# Algebraische Charakterisierung von Randbedingungen in der Quantenfeldtheorie

Christian Sommer

Diplomarbeit

10. Januar 2006

II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

**Gutachter der Diplomarbeit:**
Prof. Dr. K. Fredenhagen
Prof. Dr. G. Mack

**Abstract**

The subject of this diploma thesis is the development of a new approach to boundary conditions in algebraic quantum field theory. In the framework of scalar field theory on nongloballyhyperbolic static spacetimes, due to the principle of locallity, we find a new construction scheme for boundary conditions in quantum field theory in the sense of maximal *-ideals.

**Zusammenfassung**

Gegenstand dieser Diplomarbeit ist die Entwicklung eines neuen Ansatzes für Randbedingungen in der algebraischen Quantenfeldtheorie. Im Rahmen einer skalaren Feldtheorie auf nichtglobalhyperbolischen statischen Raumzeiten finden wir unter Verwendung des Lokalitätsprinzips nach [1] ein neues Konstruktionsschema, aus dem sich der Begriff der Randbedingung über den Begriff des maximalen *-Ideals in die Quantenfeldtheorie übertragen lässt.

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

In der Physik treten Randbedingungen in den verschiedensten Disziplinen auf. Besondere Beispiele stellen in diesem Rahmen Betrachtungen von physikalischen Systemen an Grenzflächen makroskopischer Objekte dar. Randbedingungen werden in diesem Zusammenhang dazu verwendet, ein vereinfachtes Modell der Eigenschaften dieser Objekte in Bezug auf das System zu beschreiben.
In der Thermodynamik findet man dieses Phänomen z.B. beim Prozess des Wärmeaustausches von einem Wärmereservoir und seiner unmittelbaren Umgebung. Der Wärmeleitungsgleichung, die diesen Effekt zum grössten Teil beschreibt, wird dabei über Randbedingungen der Einfluss der Umgebung und insbesondere deren Reaktion auf die Verhältnisse des Systems mitgeteilt. Analog findet man in der klassischen Elektrodynamik bzgl. der Maxwell-Gleichungen in Anwendung auf umgebende leitende Materialien (z.B. Kondensatorplatten) sowie beim Übergang von verschiedenen elektrischen Medien für die Eigenschaften der Lösungen an den Grenzflächen über Randbedingungen eine geeignete Beschreibungsmöglichkeit. Wie sich nach den dargestellten Beispielen vermuten lässt, treten Randbedingungen immer dann auf, wenn physikalische Größen durch Lösungen von Gleichungssystemen gewonnen werden und in Bezug auf ihre Umgebung definiert werden müssen.
Wie bereits erwähnt, geben Randbedingungen in diesem Zusammenhang eine vereinfachte Beschreibungsmöglichkeit für die Eigenschaften einer Umgebung, die einen direkten Einfluss auf die im System betrachteten Größen besitzen.
Unser Augenmerk richtet sich in der vorliegenden Arbeit speziell auf Randbedingungen in der Quantenfeldtheorie. Die Quantenfeldtheorie, die die Gesetze der Hochenergie- und Elementarteilchen-Physik beschreibt, bildet den theoretischen Rahmen unserer Diskussion. Auch in ihr taucht das Konzept von Randbedingungen auf. Ein interessantes Beispiel bietet dabei der Casimir-Effekt, benannt nach H.B.G. Casimir (1948), der darauf beruht, dass auf zwei ungeladene, leitende, parallel gegenüberstehende Platten eine anziehende Kraft $F(a) = -\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{a^4}S$ wirkt, die beispielsweise im Falle einer Flächengrösse $S = 1\text{cm}^2$ und eines Abstands $a = 1\mu\text{m}$ den Wert $F(a) \approx 1.3 \times 10^{-7}\text{N}$ beträgt (siehe [2]. Dieser quantenfeldtheoretische Effekt beruht auf dem Konzept von Randbedingungen. Die nach der klassischen Theorie (Elektrodynamik) kräftefreien Platten, erfahren aus Sicht der Quantenfeldtheorie eine Kraft aufgrund eines makroskopischen Quanteneffektes, der durch Vakuumfluktuationen des elektromagnetischen Fel-

des erzeugt wird. Dieses Verhalten beruht auf der Annahme, dass die fluktuierenden Felder im Vakuum durch die Leiterplatten abgeschirmt werden. Aufgrunddessen kommt es zu einer Änderung der mittleren Feldenergie, die sich in der Wirkung einer Kraft auf die Leiterplatten äußert. Der Effekt der Abschirmung wird dabei durch Randbedingungen in den Bewegungsgleichungen der Felder berücksichtigt. Genauer wird dem elektrischen Feldanteil dabei abverlangt an der Begrenzungsfläche zu verschwinden (Dirichlet-Randbedingung, siehe Abschnitt 3.4). Auch die räumliche Ableitung des magnetischen Feldanteils senkrecht zur Begrenzungsfläche erfüllt diese Forderung (von Neumann-Randbedingung 3.4). Betrachtet man allerdings den gemeinsamen Kommutator vom elektrischen und magnetischen Feldanteil an der Begrenzungsfläche, dann führt dieser zu einem nichtverschwindenden Beitrag. Diese Erklärung macht aber aufgrund der ersten Aussage[1] keinen Sinn.
Da es sich bei dem in der Quantenfeldtheorie verwendeten Feldbegriff um operatorwertige Distributionen [3] handelt, die nicht wie im klassischen Fall[2] jeden Raumpunkt ein mathematisch wohldefiniertes Objekt zuordnen können, ergibt die Forderung, dass das Feld am Rand verschwinden soll, auch in diesem Fall keinen direkten Sinn.
Dass es überhaupt zu derartigen Problemen kommen konnte, liegt daran, dass in den bisherigen Modellen der Quantenfeldtheorie der Begriff der Randbedingung aus seiner gegebenen Form in der klassischen Theorie, direkt in die Quantenfeldtheorie übertragen wurde. Es gibt allerdings keinerlei Begründung dafür, warum Randbedingungen, die in den klassischen Theorien gelten, ohne weiteres auf zugehörige quantenfeldtheoretische Systeme übertragen werden können.
In unserer Arbeit versuchen wir deshalb, einen mathematisch wohldefinierten Begriff zu finden, der ein Analogon zu den Randbedingungen der klassischen Feldtheorien bildet. Ausgehend vom algebraischen Formalismus der Quantenfeldtheorie, der uns einen mathematisch wohldefinierten Rahmen liefert, gehen wir in unserer Betrachtung über Konzepte der Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten an dieses Problem heran. Dabei gehen wir speziell nach dem von R. Brunetti, K. Fredenhagen und R.Verch in [1] entworfenen Begriff des allgemein kovarianten Lokalitätsprinzips vor. Dieses Konzept, dass für globalhyperbolische Raumzeiten (siehe Abschnitt 2.2) den Begriff einer Quantenfeldtheorie definiert, muss allerdings in unserem Rahmen verallgemeinert werden.
Darüber hinaus führen wir eine Diskussion über Quantenfeldtheorien auf nicht globalhyperbolischen Raumzeiten, die einen verallgemeinerten Rahmen zu diesem Problem bieten. Die gewünschten Raumzeitmodelle, die in ihrer Beschreibung von feldtheoretischen Grössen auf statische Randbedingungen angewiesen sind, erhalten wir dabei über die nichtglobalhyperbolischen statischen Raumzeiten. Selbst der Casimir-Effekt lässt sich über eine Konstruktion in einer freien Quantenfeldtheorie auf einer derartigen Raumzeit wiederfinden.
Als zentrales Resultat dieser Arbeit finden wir mit dem mathematisch wohldefinierten Konzept des maximalen *-Ideals einen Begriff, der in einer 1 : 1 Korrespondenz mit dem Begriff der Randbedingungen aus der klassischen Feldtheorie verbunden werden kann.
Die Konstruktionen und Betrachtungen, die wir durchführen, sind auf dabei skalare Quantenfeldtheorien im Sinne der Klein-Gordon-Feldgleichung beschränkt. Wir erwarten zwar keine

[1] Dirichlet-Randbedingungen des elektrischen Feldes.

[2] Klassisch lassen sich Felder durch Funktionen bzw. Tensorfelder ausgedrücken, die einem Raumpunkt eine $\mathbb{C}$-Zahl bzw. einen Tensor zuordnen.

allzu großen konzeptionellen Veränderungen für allgemeinere Quantenfeldtheorien[3], die sich nicht in diesem Rahmen beschreiben lassen, können dies aber nicht mit Gewissheit garantieren und nur als Behauptung stehen lassen, in der Erwartung, dass in zukünftigen Abhandlungen dieses Problem geklärt wird.

Die Arbeit gliedert sich in der folgenden Weise:
Im anschließenden Kapitel 2 werden Grundbegriffe der Differential- und Lorentzgeometrie eingeführt, aus denen sich für die zu betrachtenden Raumzeitmodelle essentielle Eigenschaften ableiten lassen. In Hinblick auf die Behandlung von Randbedingungen wird den statischen Raumzeiten besondere Aufmerksamkeit geschenkt.
In Kapitel 3 werden die Grundlagen der Klein-Gordon-Feldgleichung für verschiedene Klassen von Raumzeiten behandelt. Diesen klassischen Feldtheorien wird dabei in Anwendung auf statische nichtglobalhyperbolische Raumzeiten ein Begriff von Randbedingungen aus der Funktionalanalysis zugeordnet, den wir an einigen Beispielen diskutieren.
Kapitel 4 behandelt die Grundbegriffe des algebraischen Formalimus der Quantentheorie, welcher in Kapitel 5 auf das Konzept des allgemein kovarianten Lokalitätsprinzips erweitert wird. Unter diesen Voraussetzungen gehen wir mit besonderer Aufmerksamkeit an die quantenfeldtheoretischen Repräsentanten der klassischen Klein-Gordon-Feldtheorie heran.
Ausgehend von den Ergebnissen des fünften Kapitels wird in Kapitel 6 ein neuer Ansatz zur Konstruktion von Observablen-Algebren auf nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten untersucht. Dabei wird besonderes Interesse auf den Übergang von der im Ansatz konstruierten algebraischen Struktur zu einer Quantenfeldtheorie im Sinne der Klein-Gordon Gleichung gelegt. Mit den dabei erworbenen Erkenntnissen versuchen wir die ausgängliche Frage zu beantworten.
In Kapitel 7 betrachten wir die Konstruktion einer Feldalgebra im Sinne von CCR-Algebren auf dem Minkowsi-Halbraum, die mit Hilfe des Schwarzschen-Spiegelungsprinzips erzeugt wird und vergleichen diesen Ansatz mit unseren Ergebnissen aus Kapitel 6.
Im Anhang wird eines neues Konzept der algebraischen Quantenfeltheorie diskutiert, das einer Idee von K.Fredenhagen zugrunde liegt, und Quantenfeldtheorien duch kovariante Tensorfunktoren beschreibt.

[3]Z.B. Quantenfeldtheorien mit Spin bzw. Eichtheorien.

# Kapitel 2

# Geometrische Aspekte von Raumzeiten

In diesem Kapitel befassen wir uns mit einigen Grundlagen aus der allgemeinen Relativitätstheorie und Lorentzgeometrie. Dabei folgen wir überwiegend den Darstellungen aus [4] und [1].

## 2.1 Allgemeine Definition einer Raumzeit

Bei einer Raumzeit handelt es sich im Allgemeinen um eine Menge von Ereignispunkten, die sich durch eine vierdimensionale Lorentzmannigfaltigkeit beschreiben lässt. Damit werden Objekte $(\mathcal{M}, g)$ bezeichnet, die sich aus einer glatten vierdimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$[1] und einer Lorentzmetrik $g$ ((0,2)-Tensorfeld) ergeben. Die Eigenschaft der Lorentzmetrik besteht darin, einem jeden Punkt $p$ ("Ereignis") der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ eine nicht entartete symmetrische Bilinearform

$$g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

auf dem Tangentialraum $T_p\mathcal{M}$ der Mannigfaltigkeit mit einer Signatur $(+,-,-,-)$ zuzuordnen. Sie lässt sich in lokalen Koordinaten durch den Term

$$g_p = \sum_{i,j=0}^{3} g_{ij}(x(p))dx^i \otimes dx^j$$

ausdrücken, wobei sich $g_{ij}(x(p)) := g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})|_{x(p)}$ durch Auswertung der Metrik auf den Basisvektoren im zugehörigen Tangentialraum ergibt.
Über die Lorentzmetrik kann man ein kovariantes[2] Volumenelement $d\mu \in \Gamma(\bigwedge^4 T^*\mathcal{M})$ definieren, das sich in lokalen Koordinaten durch

$$d\mu(x) = \sqrt{-g(x)}d^4x$$

[1] Topologischer Raum mit abzählbarer Basis bzgl. der Topologie, hausdorff, und parakompakt sowie mit einem maximalen $C^\infty$-Atlas versehen.

[2] bzgl. Koordinatentransformationen (Diffeomorphismen) invariant.

$(g(x) := det(g_{ij}(x)) < 0)$ beschreiben lässt.
Einen Abstandsbegriff für Punkte $p, q \in \mathcal{M}$ der Mannigfaltigkeit, wie ihn riemannsche Mannigfaltigkeiten besitzen, ist in diesem Fall nicht gegeben. Für Lorentzmannigfaltigkeiten ist der, durch das Infimum aller Längen

$$l := \int dt \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$$

von Verbindungskurven $\gamma : I \to \mathcal{M}$ zu Punkten $p$ und $q$, definierte Abstandsbegriff mit $\dot{\gamma} : I \to T\mathcal{M}$ und $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ nicht sinnvoll. Dies folgt aus der Tatsache, dass sich für Elemente $v$ aus den Tangentialräumen $T_p\mathcal{M}$ , die folgenden Unterteilungen ergeben.

- $v$ bezeichnet man als **zeitartig**, wenn $g_p(v, v) > 0$.
- $v$ bezeichnet man als **lichtartig**, wenn $g_p(v, v) = 0$.
- $v$ bezeichnet man als **raumartig**, wenn $g_p(v, v) < 0$.

In diesem Zusammenhang lässt sich aber für Kurven mit stets zeitartigen Tangentenvektoren $\dot{\gamma}$ (*zeitartige Kurven*) bzw. zeitartigen und lichtartigen Tangentenvektoren (*kausale Kurven*), ein ähnlicher Begriff definieren (analog zu dieser Definition bezeichnet man Kurven, die an jedem Punkt einen raumartigen Tangentenvektor besitzen als *raumartige Kurven*). Man gewinnt nämlich über den Ausdruck $l := \int dt \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$ den Begriff, der *Eigenzeit*, der sich durch das Supremum der Längen $l$ aller zeitartigen bzw. kausalen Kurven $\gamma$, die zwei Ereignisse $p$ und $q$ miteinander verbinden können, ergibt. Mengen von Ereignispunkten, deren Punkte sich stets über zeitartige bzw. kausale Kurven mit einem anderen Punkt der Menge verbinden lassen, werden damit besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Einen tieferen Einblick in diesen Sachverhalt wollen wir nun im nächsten Abschnitt erörtern.

## 2.2 Kausale Struktur und Lorentzgeometrie

Auf einer Lorentzmannigfaltigkeit lässt sich eine kausale Struktur über die *Zeit-Orientierbarkeit* implementieren. Die Zeit-Orientierbarkeit äußert sich durch die Existenz eines $C^\infty$-Vektorfelds $v \in \Gamma(T\mathcal{M})$, welches überall zeitartig $(g(v, v) > 0)$ definiert ist. Dies führt dazu, dass sich über das Vektorfeld $v$ zukunftsgerichtete $g(v, \dot{\gamma}) > 0$ und vergangenheitsgerichtete $g(v, \dot{\gamma}) < 0$ kausale Kurven voneinander unterscheiden lassen, wodurch sich eine allgemeine Zeitrichtung auf $(\mathcal{M}, g)$ festlegen lässt.
Diese Eigenschaft, die man bei Lorentzmannigfaltigkeiten finden kann, führt zu weiteren Strukturmerkmalen. Gemäß [4] definieren wir:

**Definition 2.1.** Sei $A$ eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{M}$, dann beschreibt die Menge

$$I_+(A) := \{p \in \mathcal{M} | \ \exists q \in A : \ q \ll p\}$$

die *chronologische* Zukunft und

$$J_+(A) := \{p \in \mathcal{M} | \ \exists q \in A : \ q \geq p\}$$

die *kausale* Zukunft von $A$.[3]

Dabei beschreibt die Relation $q \ll p$ den Fall, dass zwischen $q$ und $p$ eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve existiert. $q \geq p$ dagegen fordert die Existenz einer zukunftsgerichteten kausalen Kurve von $q$ nach $p$.
Ein weitere Definition, erhält man durch die Menge $D(A)$ einer offenen Teilmenge $A$ von $\mathcal{M}$. $D(A)$ wird als kausales Abhängigkeitsgebiet von $A$ bezeichnet und wird durch die Menge der Punkte $p$ definiert, für die jede nichterweiterbare kausale Kurve, die durch $p$ verläuft, die Menge $A$ schneidet. Betrachtet man speziell nur von $p$ ausgehende zukunftsgerichtete bzw. vergangenheitsgerichtete Kurven so erhält man die Mengen $D_-(A)$ bzw. $D_+(A)$.

Teilmengen $A$ und $\hat{A}$ von $\mathcal{M}$, die miteinander durch keine kausale Kurve verbunden werden können, bezeichnet man als *raumartig* getrennt. Damit verbunden folgt $\hat{A} \subset A^\perp$, wobei $A^\perp$ das kausale Komplement von $A$ darstellt, dass sich durch die Menge $A^\perp := \mathcal{M} \backslash J(A)$ definieren lässt. Dieser Festlegung zugeordnet, ergibt sich die Definition einer *achronalen* Teilmenge.

**Definition 2.2.** Eine Teilmenge $A$ von $\mathcal{M}$ heisst achronal, wenn es keine Punkte $p$ und $q$ mit $p \ll q$ in $A$ gibt. Dies hat zur Folge, dass jede zeitartige Kurve die Menge $A$ höchstens einmal schneidet.

Dieser Definition lässt sich die Definition der*Kante* einer achronalen Menge über die Vorschrift

$$\begin{aligned} K(A) \;&:=\; \{p \in \overline{A} | \textit{für jede offene Umgebung } U \textit{ von } p \textit{ existiert eine} \\ &\quad\; \textit{zeitartige Kurve in } U \textit{ von } I_-(p,U) \textit{ nach } I_+(p,U)\textit{, die } A \textit{ nicht trifft}\} \end{aligned}$$

zuordnen. Damit verbunden, ergibt sich die folgende Aussage:

**Lemma 2.3.** *Für jede achronale Teilmenge $A \subset \mathcal{M}$ ist $K(A)$ abgeschlossen und in dem Falle das $K(A) = \varnothing$, beschreibt $A$ eine abgeschlossene topologische Hyperfläche.*

Einen Beweis dazu findet man in [4].
Eine wesentliche Definition, die die vorherige mit beinhaltet und mit dem vorausgehenden Lemma zusammenhängt, ist die der **Cauchy-Fläche**.

**Definition 2.4.** Eine Cauchy-Fläche $S$ einer zeitorientierten Lorentzmannigfaltigkeit ist eine achronale, abgeschlossene topologische Hyperfläche von $\mathcal{M}$, die von jeder nichterweiterbaren zeitartigen Kurve genau einmal geschnitten wird. Demzufolge ergibt sich damit für das kausale Abhängigkeitsgebiet einer Cauchyfläche $D(S)$ die gesamte Mannigfaltig $\mathcal{M}$.

Mit diesem Gerüst können wir uns jetzt mit etwas spezielleren Konstruktionen befassen.

