall eintreten kann, dass die Funktion $\frac{1}{c_1^2}$ Singularitäten besitzt. Es lässt sich jedoch erkennen, dass wenn c_1 bei k eine Nullstelle besitzt, dass dann auch die Funktion c_2 dort eine Nullstelle besitzt, womit sich $\mu(k) = \frac{0}{0}$ ergibt und μ an diesen Stellen nicht definiert ist. Sei jetzt $\mu > 0$. Die Funktion Y_k kann in k nicht schnell abfallend sein, weil die Funktion

$$\omega_2(x, x') = \sum_k \left(\bar{T}_k(t) T_k(t') Y_k(\vec{x}) \bar{Y}_k(\vec{x}') \right) \quad (6.235)$$

sonst keinen singulären Träger haben kann. Das kann offensichtlich nicht sein, da ja schon der antisymmetrische Anteil durch die Kommutatorfunktion gegeben ist, welche einen singulären Träger besitzt. Es deutet also alles darauf hin, dass die Funktion c_1 , bis auf mögliche Nullstellen, ein ähnliches Verhalten wie bei den homogenen Mannigfaltigkeiten besitzt. Mit dieser Annahme sind die gefundenen Zustände Hadamardzustände.

7. Zusammenfassung

Motiviert durch das Resultat, dass die Quantenenergiegleichung von Fewster, für beliebige global hyperbolische Raumzeiten, Hadamardzustände und zeitartige Kurven gilt, sollte das Ergebnis von Olberman, die Zustände niedriger Energie, maximal erweitert werden.

Ausgehend von der Methode zur Konstruktion von homogenen und isotropen quasi-freien Zuständen auf Robertson-Walker Raumzeiten, von Roberts und Lüders, wurde zunächst eine möglichst umfassende Klasse von Zuständen auf einer größt möglichen Klasse von Raumzeiten konstruiert. Für kompakte Cauchyflächen wurde diese Methode maximal erweitert. Die Einschränkung an die Zustände, welche von der Isotropie der Robertson-Walker Raumzeiten kam, wurde ebenfalls aufgehoben. Als nächstes sollten die Kurven erweitert werden. Von der zeitartigen Geodäten mit vierer-Geschwindigkeit $v^a = (1, 0, 0, 0)$ sollte auf beliebige zeitartige Kurven erweitert werden. Insbesondere sind damit Kurven beschleunigter Beobachter zugelassen und die Einschränkung auf Karten, in denen die vierer-Geschwindigkeit die obige Form hat, ist ebenfalls aufgehoben. Für diesen Schritt musste der gesamte nicht renormierte Energie-Impuls Tensor berechnet und in Moden zerlegt werden. Nach der Vergewisserung, dass der Pullback dieses, mit $v^a v^b$ verjüngten Tensorfeldes wohldefiniert ist, wurde die entsprechende Energie, welche auf dieser Kurve detektiert wird, ausgerechnet. Es wurden alle konstruierten Zustände geeignet parametrisiert, wodurch ebenfalls die gemessenen Energiewerte parametrisiert wurden. Der Zustand zur niedrigsten Energie wurde dadurch erhalten, dass die Energie nach dem Parameter μ abgeleitet wurde. Das μ welches das Minimum der Energie liefert, liefert ebenfalls den Zustand, welcher für diese Energie verantwortlich ist. Nach dem Auffinden des gesuchten Zustandes wurde nachgewiesen, dass es sich um einen Hadamardzustand handelt.

In dieser Diplomarbeit wurde also der Gültigkeits- und Anwendungsbereich der Zustände niedriger Energie erweitert. Es wurde auch gezeigt, dass die Hadamardeigenschaft unabhängig von der gewählten Kurve ist. Theoretisch lässt sich die Klasse der Zustände noch weiter erweitern, indem Integraloperatoren auf den fouriertransformierten Cauchydaten eingeführt werden. Die sich ergebenden Ausdrücke werden aber so kompliziert, dass eine weitere Verwendung kaum möglich scheint.

Eine Möglichkeit den Zustand zur niedrigsten Energie für beliebige Raumzeiten und beliebige Kurven innerhalb der gesamten Klasse von Hadamardzuständen zu finden, könnte mit Hilfe der Variationsrechnung geschehen. Variiert werden würde hierbei nach dem glatten Anteil der Zweipunktdistribution, für welche ein Reihenansatz gemacht werden könnte. Es ließen sich somit Differentialgleichungen aufstellen, welche der glatte Anteil der Zweipunktdistribution auf der Kurve erfüllen müsste. Die große Schwierigkeit ist hierbei das Einbringen der Positivitätsbedingung in das Variationsproblem, was

mir nur für eine endliche Anzahl von reelwertigen Testfunktionen geglückt ist. Auch der Reihenansatz bereitet Schwierigkeiten, er liefert entweder nur eine Approximation an den glatten Anteil oder ein unendliches Differentialgleichungssystem.

A. Anhang

A.1. Mikrolokale Analysis

In der mikrolokalen Analysis geht es im Wesentlichen um die Untersuchung des singulären Verhaltens von Distributionen. Distributionen nehmen als Greensche Funktionen, Propagatoren in der Quantenfeldtheorie und als Fundamentallösungen von partiellen Differentialgleichungen eine wichtige Rolle in der Physik ein. Die singuläre Struktur einer Distributionen kann mit der Hilfe des Begriffes der Wellenfrontmenge im Kotangentialbündel näher untersucht werden.

A.1.1. Grundlegende Operationen mit Distributionen

Eine Distribution u in einer offenen Teilmenge X des \mathbb{R}^n ist ein stetiges lineares Funktional auf einem Funktionenraum, wie z.B. $\mathcal{C}_0^\infty(X)$, sodass für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ eine Konstante C und k existiert, mit denen $|u(\phi)| \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \phi|$, $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(X)$ gilt. Oft wird auch die äquivalente Formulierung benutzt, dass eine Linearform genau dann eine Distribution ist, wenn $U(\phi_j) \rightarrow 0$ für jede Folge $\phi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(X)$ die mit $j \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, in dem Sinne, dass $\sup |\partial^\alpha \phi_j| \rightarrow 0$ für jedes feste α und $\text{supp} \phi_j \subset K$ für alle j festes K . Die Menge aller Distributionen in X wird mit $\mathcal{D}'(X)$ bezeichnet. Zum Beispiel liefert jede in X stetige Funktion f über $\mathcal{C}_0^\infty(X) \ni \phi \mapsto \int f \phi dx$ eine Distribution, welche oft ebenfalls mit f bezeichnet wird. Die Einschränkung einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ auf eine Teilmenge $Y \subset X$ ist durch $u_Y(\phi) = u(\phi)$, $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(Y)$ gegeben. Der Träger $\text{supp}(u)$ einer Distribution u ist die Menge der Punkte in X , die keine offene Umgebung haben, auf welcher die Einschränkung von u 0 ist. Der singuläre Träger $\text{singsupp}(u)$ einer Distribution u ist die Menge der Punkte in X , die keine offene Umgebung haben, auf welcher die Einschränkung von u durch eine \mathcal{C}^∞ -Funktion gegeben sein kann. Die Ableitung einer Distribution ist immer möglich und durch $(\partial_k u)(\phi) = -u(\partial_k \phi)$ gegeben. Die Multiplikation einer Distribution mit einer Funktion ist hingegen nur für glatte Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty$ über $(fu)(\phi) = u(f\phi)$ definiert. Die Faltung einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit einer Funktion $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist über $(u*\phi)(x) = u(\phi(x-\cdot)) \in \mathcal{C}^\infty$ definiert, wobei die rechte Seite bedeutet, dass u auf $\phi(x-y)$ als Funktion von y wirkt. Ist u durch eine stetige Funktion gegeben, stimmt dieses mit der Faltung zweier Funktionen überein. Die Faltung zweier Distributionen $u_1 * u_2$ ist die einedeutige Distribution u , so dass $u_1 * (u_2 * \phi) = u * \phi$, $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt. Die Faltung ist kommutativ $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$ und es gilt $\text{supp}(u_1 * u_2) \subset \text{supp}(u_1) + \text{supp}(u_2)$. Das Produkt von zwei Distributionen an selben Punkten zu definieren bereitet Schwierigkeiten. Es ist jedoch immer

möglich das Produkt $u_1 \otimes u_2 \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$ zweier Distributionen $u_j \in \mathcal{D}'(X_j)$, X_j offen in \mathbb{R}^{n_j} , zu erklären, wenn diese von unterschiedlichen Mengen von Variablen abhängen. Für die Distribution $u = u_1 \otimes u_2$ gilt $u(\phi_1 \otimes \phi_2) = \int u_1 \phi_1 dx_1 \int u_2 \phi_2 dx_2$, $\phi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(X_j)$ und $\text{supp}(u) = \text{supp}(u_1) \times \text{supp}(u_2)$. Wenn die u_j Funktionen sind gilt $X_1 \times X_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto u_1(x_1)u_2(x_2)$. Jede Funktion $K \in \mathcal{C}(X_1 \times X_2)$ kann als Kern eines Integraloperators $\mathcal{K} : \mathcal{C}_0(X_2) \rightarrow \mathcal{C}(X_1)$ angesehen werden

$$(\mathcal{K}u)(x_1) = \int K(x_1, x_2)u(x_2)dx_2 \quad (\text{A.1})$$

und es gilt das Kerntheorem von Schwartz:

Jedes $K \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$ definiert durch $\langle \mathcal{K}\phi, \psi \rangle = K(\psi \otimes \phi)$, $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(X_1)$, $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(X_2)$ eine lineare Abbildung $\mathcal{K} : \mathcal{C}_0^\infty(X_2) \rightarrow \mathcal{D}'(X_1)$, welche in dem Sinne, dass $\mathcal{K}\phi_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}'(X_1)$, wenn $\phi_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{C}_0^\infty(X_2)$, stetig ist. Weiterhin gibt es zu jeder linearen Abbildung \mathcal{K} genau eine Distribution K und man nennt K den Kern von \mathcal{K} .

Wesentlich für das Rechnen mit Distributionen auf Mannigfaltigkeiten ist auch der Pullback von Distributionen. Sind X und Y zwei Mannigfaltigkeiten und $\varphi : Y \rightarrow X$ glatt, dann lässt sich der Pullback $\varphi^*\phi$ einer Distribution $\phi \in \mathcal{D}'(X)$, als Distribution auf Y erklären, wenn $WF(\phi) \cap N_\varphi = \emptyset$, mit

$$N_\varphi = \{(\varphi(y), \xi) \in T^*(X) \mid d\varphi^t(y)\xi = 0\} \quad (\text{A.2})$$

gilt. Falls ϕ glatt ist, ist der Pullback durch die gewöhnliche Verkettung $(\varphi^*\phi)(y) = \phi(\varphi(y))$ gegeben.

A.1.2. Fouriertransformation und Wellenfrontmenge

Die Fouriertransformierte $\hat{\phi}$ einer Distribution $\phi \in \mathcal{E}'(X)$ ist durch die glatte Funktion

$$\hat{u}(\xi) = u(e_\xi) \quad (\text{A.3})$$

gegeben. Wobei e_ξ die glatte Funktion $e_\xi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-i\langle \xi, x \rangle}$ ist. Jede Distribution $u \in \mathcal{E}'(X)$ mit kompaktem Träger ist auch in $\mathbb{S}'(\mathbb{R}^n)$, dem Dualraum vom Schwartzraum. Die Fouriertransformation ist hier eine lineare Abbildung $F : \mathbb{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{S}'(\mathbb{R}^n)$ und ähnlich wie für Funktionen gelten hier die wichtigen Gleichungen

$$\widehat{\partial_x^\alpha u}(\xi) = (-i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi), \quad (\text{A.4})$$

$$\widehat{x^\alpha u}(\xi) = (-i\partial_\xi)^\alpha \hat{u}(\xi). \quad (\text{A.5})$$