Eine besondere Klasse von orientierbaren und Zeit-orientierbaren Raumzeiten $(\mathcal{M}, g)$, die vorallem für die Konzepte in Kapitel 5 von entscheidender Bedeutung sind, wird durch die globalhyperbolischen Raumzeiten gegeben. Dabei handelt es sich um Raumzeiten, für die jedes Punktepaar $p$ und $q$,$p \geq q$ mit $J^+(p) \cap J^-(q)$ eine kompakte Menge in $\mathcal{M}$ beschreibt und damit

[3] Bezüglich $I_-(A)$ und $J_-(A)$ erhält man die Definition der chronologischen bzw. kausalen Vergangenheit.

die *starke Kausalitätbedingung*, die besagt, dass es keine geschlossenen bzw. beinahe geschlossenen zeitartigen Kurven in $\mathcal{M}$ geben darf, erfüllt.[4] In Äquivalenz zu diesen Eigenschaften begründet sich die Existenz einer Familie von Cauchy-Flächen $S(t)$, die die folgende Aussage erfüllt.

**Satz 2.5.** *(Geroch* 1970*; Dieckmann* 1988*):*
*Sei $(\mathcal{M}, g)$ eine global hyperbolische Mannigfaltigkeit mit einer Cauchy-Fläche $S$, dann besitzt $\mathcal{M}$ eine Topologie wie $\mathbb{R} \times S$ und kann damit aus einer 1-Parameter Familie $S(t)$ von glatten Cauchy-Flächen konstruiert werden. Die Cauchy-Flächen können dabei so gewählt werden, dass sie Flächen mit konstanter Zeit entsprechen.*

(Beweis nach [4])
Cauchy-Flächen sind nützlich um konsistente Feldtheorien auf Raumzeiten zu formulieren. Sie sorgen dafür, dass das Cauchy-Problem (Anfangswert-Problem) stets wohldefiniert ist und man eindeutige retardierte und avancierte Fundamentallösungen zu den Feldgleichungen findet.
Eine Einschränkung, die wir in unserem Fall an die zu betrachtenden globalhyperbolischen Raumzeiten stellen müssen, ist die der **Konvexität**. Diese ist nötig damit unsere Abbildungsstrukturen, die wir im Anschluss diskutieren wollen, einen Erhalt der kausalen Struktur garantieren. Eine globalhyperbolische Raumzeit bezeichnet man als konvex, wenn zu je zwei beliebigen Punkten der Mannigfaltigkeit alle kausalen Verbindungskurven in $J^+(p) \cap J^-(q)$ enthalten sind.
Für das allgemein kovariante Lokalitätsprinzip aus Kapitel 5 und die nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten, mit den wir uns in dieser Arbeit beschäftigen wollen, ist diese Definition entscheident. Im zweiten Fall betrachten wir nämlich nur solche Lorentzmannigfaltigkeiten, die eine Überdeckung im Sinne der folgenden Definition besitzen.

**Definition 2.6.** $\mathcal{K}(\mathcal{M}, g)$ beschreibt die Menge aller relativ kompakten konvexen Teilmengen $\mathcal{O}$ von $\mathcal{M}$. Dabei wird für $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{M}, g)$ die Metrik $g_{\mathcal{O}}$ aus $g_{\mathcal{M}}$ durch Einschränkung gewonnen.

Eine wichtige Klasse von Abbildungen zwischen Lorentzmannigfaltigkeiten und speziell globalhyperbolischen Lorentzmannigfaltigkeiten bilden die isometrischen Einbettungen. Dabei handelt es sich um Abbildungen $\psi : (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\hat{\mathcal{M}}, g_{\hat{\mathcal{M}}})$, für die $\psi$ einen Diffeomorphismus bzgl. $\mathcal{M} \to \mathrm{Im}(\psi) = \psi(\mathcal{M}) \subset \hat{\mathcal{M}}$ darstellt und $\psi_* g_{\mathcal{M}} = g_{\hat{\mathcal{M}}}|_{\psi(\mathcal{M})}$ die Verknüpfung der Metriken definiert. Die besondere Eigenschaft dieser Abbildungen ist dadurch gegeben, dass sie die kausalen Strukturen unverändert lässt. Dies erweist sich für uns in der späteren Anwendung als eine nützliche Eigenschaft.
Für den Minkowskiraum als Beispiel einer global hyperbolischen Lorentzmannigfaltigkeit werden die Isometrien $\psi : (\mathbb{M}, g_{\mathbb{M}}) \to (\mathbb{M}, g_{\mathbb{M}})$ durch eine Darstellung der Elemente der orthochronen Poincaré - Gruppe $\mathcal{P}_+^\uparrow$ gebildet.

In unseren späteren Betrachtungen wollen wir uns allerdings hauptsächlich mit nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten beschäftigen. Die Klasse der nichtglobalhyperbolischen Lorentzmannigfaltigkeiten ist allerdings sehr gross und beinhaltet viele Beispiele. Im Zentrum unseres Interesses liegen allerdings, wie bereits in der Einleitung verdeutlicht, die statischen Raumzeiten dieser Klasse.

[4]beschränktes diamantförmiges Gebiet

## 2.3 Statische Raumzeiten

Die Definitionen in diesem Abschnitt wurden zum grössten Teil aus [5] entnommen.

**Definition 2.7.** Eine Metrik bezeichnet man als *statisch*, wenn in gewählten Koordinaten die Bedingungen

1. $g_{\mu\nu}(x)$ ist unabhängig von der Koordinate $t$
2. $g_{0j}(x) = 0$ für $j = 1, \ldots, 3$.

erfüllt sind (dabei haben wir $x^0 \equiv t$ gesetzt). In koordinatenfreier Schreibweise bedeutet dies:

1. Es existiert ein zeitartiges Killingvektorfeld.
2. Es existiert eine Familie von raumartigen Hyperflächen (z.B. Cauchy-Flächen im global-hyperbolischen Fall), die an jedem Punkt $p$ der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ *ortogonal* zu dem Killingvektor[5] $v_p$ stehen (Flächen zu ($t = const$)).

(Fordert man nur die erste Aussage, dann handelt es sich um eine *stationäre* Metrik.)

*Bemerkung* 2.8. Eine statische Metrik bezeichnet man als *ultrastatisch*, wenn

- $g_{00}(x) = 1 \;\; \forall x \in \mathcal{M}$

gegeben ist.

Unter Verwendung dieser Definition ergeben sich statische Raumzeiten nach:

**Definition 2.9.** Eine statische Raumzeit $(\mathcal{M}, g) = Stat(M, h, \sqrt{g_{00}}, 0)$ ist eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times M$ mit einer statischen Lorentzmetrik $g$, die durch eine riemannsche Metrik $h$ auf der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M$ bestimmt ist, wobei $M$ eine abgeschlossene Hyperfläche in $\mathcal{M}$ beschreibt. Dabei ist durch $\sqrt{g_{00}}$ eine Abstandsfunktion auf $M$ definiert. In lokalen Koordinaten ergibt sich damit die Beziehung

$$g_p = g_{00}(x(p))dt \otimes dt - \sum_{ij=1}^{3} h_{ij}(x(p))dx^i \otimes dx^j.$$

*Bemerkung* 2.10. Die *optische* Metrik von $\mathcal{M}$ erhält man durch $g_{00}^{-1} g$. Dabei wird die Mannigfaltigkeit mit der optischen Metrik durch

$$(\mathcal{M}', g') = Stat(M, h' \equiv g_{00}^{-1} h, 1, 0)$$

dargestellt. In diesem Fall sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ über eine *konforme* Abbildung miteinander in Beziehung gesetzt.[6]

[5] Bei einem Killingvektorfeld handelt es sich dabei um ein Vektorfeld $v \in \Gamma(T\mathcal{M})$ einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g)$ mit $L_v g = 0$ (*Lie-Ableitung* ), siehe [6].

[6] Die Metriken unterscheiden sich nur bzgl. eines skalaren Faktors und haben damit dieselbe kausale Struktur (Cauchy-Flächen und Nullgeodäten bleiben erhalten).

Ein Beispiel einer nichtglobalhyperbolischen statischen Raumzeit findet sich in der Betrachtung des Minkowski-Halbraums, der sich durch $H \simeq \widehat{H} = \{x \in \mathbb{R}^4, x_3 \geq 0\}$ mit $g_H \simeq g_{\mathbb{M}}|_{\widehat{H}}$ ergibt. Auch der Anti-de-Sitter-Raum, der sich als Überlagerungsraum einer Hyperfläche $r^2 - \rho^2 = 1$ in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ mit der Metrik

$$g_{Ads} = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi - (d\rho \otimes d\rho + \rho^2(d\theta \otimes d\theta + (\sin\theta)^2 d\psi \otimes d\psi))$$

[7] beschreiben lässt, stellt ein Beispiel aus dieser Klasse dar. Dabei handelt es sich um einen geodätisch vollständigen Raum [8], dessen Lichtkegel $I_+(p) \cup I_-(p)$ (mit $p \in (\mathcal{M}_{AdS}, g_{AdS})$) sich so stark ausdehnen, dass nach endlicher Zeit neue Informationen den Raum betreten und alte Informationen ihn verlassen können [9]. Durch eine konforme Abbildung lässt sich die nichtglobalhyperbolische statische Raumzeit aus der Hyperfläche gewinnen, wobei sich die transformierte Metrik mit

$$g_{Ads} = (1 + \cot^2 u)(d\varphi \otimes d\varphi - du \otimes du) - \cot^2 u(d\theta \otimes d\theta + (\sin^2\theta) d\psi \otimes d\psi)$$

für $\rho = \cot u$, $u \in (0, \frac{\pi}{2})$ ergibt.

[7] $(r, \varphi)$ bilden Polarkoordinaten und $(\rho, \theta, \psi)$ Kugelkoordinaten.
[8] Es gibt keine Kanten wo die Geodäten plötzlich aufhören.
[9] Im Sinne von zeitartigen und kausalen Kurven

# Kapitel 3

# Die Klein-Gordon-Gleichung

Die Klein-Gordon-Gleichung (nach Oskar Klein und Walter Gordon, 1926) als hyperbolische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung $(\Box + m^2)\psi = 0$,[1] die sich aus der einfachsten Lorentzinvarianten Lagrangedichte $\mathcal{L} = -1/2(\partial\psi)^2 - 1/2m^2\psi^2$ ableitet und damit die einfachste relativistische Feldgleichung eines physikalischen Systems im Minkowsiraum beschreibt, war der erste Versuch eine Wellengleichung zur Beschreibung einer relativistischen Quantenmechanik aufzustellen. Sie beschreibt das Verhalten von freien skalaren Feldern (bzw. Teilchen mit Spin 0 ohne Wechselwirkungen) und geht im nichtrelativistischen Limes in die Schrödinger-Gleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik über. Man gewinnt die Klein-Gordon-Gleichung aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $P_0 = \sqrt{|\mathbf{P}|^2 + m^2}$ der speziellen Relativitätstheorie für freie Teilchen, indem man den quadrierten Ausdruck $P_0^2 = |\mathbf{P}|^2 + m^2$ betrachtet. Bei diesem Term, der einen polynomialen Ausdruck beschreibt und damit beim Übergang (durch Fouriertransformation) in den Ortsraum einen Differentialoperator bildet, handelt es sich um den gewünschten Ausdruck, der auf die hyperbolische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung $(\Box + m^2)\psi = 0$ führt.

## 3.1 Klein-Gordon-Gleichung für globalhyperbolische Raumzeiten

Für globalhyperbolische Raumzeiten ergeben sich gemäß [7] und [8] für die Klein-Gordon-Gleichung die folgenden Verhältnisse.
Die Klein-Gordon-Gleichung ist durch den kovarianten Ausdruck

$$(\Box_g + m^2)f = 0,$$

mit $\Box_g = |g|^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu g^{\mu\nu}|g|^{-\frac{1}{2}}\partial_\nu$,$f \in C^\infty(\mathcal{M})$,$|g| = |\det(g_{\mu\nu})|$ in lokalen Koordinaten, sowie $m \geq 0$ gegeben.[2]
Als eine Konsequenz der globalen Hyperbolizität folgt dabei die Existenz von eindeutigen

[1] $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ und $\Box = \partial^\mu\partial_\mu$

[2] Im Allgemeinen gelten unsere Aussagen für Gleichungen der Form $\Box_g f + (v, \nabla_g f) + wf = 0$.

retardierten und avancierten Fundamentallösungen. Dabei handelt es sich um eindeutige Operatoren[3] $E^{\pm} : C_0^{\infty}(\mathcal{M}) \to C^{\infty}(\mathcal{M})$, welche die Beziehung

$$(\Box_g + m^2)E^{\pm} = E^{\pm}(\Box_g + m^2) = \mathbb{1}$$

erfüllen und die Trägereigenschaft $\mathrm{supp}(E^{\pm}f) \subseteq J^{\pm}(\mathrm{supp}f)$, $\forall f \in C_0^{\infty}(\mathcal{M})$ aufweisen. Die beiden Operatoren lassen sich desweiteren zum Operator $E := E^{+} - E^{-}$ zusammenfassen, der die *kausale* Fundamentallösung[4] des Klein-Gordon-Operators beschreibt. Diese Form von Lösung erfüllt dabei die Eigenschaft $(\Box_g + m^2)E = E(\Box_g + m^2) = 0$ mit $\mathrm{supp}(Ef) \subset \bigcup_{\pm} J^{\pm}(\mathrm{supp}f)$.

Für eine Cauchy-Fläche $S$ der Raumzeit $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ lassen sich Operatoren

$$\begin{aligned} \rho_0 : C^{\infty}(\mathcal{M}) &\to C^{\infty}(S) & \qquad \rho_1 : C^{\infty}(\mathcal{M}) &\to C^{\infty}(S) \\ f &\mapsto f|_S & f &\mapsto (n^a \nabla_a f)|_S \end{aligned}$$

definieren. Dabei handelt es sich bei $\rho_0$ um den Restriktions-Operator, und $\rho_1$ beschreibt die Restriktion der vorwärtsgerichteten (zukunftsgerichteten) Normal-Ableitung. Diese Operatoren verfügen bzgl. des Skalarprodukts über adjungierte Elemente $\rho_0', \rho_1' : C^{\infty}(S)' \to C^{\infty}(\mathcal{M})'$ auf den Räumen der Distributionen mit kompaktem Träger.
Indem man den adjungierten Operator $E' : C^{\infty}(\mathcal{M})' \to C_0^{\infty}(\mathcal{M})'$ bzgl. $E$ definiert und die Bedingung $C_0^{\infty}(X) \subset C^{\infty}(X)'$ für die Mannigfaltigkeiten $X = \mathcal{M}, S$ nützt, lässt sich $E$ zu $E = -E'$ erweitern, wodurch sich die Operatoren $E\rho_0', E\rho_1' : C^{\infty}(S)' \to C_0^{\infty}(\mathcal{M})'$ auf stetige Operatoren von $C_0^{\infty}(S)$ nach $C^{\infty}(\mathcal{M})$ einschränken lassen. Aus dieser Eigenschaft gewinnt man damit die folgende Aussage:

**Satz 3.1.** *Sei $S$ eine Cauchy-Fläche und $u_0, u_1 \in C_0^{\infty}(S)$, dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in C^{\infty}(\mathcal{M})$ der Klein-Gordon-Gleichung, d.h. $(\Box_g + m^2)u = 0$, mit $\rho_0(u) = u_0,\ \rho_1(u) = u_1$ und es gilt* $\mathrm{supp}u \subset \left(\bigcup_i J^{+}(\mathrm{supp}u_i) \cup J^{-}(\mathrm{supp}u_i)\right)$ (Cauchy-Problem).
*Desweiteren gilt damit, dass*

$$u = E\rho_0' u_1 - E\rho_1' u_0$$

*die Lösung des Cauchy-Problems mit den Anfangsdaten $u_0, u_1$ beschreibt.*

(Der Beweis dazu ergibt sich analog zum Beweis von 3.4 und ist detailiert in [8] ausgeführt worden.)
Ausgehend von dieser Sachlage ergibt sich

**Korollar 3.2.** *Auf $C_0^{\infty}(S)$ gilt*

$$\begin{aligned} \rho_0 E \rho_0' &= 0 & , \rho_0 E \rho_1' &= -\mathbb{1} \\ \rho_1 E \rho_0' &= \mathbb{1} & , \rho_1 E \rho_1' &= 0. \end{aligned}$$

In lokalen Koordinaten ergeben sich damit nach [7] die Relationen

$$\begin{aligned} &E(t, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = 0 & &(1 \otimes n^{\alpha}\nabla_{\alpha})E(t, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &(n^{\alpha}\nabla_{\alpha} \otimes 1)E(t, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & &(n^{\alpha}\nabla_{\alpha} \otimes n^{\alpha}\nabla_{\alpha})E(t, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = 0. \end{aligned}$$

[3] Die retardierte und avancierte Greensfunktion bilden die Integralkerne dieser Operatoren.
[4] $E$ lässt sich dabei durch $(Ef)(x) = \int E(x, y)f(y)dy$ mit $f \in C_0^{\infty}(\mathcal{M})$ formulieren.

Die Lösungsräume der Klein-Gordon-Gleichung, die sich durch Vektorräume $\mathcal{R}(\mathcal{M},g) := E(C_0^\infty(\mathcal{M}))$ ergeben, lassen sich in diesem Sinne als symplektische Räume auffassen. Die zugehörige **symplektische Form**[5] lässt sich dabei über den Operator $E$ gewinnen und durch die Beziehung

$$\begin{aligned} \sigma_\mathcal{M} : \mathcal{R}(\mathcal{M},g) \times \mathcal{R}(\mathcal{M},g) &\to \mathbb{R} \\ (E(f_1), E(f_2)) &\mapsto \sigma_\mathcal{M}(Ef_1, Ef_2) := \int_\mathcal{M} f_1(Ef_2)\, d\mu_g \end{aligned}$$

beschreiben.
Aus der Erkenntnis, dass sich für eine Cauchy-Fläche $S \subset \mathcal{M}$ über dem Vektorraum $C_0^\infty(S) \oplus C_0^\infty(S)$ ebenfalls eine symplektische Form nach der Formulierung

$$\sigma_S((f,f'),(g,g')) = \int_S (gf' - g'f)\, dS$$

mit $(f,f'),(g,g') \in C_0^\infty(S) \oplus C_0^\infty(S)$ gewinnen lässt, folgt aufgrund der eindeutigen Existenz zweier Lösungen $E(f), E(g) \in \mathcal{R}(\mathcal{M},g)$ zu zwei Werten $(f,f'),(g,g')$ aus $C_0^\infty(S) \oplus C_0^\infty(S)$ nach Satz 3.1 die Beziehung

$$\begin{aligned} \sigma_S((f,f'),(g,g')) &= -((\rho_0 E(f), \rho_1 E(g))_S - (\rho_1 E(f), \rho_0 E(g))_S) \\ &= ((f, (E\rho_0'\rho_1 E)g)_\mathcal{M} - (f, (E\rho_1'\rho_0 E)g)_\mathcal{M}) \\ &= (f, (E\rho_0'\rho_1 E - E\rho_1'\rho_0 E)g)_\mathcal{M} \\ &= (f, Eg)_\mathcal{M} \\ &= \sigma_\mathcal{M}(Ef, Eg), \end{aligned}$$

die die Äquivalenz der beiden symplektischen Formen und damit die Äquivalenz der symplektischen Räume $\mathcal{R}(\mathcal{M},g)$ und $C_0^\infty(S) \oplus C_0^\infty(S) =: \mathfrak{M}_S$ begründet, wobei letzterer den klassischen Phasenraum repräsentiert. Diese Äquivalenz sorgt dafür, dass bei globalhyperbolischen Raumzeiten die Entwicklungen von Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung allein über Cauchy-Flächen bestimmt werden können.

## 3.2 Klein-Gordon-Gleichung für nichtglobalhyperbolische Raumzeiten

Im Gegensatz zum globalhyperbolischen Fall lässt sich im nichtglobalhyperbolischen die Existenz von retardierten und avancierten Fundamentallösung nicht ohne weiteres vorhersagen. Selbst die Eindeutigkeit kann in diesen Fall nicht mehr garantiert werden.
Für nichtglobalhyperbolische Raumzeiten, die jedoch eine solche Lösung besitzen, lassen sich einige allgemeine und wesentliche Aussagen formulieren. Zunächst sei aber noch einmal auf das charakteristischste Merkmal einer retardierten und avancierten Fundamentallösung hingewiesen.

[5] Dabei handelt es sich um eine nicht nicht entartete, antisymmetrische Bilinearform auf einem reellen Vektorraum.

**Definition 3.3.** Seien $E^{\pm}_{\mathcal{M}}$ retardierte bzw. avancierte Fundamentallösungen der Klein-Gordon-Gleichung auf der Raumzeit $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$, dann gilt für alle $f \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ stets

$$\text{supp}(E^{\pm}_{\mathcal{M}} f) \subset J_{\pm}(\text{supp} f).$$

Unter Verwendung dieser Definition kann man nun weitere Aussagen formulieren.

**Lemma 3.4.** *Sei $E_{\mathcal{M}} = E^{+}_{\mathcal{M}} - E^{-}_{\mathcal{M}}$ eine (kausale) Fundamentallösung von $(\Box_g + m^2)$ auf der Lorentzmannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ und sei für $(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \in \mathcal{K}(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ eine Cauchy-Fläche $S$ gegeben, dann gilt*

$$E_{\mathcal{M}} f = E_{\mathcal{M}} \rho_0' f_1 - E_{\mathcal{M}} \rho_1' f_0$$

*für alle $f \in C^\infty(\mathcal{O})$ mit $f_0, f_1 \in C_0^\infty(S)$.*

*Beweis.* [6] Für $f \in C_0^\infty(\mathcal{O})$ erhalten wir mit der Bedingung $\text{supp}(E_{\mathcal{M}} f) \subset J_+(\text{supp} f) \cup J_-(\text{supp} f)$ die Forderung, das die Funktionen $\rho_i(E_{\mathcal{M}} f) = f_i$, $i \in \{0, 1\}$ kompakte Träger auf der Cauchy-Fläche $S$ besitzen; d.h $f_0, f_1 \in C_0^\infty(S)$.
Wir betrachten nun die *Greensche Identität* die für den Klein-Gordon-Operator durch

$$\begin{aligned}
\int_G (u(\Box_g + m^2)v - v(\Box_g + m^2)u)\, dV &= \int_G (u(\Box_g)v - v(\Box_g)u)\, dV \\
&= \int_{\partial G} (u(n^a \nabla_a v) - v(n^a \nabla_a u))\, dF
\end{aligned}$$

gegeben ist. $n^a \nabla_a$ beschreibt in diesem Fall die nach außen gerichtete Normalableitung. Für das Integrationsgebiet $G$ wählen wir die Menge $J_-^{\mathcal{O}}(S) \backslash S = (J_-(S) \backslash S) \cap \mathcal{O}$.
Auf die Bedingung der starken Kausalität[7], die in unserer Betrachtung aufgrund der Existenz der Menge $\mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ gegeben ist, folgt damit, dass $J_+(\text{supp} f) \cap J_-^{\mathcal{O}}(S)$ eine kompakte Teilmenge beschreibt.[8]
Wählen wir nun für $u$ die Lösung $E_{\mathcal{M}} f$ der Klein-Gordon-Gleichung und für $v$ eine Funktion $g \in C_0^\infty(\mathcal{M})$, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_{J_-^{\mathcal{O}}(S) \backslash S} ug\, dV &= \int_{J_-^{\mathcal{O}}(S) \backslash S} u \overbrace{(\Box_g + m^2) E^{+}_{\mathcal{M}}}^{=\mathbb{1}} g\, dV \\
&= \int_{J_-^{\mathcal{O}}(S) \backslash S} (u(\Box_g + m^2) E^{+}_{\mathcal{M}} g - E^{+}_{\mathcal{M}} g \underbrace{(\Box_g + m^2) u}_{=0})\, dV \\
&= \int_{J_-^{\mathcal{O}}(S) \backslash S} (u(\Box_g E^{+}_{\mathcal{M}} g) - E^{+}_{\mathcal{M}} g(\Box_g u))\, dV \\
&= \int_S (\underbrace{u}_{=f_0} (n^a \nabla_a (E^{+}_{\mathcal{M}} g)) - E^{+}_{\mathcal{M}} g (\underbrace{n^a \nabla_a u}_{=f_1}))\, dS
\end{aligned}$$

[6] Der Beweis ist zum grössten Teil aus [8] entnommen und musste nur geringfügig abgeändert werden, um den Gesetzmässigkeiten auf nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten zu entsprechen.

[7] In $\mathcal{M}$ existieren keine geschlossenen kausalen Kurven.

[8] Diese Schnittmenge kann auch leer sein. In unserem Fall können wir aber durch die Freiheit in der Wahl der Cauchy-Fläche diesen Fall vermeiden.

Aus der Trägereigenschaft von $E^+_{\mathcal{M}}g$ folgt damit, dass der zu betrachtende Rand durch die Cauchy-Fläche $S$ von $\mathcal{O}$ gegeben ist. Die nach außen gerichtete Normal-Ableitung lässt sich in diesem Fall durch $n^a\nabla_a = \rho_1$ formulieren.
Für $v = E^-_{\mathcal{M}}g$ und das Gebiet $J^{\mathcal{O}}_+(S)\backslash S$ erhält man durch eine analoge Rechnung

$$\int_{J^{\mathcal{O}}_+(S)\backslash S} ugdV = -(\int_S \underbrace{u}_{=f_0}(n^a\nabla_a(E^-_{\mathcal{M}}g)) - E^-_{\mathcal{M}}g(\underbrace{n^a\nabla_a u}_{=f_1})dS),$$

wobei die nach außen gerichtete Normal-Ableitung in diesem Fall durch $-n^a\nabla_a = -\rho_1$ auf $S$ gegeben ist. Aus diesen Bedingungen folgt damit

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int_{\mathcal{O}} ug\, dV}_{=\int_{\mathcal{M}} ug\, dV} &= \int_{J^{\mathcal{O}}_-(S)\backslash S} ug\, dV + \int_{J^{\mathcal{O}}_+(S)\backslash S} ug\, dV \\
&= \int_S u(n^a\nabla_a(E_{\mathcal{M}}g)) - E_{\mathcal{M}}g(n^a\nabla_a u)\, dS \\
&= (f_0, \rho_1(E_{\mathcal{M}}g))_S - (f_1, \rho_0(E_{\mathcal{M}}g))_S \\
&= (E'_{\mathcal{M}}\rho'_1 f_0 - E'_{\mathcal{M}}\rho'_0 f_1, g)_{\mathcal{M}} \\
&= (E_{\mathcal{M}}\rho'_0 f_1 - E_{\mathcal{M}}\rho'_1 f_0, g)_{\mathcal{M}} \\
&= \int_{\mathcal{M}} ((E_{\mathcal{M}}\rho'_0 f_1 - E_{\mathcal{M}}\rho'_1 f_0)g)\, dV.
\end{aligned}$$

□

Lokal lässt sich damit die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung wie bisher aus den Cauchy-Daten auf einer Cauchy-Fläche $S$ gewinnen.
Ein damit verbundenes interessantes Merkmal ergibt sich für allgemeine Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung zu nichtglobalhyperbolische Raumzeiten $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$. Man findet nämlich die Eigenschaft, dass sich Lösungen aus Anfangswerten zu endlich vielen Cauchy-Flächen global-hyperbolischer Untermanningfaltigkeiten $(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \in \mathcal{K}(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ entwickeln lassen. Dies lässt sich über eine Zerlegung der Eins realisieren, die aufgrund der Parakompaktheit der Raumzeit stets existiert.

**Definition 3.5.** Sei $\mathcal{U} = \{\mathcal{O}_\alpha | \alpha \in I\}$ eine offene Überdeckung von $\mathcal{M}$, dann heißt eine Menge $\{\chi_\alpha | \alpha \in I\}$ von glatten Funktionen auf $\mathcal{M}$ eine der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnete Zerlegung der Eins, wenn

1. $\mathrm{supp}(\chi_\alpha) \subset \mathcal{O}_\alpha$
2. $0 \leq \chi_\alpha \leq 1$
3. $\forall p \in \mathcal{M}$ existieren nur endlich viele $\alpha$ mit $\chi_\alpha(p) \neq 0$
4. $\sum_{\alpha \in I} \chi_\alpha(p) = 1 \qquad \forall p \in \mathcal{M}$.

Dies begünstigt uns zu jeder Überdeckung $\mathcal{U}$ stets eine endliche Teilüberdeckung für supp$f$ zu finden. In unserem Fall konstruieren wir ein endliche Überdeckung von supp$f$ über relativkompakte globalhyperbolische Teilmengen $\mathcal{O}_i \subset \mathcal{M}$, $i \in \underline{n}$, die wir mit einer zugeornedten Zerlegung der Eins versehen. Damit erhalten wir $f = \sum_{i=1}^{n} f\chi_i$ mit $f \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ und $\mathrm{supp}(f\chi_i) \subset \mathcal{O}_i$, $\forall i \in \underline{n}$, und daraus folgt wiederum

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{M}}f &= E_{\mathcal{M}}(\sum_{i\in\underline{n}} f\chi_i) = \sum_{i\in\underline{n}} E_{\mathcal{M}}(f\chi_i) \\ &= \sum_{i\in\underline{n}} E_{\mathcal{M}}\rho'_{0,S_i}(f'_{\chi_i}) - E_{\mathcal{M}}\rho'_{1,S_i}(f_{\chi_i}) \end{aligned}$$

mit $f_{\chi_i}, f'_{\chi_i} \in C_0^\infty(S_i)$. Die Fundamentallösungen in diesem Ausdruck werden dabei immer noch durch die Raumzeit $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ bestimmt. Für die einzelnen Summanden dieses Ausdrucks, sowie zu Lösungen, die sich über Funktionen $f \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ mit supp$f \subset \mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$bilden, lässt sich eine **Lokalisierbarkeitseigenschaft** formulieren. Diese Eigenschaft gewinnt man aufgrund der symplektischen Raumstruktur der Lösungsmengen. Es ergibt sich nämlich:

**Satz 3.6.** *Für eine isometrische Einbettung $\psi : (\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \to (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ und für alle $f, g \in C_0^\infty(\mathcal{O})$ gilt die Beziehung*

$$\sigma_{\mathcal{M}}(E_{\mathcal{M}}\psi_* f, E_{\mathcal{M}}\psi_* g) = \sigma_{\mathcal{O}}(E_{\mathcal{O}}f, E_{\mathcal{O}}g)$$

*für eine Fundamentallösung $E_{\mathcal{M}}$ der Klein-Gordon-Gleichung auf $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$.*

*Beweis.* Wir betrachten mit $E_{\mathcal{O}}^{\pm}$ und $E_{\mathcal{M}}^{\pm}$ retardierte und avancierte Fundamentallösungen zur Klein-Gordon-Gleichung auf $(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \in \mathcal{K}(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$. Dabei gilt mit $(\Box_{g_{\mathcal{O}}} + m^2)E_{\mathcal{O}}^{-}f = f$, $\forall f \in C_0^\infty(\mathcal{O})$ bzgl. einer isometrischen Einbettung $\psi : \mathcal{O} \to \mathcal{M}$ die Beziehung $\psi_*(f) = \psi_*((\Box_{g_{\mathcal{O}}} + m^2)E_{\mathcal{O}}^{-}f) \in C_0^\infty(\mathcal{M})$.
Aufgrund von

$$\psi_*((\Box_{g_{\mathcal{O}}} + m^2)g) = (\Box_{g_{\mathcal{M}}} + m^2)\psi_*(g),\ \forall g \in C_0^\infty(\mathcal{O})$$

ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \int gf\, d\mu_{g_{\mathcal{O}}} &= \int g((\Box_{g_{\mathcal{O}}} + m^2)E_{\mathcal{O}}^{-}f)\, d\mu_{g_{\mathcal{O}}} = \int ((\Box_{g_{\mathcal{O}}} + m^2)g)E_{\mathcal{O}}^{-}f\, d\mu_{g_{\mathcal{O}}} \\ &= \int \psi_*(((\Box_{g_{\mathcal{O}}} + m^2)g)E_{\mathcal{O}}^{-}f)\, d\mu_{g_{\mathcal{M}}} = \int \psi_*((\Box_{g_{\mathcal{O}}} + m^2)g)\psi_*(E_{\mathcal{O}}^{-}f)\, d\mu_{g_{\mathcal{M}}} \\ &= \int ((\Box_{g_{\mathcal{M}}} + m^2)\psi_*(g))\psi_*(E_{\mathcal{O}}^{-}f)\, d\mu_{g_{\mathcal{M}}} = \int \psi_*(g)((\Box_{g_{\mathcal{M}}} + m^2)\psi_*(E_{\mathcal{O}}^{-}f))\, d\mu_{g_{\mathcal{M}}} \\ &= \int \psi_*(g)((\Box_{g_{\mathcal{M}}} + m^2)E_{\mathcal{M}}^{-}\psi_*(f))\, d\mu_{g_{\mathcal{M}}},\ \forall g, f \in C_0^\infty(\mathcal{O}). \end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung folgt

$$\int \psi_*(g)((\Box_{g_{\mathcal{M}}}+m^2)(\psi_*(E_{\mathcal{O}}^{-}f)-E_{\mathcal{M}}^{-}(\psi_*(f))))\, d\mu_{g_{\mathcal{M}}} = u_f((\Box_{g_{\mathcal{M}}}+m^2)\psi_*(g)) = 0,\ \forall g \in C_0^\infty(\mathcal{O}).$$

Dabei beschreibt $u_f \in D'(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$ eine Distribution auf $(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$. Betrachtet man dazu die Einschränkung $u_{f,\psi(\mathcal{O})}$, die wiederum eine Distribution auf $\psi(\mathcal{O})$ im Sinne von

$$u_{f,\psi(\mathcal{O})}(h) = u_f(h),\ \forall h \in C_0^\infty(\psi(\mathcal{O}))$$

beschreibt, dann lässt sich $(\Box_{g_\mathcal{M}} + m^2)u_{f,\psi(\mathcal{O})} = 0$ setzen. Da der Träger von $u_{f,\psi(\mathcal{O})}$ aufgrund von $\psi_*(E^-_\mathcal{O}(f))$ und $E^-_\mathcal{M}(\psi_*(f))$ in $J^-(\mathrm{supp} f)$ enthalten ist und mit der Eigenschaft, dass für alle $p \in \mathrm{supp} u_{f,\psi(\mathcal{O})}$ stets $J^+(p) \cap \mathrm{supp} u_{f,\psi(\mathcal{O})} \subset J^+(p) \cap J^-(\mathrm{supp} f)$ gegeben ist, handelt es sich bei $\mathrm{supp} u_{f,\psi(\mathcal{O})}$ um einen *zukunftskompakten* Träger[9], der nach [9] $u_{f,\psi(\mathcal{O})} \equiv 0$ fordert. Damit verbunden ergibt sich

$$\int \psi_*(g)\psi_*(E^-_\mathcal{O} f)\, d\mu_{g_\mathcal{M}} = \int \psi_*(g) E^-_\mathcal{M} \psi_*(f)\, d\mu_{g_\mathcal{M}},\ \forall f, g \in C_0^\infty(\mathcal{O}).$$

Dasselbe Verfahren lässt sich auch für $E^+_\mathcal{O}$ und $E^+_\mathcal{M}$ anwenden, wobei sich aus dem vergangenheitskompakten Träger der zugehörigen Distribution die Beziehung

$$\int \psi_*(g)\psi_*(E^+_\mathcal{O} f)\, d\mu_{g_\mathcal{M}} = \int \psi_*(g) E^+_\mathcal{M} \psi_*(f)\, d\mu_{g_\mathcal{M}},\ \forall f, g \in C_0^\infty(\mathcal{O})$$

bildet und

$$\sigma_\mathcal{M}(E_\mathcal{M}\psi_* f, E_\mathcal{M}\psi_* g) = \sigma_\mathcal{O}(E_\mathcal{O} f, E_\mathcal{O} g)$$

gewährt. $\Box$

Damit sind die symplektischen Räume $E_\mathcal{O}(C_0^\infty(\mathcal{O}))$ und $E_\mathcal{M}(\psi_*(C_0^\infty(\mathcal{O})))$ zueinander symplektisch isomorph, d.h. äquivalent bzgl. der symplektischen Form.

Trotz all dieser Erkenntnisse bleibt die Behandlung der Klein-Gordon-Gleichung auf nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten schwierig. Die Existenz von eindeutigen lokalen Fundamentallösungen nach Lemma 3.4 und Satz 3.6 hat nicht unbedingt die Existenz globaler retardierter und avancierter Fundamentallösungen zur Folge. Ebenfalls bietet deren eventuelle Nichteindeutigkeit eine gewisse Schwierigkeit, da die verschiedenen globalen Fundamentallösungen im Allgemeinen nicht äquivalent zueinander sind.
Eine wesentlich leichter zu behandelte Klasse von nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten, wird über die nichtglobalhyperbolischen statischen Raumzeiten gegeben. Dabei kristallisiert sich ein wesentlich einfacheres Schema heraus, durch das man die Existenz und Nichteindeutigkeit konkret beschreiben und klassifizieren kann. Mit diesen Strukturen wollen wir uns deshalb in den nächsten Abschnitten beschäftigen.

[9] Sei $G \subset \mathcal{M}$ und $p \in G$ ein beliebiges Element, für das sich $J^+(x) \cap G$ stets als kompakte Menge erweist, dann bezeichnet man die Menge $G$ als zukunftskompakt.

## 3.3 Klein-Gordon-Operator für statische Raumzeiten

Wir betrachten die statische Raumzeit $(\mathcal{M}_\mathcal{B}, g)$ mit dem Klein-Gordon-Operator[10]

$$\begin{aligned} P &:= \Box_g + m^2 \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + m^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu) + m^2, \end{aligned}$$

der sich nach Def. 2.7 und Def. 2.9 durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_0(\sqrt{|g|}g^{00}\partial_0) + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j(\sqrt{|g|}g^{jk}\partial_k) + m^2 \\ &= g^{00}\partial_0^2 - \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j(\sqrt{|g|}h^{jk}\partial_k) + m^2. \end{aligned}$$

beschreiben lässt. Mit

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix}, \ \det(g_{\mu\nu}) = -g_{00}\det(h) \quad \text{und} \ \sqrt{|g|} = \sqrt{g_{00}}\sqrt{|h|}$$

folgt für die Klein-Gordon-Gleichung die Beziehung

$$\begin{aligned} Pu &= (g^{00}\partial_0^2 - \frac{1}{\sqrt{g_{00}}\sqrt{|h|}}\partial_j(\sqrt{g_{00}}\sqrt{|h|}h^{jk}\partial_k) + m^2)u = 0 \\ \Rightarrow \quad g_{00}Pu &= (\partial_0^2 - \sqrt{g_{00}}\frac{1}{\sqrt{|h|}}\partial_j(\sqrt{g_{00}}\sqrt{|h|}h^{jk}\partial_k) + m^2 g_{00})u = 0 \\ &= (\partial_0^2 + \underbrace{(-\sqrt{g_{00}}\widetilde{\nabla}^k(\sqrt{g_{00}}\widetilde{\nabla}_k) + m^2 g_{00})}_{=A})u = 0, \end{aligned}$$

wobei $u \in C^\infty(\mathcal{M}_\mathcal{B})$ eine Lösung beschreibt.[11]

Damit gilt für eine statische Raumzeit die Beziehung

$$\partial^2 u/\partial t^2 = -Au,$$

als Ausdruck der Klein-Gordon-Gleichung, und für eine ultrastatische Raumzeit erhalten wir

$$\partial^2 u/\partial t^2 = -(-\Delta_h + m^2)u \qquad \text{(Wellengleichung)}.$$

Dabei lässt sich $A$ durch einen positiven symmetrischen (hermiteschen) Operator auf dem Hilbertraum $L^2(K, d\mu_K)$[12] mit dem Definitionsbereich $C_0^\infty(K) \subset L^2(K, d\mu_K)$ darstellen.
Was es damit auf sich hat und welche Bedingungen zu Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung führen, wollen wir für die gewonnene Beziehung im Rahmen der *Funktionalanalysis* etwas genauer betrachten.