Eine Distribution $u \in \mathcal{E}'(X)$ ist genau dann glatt, wenn es für jedes N eine Konstante C_N gibt, so dass

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N} \quad (\text{A.6})$$

gilt. Wenn jetzt aber $\text{singsupp}(u) \neq \emptyset$, $u \in \mathcal{E}'(X)$ gilt, kann es Richtungen geben, in denen $\hat{u}(\xi)$ nicht schnell abfällt. Es wird dafür eine kegelförmige Umgebung Γ definiert, über die Invarianz bei einer Multiplikation mit positiven reellen Zahlen, also

eine offene Umgebung der Art $\{\lambda x | x \in S, \lambda \in \mathbb{R}_+\}$, wobei S eine offene Teilmenge der S^{n-1} -Sphäre ist. Für eine Distribution $u \in \mathcal{E}'(X)$ mit kompaktem Träger, nennt man einen Punkt $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ regulär gerichtet, wenn es eine offene kegelförmige Umgebung von ξ gibt, mit $\sup_{\xi' \in \Gamma} (1 + |\xi'|)^N |\hat{u}(\xi')| > \infty$ für jedes $N \in \mathbb{N}_0$. Die Fouriertransformierte fällt also in Richtung regulär gerichteter Punkte sehr schnell ab. Jetzt wird $\Sigma(u)$ als das Komplement der Menge aller regulär gerichteter Punkte definiert, also die Menge aller Punkte in deren Richtung die Fouriertransformierte *nicht* schnell abfällt. Für jedes $u \in \mathcal{E}'(X)$ und jedes $f \in \mathcal{D}(X)$ gilt $\Sigma(fu) \subset \Sigma(u)$, wobei die Fouriertransformierte eines Produktes über die Faltung $\widehat{fu}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi - \eta) \hat{f}(\eta) d\eta$ gegeben ist. Jetzt kann für jedes $u \in \mathcal{D}'(X)$ und einen Punkt $x \in X$ die Schnittmenge $\Sigma_x(u) = \bigcap_f \Sigma(fu)$ von geschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definiert werden. Die Schnittmenge wird über alle Funktionen $f \in \mathcal{D}(X)$, mit $f(x) \neq 0$ genommen. Jetzt sind wir in der Lage den wichtigen Begriff der Wellenfrontmenge zu definieren:

$$WF(u) = \left\{ (x, \xi) \in X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid \xi \in \Sigma_x(u) \right\} \quad (\text{A.7})$$

Die Projektion der Wellenfrontmenge $WF(u)$ auf das erste Argument ist gleich dem singulären Träger $\text{singsupp}(u)$ von u .

Definition A.1 Ein Sobolevraum $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$ besteht aus der Menge

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in S'(\mathbb{R}^n) \mid \int d^n \xi (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 < \infty\}. \quad (\text{A.8})$$

Um den Begriff des Sobolevraumes auf Mannigfaltigkeiten auszuweiten, werden die lokalen Sobolevräume benötigt, welche über die Menge

$$H_{loc}^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in D'(\mathbb{R}^n) \mid \int d^n \xi (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{fu}(\xi)|^2 < \infty, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\} \quad (\text{A.9})$$

Zur Verallgemeinerung auf eine Mannigfaltigkeit, soll dieses unabhängig von der gewählten Karte gelten. Es soll jetzt der Begriff der Sobolev-Wellenfrontmenge WF^s eingeführt werden.

Definition A.2 Für eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$, $x_0 \in X$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $s \in \mathbb{R}$ ist $(x_0, \xi_0) \notin WF^s(u)$, falls es ein $f \in \mathcal{D}(X)$ mit $f(x_0) \neq 0$ und eine offene koönische Umgebung Γ von $\xi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt, sodass

$$\int_{\Gamma} d^n \xi (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{fu}(\xi)|^2 < \infty. \quad (\text{A.10})$$

Bei Sobolev-Wellenfrontmengen auf Mannigfaltigkeiten gilt dieses wieder unabhängig von der gewählten Karte. Es gilt die Verbindung

$$u \in H_{loc}^s(X) \Leftrightarrow WF^s(u). \quad (\text{A.11})$$

A.2. Berechnung des Energie-Impuls Tensors aus einer gegebenen Metrik

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Krümmungsgrößen und der Energie-Impuls Tensor für eine Metrik der Form

$$g_{ab}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(t)h_{11}(x,y,z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)h_{22}(x,y,z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)h_{33}(x,y,z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

berechnet werden. Wir beschränken uns auf diese Teilmenge von Metriken, weil die Metriken der allgemeineren Form 5.1 extrem lange und komplizierte Krümmungstensoren hervorbringen. Diese diagonale Form scheint auch die wichtigste Untermenge zu sein, für welche sich noch einigermaßen überschaubare Krümmungsgrößen konstruieren lassen.

Der Energie-Impuls Tensor ist mit der Metrik über den Einstein Tensor verknüpft, welcher sich aus Krümmungstensoren zusammensetzt,

$$G_{ab} = -\kappa T_{ab}, \quad G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}, \quad (\text{A.13})$$

wobei hier die kosmologische Konstante weggelassen wurde. Die Skalarkrümmung R lässt sich aus dem Ricci Tensor R_{ab} erhalten.

$$R = g^{ab}R_{ab} \quad (\text{A.14})$$

Der Ricci Tensor lässt sich aus dem Riemann Tensor R_{abc}^d berechnen.

$$R_{ab} = R_{abc}^c \quad (\text{A.15})$$

Der Riemann Tensor setzt sich aus den Christoffelsymbolen zusammen.

$$R_{abc}^d = \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_c \Gamma_{ab}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d \quad (\text{A.16})$$

Die Christoffelsymbole lassen sich wie folgt aus der Metrik berechnen:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}). \quad (\text{A.17})$$