[10] $\nabla_\mu$ beschreibt die kovariante Ableitung bzgl. der Metrik $g$ und $g^{\mu\nu}$ die inverse Matrix zur Matrix $g_{\mu\nu}$, bestehend aus den Metrikkoeffizienten in lokalen Koordinaten.

[11] $\widetilde{\nabla}_i$ beschreibt die kovariante Ableitung auf $K$ bzgl. der Metrik $h$.

[12] Es gilt dabei $d\mu_K = \sqrt{g_{00}}dK$.

## 3.4 Selbstadjungierte Erweiterungen und Randbedingungen

Betrachtet man globalhyperbolische statische Raumzeiten (wie z.B. den Minkoskiraum), dann erweist sich der Operator $A$ (aus dem letzten Abschnitt) als ein wesentlich selbstadjungierter[13] Operator in $L^2(K, d\mu_K)$. Durch Anwendung des Spektraltheorems, das allein für selbstadjungierte Operatoren definiert ist (siehe [10]), lassen sich damit über den Abschluss von $A$ die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung konstruieren.
Für nichtglobalhyperbolische statische Raumzeiten ist $A$ allerdings nicht zwingend als wesentlich selbstadjungiert gegeben. Die damit verbundene Konstruktion von Lösungen über das Spektraltheorem in Anwendung auf $A$ ist in diesem Fall nicht unbedingt möglich. Trotz allem lässt sich für dieses Problem ein Ausweg finden. Dieser realisiert sich über den Begriff der selbstadjungierten Erweiterung, den wir in diesem Abschnitt ausführlich diskutieren möchten.
Im Folgenden betrachten wir allerdings Erweiterungen von abgeschlossenen symmetrischen Operatoren, was für sich keine Einschränkung der Allgemeinheit darstellt, da ein symmetrischer Operator und sein Abschluss dieselben abgeschlossenen Erweiterungen besitzen.
Sätze, Definitionen und Beweise wurden dabei aus [11] und [12] entnommen.
Vorweg wollen wir allerdings den Beriff des symmetrischen Operators definieren

**Definition 3.7.** Einen auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ dicht definierten Operator $A$ bezeichnet man als symmetrisch, wenn $A \subset A^*$ in dem Sinne, dass $A = A^*$ für alle $f \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$ gilt, gegeben ist.

Für diese Operatoren erfüllen sich einige wichtige Aussagen und Definitionen, die wir für unsere Betrachtungen nutzen möchten.

**Lemma 3.8.** *Sei $A$ ein dicht definierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit einem adjungiertem Operator $A^*$, dann handelt es sich bei $A^*$ um einen abgeschlossenen Operator, dessen Definitionsbereich $\mathcal{D}(A^*)$ einen Hilbertraum bzgl. des Skalarprodukts*

$$(f, f')_{\mathcal{D}(A^*)} = (A^* f, A^* f') + (f, f')$$

*beschreibt.*

*Bemerkung* 3.9. Einen Unterraum von $\mathcal{D}(A^*)$, der bzgl. $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{D}(A^*)}$ abgeschlossen ist, bezeichnet man demnach als A-abgeschlossen.

**Definition 3.10.** Für einen symmetrischen Operator $A$ werden die Teilräume $D_+ = \mathrm{Ker}(A^* - i)$ und $D_- = \mathrm{Ker}(A^* + i)$ als *Defekt*-Räume bezeichnet. Diese Räume, die die Abweichung des Operators $A$ von der Selbstadjungiertheit beschreiben, erfüllen in dem Fall, dass $A$ ein wesentlich selbstadjungierter Operator ist, die Beziehung $D_+ = D_- = 0$. Die Dimensionen $n_+$ und $n_-$ der Defekträume $D_+$ und $D_-$ werden dabei als *Defektindizes* bezeichnet.[14]

*Bemerkung* 3.11. Dabei stehen die Defekt-Räume bzgl. $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{D}(A^*)}$ orthogonal zueinander ($D_+ \perp D_-$), was man als $A$-orthogonal bezeichnet.

[13] Der Abschluss des Operators $A$ ist ein selbstadjungierter Operator in $L^2(K, d\mu_K)$.
[14] $n_+(A) = dim[D_+]$, $n_-(A) = dim[D_-]$

Eine wesentliche Rolle bei der Konstruktion von selbstadjungierten Erweiterungen eines symmetrischen Operators $A$ wird dem *Randwert* eines Operators zugeordnet. Dieser lässt sich in Form eines linearen stetigen Funktionals auf $\mathcal{D}(A^*)$ definieren. Dies geschieht über die antisymmetrische[15] Bilinearform (*Randform*) $B$ auf $\mathcal{D}(A^*)$, die durch

$$B(g,h) = (g, A^*h) - (A^*g, h)$$

formuliert wird. Betrachtet man die Randform für Elemente $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(A)$, $h_1, h_2 \in D_+$ und $g_1, g_2 \in D_-$, dann ergibt sich für die Linearkombinationen $f_i + h_i + g_i$ mit $i = \{1, 2\}$ die Beziehung

$$B(f_1 + h_1 + g_1, f_2 + h_2 + g_2) = 2i((h_1, h_2) - (g_1, g_2)),$$

die uns verdeutlicht, dass für die Randform $B$ nur Elemente aus $\mathcal{D}(A^*)\backslash\mathcal{D}(A)$ wesentlich beitragen. Der Begriff der **Randbedingung** lässt sich dabei in diesem Konzept durch die Beziehung

$$B(g,h) = 0$$

einführen, wobei $g$ ein festes Element aus $D_+ \oplus D_-$ beschreibt.

*Bemerkung* 3.12. Dabei bezeichnet man einen Unterraum von $D(A^*)$, dessen Elemente die Forderung $B(g,h) = 0$ stets erfüllen, als $A$-symmetrisch.

Mit diesem Gerüst lassen sich jetzt schon einige qualitative Aussagen über symmetrisch abgeschlossene Erweiterungen finden.

Sei $A_E$ eine abgeschlossene symmetrische Erweiterung, dann gilt für $f \in \mathcal{D}(A_E^*)$, dass $(g, A_E^* f) = (A_E g, f) = (Ag, f)$ für alle $g \in \mathcal{D}(A)$. Desweiteren gilt $f \in \mathcal{D}(A^*)$, was auf $A_E^* f = A^* f$ und

$$A \subset A_E \subset A_E^* \subset A^*$$

schließt. Damit ergibt sich die Aussage:

**Lemma 3.13.** *Sei $A$ ein symmetrischer Operator und $A_E$ eine Erweiterung von $A$ mit $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_E) \subset \mathcal{D}(A^*)$, dann ist $h$ in $\mathcal{D}(A_E^*)$ genau dann enthalten, wenn $h \in \mathcal{D}(A^*)$ und $B(g,h) = 0$ $\forall g \in \mathcal{D}(A_E)$ ist.*

*Beweis.* (nach [11]) Mit $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_E) \subset \mathcal{D}(A^*)$ erhalten wir durch Adjungieren $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_E^*) \subset \mathcal{D}(A^*)$. Dies hat zur Folge, dass mit $h \in \mathcal{D}(A_E^*)$

$$A_E^* h = A^* h$$

gilt, was bedeutet, dass $h$ nur dann ein Element aus $\mathcal{D}(A_E^*)$ beschreibt, wenn $(A_E g, h) = (g, A^* h)$, $\quad \forall g \in \mathcal{D}(A_E)$ ist. Dies wiederum folgt aus der Beziehung $B(g,h) = (g, A^*h) - (A^*g, h) = 0$ für alle $g \in \mathcal{D}(A_E)$. ☐

[15] mit $B(g,h) = -B(h,g)^*$

Dies zeigt uns, dass sich abgeschlossene symmetrische Erweiterungen von $A$ allein durch Restriktionen von $A^*$ auf $A$-abgeschlossene, $A$-symmetrische Unterräume von $D(A^*)$ und damit allein durch Randbedingungen zum Operator $A$ bestimmen lassen.

Um allerdings ein Konstruktionsschema für selbstadjungierte Erweiterungen zu finden, müssen wir unsere Untersuchung noch ein wenig fortsetzen.

**Lemma 3.14.** *Sei $A$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator, dann gilt*

1. *$\mathcal{D}(A)$, $D_+$ und $D_-$ sind $A$-abgeschlossene und gegenseitig $A$-orthogonale Unterräume von $\mathcal{D}(A^*)$ und*
$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \oplus_A D_+ \oplus_A D_-$$

2. *Es gibt eine $1:1$ Korrespondenz zwischen den $A$-abgeschlossenen, $A$-symmetrischen Unterräumen $\mathcal{S}$ von $\mathcal{D}(A^*)$, welche $\mathcal{D}(A)$ enthalten, und den $A$-abgeschlossenen, $A$-symmetrischen Unterräumen $\mathcal{S}_1$ von $D_+ \oplus_A D_-$. Dabei ergibt sich $\mathcal{S} = \mathcal{D}(A) \oplus_A \mathcal{S}_1$.*

Beweise zu diesen Foderungen findet man in [12].
Aus all diesen Kriterien gewinnt man nun die zentrale Aussage dieses Abschnitts, die weitesgehend alle Merkmale zur Konstruktion einer abgeschlossenen symmetrischen Erweiterung beinhaltet.

**Satz 3.15.** *Für einen abgeschlossenen symmetrischen Operator $A$ stehen die abgeschlossenen symmetrischen Erweiterungen in $1:1$ Korrespondenz mit der Menge der partiellen Isometrien bzgl. $(\cdot,\cdot)$ von $D_+$ nach $D_-$. Dabei ergibt sich zu einer solchen Isometrie $U$ mit Definitionsbereich $I(U) \subset D_+$, die abgeschlossene symmetrische Erweiterung $A_{E_U}$ zu einem Definitionsbereich*
$$\mathcal{D}(A_{E_U}) = \{f + f_+ + Uf_+ |\, f \in \mathcal{D}(A),\ f_+ \in I(U)\},$$
*wobei*
$$A_{E_U}(f + f_+ + Uf_+) = Af + if_+ - iUf_+$$
*erfüllt ist. Sei nun $dim I(U) < \infty$, dann gilt für die Defektindizes von $A_{E_U}$ die Beziehung*
$$n_\pm(A_{E_U}) = n_\pm(A) - dim[I(U)].$$

Der Beweis dieses Satzes wird in [12] durchgeführt.

**Korollar 3.16.** *Sei $A$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator mit Defektindizes $n_+$ und $n_-$, dann gilt*

1. *$A$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $n_+ = 0 = n_-$.*

2. *$A$ besitzt genau dann eine selbstadjungierte Erweiterung, wenn $n_+ = n_-$. Dabei gibt es in diesem Fall eine $1:1$ Korrespondenz zwischen selbstadjungierten Erweiterungen von $A$ und unitären Abbildungen von $D_+$ nach $D_-$.*

3. *Sei $n_+ = 0 \neq n_-$ oder $n_- = 0 \neq n_+$, dann besitzt $A$ keine nichttriviale symmetrische Erweiterung.*

Die Punkte, die in diesem Korollar angesprochen werden stellen allerdings einige Schwierigkeiten für die Bestimmung von selbstadjungierten Erweiterung dar. In vielen Fällen ist es nicht einfach die Defektindizes zu bestimmen. Ein nützliches Kriterium, das dieses Problem für symmetrische Operatoren vereinfacht, wird durch den Satz nach von Neumann gegeben.

**Satz 3.17.** *Sei $A$ ein symmetrischer Operator und existiert eine Konjugation*[16] $C : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A)$ *mit* $AC = CA$, *dann besitzt $A$ gleich große Defektindizes und ist damit selbstadjungiert erweiterbar.*

Mit den erworbenen Erkenntnissen versuchen wir nun für einige konkrete Beispiele, selbstadjungierte Erweiterungen zu erstellen.

**Beispiel 3.18.** Für den Minkowski Halbraum $H \simeq \widehat{H} = \{x \in \mathbb{R}^4, x_3 > 0\}$ mit $g_H \simeq g_{\mathbb{M}}|_{\widehat{H}}$ ergibt sich mit $\Sigma_H = \{x \in H |\, x_0 = 0\}$ eine abgeschlossene Hyperfläche, für die die Beziehung $\partial^2 u/\partial t^2 = -Au = (\Delta - m^2)u$ gilt. Damit verbunden, erhalten wir mit dem räumlichen Anteil des Klein-Gordon-Operators $-\Delta + m^2 = A$ einen positiven symmetrischen Operator auf dem Hilbertraum $L^2(\Sigma_H, d\mu_{\Sigma_H})$ der 3.17 erfüllt (siehe [12]). Der Definitionsbereich von $A$ ergibt sich dabei durch $C_0^\infty(\Sigma_H) \subset L^2(\Sigma_H, d\mu_{\Sigma_H})$. Ein Kriterium zur Bestimmung der selbstadjungierten Erweiterungen bildet, wie bereits erwähnt, die Randform $B(f,g) = (f, A^*g) - (A^*f, g)$. Damit ergibt sich für unseren Fall der Ausdruck:

$$\begin{aligned}
B(f,g) &= \int_{\Sigma_H} \bar{f}(-\Delta + m^2)g\, d^3\mathbf{x} - \int_{\Sigma_H} (-\Delta + m^2)\bar{f}g\, d^3\mathbf{x} \\
&= \int_{\Sigma_H} (\bar{f}(-\Delta g) - (-\Delta \bar{f})g)\, d^3\mathbf{x} \\
&= -\int_{\Sigma_H} (\bar{f}(\Delta g) - (\Delta \bar{f})g)\, d^3\mathbf{x} \\
&= -\int_{\partial\Sigma_H} ((\bar{f}(\mathrm{grad} g) - (\mathrm{grad}\bar{f})g), \mathbf{n}) d^2x \\
&= -\int_{\partial\Sigma_H} (\bar{f}(\partial_{x_3} g) - (\partial_{x_3}\bar{f})g) d(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Um eine Erweiterung von $A$ zu bilden, müssen nun zuerst die Defekträume $D_+$ und $D_-$ bestimmt werden. Dabei gewinnt man die quadratintegrablen Lösungen zum Operator $A^* \pm i$ über die Gleichungen $(-\triangle + m^2)f_\pm = \mp i f_\pm$ mit $f_\pm \in L^2(\Sigma_H, d\mu_{\Sigma_H})$. Als allgemeinen Lösungsansatz für $f_\pm$ findet man

$$f_\pm = \int dp_1 dp_2 \hat{f}(p_1, p_2) e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2) + kx_3}.$$

Mit

$$\begin{aligned}
(-\Delta + m^2) f_\pm &= \int dp_1 dp_2 \hat{f}(p_1, p_2)(-\Delta + m^2) e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2) + kx_3} \\
&= \int dp_1 dp_2 \hat{f}(p_1, p_2)(p_1^2 + p_2^2 - k^2 + m^2) e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2) + kx_3} \\
&= \pm i f_\pm
\end{aligned}$$

[16] Antiunitäre Abbildung $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $C(\mu f + \lambda g) = \bar{\mu} C f + \bar{\lambda} C g$ und $C^2 = \mathbb{1}$.

gewinnt man die Beziehung $p_1^2+p_2^2-k^2+m^2=\pm i$, die nach $k$ umgeformt, den Ausdruck

$$k=\pm\sqrt{\underbrace{m^2+p_1^2+p_2^2}_{h\in\mathbb{R}_+}-(\pm i)}$$

ergibt.
Durch arithmetische Umformungen erhält man für $k$ zwei mögliche Terme für $+i$ und zwei für $-i$.

$$k_+=\begin{cases}\frac{\sqrt{h+\sqrt{h^2+1}}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{h+\sqrt{h^2+1}}}i\\ -\frac{\sqrt{h+\sqrt{h^2+1}}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{h+\sqrt{h^2+1}}}i\end{cases}\qquad k_-=\begin{cases}\frac{\sqrt{h+\sqrt{h^2+1}}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{h+\sqrt{h^2+1}}}i\\ -\frac{\sqrt{h+\sqrt{h^2+1}}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{h+\sqrt{h^2+1}}}i\end{cases}$$

Dabei werden die jeweiligen ersten Terme zu $k_+$ und $k_-$ von unseren weiteren Betrachtungen ausgeschlossen, da sie zu divergenten Termen bei $x_3\to\infty$ und damit zu nicht quadratintegrablen Lösungen führen.
Das die anderen Terme zu quadratintegrablen Lösungen führen, ergibt sich durch direktes Nachrechnen.[17]

$$\begin{aligned}\|f_+\|^2 &= \int dp_{(1,2)}dq_{(1,2)}\hat{f}(p_1,p_2)\hat{f}(q_1,q_2)\int_{\Sigma_H}d^3\mathbf{x}e^{(k_+(\bar{p_1},p_2)+k_+(q_1,q_2))x_3+i((q_1-p_1)x_1+(q_2-p_2)x_2)}\\ &= 2\pi\int dp_{(1,2)}dq_{(1,2)}\hat{f}(p_1,p_2)\hat{f}(q_1,q_2)\int_0^\infty dx_3e^{(k_-(p_1,p_2)+k_+(q_1,q_2))x_3}\delta(q_1-p_1)\delta(q_2-p_2)\\ &= 2\pi\int dp_1dp_2|\hat{f}(p_1,p_2)|^2\int_0^\infty dx_3e^{2\mathrm{Re}(k_+(p_1,p_2)x_3)}.\end{aligned}$$

Mit $2\mathrm{Re}(k_+(p_1,p_2))=-2\frac{\sqrt{h+\sqrt{h^2+1}}}{\sqrt{2}}$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\|f_+\|^2 &= 2\pi\int dp_1dp_2|\hat{f}(p_1,p_2)|^2\int_0^\infty dx_3e^{-\sqrt{2}\sqrt{h+\sqrt{h^2+1}}x_3}\\ &= 2\pi\int dp_1dp_2\frac{|\hat{f}(p_1,p_2)|^2}{\sqrt{2}\sqrt{h+\sqrt{h^2+1}}}\\ \Rightarrow&\qquad \|f_+\|<\infty.\end{aligned}$$

Mögliche unitäre Abbildungen $U:D_+\to D_-$ ergeben sich hierbei durch die Vorschrift $f_+\mapsto\gamma f_-$ mit $\gamma\in\mathbb{C}$ und $|\gamma|=1$.[18] Mit $f=f_++e^{i\beta}f_-$, $e^{i\beta}=\gamma$ und

$$\begin{aligned}f|_{x_3=0} &= \int dp_1dp_2\hat{f}(p_1,p_2)(1+e^{i\beta})e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\\ (\partial_{x_3}f)|_{x_3=0} &= \int dp_1dp_2\hat{f}(p_1,p_2)(k_++e^{i\beta}k_-)e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\end{aligned}$$

[17] Die Rechnung zu $f_-$ ist analog und ergibt dasselbe Ergebnis
[18] Dabei sind dies bei weitem nicht alle.

ergeben sich für mögliche Erweiterungen in der Randform die Ausdrücke

$$\begin{aligned} B(f,g) &= -\int dx_1 dx_2 \Bigg( \int dp_1 dp_2 \hat{f}(p_1,p_2)(1+e^{-i\beta})e^{-i(p_1x_1+p_2x_2)}\partial_{x_3} g(x_1,x_2,0) \\ &- \int dp_1 dp_2 \hat{f}(p_1,p_2)(k_- + e^{-i\beta}k_+)e^{-i(p_1x_1+p_2x_2)} g(x_1,x_2,0)\Bigg) \\ &= -\int dp_1 dp_2 \hat{f}(p_1,p_2) \int dx_1 dx_2 [(1+e^{-i\beta})g'(x_1,x_2,0) \\ &- |k|(e^{-i\varphi}+e^{-i\beta+i\varphi})g(x_1,x_2,0)]e^{-i(p_1x_1+p_2x_2)}. \end{aligned}$$

Dabei findet man für die Randbedingungen $B(f,g)=0$ die hinreichende Beziehung

$$(1+e^{-i\beta})g'(x_1,x_2,0) - |k|(e^{-i\varphi}+e^{-i\beta+i\varphi})g(x_1,x_2,0) = 0,$$

die sich über

$$\begin{aligned} & (1+e^{-i\beta})g'(x_1,x_2,0) - |k|(e^{-i\varphi}+e^{-i\beta+i\varphi})g(x_1,x_2,0) \\ \Leftrightarrow\quad & (e^{i\frac{\beta}{2}-i\frac{\beta}{2}} + e^{-i\frac{\beta}{2}-i\frac{\beta}{2}})g'(x_1,x_2,0) - |k|(e^{i\frac{\beta}{2}-i\frac{\beta}{2}-i\varphi} + e^{-i\frac{\beta}{2}-i\frac{\beta}{2}+i\varphi})g(x_1,x_2,0) \\ \Leftrightarrow\quad & 2e^{-i\frac{\beta}{2}}\left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)g'(x_1,x_2,0) + |k|\cos\left(\varphi-\frac{\beta}{2}\right)g(x_1,x_2,0)\right) \end{aligned}$$

zu

$$g'(x_1,x_2,0) = |k| \underbrace{\frac{\cos(\varphi-\frac{\beta}{2})}{\cos(\frac{\beta}{2})}}_{=r} g(x_1,x_2,0))$$

umformen lässt. Dabei nimmt $r$ alle möglichen Werte aus $\mathbb{R}$ an, da $\varphi \neq 0$ ist. Die Randbedingung, die sich für $r=\infty$ ergibt, wird dabei durch $g(x_1,x_2,0)) = 0$ dargestellt und als *Dirichlet-Randbedingung* bezeichnet. Den für $r=0$ bestimmten Ausdruck $g'(x_1,x_2,0) = 0$ bezeichet man als *von Neumann-Randbedingung.*

Die Konstruktion selbstadjungierter Erweiterungen für eine Anti-de-Sitter-Raumzeit ist ein weitaus schwierigeres Unterfangen. Dies zeigt die Diskussion aus [13], die wir in unserer Arbeit ausführlich behandeln wollen.

**Beispiel 3.19.** Betrachtet man die Klein-Gordon-Gleichung bzgl. des AdS-Raumes mit der Metrik

$$\begin{aligned} g_{AdS} &= (1+\cot^2 u)(d\varphi\otimes d\varphi - du\otimes du) - \cot^2 u(d\theta\otimes d\theta + (\sin^2\theta)d\psi\otimes d\psi) \\ &= \frac{1}{\sin^2 u}(d\varphi\otimes d\varphi - du\otimes du - \cos^2 u\,\underbrace{(d\theta\otimes d\theta + (\sin^2\theta)d\psi\otimes d\psi)}_{=\gamma}, \end{aligned}$$

dann ergibt sich der Operator $A$ aus $\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\phi = -A\phi$ durch

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{\sin u}\tilde{\nabla}^k\left(\frac{1}{\sin u}\tilde{\nabla}_k\right) + m^2\frac{1}{\sin^2 u} \\ &= -\frac{1}{\sin u}\frac{1}{\sqrt{|h|}}\partial_j(\sqrt{|h|}\frac{1}{\sin u}h^{jk}\partial_k) + m^2\frac{1}{\sin^2 u} \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{2}{\sin u\cos u}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{\cos^2 u} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\partial_l(\sqrt{|\gamma|}\gamma^{lm}\partial_m)}_{=D^m D_m} + m^2\frac{1}{\sin^2 u}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch etwas vereinfachen, wenn man für Lösungen den Ansatz

$$\phi(\varphi, u, \theta, \psi) = r^{-1}\sum_{\mathbf{k}_S}\Phi_{\mathbf{k}_S}(\varphi, r)\mathbb{S}_{\mathbf{k}_S}(\theta, \psi)$$

wählt, wobei $r = \frac{\cos u}{\sin u}$.
$\mathbb{S}_{\mathbf{k}_S}$ erhält man aus dem auf $S^2$ definierten Differentialoperator $D^m D_m$. Da es sich bei $S^2$ um eine kompakte Mannigfaltigkeit handelt, besitzt $D^m D_m$, der einen von unten beschränkten,symmetrischen und elliptischen Differentialoperator auf $L^2(S^2)$ beschreibt, eine eindeutige selbstadjungierte Erweiterung (siehe [13]). Damit verbunden beschreiben die Operatoren $e^{-sD^m D_m}$ und $D^m D_m e^{-sD^m D_m}$, die sich über das Spektraltheorem darstellen lassen (siehe [10]), beschränkte und selbstadjungierte Operatoren für $s > 0$. Da $e^{-sD^m D_m}$ ebenfalls eine eine beschränkte Abbildung von $L^2(S^2)$ in den $m$-ten Sobolevraum $H_m$ auf $S^2$ beschreibt und damit als kompakte Abbildung charackterisiert werden kann, folgt damit die Tatsache, dass $e^{-sD^m D_m}$ einen kompakten Operator auf $L^2(S^2)$ darstellt. Aufgrund des Hilbert-Schmidt Theorems (siehe [10]) lässt sich zu diesem Operator eine orthonormale Basis von Eigenvektoren bestimmen, deren Eigenwerte als Folge gegen Null konvergieren. Damit verbunden ergibt sich stets ein diskretes Spektrum für $D^m D_m$, dessen Eigenwerte endlichdimensionale Eigenräume besitzen. Da $D^m D_m$ invariant unter den Operationen der Drehgruppe $SO(3)$ ist, folgt gleiches auch für deren Eigenräume. Wir erhalten so die Beziehungen

$$\begin{aligned} (D^m D_m + k_S^2)\mathbb{S}_{\mathbf{k}_S} &= 0 \quad \text{und} \\ \int_{S^2}\mathbb{S}_{\mathbf{k}_S}\mathbb{S}_{\mathbf{k}'_S} &= \delta_{\mathbf{k}_S\mathbf{k}'_S}. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte ergeben sich zu $k_S^2 = l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}_0$.
Mit diesen Hilfsmitteln gewinnen wir nun folgende Vereinfachung von $A$

$$\begin{aligned} A\phi(\varphi, u, \theta, \psi) &= Ar^{-1}\sum_{\mathbf{k}_S}\Phi_{\mathbf{k}_S}(\varphi, r)\mathbb{S}_{\mathbf{k}_S}(\theta, \psi) \\ &= \sum_{\mathbf{k}_S}\mathbb{S}_{\mathbf{k}_S}(\theta, \psi)\Bigg(\Bigg[-\frac{\partial^2}{\partial u^2}(r^{-1}\Phi_{\mathbf{k}_S}(\varphi, r)) + \frac{2}{\sin u\cos u}\frac{\partial}{\partial u}(r^{-1}\Phi_{\mathbf{k}_S}(\varphi, r)) \\ &+ r^{-1}\Phi_{\mathbf{k}_S}(\varphi, r)\frac{l(l+1)}{\cos^2 u} + \frac{m^2}{\sin^2 u}(r^{-1}\Phi_{\mathbf{k}_S}(\varphi, r))\Bigg]\Bigg) \\ &= -\sum_{\mathbf{k}_S}r^{-1}\mathbb{S}_{\mathbf{k}_S}(\theta, \psi)\Bigg(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{2+m^2}{\sin^2 u} - \frac{l(l+1)}{\cos^2 u})\Phi_{\mathbf{k}_S}(\varphi, r)\Bigg). \end{aligned}$$

Damit erhält man die Beziehung

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 u} - \frac{\sigma^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 u}\right)\Phi, \tag{3.1}$$

wobei $\nu^2 - \frac{1}{4} = 2 + m^2$ und $\sigma^2 - \frac{1}{4} = l(l+1)$ ergibt.
Unter Verwendung der bisher erreichten Aussagen versuchen wir nun die Defekträume für den Operator $A$ zu bestimmen. Dabei betrachten wir, wie bereits erwähnt, quadratintegrable Lösungen der Gleichung $(A^* \mp i)\Phi_\pm = 0$. Aus der Tatsache, dass sich für kompakte Mannigfaltigkeiten die Defekträume eines symmetrisch elliptischen Operators stets als trivial erweisen, (siehe [13] ) folgt das Kriterium der wesentlichen Selbstadjungiertheit für einen solchen Operator. Damit verbunden gewinnen wir die Einsicht, dass Elemente der Eigenräume zu $D^m D_m$ nicht zu den Defekträumen beitragen und diese damit allein aus der Beziehung 3.1 gewonnen werden.
Die Defekträume ergeben sich demnach über

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 u} + \frac{\sigma^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 u}\right)\Phi_\pm = \pm i\Phi_\pm. \tag{3.2}$$

Wir wollen uns vorher allerdings mit Lösungen zu allgemeineren Eigenwerten $\omega^2 \in \mathbb{C}$ von 3.2 beschäftigen.
Unter der Variablentransformation $z = \cos^2 u$ mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u^2} &= 2(\sin^2 u - \cos^2 u)\frac{\partial}{\partial(\cos^2 u)} + 4\cos^2 u \sin^2 u \frac{\partial^2}{\partial(\cos^2 u)^2} \\ &= 2(1-2z)\frac{\partial}{\partial z} + 4z(1-z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}$$

erhalten wir die Gleichung

$$\left(\underbrace{\left(z(1-z)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{(1-2z)}{2}\frac{\partial}{\partial z} - \omega^2\right)}_{\text{hypergeometrische Differentialgleichung}} - \frac{(\nu^2 - \frac{1}{4})z + (\sigma^2 - \frac{1}{4})(1-z)}{z(1-z)}\right)\Phi = 0$$

mit den allgemeinen Lösungen

$$\Phi = (\sin u)^{\nu+\frac{1}{2}}(\cos u)^{-\sigma+\frac{1}{2}}(B_1(\cos u)^{2\sigma}F(\zeta^{\omega}_{\nu,\sigma}, \zeta^{-\omega}_{\nu,\sigma}, 1+\sigma; \cos^2 u) + B_2(F(\zeta^{\omega}_{\nu,-\sigma}, \zeta^{-\omega}_{\nu,-\sigma}, 1-\sigma; \cos^2 u))), \tag{3.3}$$

die sich durch hypergeometrische Funktionen[19] der Form

$$\begin{aligned}{}_2F_1(a,b;c;z) &= 1 + \frac{ab}{1!c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}\end{aligned}$$

[19]Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung $z(1-z)\Phi'' + [c - (a+b+1)z]\Phi' - ab\Phi = 0$.

entwickeln lassen.[20] Dabei ist $B_1, B_2 \in \mathbb{C}$ und $\zeta^{\omega}_{\nu,\sigma}, \zeta^{-\omega}_{\nu,\sigma} \equiv \frac{\nu+\sigma+1+\omega}{2}$.
Einschränkungen ergeben sich aus dem asymtotischen Verhalten der Lösungen für $u \mapsto \frac{\pi}{2}$, was dem Ursprung der sphärischen Koordinaten in der AdS-Raumzeit entspricht. Für $\sigma \geqslant 1$ verlangt die Quadratintegrabilität der Lösungen, dass $B_2 = 0$ ist.[21] $\sigma = \frac{1}{2}$ dagegen erlaubt bei erster Betrachtung ein $B_2 \neq 0$, ohne dass die Quadratintegrabilität dabei verletzt wäre. Dies liegt allerdings an der künstlichen Entfernung des Ursprungs bei Anwendung von Kugelkoordinaten. Man erkennt, dass $B_2 \neq 0$ zu nicht quadratintegrablen Lösungen führt, wenn der Ursprung der Raumzeit wieder hinzugefügt wird. Durch die Wiedereinführung von kartesischen Koordinaten in den bekannten Ausdrücken lässt sich das Verhalten am Ursprung studieren, was in [13] explizit gezeigt wird.
Das Verhalten von $\Phi$ nahe dem Rand der Raumzeit, der sich für $u = 0$ ergibt, weist auf weitere Einschränkungen. Man findet dabei einen bequemeren Ausdruck, indem man das Argument $\cos^2 u$ zu $\sin^2 u$ transformiert. Damit gewinnt man den Lösungsausdruck

$$\begin{aligned}
\Phi &= B_1 (\sin u)^{\nu+\frac{1}{2}} (\cos u)^{\sigma+\frac{1}{2}} F(\zeta^{\omega}_{\nu,\sigma}, \zeta^{-\omega}_{\nu,\sigma}, 1+\sigma; \cos^2 u) \\
&= B_1 G_\nu(u) \Bigg( \frac{\Gamma(1+\sigma)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\zeta^{\omega}_{\nu,\sigma})\Gamma(\zeta^{-\omega}_{\nu,\sigma})} F(\zeta^{\omega}_{-\nu,\sigma}, \zeta^{-\omega}_{-\nu,\sigma}, 1-\nu; \sin^2 u) \\
&+ \frac{\Gamma(1+\sigma)\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\zeta^{\omega}_{-\nu,\sigma})\Gamma(\zeta^{-\omega}_{-\nu,\sigma})} (\sin u)^{2\nu} F(\zeta^{\omega}_{\nu,\sigma}, \zeta^{-\omega}_{\nu,\sigma}, 1+\nu; \sin^2 u) \Bigg)
\end{aligned}$$

mit $G_\nu(u) \equiv (\cos u)^{\sigma+\frac{1}{2}} (\sin u)^{-\nu+\frac{1}{2}}$ und $\nu \neq 0$ sowie $\nu \notin \mathbb{N}$.
Für $\nu \in \mathbb{N}$ erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}
\Phi &= B_1 G_\nu(u) \Bigg( \frac{\Gamma(1+\sigma)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\zeta^{\omega}_{\nu,\sigma})\Gamma(\zeta^{-\omega}_{\nu,\sigma})} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(\zeta^{\omega}_{-\nu,\sigma})_k (\zeta^{-\omega}_{-\nu,\sigma})_k}{k!(1-\nu)_k} (\sin u)^{2k} \\
&- -\frac{(-1)^\nu \Gamma(1+\sigma)}{\Gamma(\zeta^{\omega}_{-\nu,\sigma})\Gamma(\zeta^{-\omega}_{-\nu,\sigma})} (\sin u)^{2\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta^{\omega}_{\nu,\sigma})_k (\zeta^{-\omega}_{\nu,\sigma})_k}{k!(\nu+k)!} (\sin u)^{2k} [\log(\sin^2 u) \\
&- \psi(k+1) - \psi(k+\nu+1) + \psi(\zeta^{\omega}_{\nu,\sigma}+k) + \psi(\zeta^{-\omega}_{\nu,\sigma}+k)] \Bigg),
\end{aligned}$$

die für $\nu = 0$ durch

$$\begin{aligned}
\Phi &= B_1 G_0(u) \frac{\Gamma(1+\sigma)}{\Gamma(\zeta^{\omega}_{0,\sigma})\Gamma(\zeta^{-\omega}_{0,\sigma})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta^{\omega}_{0,\sigma})_k (\zeta^{-\omega}_{0,\sigma})_k}{(k!)^2} (\sin u)^{2k} \\
&\quad (2\psi(k+1) - \psi(\zeta^{\omega}_{0,\sigma}+k) - \psi(\zeta^{-\omega}_{0,\sigma}+k) - \log(\sin^2 u))
\end{aligned}$$

gegeben ist. Es gilt dabei $(\zeta)_k = \frac{\Gamma(\zeta+k)}{\Gamma(\zeta)}$ sowie $\psi(z) = \frac{d}{dz}\log\Gamma(z)$.
Für $\nu \geqslant 1$ ergibt sich aus der Beziehung für $\nu \notin \mathbb{N}$ und $\nu \in \mathbb{N}$ nur dann eine quadratintegrable Lösung, wenn $\omega \in \mathbb{R}$ in der Form $\omega = \mp(2p+1+\nu+\sigma)$, $l \in \mathbb{N}_0$ vorhanden ist. Dieses

[20] Die Reihe konvergiert für $c \in \mathbb{N}$ und $|z| < 1$, sowie für $|z| = 1$ mit $[c-a-b] > 0$. Die Objekte $(a)_n$ bezeichnet man dabei als *Pochhammer-Symbole*.

[21] $(\cos u)^{-\sigma+\frac{1}{2}}$ kann für die Gleichung 3.3 nicht kompensiert werden.

Verhalten ergibt sich durch $G_\nu(u)$. Da $G_\nu(u)$ mit $\nu \geqslant 1$ für $u \to 0$ divergiert, kann im ersten Term der Lösung dieses Verhalten nur durch die divergierenden Terme der Gammafuntionen im Nenner kompensiert werden. Dabei muss allerdings $\zeta^{\omega}_{\nu,\sigma}$ oder $\zeta^{-\omega}_{\nu,\sigma}$ aus $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ sein, was auf die obige Beziehung bzgl. $\omega$ führt. Durch das damit verbundene Verschwinden der ersten Terme in den Gleichungen zu $\nu \notin \mathbb{N}$ und $\nu \in \mathbb{N}$ erhält man nun quadratintegrable Lösungen.
In unserem Fall war $\nu$ durch $\nu = \frac{\sqrt{8+4m^2-1}}{2} \geqslant 1$ gegeben. Da sich die Defekt-Räume aber nur durch quadratintegrable Lösungen für $\omega^2 = \pm ai (a \in \mathbb{R})$ ergeben, folgt damit die Existenz einer eindeutigen selbstadjungierten Erweiterung. Die Dynamik des Klein-Gordon-Operators ist in diesem Fall schon ohne Einführung weiterer Randbedingungen wohldefiniert.
Für den abgewandelten Klein-Gordon-Operator $(\Box_g + m^2 - \xi R)\phi = 0$ der die Skalarkrümmung $R$ berücksichtigt, die für den AdS-Raum einen Betrag von $R = -12$ hat, gewinnen wir auch Werte von $\nu$ die kleiner als Eins sind. Betrachten wir für diesen Fall Lösungen zu $0 < \nu < 1$, dann ergeben sich quadratintegrable Lösungen für alle $\omega \in \mathbb{C}$ und auch für den Fall $\nu = 0$ ist dies gewährleistet. $\nu < 0$ bildet dabei einen Sonderfall, da für diese Werte die Positivität des Operators $A$ nicht mehr gegeben ist (siehe [13]). Aufgrund der Verwendung in Abschnitt 3.5 wollen wir uns nur mit den vorherigen Fällen von $\nu$ beschäftigen.
Da sich aus der Eigenwertgleichung mit $\omega^2 = \pm 2i$ nur exakt eine linearunabhängige Lösung ergibt, die die Regularitätsbedingung am Ursprung erfüllt, gewinnen wir damit 1-dimensionale Defekträume $D_+$ und $D_-$( zum Operator $2A$)[22] von und damit verbunden

$$U_\beta \Phi_+ = e^{i\beta}\Phi_-, \quad \beta \in (-\pi, \pi]$$

als einzig mögliche partielle Isometrien. Mit den Elementen $\Phi_\beta \equiv \Phi_+ + e^{i\beta}\Phi_-$, die sich für $0 < \nu < 1$ durch

$$\Phi_\beta \propto G_\nu(u)\{a_\nu + b_\nu(\sin u)^{2\nu} + c_\nu(\sin u)^2 + \dots\}$$

ergeben, erhalten wir die ersten beiden Koeffizienten durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
a_\nu &= -\frac{2e^{i\frac{\beta}{2}}\Gamma(1+\sigma)\Gamma(\nu)}{|\zeta^{-(1+i)}_{\nu,\sigma}||\Gamma(\zeta^{-(1+i)}_{\nu,\sigma})|^2}\sin\left(\frac{\beta}{2} - \theta_{+\nu}\right) \\
b_\nu &= -\frac{2e^{i\frac{\beta}{2}}\Gamma(1+\sigma)\Gamma(-\nu)}{|\zeta^{-(1+i)}_{-\nu,\sigma}||\Gamma(\zeta^{-(1+i)}_{-\nu,\sigma})|^2}\sin\left(\frac{\beta}{2} - \theta_{-\nu}\right) = a_{-\nu}
\end{aligned}$$

wobei $\zeta^{(1+i)}_{\nu,\sigma} = \zeta^{-(1+i)*}_{\nu,\sigma} + 1$, $\zeta^{(1-i)}_{\nu,\sigma} = \zeta^{-(1+i)}_{\nu,\sigma} + 1$ und $\zeta^{-(1-i)}_{\nu,\sigma} = \zeta^{-(1+i)*}_{-\nu,\sigma}$ sowie $\sin\theta_{\pm\nu} \equiv \frac{\pm\nu+\sigma}{\sqrt{1+(\pm\nu+\sigma)^2}}$ mit $\theta_{\pm\nu} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gegeben ist.
Für $\nu = 0$ ergibt sich

$$\Phi_\beta \propto G_0(u)\{a_0 \log(\sin^2 u) + b_0 + c_0(\sin^2 u)\log(\sin^2 u) + \dots$$