Zu der weiteren Berechnung wird also die inverse Metrik benötigt, welche durch

$$g^{ab}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a(t)h_{11}(x,y,z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{a(t)h_{22}(x,y,z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{a(t)h_{33}(x,y,z)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

gegeben ist. Der Energie-Impuls Tensor lässt sich jetzt direkt ausrechnen. Dazu muss einfach nur die folgende symbolische Kette durchlaufen werden:

$$g_{ab}, g^{ab} \rightsquigarrow \Gamma_{bc}^a \rightsquigarrow R_{abc}^d \mapsto R_{abc}^c = R_{ab} \mapsto g^{ab} R_{ab} = R \quad (\text{A.19})$$

$$R_{ab}, R, g_{ab} \rightsquigarrow -\frac{1}{\kappa} G_{ab} = T_{ab}. \quad (\text{A.20})$$

Der Pfeil "◊" soll dabei "einsetzen" und der Pfeil "↦" soll "abbilden auf" bedeuten. Für die konkreten Berechnungen sind Computerprogramme sehr hilfreich.

Im Folgenden werden die Koordinaten weggelassen und die partiellen Ableitungen beziehen sich nur auf die Funktion, welche direkt als nächstes kommt. Für die Christoffelsymbole ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$\Gamma_{ab}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}h_{11}\partial_t a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}h_{22}\partial_t a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}h_{33}\partial_t a \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$\Gamma_{ab}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial_t a}{2a} & 0 & 0 \\ \frac{\partial_t a}{2a} & \frac{\partial_x h_{11}}{2h_{11}} & \frac{\partial_y h_{11}}{2h_{11}} & \frac{\partial_z h_{11}}{2h_{11}} \\ 0 & \frac{\partial_y h_{11}}{2h_{11}} & -\frac{\partial_x h_{22}}{2h_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial_z h_{11}}{2h_{11}} & 0 & -\frac{\partial_x h_{33}}{2h_{11}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$\Gamma_{ab}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial_t a}{2a} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial_y h_{11}}{2h_{22}} & \frac{\partial_x h_{22}}{2h_{22}} & 0 \\ \frac{\partial_t a}{2a} & \frac{\partial_x h_{22}}{2h_{22}} & \frac{\partial_y h_{22}}{2h_{22}} & \frac{\partial_z h_{22}}{2h_{22}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial_z h_{22}}{2h_{22}} & -\frac{\partial_y h_{33}}{2h_{22}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$\Gamma_{ab}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial_t a}{2a} \\ 0 & -\frac{\partial_z h_{11}}{2h_{33}} & 0 & \frac{\partial_x h_{33}}{2h_{33}} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial_x h_{22}}{2h_{33}} & \frac{\partial_y h_{33}}{2h_{33}} \\ \frac{\partial_t a}{2a} & \frac{\partial_x h_{33}}{2h_{33}} & \frac{\partial_y h_{33}}{2h_{33}} & \frac{\partial_z h_{33}}{2h_{33}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

Für die Komponenten des Riemann Tensors ergibt sich

$$R_{a0} = R_{0a} = \left(\frac{3((\partial_t a)^2 - 2a\partial_t^2 a)}{4a^2}, 0, 0, 0 \right), \quad (\text{A.25})$$

$$R_{11} = \frac{1}{4ah_{11}h_{22}h_{33}} \left(h_{11}^2 h_{22} h_{33}^2 ((\partial_t a)^2 + 2a\partial_t^2 a) + ah_{22}h_{33} (h_{33}((\partial_y h_{11})^2 \right. \quad (\text{A.26})$$

$$\left. + \partial_x h_{11} \partial_x h_{22}) + h_{22}((\partial_z h_{11})^2 + \partial_x h_{11} \partial_x h_{33}) \right) h_{33} \quad (\text{A.27})$$

$$+ ah_{11} (h_{33}^2 (\partial_y h_{11} \partial_y h_{22} + (\partial_x h_{22})^2) - 2h_{22}h_{33} \quad (\text{A.28})$$

$$(\partial_z^2 h_{11} \partial_z h_{22} + \partial_y^2 h_{11} \partial_y^2 h_{33} + 2h_{33}(\partial_y^2 h_{11} + \partial_x^2 h_{22})) \quad (\text{A.29})$$

$$\left. + h_{22}^2 (\partial_z h_{11} \partial_z h_{33} + (\partial_x h_{33})^2 - h_{33}(\partial_z^2 h_{11} + \partial_x^2 h_{33})) \right), \quad (\text{A.30})$$

$$R_{21} = R_{12} = \frac{1}{4h_{33}^2} \left(\frac{h_{33}\partial_y h_{33}\partial_x h_{22}}{h_{22}} + \frac{h_{33}\partial_y h_{11}\partial_x h_{33}}{h_{11}} \right. \quad (\text{A.31})$$

$$\left. + \partial_y h_{33}\partial_x h_{33}\partial_y h_{33} - 2h_{33}\partial_y \partial_x h_{33} \right), \quad (\text{A.32})$$

$$R_{31} = R_{13} = \frac{1}{4h_{22}^2} \left(\frac{h_{22}\partial_z h_{11}\partial_x h_{22}}{h_{11}} + \partial_z h_{22} \right. \quad (\text{A.33})$$

$$\left. \left(\partial_x h_{22} + \frac{h_{22}\partial_x h_{33}}{h_{33}} \right) - 2h_{22}\partial_x \partial_z h_{22} \right), \quad (\text{A.34})$$

$$R_{22} = \left(h_{11}^2 (h_{22}^2 h_{33}^2 ((\partial_t a)^2 + 2a\partial_t^2 a) + ah_{33}((\partial_z h_{22})^2 \right. \quad (\text{A.35})$$

$$+ \partial_y h_{22} + \partial_y h_{33}) + ah_{22}(\partial_z h_{22}\partial_z h_{33} + (\partial_y h_{33})^2 \quad (\text{A.36})$$

$$- 2h_{33}(\partial_z^2 h_{22} + \partial_y^2 h_{33})) + ah_{22}h_{33}^2((\partial_y h_{11})^2 \quad (\text{A.37})$$

$$+ \partial_x h_{11}\partial_x h_{22}) - ah_{11}h_{33}(-h_{33}(\partial_y h_{11}\partial_y h_{22} \quad (\text{A.38})$$

$$+ (\partial_x h_{22})^2) + h_{22}(\partial_z h_{11}\partial_z h_{22} + \partial_x h_{22}\partial_x h_{33} \quad (\text{A.39})$$

$$+ 2h_{33}(\partial_y^2 h_{11} + \partial_x^2 h_{22}))) \frac{1}{4ah_{11}^2 h_{22} h_{33}^2}, \quad (\text{A.40})$$

$$R_{23} = R_{32} = \frac{1}{4h_{11}^2} \left(\partial_z h_{11} \left(\partial_y h_{11} + \frac{h_{11}\partial_y h_{33}}{h_{33}} \right) \right. \quad (\text{A.41})$$

$$\left. + h_{11} \left(\frac{\partial_z h_{22}\partial_y h_{11}}{h_{22}} - 2\partial_y \partial_z h_{11} \right) \right) \quad (\text{A.42})$$

und

$$R_{33} = \left(h_{11}^2 (h_{22}^2 h_{33}^2 ((\partial_t a)^2 + 2a\partial_t^2 a) + ah_{33}((\partial_z h_{22})^2 \right. \quad (\text{A.43})$$

$$+ \partial_y h_{22} + \partial_y h_{33}) + ah_{22}(\partial_z h_{22}\partial_z h_{33} + (\partial_y h_{33})^2 \quad (\text{A.44})$$

$$- 2h_{33}(\partial_z^2 h_{22} + \partial_y^2 h_{33})) + ah_{22}^2 h_{33}((\partial_z h_{11})^2 \quad (\text{A.45})$$

$$+ \partial_x h_{11}\partial_x h_{33}) + ah_{11}h_{22}(-h_{33}(\partial_y h_{11}\partial_y h_{33} \quad (\text{A.46})$$

$$+ \partial_x h_{22}\partial_x h_{33}) + h_{22}(\partial_z h_{11}\partial_z h_{33} + (\partial_x h_{33})^2 \quad (\text{A.47})$$

$$- 2h_{33}(\partial_z^2 h_{11} + \partial_x^2 h_{33}))) \frac{1}{4ah_{11}^2 h_{22}^2 h_{33}^2}. \quad (\text{A.48})$$

Die Skalarkrümmung ist durch

$$R = g^{ab}R_{ab} = \frac{-1}{4a^2h_{11}^2h_{22}^2h_{33}^2} \left(\partial_t^2 ah_{11}^2 (6h_{22}^2h_{33}^2 + h_{33}((\partial_z h_{22})^2 \right. \quad (\text{A.49})$$

$$\left. + \partial_y h_{22} \partial_y h_{33}) + h_{22}(\partial_z h_{22} \partial_z h_{33} + (\partial_y h_{22})^2 \right. \quad (\text{A.50})$$

$$\left. - 2h_{33}(\partial_z^2 h_{22} + h_{33})) + h_{22}h_{33}(h_{33}((\partial_y h_{11})^2 \right. \quad (\text{A.51})$$

$$\left. + \partial_x h_{11} \partial_x h_{22}) + h_{22}((\partial_z h_{11})^2 + \partial_x h_{11} \partial_x h_{33}) \right) \quad (\text{A.52})$$

$$- h_{11}(-h_{33}^2(\partial_y h_{11} \partial_y h_{22} + (\partial_x h_{22})^2) \quad (\text{A.53})$$

$$+ 2h_{22}h_{33}(\partial_z h_{11} \partial_z h_{22} + \partial_y^2 h_{11} \partial_y h_{33} \quad (\text{A.54})$$

$$+ \partial_x h_{22} \partial_x h_{33} + 2h_{33}(\partial_y^2 h_{11} + \partial_x^2 h_{22})) \quad (\text{A.55})$$

$$- h_{22}^2(\partial_z h_{11} \partial_z h_{33} + (\partial_x h_{33})^2 \quad (\text{A.56})$$

$$\left. - h_{33}(\partial_z^2 h_{11} + \partial_x^2 h_{33})) \right) \quad (\text{A.57})$$

$$(\text{A.58})$$

gegeben. Es lässt sich erkennen, dass der Energie-Impuls Tensor von der Form

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} T_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{12} & T_{22} & R_{23} \\ 0 & R_{13} & R_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.59})$$

ist, wobei $\kappa = -1$ gesetzt wurde. Damit ergibt sich weiter

$$T_{00} = \frac{3((\partial_t a)^2 - 2a\partial_t^2 a)}{4a^2} \quad (\text{A.60})$$

$$+ \frac{1}{4a^2h_{11}^2h_{22}^2h_{33}^2} \left(\partial_t^2 ah_{11}^2 (6h_{22}^2h_{33}^2 + h_{33}((\partial_z h_{22})^2 \right. \quad (\text{A.61})$$

$$\left. + \partial_y h_{22} \partial_y h_{33}) + h_{22}(\partial_z h_{22} \partial_z h_{33} + (\partial_y h_{22})^2 \right. \quad (\text{A.62})$$

$$\left. - 2h_{33}(\partial_z^2 h_{22} + h_{33})) + h_{22}h_{33}(h_{33}((\partial_y h_{11})^2 \right. \quad (\text{A.63})$$

$$\left. + \partial_x h_{11} \partial_x h_{22}) + h_{22}((\partial_z h_{11})^2 + \partial_x h_{11} \partial_x h_{33}) \right) \quad (\text{A.64})$$

$$- h_{11}(-h_{33}^2(\partial_y h_{11} \partial_y h_{22} + (\partial_x h_{22})^2) \quad (\text{A.65})$$

$$+ 2h_{22}h_{33}(\partial_z h_{11} \partial_z h_{22} + \partial_y^2 h_{11} \partial_y h_{33} \quad (\text{A.66})$$