[22] Der Gebrauch von $\pm 2i$ und $2A$ anstelle von $\pm i$ und $A$ führt zu keinen wesentlichen veränderungen der Ergebnisse und dient nur zur Bequemlichkeit.

mit den ersten beiden Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{2e^{i\frac{\beta}{2}}\Gamma(1+\sigma)}{|\zeta_{0,\sigma}^{-(1+i)}||\Gamma(\zeta_{0,\sigma}^{-(1+i)})|^2}\sin\left(\frac{\beta}{2}-\theta_0\right) \\
b_0 &= -\frac{2e^{i\frac{\beta}{2}}\Gamma(1+\sigma)}{|\zeta_{0,\sigma}^{-(1+i)}||\Gamma(\zeta_{0,\sigma}^{-(1+i)})|^2}(2\cos^2\theta_0\cos\left(\frac{\beta}{2}-\theta_0\right) \\
&+ \quad +2\{\gamma+\mathrm{Re}(\psi(\zeta_{0,\sigma}^{-(1+i)}))+\sin\theta_0\cos\theta_0\}\sin\left(\frac{\beta}{2}-\theta_0\right)),
\end{aligned}$$

wobei $\gamma$ die Eulerzahl bezeichnet und $\sin\theta_0 \equiv \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}$ zu $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$ bestimmt ist.
Aus der Betrachtung von $\frac{b_\nu}{a_\nu}$, wobei $\nu$ und $\sigma$ fixiert bleiben, sieht man, dass dieser Faktor allein von $\beta$ abhängig ist und durch Variation jeden Wert aus $\mathbb{R}$ sowie $-\infty$ und $\infty$ erreichen kann. Dies allein wird durch den Term $\frac{\sin(\frac{\beta}{2}-\theta_{-\nu})}{\sin(\frac{\beta}{2}-\theta_{+\nu})}$ verursacht, der durch $\theta_{+\nu} \neq \theta_{-\nu}$ jeden Wert von $\mathbb{R}$ durchläuft, wenn man $\beta \in (-\pi, \pi]$ variiert. Da die selbstadjungierten Erweiterungen allein und direkt durch die partiellen Isometrien bestimmt werden, lässt sich damit durch Fixierung von $\beta$ eine eindeutige Wahl einer selbstadjungierten Erweiterung treffen, wobei desgleichen (aufgrund der Beziehung zwischen $\beta$ und $\frac{b_\nu}{a_\nu}$) auch für eine Fixierung von $\frac{b_\nu}{a_\nu}$ erfüllt ist. Dies sieht man besonders gut für den Fall $\nu = \frac{1}{2}$, in dem

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\Phi_\beta/\partial u}{\Phi_\beta}\right|_{u=0} &= \left.\frac{b_{1/2}\cos u + 2c_{1/2}\sin u\cos u + \dots}{a_{1/2} + b_{1/2}\sin u + c_{1/2}(\sin^2 u) + \dots}\right|_{u=0} \\
&= \frac{b_{1/2}}{a_{1/2}}
\end{aligned}$$

ergibt.
Mit $\frac{b_{1/2}}{a_{1/2}} = \pm\infty$ erhält man damit die bekannte Dirichlet-Randbedingung $\Phi_\beta|_{u=0} = 0$ und für $\frac{b_{1/2}}{a_{1/2}} = 0$ die von Neumann-Randbedingung $\frac{\partial}{\partial u}\Phi_\beta|_{u=0} = 0$. Die zu $\frac{b_{1/2}}{a_{1/2}} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gewonnen Beziehungen werden als Robin-Randbedingungen bezeichnet.
Für den Fall $\nu \neq \frac{1}{2}$ sind die Ausdrücke $\frac{\partial\Phi_\beta/\partial u}{\Phi_\beta}$ für $u \to 0$ nicht länger wohldefiniert. Da für $0 < \nu < 1$ allerdings bei $u \to 0$, der Term $G_\nu^{-1}\Phi_\beta$ hauptsächlich durch $a_\nu$ und $\partial(G_\nu^{-1}\Phi_\beta)/\partial u$ haupsächlich durch $b_\nu$ dominiert wird, erhält man für $a_\nu = 0$ den Begriff der verallgemeinerten Dirichlet-Randbedingung sowie für $b_\nu = 0$ den der verallgemeinerten von Neumann-Randbedingung. Die restlichen Randbedingungen werden als verallgemeinerte Robin-Randbedingungen bezeichnet.
Bei $\nu = 0$ ist allerdings das dominante Verhalten von $G_0^{-1}\Phi_\beta$ und $\partial(G_\nu^{-1}\Phi_\beta)/\partial u$ für $u \to 0$ allein durch $a_0$ gegeben, was bei $a_0 = 0$ zu simultanen verallgemeinerten Dirichlet- und von Neumann-Randbedingungen führt.

## 3.5 Das Cauchy-Problem für statische Raumzeiten

Nach [14] sowie Lemma 3.4 erhält man für Cauchy-Daten $(f, f') \in C_0^\infty(K) \oplus C_0^\infty(K)$ stets eine Lösung $u \in C^\infty(\mathcal{M}_\mathcal{B})$ der Differentialgleichung $\partial^2 u/\partial t^2 = -Au$ durch die Wahl einer *positiven* selbstadjungierten Erweiterung auf der nichtglobalhyperbolischen statischen Raumzeit. Für Lösungen dieser Art erhalten wir wie bisher $\rho_{0,K}u = u|_K = f$ und $\rho_{1,K}u = v^a\nabla_a u|_K = f'$. Da sich $A$ über einen Operator auf $L^2(K, d\mu_K)$ darstellen lässt, gewinnt man nach [15] eine analoge Beziehung zur Klein-Gordon-Gleichung über die Operatorgleichung $d^2u/dt^2 = -Au$ in $L^2(K, d\mu_K)$. Die Lösungen von $d^2u/dt^2 = -Au$ in $L^2(K, d\mu_K)$ lassen sich dabei über das Spektraltheorem nach [10] konstruieren, das uns erlaubt stetige Funktionen (im Sinne von Borelfunktionen) von selbstadjungierten Operatoren zu definieren. Es liefert uns damit speziell für unseren Fall eine Lösung über die Beziehung

$$u(t) = \underbrace{f_t}_{=\rho_{0,K_t}u} = \cos(\sqrt{A_E}t)f + (\sqrt{A_E})^{-1}\sin(\sqrt{A_E}t)f',$$

die sich durch die selbstadjungierte Erweiterung des Operators $A$ überhaupt erst formulieren lässt.[23] Bei $\cos(\sqrt{A_E}t)$ sowie $(\sqrt{A_E})^{-1}\sin(\sqrt{A_E}t)$ handelt es sich um beschränkte Operatoren, die über das Spektraltheorem definiert sind.[24]

*Bemerkung* 3.20. Nicht in jedem Fall lässt sich eine "positive" selbstadjungierte Erweiterung zum Operator $A$ konstruieren, wie der Fall $\nu < 0$ für den AdS-Raum aus dem letzten Abschnitt verdeutlicht hat. Mögliche Lösungen können also in diesen Beispielen nicht über den hier angewendeten Ansatz gefunden werden.

Speziell für diesen Fall von Lösungen der Differentialgleichung $d^2u/dt^2 = -Au$, lässt sich die symplektische Form analog zum globalhyperbolischen Fall durch

$$\sigma_K((f,f'),(g,g')) = \int_K (gf' - g'f)\sqrt{g_{00}}dK$$

für Cauchy-Daten $(f,f'),(g,g') \in C_0^\infty(K) \oplus C_0^\infty(K)$ ausdrücken. Dies beruht auf der Möglichkeit, $K$ als Cauchy-Fläche einer globalhyperbolischen Teilmenge von $(\mathcal{M}_\mathcal{B}, g_{\mathcal{M}_\mathcal{B}})$ nach Satz 3.6 zu betrachten.[25]

In Analogie zum globalhyperbolischen Fall, lässt sich eine Lösung $u$ im nichtglobalhyperbolischen statischen Fall auch durch die Beziehung $u = E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{f}$ beschreiben ($\hat{f} \in C_0^\infty(\mathcal{M}_\mathcal{B})$). Dabei sind diese Fundamentallösungen im Gegensatz zum globalhyperbolischen Fall, wie schon in der Vorbetrachtung erwähnt, im Allgemeinen nicht eindeutig definiert. Allerdings kann man bei statischen Raumzeiten die Nichteindeutigkeit auf die Freiheit in der Wahl der selbstadjungierten Erweiterung des Operators $A$ zurückführen, was wir im folgenden zeigen wollen.

Betrachten wir die Lösung $E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{f}$ mit Cauchy-Daten $(f_s, f'_s) \in C_0^\infty(K_s) \oplus C_0^\infty(K_s)$, so er-

[23] $\rho_{1,K_t}u$ ergibt sich analog durch $f'_t = \dot{f}_t$, und $K_t$ ist durch $\{t\} \times K$ definiert.

[24] $\| (\sqrt{A_E})^{-1}\sin(\sqrt{A_E}t) \| \leq |t|$ und $\| \cos(\sqrt{A_E}t) \| = 1$

[25] Durch $K^{\perp\perp} \subset \mathcal{M}_\mathcal{B}$ ist in diesem Fall stets eine mögliche Wahl einer globalhyperbolischen Untermannigfaltigkeit gegeben.

halten wir $E_{\mathcal{M_B}}\hat{f} = E_{\mathcal{M_B}}\rho'_{0,s}f'_s - E_{\mathcal{M_B}}\rho'_{1,s}f_s$,[26] und

$$\begin{aligned}
\rho_{0,t}E_{\mathcal{M_B}}\hat{f} &= \cos(\sqrt{A_E}(t-s))f_s + (\sqrt{A_E})^{-1}\sin(\sqrt{A_E}(t-s))f'_s \\
&= \cos(\sqrt{A_E}(t-s))\rho_{0,s}E_{\mathcal{M_B}}\hat{f} + (\sqrt{A_E})^{-1}\sin(\sqrt{A_E}(t-s))\rho_{1,s}E_{\mathcal{M_B}}\hat{f} \\
&= ((\sqrt{A_E})^{-1}\sin(\sqrt{A_E}(t-s))\rho_{1,s} + \cos(\sqrt{A_E}(t-s))\rho_{0,s})E_{\mathcal{M_B}}\hat{f}.
\end{aligned}$$

Beschreibt man die Lösung $E_{\mathcal{M_B}}\hat{f}$ über den Integralkern von $E_{\mathcal{M_B}}$ mit

$$\begin{aligned}
E_{\mathcal{M_B}}\hat{f} &= \int_{\mathcal{M_B}=\mathbb{R}\times K} E_{\mathcal{M_B}}(x,y)\hat{f}(y)d\mathcal{M_B} \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_K E_{\mathcal{M_B}}(t,\mathbf{x};s,\mathbf{y})\hat{f}(s,\mathbf{y})\sqrt{g_{00}}(\mathbf{y})dK\right)ds \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_K \rho_{0,t}E_{\mathcal{M_B}}\rho'_{0,s}\hat{f}(s)\sqrt{g_{00}}dK\right)ds,
\end{aligned}$$

dann erhält man unter Verwendung von Korollar 3.2 die Beziehung

$$\begin{aligned}
E_{\mathcal{M_B}}\hat{f} &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_K ((\sqrt{A_E})^{-1}\sin(\sqrt{A_E}(t-s)) \underbrace{\rho_{1,s}E_{\mathcal{M_B}}\rho'_{0,s}}_{=1 \text{ nach Lemma 3.4}}\right. \\
&+ \left.\cos(\sqrt{A_E}(t-s)) \underbrace{\rho_{0,s}E_{\mathcal{M_B}}\rho'_{0,s}}_{=0 \text{ nach Lemma 3.4}}) \underbrace{\hat{f}(s)}_{\in C_0^\infty(K_s)} \sqrt{g_{00}}dK\right)ds \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_K (\sqrt{A_E})^{-1}\sin(\sqrt{A_E}(t-s))\hat{f}(s)\sqrt{g_{00}}dK\right)ds,
\end{aligned}$$

wodurch die Existenz begründet ist. Der Integralkern, den wir nach [16] als **Kommutatorfunktion** bezeichnen, wird dabei durch den Ausdruck

$$E_{\mathcal{M_B}}(t,\mathbf{x};s,\mathbf{y}) = (\sqrt{A_E})^{-1}\sin(\sqrt{A_E}(t-s))(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

wiedergegeben.

Die Nichteindeutigkeit der Fundamentallösung $E_{\mathcal{M_B}}$ ergibt sich demnach aus der Freiheit in der Wahl der selbstadjungierten Erweiterung $A_E$, die sich nach Lemma 3.13 allein durch Randbedingungen fixieren lassen.

Der Ausdruck der Kommutatorfunktion lässt sich allerdings auf eine etwas bequemere Form umgestalten. Dabei erweist sich sich die Definition von verallgemeinerten Orthonormalbasen sowie die Darstellung des Spektraltheorems über projektionswertige Maße als ein hilfreiches Mittel.

Gemäß [17] erhalten wir die Definition:

**Definition 3.21.** Sei $\mathcal{D}$ eine dichter Teilraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$, dann lässt sich über dem Dualraum $\mathcal{D}'$ von $\mathcal{D}$, unter Verwendung der Beziehung $\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$ (*Gelfandsches Raumtripel*), ein kontinuierliches (verallgemeinertes) Orthonormalsystem über eine Familie von linearen Funktionalen $\phi_k \in \mathcal{D}'$, $k \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einem Maß$\mu$ auf $\mathbb{R}^n$ mit supp$\mu = \Omega$ und $d\mu(k) = f(k)dk$, ($f$ ist integrierbar) definieren. Dabei müssen die Bedingungen

[26] Diese Zerlegung von $E_{\mathcal{M_B}}$ ist nach 3.4 gültig, da man Cauchy-Daten mit kompakten Träger verwendet.

- $c(k) = (\phi_k, \psi)$ ist stetig auf $\Omega$, $\forall \psi \in \mathcal{D}$.
- $(\psi, \varphi) = \int dk c(k)(\phi_k, \varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$.
- Sei $c(k)$ stetig und $\int dk |c|^2 < \infty$, dann folgt daraus, dass ein $\psi \in \mathcal{D}$ existiert mit $c(k) = (\phi_k, \psi)$.

erfüllt sein, die sich andererseits auch durch die Vollständigkeitsrelationen $\int dx \phi_k(x)^* \phi_{k'}(x) = \delta(k-k')$ und $\int dk \phi_k(x) \phi_k(x')^* = \delta(x-x')$ ausdrücken lassen.

Der Nutzen dieser Definition ergibt sich in der Konstruktion von orthogonalen Projektoren[27] $P$ über verallgemeinerte Orthonormalsysteme $(\phi_k)$ bzgl. $(\Omega, \mu, \mathcal{D})$ im Sinne von

$$P_G = \int_G d\mu(k) \phi_k (\phi_k, \cdot)$$

mit $G \subset \Omega$ (messbare Menge ).
Betrachten wir nämlich die schwachen Eigenvektoren eines Operators $A$ mit dichtem Definitionsbereich $\mathcal{D}$, die sich ebenfalls über Linearformen $\phi \in \mathcal{D}'$ ergeben und die Bedingung $(\phi, A^*\psi) = \overline{a}(\phi, \psi)$, $\forall \psi \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}(A^*)$, $A^*\psi \in \mathcal{D}$ erfüllen, wobei $a \in \mathbb{C}$ gilt, dann erlangt man im Falle von selbstadjungierten Operatoren $A$ nach dem Spektraltheorem (siehe [10]) stets eine verallgemeinerte Orthonormalbasis $(\phi_k)_{(\Omega,\mu,\mathcal{D})}$ von schwachen Eigenvektoren $\phi_k$ zu schwachen Eigenwerten $a(k)$.[28] Diese Eigenschaft, verbunden mit der Darstellung des Spektraltheorems über projektionswertige Maße, erlaubt uns desweiteren für eine reellwertige Borelfunktion $g$ auf $\mathbb{R}^n$, den Operator $g(A)$ durch die Form

$$\begin{aligned} g(A) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(k) dP_k \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d\mu(k)\, g(k) \phi_k (\phi_k, \cdot) \end{aligned}$$

auszudrücken.
Mit diesen Vorraussetzungen lässt sich nun der Integralkern von $E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}$ durch

$$\int d\mu(k) \omega(k)^{-1} \sin(\omega(k)(t-s)) \phi_k(x) \phi_k(y)^*$$

mit $\omega(k)^2$ als schwachem Eigenwert zum schwachen Eigenvektor $\phi_k$ von $A_E$ darstellen.[29]
Als Beispiel wollen wir den Minkowski-Halbraum $H$ mit seiner selbstadjungierten Erweiterung von $A = -\Delta + m^2$ zu Dirichlet-Randbedingungen betrachten.

*Bemerkung* 3.22. Dies ist in diesem Fall möglich, da $A$ einen positiven Operator beschreibt, deren selbstadjungierte Erweiterung bzgl. Dirichlet-Randbedingungen der Friedrichserweiterung entspricht (siehe [11]).

---

[27] Selbstadjungierte Operatoren die auf ganz $\mathcal{H}$ definiert sind und $P^2 = P$ erfüllen.
[28] $a$ bildet dabei eine stetige reellwertige Funktion auf $\Omega$.
[29] $\mathcal{D}$ wird in diesem Fall durch $C_0^\infty(K) \subset L^2(K, d\mu_K)$ gegeben.

**Beispiel 3.23.** Die schwachen Eigenvektoren von $A_E$ ergeben sich dabei durch die Lösung von $(-\Delta + m^2)\phi = \omega^2\phi$ mit $\phi(\mathbf{x})|_{x_3=0} = 0$. Durch Seperation der Variablen gewinnt man mit $\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\sqrt{2}\sin(p_3x_3)$ einen allgemeinen Ausdruck der Lösung, die die Randbedingung erfüllt. Dabei ergeben sich die schwachen Eigenwerte durch $\omega^2(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 + m^2$, und deren schwachen Eigenvektoren $\phi_{\mathbf{p}}$ erfüllen die Vollständigkeitsrelation

$$\begin{aligned}\int d^3\mathbf{p}\, \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{y})^* &= (2\pi)^{-3}\int d^3\mathbf{p}\, e^{i(p_1(x_1-y_1)+p_2(x_2-y_2))}2\sin(p_3x_3)\sin(p_3y_3) \\ &= \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\end{aligned}$$

Mit dem Maß $d\mu_{\mathbf{p}} = d^3\mathbf{p}$ lässt sich damit die Kommutatorfunktion durch

$$\begin{aligned}E_{H_D}(t,\mathbf{x};s,\mathbf{y}) &= -\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})}\sin(\omega(\mathbf{p})(t-s))\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{y})^* \\ &= -\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})}\sin(\omega(\mathbf{p})(t-s))e^{i\mathbf{p}_\perp(\mathbf{x}-\mathbf{y})_\perp}2\sin(p_3x_3)\sin(p_3y_3)\end{aligned}$$

realisieren.

Im Folgenden versuchen wir nun weitere allgemeine Aussagen über $E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}$ zu finden.
Für eine Lösung $v$ der Differentialgleichung mit Cauchy-Daten $(g,g') \in C_0^\infty(K) \oplus C_0^\infty(K)$ folgt nach [15], dass auch $\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t}$ mit den Cauchy-Daten $(\dot{g} = g', \ddot{g} = -Ag) \in C_0^\infty(K) \oplus C_0^\infty(K)$ eine Lösung beschreibt.
Damit erhält man einen wohldefinierten Ausdruck für die symplektische Form

$$\begin{aligned}\sigma((f,f'),(\dot{g},\ddot{g})) &= \int_{K_t}(\dot{g}f_t' - \ddot{g}f_t)\sqrt{g_{00}}dK_t \\ &= \int_{K_t}(g'f_t' + Agf_t)\sqrt{g_{00}}dK_t \\ &= (\hat{f}, \partial_t(E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{g}))_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}.\end{aligned}$$

Betrachten wir nun eine beliebige Lösung $u = E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(\hat{f})$ mit $\hat{f} \in C_0^\infty(\mathcal{M}_\mathcal{B})$, dann folgt über eine Zerlegung der Eins, wie in Abschnitt 3.2 eingeführt, die Formulierung:

$$E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{f} = \sum_{i\in\underline{n}} E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(\hat{f}\chi_i) = \sum_{i\in\underline{n}} E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\rho'_{0,K_{t_i}}(f_i') - E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\rho'_{1,K_{t_i}}(f_i).$$

Für eine symplektische Form $\sigma_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}$ erhält man damit im Allgemeinen die Beziehung:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{f}, E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{g}) &= (\hat{f}, E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{g})_{\mathcal{M}_\mathcal{B}} \\ &= (\sum_{i\in\underline{n}}\hat{f}\chi_i, E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\sum_{j\in\underline{m}}\hat{g}\tilde{\chi}_j)_{\mathcal{M}_\mathcal{B}} \\ &= \sum_{i\in\underline{n}}\sum_{j\in\underline{m}}(\hat{f}\chi_i, E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{g}\tilde{\chi}_j)_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}.\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Zeittranslation $\psi_t$, die als Fluss des zeitartigen Killing-Vektorfeldes definiert ist und eine einparametrige Gruppe von isometrischen Abbildungen bildet, ergibt sich eine Wirkung dieser Abbildungen für unsere Lösungen durch

$$\psi_{t*}(E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(\hat{h})) := E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(\hat{h} \circ \psi_t^{-1}).$$

Aufgrund der Zeittranslationsinvarianz der symplektischen Form nach [15], die sich durch

$$\sigma_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(\psi_{t*}(E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{f}), \psi_{t*}(E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{g})) = \sigma_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{f}, E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{g})$$

ausdrücken lässt, ergibt sich als Resultat dieser Symmetrie das Vermögen, die einzelnen Summanden bzgl. einer einzigen gewählten abgeschlossenen Hyperfläche $K = K_0$ zu betrachten.
Für alle $i \in \underline{n}$ und $j \in \underline{m}$ ergeben sich für $E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(\hat{f}\chi_i)$ mit $(f_{\chi_i}, f'_{\chi_i}) \in C_0^\infty(K_{t_i}) \oplus C_0^\infty(K_{t_i})$ und $E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(\hat{g}\tilde{\chi}_j)$ mit $(g_{\tilde{\chi}_j}, g'_{\tilde{\chi}_j}) \in C_0^\infty(K_{t_j}) \oplus C_0^\infty(K_{t_j})$ mögliche Cauchy-Daten mit kompakten Träger .
Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{f}, E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{g}) &= \sum_{i\in\underline{n}}\sum_{j\in\underline{m}}(\rho_{0,K_{t_j}}E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(\hat{f}\chi_i), \rho_{1,K_{t_j}}E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(\hat{g}\tilde{\chi}_j))_{K_{t_j}} \\
&- (\rho_{1,K_{t_j}}E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(\hat{f}\chi_i), \rho_{0,K_{t_j}}E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(\hat{g}\tilde{\chi}_j))_{K_{t_j}} \\
&= \sum_{i\in\underline{n}}\sum_{j\in\underline{m}}(\rho_{0,K}E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}((\hat{f}\chi_i)\circ\psi_{-t_j}^{-1}), \rho_{1,K}E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}((\hat{g}\tilde{\chi}_j)\circ\psi_{-t_j}^{-1}))_K \\
&- (\rho_{1,K}E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}((\hat{f}\chi_i)\circ\psi_{-t_j}^{-1}), \rho_{0,K}E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}((\hat{g}\tilde{\chi}_j)\circ\psi_{-t_j}^{-1}))_K \\
&= \sum_{i\in\underline{n}}\sum_{j\in\underline{m}}(\rho_{0,K}E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}((\hat{f}\chi_i)\circ\psi_{t_j}), g'_{\tilde{\chi}_j})_K - (\rho_{1,K}E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}((\hat{f}\chi_i)\circ\psi_{t_j}), g_{\tilde{\chi}_j})_K.
\end{aligned}$$

Die symplektische Form lässt sich demnach über die Analogie in $L^2(K, d\mu_K)$ durch die Beziehung

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}(E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{f}, E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{g}) &= \sum_{i\in\underline{n}}\sum_{j\in\underline{m}}\int_K (\cos(\sqrt{A_E}(t_i - t_j))f_{\chi_i} + (\sqrt{A_E})^{-1}\sin(\sqrt{A_E}(t_i - t_j))f'_{\chi_i})g'_{\tilde{\chi}_j} \\
&\quad -(-\sqrt{A_E}\sin(\sqrt{A_E}(t_i - t_j))f_{\chi_i} + \cos(\sqrt{A_E}(t_i - t_j))f'_{\chi_i})g_{\tilde{\chi}_j}\sqrt{g_{00}}dK \\
&= \int_K \sum_{i\in\underline{n}}\sum_{j\in\underline{m}}\cos(\sqrt{A_E}(t_i - t_j))(f_{\chi_i}g'_{\tilde{\chi}_j} - f'_{\chi_i}g_{\tilde{\chi}_j}) \\
&\quad +(\sqrt{A_E})^{-1}\sin(\sqrt{A_E}(t_i - t_j))(f'_{\chi_i}g'_{\tilde{\chi}_j} + (A_E f_{\chi_i})g_{\tilde{\chi}_j})\sqrt{g_{00}}dK
\end{aligned}$$

ausdrücken, wobei $f_{\chi_i}, f'_{\chi_i}$ und $g_{\tilde{\chi}_j}, g'_{\tilde{\chi}_j}$ in dieser Darstellung allein aus $C_0^\infty(K)$ gewonnen werden können.
Damit erhalten wir einen expliziten Ausdruck der symplektischen Form für jegliche Lösung $E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}\hat{f}$, $\forall \hat{f} \in C_0^\infty(\mathcal{M}_\mathcal{B})$ über Cauchy-Daten aus $C_0^\infty(K) \oplus C_0^\infty(K)$, was uns zeigt, dass sich für statische Raumzeiten aufgrund der Zeittranslationsinvarianz der symplektischen Struktur die gesamte Dynamik über eine abgeschlossene topologische Hyperfläche $K$ aus $\mathcal{M}_\mathcal{B}$ entwickeln lässt.

# Kapitel 4

# Algebraischer Zugang zur Quantentheorie

In der üblichen Formulierung der Quantentheorie geht man bei der Konstruktion von einem ausgezeichneten Hilbertraum $\mathcal{H}$ aus. In diesem Raum kann man den Begriff des Zustands durch normierte Vektoren bestimmen.[1] Messbare Grössen (**Observablen**) lassen sich in diesem Zusammenhang über Operatoren $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definieren, die sich durch lineare Abbildungen auf $\mathcal{H}$ ergeben und über die Zustände lassen sich diese Operatoren durch Bildung des Erwartungswertes (siehe [17]) komplexen Zahlen zuordnen.
Bei der algebraischen Formulierung der Quantentheorie geht man allerdings in umgekehrter Reihenfolge vor. Bei diesem Ansatz betrachtet man im Vordergrund die Observablen, die sich durch Elemente einer abstrakten Algebra $\mathcal{A}$ beschreiben lassen. Der Algebra zugehörig wird dabei der Begriff des Zustands definiert. Diese Objekte werden durch ihre Wirkung, Elemente der Algebra komplexe Zahlen zuordnen zu können, charakterisiert.[2]
Der Vorteil des algebraischen Ansatzes liegt nun darin, das alle möglichen Zustände beachtet werden können. Selbst Zustände zu unitär nicht äquivalenten Darstellungen (siehe [18]) der Algebra werden in einem Rahmen behandelt. Dabei bleibt die algebraische Struktur bzgl. der verschiedenen Darstellungen unverändert.
Der algebraische Ansatz umfasst einen wesentlich grösseren Rahmen, als der ursprüngliche und verlangt, dass sich allein aus der Observablen-Algebra[3] und ihren Darstellungen alle physikalisch messbaren Informationen eines Systems gewinnen lassen.

## 4.1 $C^*$-Algebren

Die zentralen Objekte des algebraischen Formalismus stellen die Observablen-Algebren dar. Deshalb wollen wir in diesem Abschnitt einige wesentliche Begriffe der algebraischen Quantentheorie einführen. Die Definitionen wurden dabei zum grössten Teil aus [19],[20] und [21]

[1] Verallgemeinerte Zustände lassen sich auch als Dichtematrizen auf $\mathcal{H}$ auffassen.
[2] Dies entspricht der Bildung von Erwartungswerten.
[3] Algebren der physikalisch messbaren Grössen.

entnommen.

**Definition 4.1.** Bei einer assoziativen Algebra handelt es sich um einen (komplexen) Vektorraum $\mathcal{A}$, auf dem ein Produkt (bilineare Abbildung) durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\times\mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A}\\ (A,B) &\mapsto AB\ \forall A,B\in\mathcal{A}\end{aligned}$$

definiert ist. Das Produkt erfüllt dabei die Assoziativität

$$(AB)C = A(BC) =: ABC\ \forall A,B,C\in\mathcal{A}.$$

**Definition 4.2.** Eine Algebra $\mathcal{A}$ mit einer Involution[4]

$$\begin{aligned}{}^*:\mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A}\\ A &\mapsto A^*,\end{aligned}$$

wird $^*$-Algebra genannt. Hat diese Algebra $\mathcal{A}$ ein 1-Element $\mathbb{1}$, so bezeichnet man sie als *unitale* $^*$-Algebra.[5]

Eine für unsere Betrachtungen nützliche Klasse von Algebren bilden die Banach $^*$-Algebren. Diese Algebra bildet sich über den Abschluss einer normierten[6] assoziativen $^*$-Algebra $\mathcal{A}$, die die Ungleichung $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|\ \forall A,B\in\mathcal{A}$ erfüllt und die Beziehung $\|A^*\| = \|A\|$ für alle Elemente $A$ des Abschlusses beinhaltet. Aus dieser algebraischen Struktur gewinnen wir die Definition einer C$^*$-Algebra.

**Definition 4.3.** Eine Banach$^*$-Algebra mit der Bedingung $\|AA^*\| = \|A\|^2$ für alle $A\in\mathcal{A}$ bezeichnet man als $C^*$-Algebra

Bei der Algebra der beschränkten Operatoren $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ handelt es sich um eine solche C$^*$-Algebra. Deswegen wollen wir uns im Wesentlichen mit diesen Objekten beschäftigen.

Eine weitere wichtige Definition bzgl. einer $^*$Algebra (C$^*$-Algebra), die wir für unsere Betrachtungen benötigen, ist durch die folgende gegeben.

**Definition 4.4.** Eine $^*$-Unteralgebra[7] $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ bezeichnet man als (beidseitiges) $^*$-**Ideal**, wenn $AB, BA\in\mathcal{B}\ \forall\, A\in\mathcal{A}$ und $B\in\mathcal{B}$ gilt.

Um nun von den abstrakten C$^*$-Algebren zurück zu den Operatoralgebren zu gelangen, die in unserem Fall über $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ gegeben sind, braucht man den Begriff der Darstellung einer C$^*$-Algebra. In der Vorbetrachtung muss man allerdings noch erwähnen, was einen $^*$-Algebrenhomomorphismus definiert.

[4]Dabei gelten die Regeln: $(\lambda A+\mu B)^* = \bar{\lambda}A^* + \bar{\mu}B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$ und $(A^*)^* = A$ für alle $A,B\in\mathcal{A}$ und $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$

[5]dabei gilt $\mathbb{1}A = A\mathbb{1} = A\ \forall A\in\mathcal{A}$

[6]Die Algebra besitzt eine Norm $\|\cdot\|$.

[7]Eine Unteralgebra mit der Bedingung: sei $B\in\mathcal{B}$, dann ist ebenfalls $B^*\in\mathcal{B}$

**Definition 4.5.** Eine Abbildung $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen zwei C*-Algebren bezeichnet man als *-Algebrenhomomorphismus, wenn für $\pi$ die Forderungen:

1. $\pi$ ist linear und multiplikativ: $\pi(\lambda A + \mu B) = \lambda\pi(A) + \mu\pi(B)$ und $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
2. Es gilt $\pi(A^*) = \pi(A)^*$ für alle $A \in \mathcal{A}$

erfüllt sind.
Desweiteren folgen aus dieser Definition die Bedingungen:

1. $\pi$ ist stetig, d.h. $\|\pi(A)\| \leq \|A\|$ für alle $A \in \mathcal{A}$
2. $\pi$ ist positiv, d.h. $\forall\ A \geq 0$ gilt $\pi(A) \geq 0$.

Aus der letzten Aussage folgt, dass das Bild $\pi(\mathcal{A})$ eine C*-Unteralgebra von $\mathcal{B}$ ergibt und der Kern $\mathrm{Ker}(\pi) = \{A \in \mathcal{A}, \pi(A) = 0\}$ ein *-Ideal von $\mathcal{A}$ beschreibt.

Aus dieser Konstruktion gewinnt man nun den Übergang zu den Operatoralgebren.

**Definition 4.6.** Eine Darstellung einer C*-Algebra wird durch ein Paar $(\mathcal{H}, \pi)$ gegeben, wobei $\mathcal{H}$ einen (komplexen) Hilbertraum und $\pi$ einen *-Algebrenhomomorphismus von $\mathcal{A}$ in die C*-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ charakterisiert. Die Darstellung bezeichnet man dabei *treu*, wenn $\pi$ einen *-Algebrenisomorphismus auf sein Bild $\pi(\mathcal{A})$ beschreibt, d.h. $\mathrm{Ker}(\pi) = \{0\}$.

Die Algebren, die wir verwenden wollen, haben treue, *irreduzible* und *zyklische* Darstellungen $(\mathcal{H}, \pi)$. Der Begriff der Irreduzibilität folgt dabei aus der Definition des invarianten Teilraums, der einen abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ von $(\mathcal{H}, \pi)$, den alle Darsteller $\pi(A)$ mit $A \in \mathcal{A}$ auf sich abbilden, beschreibt.
Ist $\mathcal{F}$ ein invarianter Teilraum von $(\mathcal{H}, \pi)$, dann ist das Orthokomplement $\mathcal{F}^\perp$ ebenfalls ein invarianter Teilraum, womit die Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$ sich als die direkte Summe der beiden Teildarstellungen $(\mathcal{F}, \pi|_\mathcal{F})$ und $(\mathcal{F}^\perp, \pi|_{\mathcal{F}^\perp})$ erzeugen lässt, d.h. die Darstellung ist *reduzibel.*
Daraus ergibt sich die Definition für die Irreduzibilität:

**Definition 4.7.** Eine Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$ heisst irreduzibel, wenn die einzigen invarianten Teilräume $\{0\}$ und $\mathcal{H}$ sind.

**Definition 4.8.** Ein Tripel $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ heisst zyklische Darstellung einer C*-Algebra $\mathcal{A}$, wenn $(\mathcal{H}, \pi)$ eine Darstellung beschreibt und $\{\pi(A)\Omega, A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{H}$ sich als eine dichte Teimenge von $\mathcal{H}$ ergibt ($\pi$ ist zyklisch).

Um Messwerte über die Operatoren der Observablen-Algebra zu erlangen, muss man diesen reelle Zahlen zuordnen können. Dabei spielt der Begriff des Zustands eine wichtige Rolle.

## 4.2 Zustände und GNS-Konstruktion

Zustände fasst man im Allgemeinen als lineare Funktionale einer $C^*$-Algebra auf. Dabei geht man vom topologischen Dualraum einer $C^*$-Algebra aus, d.h. der Raum aller stetigen linearen Funktionale $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ auf $\mathcal{A}$ mit der Norm $\|\omega\| = sup_{\|A\|=1}|\omega(A)|$.

**Definition 4.9.** Bei einem Zustand handelt es sich um ein positives lineares Funktional $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ auf der $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$, für das $\|\omega\| = 1$ ist. Dabei ergibt sich der Begriff der Positivität für einen Zustand über die beiden äquivalenten Aussagen:

1. $\omega$ ist positiv, wenn $\omega(AA^*) \geq 0 \;\; \forall A \in \mathcal{A}$.
2. $\omega \in \mathcal{A}^*$ und $\|\omega\| = \omega(\mathbb{1})$.

Die Menge der Zustände einer $C^*$-Algebra bezeichnet man mit $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Dabei handelt es sich um eine konvexe[8] Teilmenge von $\mathcal{A}^*$.

**Beispiel 4.10.** Für die C*-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ der beschränkten Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, definiert jeder Spurklasse Operator $\rho$ ein positives Funktional über

$$\begin{aligned} \omega_\rho : \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\to \mathbb{C} \\ A &\mapsto \omega_\rho(A) := tr(\rho A), \end{aligned}$$

wobei $\|\omega_\rho\| = tr(\rho)$. Bei einem Zustand gilt dabei $tr(\rho) = 1$.[9]

Nutzen wir die Eigenschaft, dass $(\mathcal{H}, \pi)$ eine zyklische Darstellung der C*-Algebra $\mathcal{A}$ beschreibt, dann kann man Zustände durch normierte Vektoren $\Omega \in \mathcal{H}$ definieren. Das entsprechende Funktional ist dabei durch den Ausdruck $\omega_\Omega(A) = (\Omega, \pi(A)\Omega)$ gegeben. Nach der $GNS$-Konstruktion kann man jeden Zustand durch diese Form ausdrücken.

**Satz 4.11.** *Ist $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra und $\omega$ ein Zustand, dann existiert eine bis auf Unitäräquivalenz eindeutige zyklische Darstellung $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$. Eine solche Darstellung bezeichnet man als $GNS$-Darstellung des Zustands $\omega$, wobei $\omega(A)$ über die Beziehung $\omega(A) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega) \;\; \forall A \in \mathcal{A}$ gegeben ist.*

(Siehe Beweis in [19])

Eine für das nächste Kapitel wesentliche Definition für Zustandsmengen ist die des *Foliums* einer Zustandsmenge $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

**Definition 4.12.** Ein Folium $\mathcal{F}$ ist eine normabgeschlossene Teilmenge einer Zustandsmenge $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, deren Zustände $\omega$ die Bedingung:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(A_i^* A_i) = 1 \;\Rightarrow\; A \mapsto \sum_{i=1}^{n} \omega(A_i^* A A_i) \in \mathcal{F}$$

erfüllen, wobei $A_i \in \mathcal{A}$, $\forall i \in \underline{n}$ gilt.

Z.B. bei den Zustandsmengen $\mathcal{S}_\pi(\mathcal{A}) := \{\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) | \exists \rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi),\, \rho \geq 0,\, tr\rho = 1 \,\mathrm{mit}\, \omega(A) = tr\rho\pi(A) \;\forall A \in \mathcal{A}\}$ die sich durch Dichtematrizen $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ definieren lassen, handelt es sich um Folien (Die wir in unserem Fall mit $\mathcal{S}_\pi(\mathcal{A}) =: \mathbf{F}(\pi)$ bezeichnen wollen[10]).

[8] für $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ gilt stets $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ wenn $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ und $\lambda + \mu = 1$ ist.

[9] $\rho$ bezeichnet man in diesem Sinne als Dichtematrix.

[10] Im nächsten Kapitel verwenden wir nämlich diese Notation um Verwechslungen zu vermeiden.