$$+ \partial_x h_{22} \partial_x h_{33} + 2h_{33}(\partial_y^2 h_{11} + \partial_x^2 h_{22})) \quad (\text{A.67})$$

$$- h_{22}^2(\partial_z h_{11} \partial_z h_{33} + (\partial_x h_{33})^2 \quad (\text{A.68})$$

$$\left. - h_{33}(\partial_z^2 h_{11} + \partial_x^2 h_{33})) \right) \quad (\text{A.69})$$

$$, \quad (\text{A.70})$$

$$T_{11} = \frac{1}{4ah_{22}^2h_{33}^2} \left(h_{11}(h_{22}^2h_{33}^2((\partial_t a)^2 - 4a\partial_t^2 a) - ah_{33}((\partial_z h_{22})^2 \right. \quad (\text{A.71})$$

$$\left. + \partial_y h_{22} \partial_y h_{33}) - ah_{22}(\partial_z h_{22} \partial_z h_{33} + (\partial_y h_{33})^2 \right. \quad (\text{A.72})$$

$$\left. - 2h_{33}(\partial_z^2 h_{22} + \partial_y^2 h_{33})) + ah_{22}h_{33} \partial_x h_{22} \partial_x h_{33} \right), \quad (\text{A.73})$$

$$T_{22} = \frac{1}{4ah_{11}^2h_{33}^2} \left(h_{11}^2 h_{22} h_{33}^2 ((\partial_t a)^2 - 4a\partial_t^2 a) - ah_{22}h_{33}((\partial_z h_{11})^2 \right. \quad (\text{A.74})$$

$$\left. + \partial_x h_{11} \partial_x h_{33}) + ah_{11}(h_{33} \partial_y h_{11} \partial_y h_{33} - h_{22}(\partial_z h_{11} \partial_z h_{33} \right. \quad (\text{A.75})$$

$$\left. + (\partial_x h_{33})^2 - 2h_{33}(\partial_z^2 h_{11} + \partial_x^2 h_{33})) \right), \quad (\text{A.76})$$

$$T_{33} = \frac{1}{4ah_{11}^2h_{22}^2} \left(h_{11}^2 h_{22}^2 h_{33} ((\partial_t a)^2 - 4a\partial_t^2 a) - ah_{22}h_{33}((\partial_y h_{11})^2 \right. \quad (\text{A.77})$$

$$\left. + \partial_x h_{11} + \partial_x h_{22}) + ah_{11}(-h_{33}(\partial_y h_{11} \partial_y h_{22} + (\partial_x h_{22})^2) \right. \quad (\text{A.78})$$

$$\left. + h_{22}(\partial_z h_{11} \partial_x h_{22} + 2h_{33}(\partial_y^2 h_{11} + \partial_x^2 h_{22})) \right) \quad (\text{A.79})$$

und

$$T_{ij} = R_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j. \quad (\text{A.80})$$

Wird die Konstante κ berücksichtigt, so ist T_{ab} noch mit

$$-\frac{c^4}{8\pi G} \quad (\text{A.81})$$

zu multiplizieren. Wird eine Metrik gewählt, dessen zugehöriger Energie-Impuls Tensor die schwache Energiebedingung

$$(\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b T_{ab})(x) \geq 0 \quad (\text{A.82})$$

verletzt, so kann die Quelle Gravitationsfeldes nicht klassisch sein. Die Kurve γ muss in dieser Gleichung zeitartig sein. Im Prinzip besteht auch die Möglichkeit, dass einer der, in Kapitel 5 konstruierten, Zustände niedriger Energie einen renormierten Energie-Impuls Tensor besitzt, welcher mit dem eben ausgerechneten Energie-Impuls Tensor übereinstimmt. In diesem Fall hätte man die semiklassischen Einstein Gleichungen gelöst.

A.3. Bianchi Räume

Tabelle A.1.: Bianchi Räume. [30], [18]

Typ	Killing-Vektorfelder	Linienelement ds^2
I	$\partial_x,$ $\partial_y,$ ∂_z	$dx^2 + dy^2 + dz^2$
II	$\partial_x,$ $\partial_y,$ $\partial_z + y\partial_x$	$dx^2 + dy^2 + (1 + y^2)dz^2 - 2ydx dz$
IV	$\partial_x - y\partial_y - (y + z)\partial_z,$ $\partial_y,$ ∂_z	$e^{2y}(1 + y^2)dx^2 + dy^2 + e^{2y}dz^2 - 2ye^{2y}dx dz$
V	$\partial_x - y\partial_y - z\partial_z,$ $\partial_y,$ ∂_y	$e^{2y}dx^2 + dy^2 + e^{2y}dz^2$
VI	$\partial_x + (z - Ay)\partial_y + (y - Az)\partial_z,$ $\partial_y,$ ∂_z	$e^{2(m-1)y}dx^2 + dy^2 + e^{(m+1)y}dz^2$
VII	$\partial_x + (z - Ay)\partial_y - (y + Az)\partial_z,$ $\partial_y,$ ∂_z	$e^{2my}dx^2 + dy^2 + e^{2my}dz^2$
VIII	$\operatorname{sech}(y)\cosh(z)\partial_x + \sinh(z)\partial_y - \operatorname{tanh}(y)\cosh(z)\partial_z,$ $\operatorname{sech}(y)\sinh(z)\partial_x + \cosh(z)\partial_y - \operatorname{tanh}(y)\sinh(z)\partial_z,$ ∂_z	$(1 + 2\sinh^2(y))dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2\sinh(y)dx dz$
IX	$\sec(y)\cos(z)\partial_x + \sin(z)\partial_y - \tan(y)\cos(z)\partial_z,$ $-\sec(y)\sin(z)\partial_x + \cos(z)\partial_y + \tan(y)\sin(z)\partial_z,$ ∂_z	$dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2\sin(y)dx dz$

A.4. Variation nach der Kurve

Es soll hier eine kleine Rechnung angegeben werden, wie nach der Kurve variiert werden kann, wenn ein fester Energie-Impuls Tensor vorgegeben ist.

Es sei

$$T_0^2 M \supset \dot{\gamma}^{\otimes 2} M := \bigcup_{\dot{\gamma}|g(\dot{\gamma},\dot{\gamma})=1} \dot{\gamma} \otimes \dot{\gamma} \quad (\text{A.83})$$

die Menge aller Tensorfelder, welche durch das Tensorprodukt von zwei gleichen, zeitartigen und auf 1 normierten Vektorfeldern erhalten werden können. Die Menge aller renormierten Energie-Impuls-Tensoren $\langle T^{ren} \rangle_\omega$ sei mit $T^{ren} M \subset T_2^0 M$ bezeichnet und es gilt:

$$\dot{\gamma}^{\otimes 2} M \ni \dot{\gamma} \otimes \dot{\gamma} : T^{ren} M \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \quad (\text{A.84})$$

$$\langle T^{ren} \rangle_\omega \mapsto \dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle T_{ab}^{ren} \rangle_\omega \quad (\text{A.85})$$

Ist $\gamma_I : I \rightarrow M$, $I = [\tau_1, \tau_2]$ eine Kurve mit Tangentialvektor $\dot{\gamma}$ so ist der Pullback $\gamma_I^* (\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle T_{ab}^{ren} \rangle_\omega) \in \mathcal{C}^\infty(I)$ wegen

$$\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle T_{ab}^{ren} \rangle_\omega \in \mathcal{C}^\infty(M) \Rightarrow WF(\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle T_{ab}^{ren} \rangle_\omega) = \emptyset, \quad (\text{A.86})$$

$$\Rightarrow WF(\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle T_{ab}^{ren} \rangle_\omega) \cap N_{\gamma_I} = \emptyset \quad (\text{A.87})$$

mit der Normalenmenge $N_{\gamma_I} = \{(\gamma_I(\tau), k) \in T^* M | (\gamma'(\tau))^t = 0\}$, eindeutig, wohldefiniert und durch die Verkettung $(\dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \langle T_{ab}^{ren} \rangle_\omega) \circ \gamma_I$ gegeben. Es ergibt sich für die mit $f \in \mathcal{D}(I)$, auf γ , im Zustand ω , gemittelte Energie:

$$W = \int d\tau f^2(\tau) \left(\sum_{a,b=0}^3 (\dot{\gamma}^a)(\tau) (\dot{\gamma}^a)(\tau) (\langle T_{ab}^{ren} \rangle_\omega \circ \gamma_I)(\tau) \right) \quad (\text{A.88})$$

Diese Gleichung lässt sich als die Wirkung eines Funktionals $W_{f,\omega}$

$$W_{f,\omega} : \mathcal{C}^\infty(I) \times \mathcal{C}^\infty(I) \times \mathcal{C}^\infty(I) \times \mathcal{C}^\infty(I) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.89})$$

für die Koordinatenfunktionen der Kurve γ interpretieren. Man wählt jetzt auf der Mannigfaltigkeit (M, g) eine Karte (U, x) , mit

$$(\mathcal{J}^+(\gamma(\tau_1)) \cap \mathcal{J}^-(\gamma(\tau_2))) \subset U, \quad (\text{A.90})$$

$\tau_1 < \tau_2$, wobei die Vierergeschwindigkeit auf der gesamten geodätischen Verbindung zwischen $\gamma(\tau_1)$ und $\gamma(\tau_2)$ durch $(1, 0, 0, 0)$ gegeben ist. Jetzt lässt sich, mit $x(\gamma(\tau)) = (x^0(\gamma(\tau)), x^1(\gamma(\tau)), x^2(\gamma(\tau)), x^3(\gamma(\tau)))$, nach den Funktionen x^a , unter der Nebenbedingung

$$\vartheta(\dot{x}, \tau) = g(\dot{x}, \dot{x}) - 1 \quad (\text{A.91})$$

für die Zeitartigkeit der Kurven, variieren. Für ein Minimum muss an der Stelle $\epsilon = 0$

$$\frac{d}{d\epsilon} (W_{f,\omega}(x^a + \epsilon \eta^a, \dot{x}^a + \epsilon \dot{\eta}^a, \tau) + \lambda(\vartheta(\dot{x}^a + \epsilon \dot{\eta}^a, \tau))) = 0 \quad (\text{A.92})$$

gelten und die Funktionen η^a sollen an den Punkten $\gamma(\tau_1)$ und $\gamma(\tau_2)$ verschwinden. Es wird jetzt angenommen, dass die Metrik diagonal, $g_{00} = 1$ und der Energie-Impuls Tensor, wie bei den homogenen Zuständen auf den homogenen Raumzeiten von den räumlichen Koordinaten unabhängig und diagonal ist. Werden die räumlichen Koordinaten durch die Koordinatenzeit parametrisiert, so lautet das Funktional

$$\int_{x_1^0}^{x_2^0} dx^0 \left[f^2(x^0) \left(\langle T_{00}^{ren}(x^0) \rangle_\omega + \sum_{i=1}^3 (\dot{x}^i)^2(x^0) \langle T_{ii}^{ren}(x^0) \rangle_\omega \right) \right. \quad (\text{A.93})$$

$$\left. + \lambda \left(\frac{1 - (\dot{x}^i)^2(x^0) g_{ii}(x^0)}{|1 - (\dot{x}^i)^2(x^0) g_{ii}(x^0)|} - 1 \right) \right]. \quad (\text{A.94})$$

Nach der Variation ergeben sich die Differentialgleichungen, welche die Kurve erfüllen muss, um das Problem zu minimieren:

$$\frac{d}{dx^0} \frac{\partial E}{\partial \dot{x}^i} = \frac{d}{dx^0} \left(2\dot{x}^i \langle T_{ii}^{ren}(x^0) \rangle_\omega + \lambda \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \frac{1 - (\dot{x}^i)^2(x^0) g_{ii}(x^0)}{|1 - (\dot{x}^i)^2(x^0) g_{ii}(x^0)|} \right) \quad (\text{A.95})$$

$$\frac{\partial E}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \lambda \frac{1 - (\dot{x}^i)^2(x^0) g_{ii}(x^0)}{|1 - (\dot{x}^i)^2(x^0) g_{ii}(x^0)|} \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.96})$$

Es muss hier berücksichtigt werden, dass λ in dieser Variationsrechnung *keine* Konstante ist.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Baum. Eichfeldtheorie. Vorlesungsskript. Institut für Mathematik, Humboldt-Universität Berlin.
- [2] A. N. Bernal and M. Sanchez. On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem. *Commun. Math. Phys.*, 243:461-470, 2003
- [3] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*. Springer. Berlin, Heidelberg. New York. 1987
- [4] R. Brunetti and K. Fredenhagen. Microlocal analysis and interacting quantum field theories: Renormalization on physical backgrounds. *Commun. Math. Phys.*, 208:623-661, 2000
- [5] R. Brunetti, K. Fredenhagen and M. Köhler. The microlocal spectrum condition and Wick polynomials of free fields on curved spacetimes. *Commun. Math. Phys.*, 180:633-652, 1996.
- [6] S.-Y. Cheng and P. Li. Heat kernel estimates and lower bound of eigenvalues. *Comment. Math. Helvetici* 56:327-338, 1981
- [7] B. Colobis, E. Emily and A. El Soufi. Bounding the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator on compact submanifolds, hal-00420689, v1
- [8] A. Degner and R. Verch. Cosmological particle creation in states of low energy. arXiv:0904.1273v1
- [9] H. Donnelly and C. Fefferman. Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds. *Inventiones Mathematicae*, 93.1:161-183, 1988.
- [10] C.J. Fewster. A general worldline quantum inequality. *Class. Quantum Grav.*, 17:1897-1911, 2000
- [11] C.J. Fewster and C. Smith. Absolute quantum energy inequalities in curved spacetime. *Annales Henri Poincare.*, 9:425-455, 2008.
- [12] T. Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2003.
- [13] K. Fredenhagen. Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit. Vorlesungsskript, 1999
- [14] K. Fredenhagen. Algebraische Quantenfeldtheorie. Vorlesungsskript, 2003.

- [15] S. A. Fulling. *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime*. Cambridge University Press, Cambridge. 1975
- [16] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series, and Products. Fifth Edition*. Academic Press, London, 1994.
- [17] R. Haag. *Local Quantum Physics*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.
- [18] A. Havare, M. Korunur and M. Salti. The Momentum 4-Vector Impared by Gravitational Waves in Bianchi-Type Metrics. *Astrophysics and Space Science*, Springer Netherlands, 2006.
- [19] R. Haag, H. Narnhofer and U. Stein. On quantum field theory in gravitational background. *Commun. Math. Phys.*, 94:219-238, 1984.
- [20] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators 1.*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.
- [21] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators 4.*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.
- [22] W. Junker and E. Schrohe. Adiabatic vacuum states on general spacetime manifolds: Definition, construction and physical properties. *Annales Poincare Phys. Theor.*, 3:1113-1182, 2002.
- [23] B. S. Kay and R. M. Wald. Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate Killing horizon. *Phys. Rep.*, 207(2):49-136, 1991.
- [24] M. Küskü. A Class of Almost Equilibrium States in Robertson-Walker Spacetimes. Doctoral Thesis, 2. Institute for Theoretical Physics, University of Hamburg, Germany, 2008.
- [25] C. Lüders and J. E. Roberts. Local quasiequivalence and adiabatic vacuum states. *Commun. Math. Phys.*, 134:29-63, 1990.
- [26] H. Olbermann. Zustände niedriger Energie auf Robertson-Walker-Raumzeiten. Diploma Thesis, 2. Institute for Theoretical Physics, University of Hamburg, Germany, 2007.
- [27] L. Parker. Quantized Fields and particle creation in expanding universes. *Phys. Rev.*, 183:1057-1068, 1969.
- [28] M. J. Radzikowski. Micro-local approach to the Hadamard condition in quantum field theory on curved space-time. *Commun. Math. Phys.*, 179:529-553, 1996.
- [29] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics IV. Analysis of Operators.*, Academic Press, New York, 1978

- [30] H. Stephani, D. Kramer, M. Maccallum, C. Hoenselaers and E. Herlt. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Second Edition.*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [31] R. M. Wald. *General Relativity.* The University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [32] R. M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics.* The University of Chicago Press, Chicago, 1994.
- [33] B. Xu. Asymptotic behavior of L^2 -normalized eigenfunctions on a closed Riemannian manifold. arXiv:math/0509061v2.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Fredenhagen dafür bedanken, dass er mir den großen Wunsch erfüllte, einen Einblick in die Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit zu erhalten und bereit war sehr viel Zeit aufzuwenden, um diverse Fragen rund um das gesamte Arbeitsthema zu beantworten. Ich habe mich sehr über das interessante und nützliche Thema der Diplomarbeit gefreut, in dessen Rahmen ich die größten Freiheiten genießen durfte.

Bei Mattias Wohlfarth möchte ich mich für die Bereitschaft bedanken, die vielen Arbeitsstunden für das Zweitgutachten der Diplomarbeit aufzuwenden und für das Wissen, welches mir in seiner Vorlesung über die Relativitätstheorie vermittelt wurde.

Ich möchte mich auch bei Thomas, Kai, Nicola, Claudio, Pedro, Andreas, Katarzyna und den anderen Mitgliedern der "Fredenhagen-Gruppe" dafür bedanken, dass sie bereit waren ausdauernde Fragestellungen auszudebatieren. Meinen Kollegen aus dem Büro, Christian, Christian und Niklas, danke ich für die schöne und lustige Zeit während des Jahres der Diplomarbeit.

Vielen Dank auch meinen Eltern, meiner Schwester, der Canim und all meinen Freunden für sonstige Aktivitäten.

Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln und Quellen verfasst zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Kolja Them