# Kapitel 5

# Das allgemein kovariante Lokalitätsprinzip

Das allgemein kovariante Lokalitätsprinzip behandelt ein verallgemeinertes Konzept zur Beschreibung von algebraischen Quantenfeld-Strukturen auf gobalhyperbolischen Raumzeiten. Dabei gewinnt man durch lokale Betrachtung des Prinzips der allgemeinen Kovarianz aus der allgemeinen Relativitätstheorie einen Rahmen für eine lokale kovariante Quantenfeldtheorie. Durch eine Einschränkung der Betrachtung allein auf den Minkowskiraum als globalhyperbolische Raumzeit kann man dabei sogar die Haag-Kastler Axiome der lokalen Quantenphysik zurückgewinnen.

## 5.1 Quantenfeldtheorien als kovariante Funktoren

Der Aufbau dieses Abschnitts wird nach [1] durchgeführt und durch Konzepte der Kategorientheorie, aus Anhang A unterstützt.

Das Prinzip der allgemeinen Kovarianz aus der allgemeinen Relativitätstheorie, das besagt, dass physikalische Grössen nicht einzelnen Raumzeitpunkten zugeordnet sind, sondern für diese nur im Zusammenhang mit einer lokalen Umgebung bestimmt werden können, wird in unserem Fall durch den kategorientheoretischen Ansatz wiedergegeben.[1] Man betrachtet dabei die Kategorie $\mathfrak{Man}$, die aus einer Klasse $Obj(\mathfrak{Man})$ von Objekten und der dazugehörigen Klasse von Morphismen $Mor(\mathfrak{Man})$ zu diesen Objekten gegeben ist. Dabei handelt es sich bei den Objekten um vierdimensionale, globalhyperbolische, orientierte und zeitorientierte Raumzeiten $(\mathcal{M}, g)$, die bereits im ersten Abschnitt eingehend behandelt wurden.
Für zwei Objekte $(\mathcal{M}_1, g_1), (\mathcal{M}_2, g_2)$ dieser Kategorie erhalten wir die Morphismen $\psi \in hom_{\mathfrak{Man}}((\mathcal{M}_1, g_1), (\mathcal{M}_2, g_2))$ über isometrische Einbettungen, die die Orientierung und Zeitorientierung erhalten und die Raumzeit $(\mathcal{M}_1, g_1)$ nach $(\mathcal{M}_2, g_2)$ abbilden. Eine weitere wesentliche Eigenschaft dieser Morphismen ergibt sich dabei durch die Forderung, dass für eine beliebige kausale Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathcal{M}_2$ mit $\gamma(a), \gamma(b) \in \psi(\mathcal{M}_1)$ stets die gesamte Kurve in

[1] Es gibt keine ausgezeichneten Raumzeit Punkte. Physikalische Größen lassen sich immer nur in der relativen Beziehung der Ereignispunkte zueinander bestimmen.

der Bildmenge $\psi(\mathcal{M}_1)$ enthalten sein muss.
Ebenfalls gilt das Kompositions-Gesetz bzgl. der Abbildungen, das wir im Anhang A definiert haben.

Für die Beschreibung der Quantenfeldtheorie führen wir desweiteren die Kategorie $\mathfrak{Alg}$ ein, deren Objekte $Obj(\mathfrak{Alg})$ durch C*-Algebren bzw. *-Algebren mit Einheitselement gegeben sind. Die Morphismen $Mor(\mathfrak{Alg})$ erhält man dabei durch treue (injektive) einheitserhaltende *-Homomorphismen. Für zwei Objekte $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ beschreibt $\alpha \in hom_{\mathfrak{Alg}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ eine derartige Abbildung. Auch in diesem Fall gilt das Kompositions-Gesetz.

Die Struktur der allgemeinen Kovarianz lässt sich nun durch einen Funktor $A$ zwischen den Kategorien realisieren. Wir übernehmen aus [1] die Definition:

**Definition 5.1.** Eine *lokal kovariante Quantenfeldtheorie* ist ein kovarianter Funktor $A$ zwischen den Kategorien $\mathfrak{Man}$ und $\mathfrak{Alg}$ der die Beziehung

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}, g) & \xrightarrow{\psi} & (\mathcal{M}', g') \\ {\scriptstyle A}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle A} \\ A(\mathcal{M}, g) & \xrightarrow[\alpha_\psi]{} & A(\mathcal{M}', g') \end{array}$$

mit der Kovarianzbedingung bzgl. der Algebren

$$\alpha_{\psi'} \circ \alpha_\psi = \alpha_{\psi' \circ \psi} \text{ und } \alpha_{id_\mathcal{M}} = id_{A(\mathcal{M},g)}$$

für alle Morphismen $\psi \in hom_{\mathfrak{Man}}((\mathcal{M}_1, g_1), (\mathcal{M}_2, g_2))$ und $\psi' \in hom_{\mathfrak{Man}}((\mathcal{M}_2, g_2), (\mathcal{M}_3, g_3))$ und allen $(\mathcal{M}, g) \in Obj(\mathfrak{Man})$ erfüllt. Dabei gelten die Beziehungen:

- Eine lokal kovariante Quantenfeldtheorie, die durch einen kovarianten Funktor $A$ beschrieben wird, ist *kausal*, wenn folgende Bedingung gilt:
  Sind $\psi_1(\mathcal{M}_1)$ und $\psi_2(\mathcal{M}_2)$ bzgl. der Morphismen $\psi_i \in hom_{\mathfrak{Man}}((\mathcal{M}_i, g_i), (\mathcal{M}, g))$,$i = 1, 2$ kausal unabhängig in $(\mathcal{M}, g)$, dann erhält man

  $$[\alpha_{\psi_1}(A(\mathcal{M}_1, g_1)), \alpha_{\psi_2}(A(\mathcal{M}_2, g_2))] = \{0\},$$

  wobei $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \{AB - BA : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ mit $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ als C*-Algebren.

- Eine lokale kovariante Quantenfeldtheorie gegeben durch einen kovarianten Funktor $A$, gehorcht dem **Zeitschicht-Axiom** wenn:

  $$\alpha_\psi(A(\mathcal{M}, g)) = A(\mathcal{M}', g')$$

  für alle $\psi \in hom_{\mathfrak{Man}}((\mathcal{M}, g), (\mathcal{M}', g'))$ gilt, deren Bildmenge $\psi(\mathcal{M})$ eine Cauchy-Fläche von $(\mathcal{M}', g')$ enthält.

Die oben erwähnte Kausalität ist in dem Sinne erforderlich, da messbare Grössen, die auf raumartig getrennten Teilgebieten lokalisiert sind, (die sich durch Darstellungen der Algebrenelemente ergeben) unabhängig voneinander agieren.
Das Zeitschicht-Axiom, was auch als *starke Einstein Kausalität* bezeichnet wird, weist dagegen auf die Existenz eines kausalen dynamischen Gesetzes hin. Dies ergibt sich aus einer algebraischen Formulierung des Anfangswertproblems, welches besagt, dass die Algebra der Observablen einer globalhyperbolischen Raumzeit schon durch die Observablenalgebra einer beliebig kleinen Umgebung einer Cauchy-Fläche bestimmt ist. Diesbezüglich lässt sich eine Abhängigkeit der lokalisierten messbaren Grössen von ihrer kausalen Vergangenheit definieren.

Aus dieser Konstruktion lassen sich sogar die Regeln der algebraischen Quantenfeldtheorie zurückgewinnen.

**Lemma 5.2.** *Sei $A$ ein kovarianter Funktor mit den Eigenschaften nach Def.5.1, dann kann man eine Abbildung $\mathcal{K}(\mathcal{M},g) \ni \mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O}) \subset A(\mathcal{M},g)$ definieren mit*

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) := \alpha_{\mathcal{M},\mathcal{O}}(A(\mathcal{O},g_{\mathcal{O}}))$$

*wobei $\alpha_{\mathcal{M},\mathcal{O}} \equiv \alpha_{i_{\mathcal{M},\mathcal{O}}}$.*
*Desweiteren folgt:*

- *Die Abbildung erfüllt die Isotonie-Bedingung*

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \;\Rightarrow\; \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2) \quad \forall \mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{M},g)$$

- *Existiert eine Gruppe $G$ isometrischer Diffeomorphismen $\kappa : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ mit $\kappa_* g_{\mathcal{M}} = g_{\mathcal{M}}$, wobei Orientierung und Zeitorientierung beibehalten werden, dann gibt es eine Darstellung der Gruppe $G$ mit $\kappa \mapsto \alpha_\kappa$. Dabei handelt es sich bei $\alpha_\kappa$ um einen $C^*$-Algebren Automorphismus $\alpha_\kappa : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, wobei $\mathcal{A}$ die minimale $C^*$-Algebra erzeugt durch die Menge $\{\mathcal{A}(\mathcal{O}) : \mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{M},g_{\mathcal{M}})\}$ beschreibt (Siehe Def. 5.3), woraufhin*

$$\alpha_\kappa(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \mathcal{A}(\kappa(\mathcal{O}))$$

  *folgt.*

- *Für die Theorie, die durch $A$ gegeben ist, gilt*

$$[\mathcal{A}(\mathcal{O}_1),\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)] = \{0\}$$

  *$\forall \mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{M},g)$, wenn $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ kausal unabhängig sind.*

- *Gehorcht $A$ dem Zeitschicht Axiom und sei $\Sigma$ eine Cauchy-Fläche in $(\mathcal{M},g)$, wobei $S \subset \Sigma$ eine offene und zusammenhängende Teilmenge der Cauchy-Fläche ist, dann gilt für jedes $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{M},g)$ mit $S \subset \mathcal{O}$*

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) \supset \mathcal{A}(S^{\perp\perp}).$$

  *$S^{\perp\perp}$ steht für das kausale Komplement von $S$, welches in $\mathcal{K}(\mathcal{M},g)$ enthalten ist.*

Beweise zu den einzelnen Bedingungen findet man in [1].

Um einzelne Elemente der Algebren speziell auszuzeichnen, führen wir nun die Definition von Quantenfeldern in diesem Zusammenhang ein, wofür wir allerdings weitere Kategorien definieren müssen.

**Definition 5.3.** Die Kategorie $\mathfrak{Test}$ enhält als Objekte $Obj(\mathfrak{Test})$ alle möglichen Testfunktionenräume über $\mathfrak{Man}$, d.h. Die Objekte bestehen aus allen $C_0^\infty(\mathcal{M})$ Räumen, wobei $(\mathcal{M}, g)$ in $\mathfrak{Man}$ liegt.
Die Morphismen $Mor(\mathfrak{Test})$ sind durch alle möglichen *push-forwards* $\psi_*$ von isometrischen Einbettungen $\psi : (\mathcal{M}_1, g_1) \to (\mathcal{M}_2, g_2)$ gegeben und erfüllen die Bedingung

$$\psi_*(f) = f \circ \psi^{-1} \in \psi_*(C_0^\infty(\mathcal{M}_1)) \qquad \forall f \in C_0^\infty(\mathcal{M}_1).$$

Da es sich um Räume von Funktionen mit kompakten Träger handelt, besteht stets die Möglichkeit, für deren isometrische Morphismen Umkehrabbildungen (durch Fortsetzen mit 0 auf dem Komplement des Bildraumes) zu definieren.

**Definition 5.4.** Bei der Kategorie $\mathfrak{TAlg}$ handelt es bei den Objekten $Obj(\mathfrak{TAlg})$ um topologische $^*$-Algebren mit Einheitselement, wobei die Morphismen $Mor(\mathfrak{TAlg})$ durch stetige $^*$-Endomorphismen $\alpha \in hom_{\mathfrak{TAlg}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ gegeben sind.
Dabei ist $\alpha : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ ein einheitserhaltender injektiver $^*$-Homomorphismus.

Unsere lokale kovariante Quantenfeldtheorie $A$ ist in diesem Sinne bzgl. $\mathfrak{Man}$ und $\mathfrak{TAlg}$ definiert.
Bei $D$ handelt es sich um einen kovarianten Funktor zwischen den Kategorien $\mathfrak{Man}$ und $\mathfrak{Test}$ und zwar wird dabei jedem $(\mathcal{M}, g) \in Obj(\mathfrak{Man})$ ein Testfunktionenraum $C_0^\infty(\mathcal{M})$ und jeder Abbildung $\psi \in \mathfrak{Man}$ der dazugehörige *push-forward* $D(\psi) = \psi_*$ zugeordnet.
Um dies zu ermöglichen betrachtet man die Kategorien $\mathfrak{Test}$ und $\mathfrak{TAlg}$ als Unterkategorien der Kategorie der topologischen Räume $\mathfrak{Top}$.

Mit diesen Bedingungen kann man nun Quantenfelder definieren.

**Definition 5.5.** Eine *lokales kovariantes Quantenfeld* $\varphi$ ist eine natürliche Transformation zwischen den Funktoren $D$ und $A$, die zu jedem Objekt $(\mathcal{M}, g)$ in $\mathfrak{Man}$ ein Morphismus $\varphi_{(\mathcal{M},g)} : D(\mathcal{M}, g) \to \mathcal{A}(\mathcal{M}, g)$ in $\mathfrak{Top}$ definiert, wodurch für jeden Morphismus $\psi \in hom_{\mathfrak{Man}}((\mathcal{M}_1, g_1), (\mathcal{M}_2, g_2))$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} D(\mathcal{M}_1, g_1) \arrow[r, "\varphi_{(\mathcal{M}_1,g_1)}"] \arrow[d, "\psi_*"'] & A(\mathcal{M}_1, g_1) \arrow[d, "\alpha_\psi"] \\ D(\mathcal{M}_2, g_2) \arrow[r, "\varphi_{(\mathcal{M}_2,g_2)}"'] & A(\mathcal{M}_2, g_2) \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Die Kovarianz der Quantenfelder ist dabei über

$$\alpha_\psi \circ \varphi_{(\mathcal{M}_1,g_1)} = \varphi_{(\mathcal{M}_2,g_2)} \circ \psi_*$$

gegeben.

Zum Abschluss wollen wir noch den Begriff des Zustands in diesem Formalismus einführen um die Betrachtung abzurunden. Dabei gehen wir in dieses Gebiet nicht allzu detailiert vor. Eine präzisere Behandlung findet man in [1]. In der Vorbetrachtung muss dabei eine weitere Kategorie eingeführt werden

**Definition 5.6.** Bei $\mathfrak{Sts}$ handelt es sich um die Kategorie der Zustandsmengen. Dabei beschreibt $S \in Obj(\mathfrak{Sts})$ eine Zustandmenge auf einer C*-Algebra $\mathcal{A}$. Die Morphismen zuzüglich dieser Kategorie zwischen $S, S' \in Obj(\mathfrak{Sts})$ werden dabei durch positive Abbildungen $\gamma^* : S' \to S$ gegeben. In unserer Betrachtung ergibt sich $\gamma^*$ als duale Abbildung eines treuen C*-Algebrenhomomorphismuses $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ mit:

$$\gamma^* \omega'(A) = \omega'(\gamma(A))$$

für $\omega' \in S', A \in \mathcal{A}$. In diesem Sinne bezeichnet man die Kategorie $\mathfrak{Sts}$ als *dual* zu $\mathfrak{Alg}$.

Aus dieser Definition erhält man nun die darauffolgende für einen *Zustandsraum*(nach [1]).

**Definition 5.7.** Als Voraussetzung dient dabei der Funktor $A$, der eine lokal kovariante Quantenfeldtheorie beschreibt.
Ein *Zustandraum* einer lokal kovarianten Quantenfeldtheorie $A$ ist ein kontravarianter Funktor $S$ zwischen $\mathfrak{Man}$ und $\mathfrak{Sts}$, der durch das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}, g) & \xrightarrow{\psi} & (\mathcal{M}', g') \\ {\scriptstyle S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S} \\ S(\mathcal{M}, g) & \xleftarrow[\alpha_\psi^*]{} & S(\mathcal{M}', g') \end{array}$$

beschrieben wird. Dabei ist $S(\mathcal{M}, g)$ als Menge von Zuständen zu $A(\mathcal{M}, g)$ zugehörig und $\alpha_\psi^*$ als die duale Abbildung zu $\alpha_\psi$ gegeben.
die Abbildungen erfüllen dabei die Kontravarianzbedingung:

$$\alpha^*_{\tilde{\psi} \circ \psi} = \alpha^*_\psi \circ \alpha^*_{\tilde{\psi}}$$

und $\alpha^*_{id_\mathcal{M}} = id_{S(\mathcal{M},g)}$.

Als weitere Bedingungen ergeben sich dabei:

- Ein Zustandsraum $S$ wird als lokal quasi-äquivalent bezeichnet, wenn für jedes Paar von Zuständen $\omega, \tilde{\omega} \in S(\mathcal{M}, g)$ (bzw. deren GNS-Darstellungen $\pi, \tilde{\pi}$) für alle $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{M}, g)$ die Relation
$$\mathbf{F}(\pi \circ \alpha_{\mathcal{M}\mathcal{O}}) = \mathbf{F}(\tilde{\pi} \circ \alpha_{\mathcal{M}\mathcal{O}})$$
besteht.
- Einen Zustandsraum $S$ bezeichnet man als lokal normal, wenn es einen lokal quasi-äquivalenten Zustandsraum $\tilde{S}$ gibt, sodass für jedem Zustand $\omega \in S(\mathcal{M}, g)$ ein Zustand

$\tilde{\omega} \in \tilde{S}(\mathcal{M}, g)$ (mit jeweils zugeordneten GNS-Darstellungen $\pi$, $\tilde{\pi}$) existiert und $\omega$ lokal normal zu $\tilde{\omega}$ ist, indem Sinne dass

$$\omega \circ \alpha_{\mathcal{M}\mathcal{O}} \in \mathbf{F}(\tilde{\pi} \circ \alpha_{\mathcal{M}\mathcal{O}})$$

für alle $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{M}, g)$ gilt.

- Ein Zustandsraum $S$ ist "intermediate factorial", wenn jeder Zustand $\omega \in S(\mathcal{M}, g)$ die Bedingung der "intermediate factoriality" erfüllt, d.h. für alle $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{M}, g)$ mit den von Neumann Algebren $\mathfrak{N}_\omega(\mathcal{O}) = \pi_\omega(\alpha_{\mathcal{M}\mathcal{O}}(A(\mathcal{O}, g_\mathcal{O})))''$ existiert zu jedem $\mathcal{O}$ eine Region $\mathcal{O}_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{M}, g)$ und eine faktorielle von Neumann Algebra $\mathfrak{N}$, die auf dem GNS-Hilbertraum $\mathcal{H}_\omega$ agiert, sodass

$$\mathfrak{N}_\omega(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_\omega(\mathcal{O}_1)$$

gilt (siehe [1]).

## 5.2 CCR- und Weyl-Algebren als Beispiele von Quantenfeldtheorien

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit *CCR*- und *Weyl*-Algebren als spezielle Beispiele von Quantenfeldtheorien. Dabei versuchen wir neben den einführenden Definitionen eine Beziehung zwischen den klassischen Lösungsräumen $\mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_\mathcal{M})$ der Klein-Gordon-Gleichung und den algebraischen Strukturen herzustellen und die damit auftretenden Analogien zum allgemein kovarianten Lokalitätsprinzip auszuarbeiten.
Wie bereits erwähnt wollen wir uns allerdings vorerst mit den grundlegenden Definitionen befassen.

**Definition 5.8.** Sei $V$ ein reeller Vektorraum mit einer nichtentarteten reellen antisymmetrischen Bilinearform $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$,[2] dann bildet die unitale *-Algebra, die aus den Elementen von V generiert wird und die Relationen

- $[f, g] = i\sigma(f, g)\mathbb{1}$
- $f^* = f \quad \forall f, g \in V$

erfüllt, die *-Algebra der kanonischen Vertauschungsrelationen "**CCR-Algebra**".

*Bemerkung* 5.9. Im weiteren Verlauf wollen wir die Äquivalenzklassen aus $V$ bzgl. der Relationen mit $\Phi(f)$, $f \in V$ bezeichnen.

Bei der CCR-Algebra handelt es sich allerdings um eine *-Algebra. Eine C*-Algebra, die sich mit der algebraischen Struktur der CCR-Algebra vereinbaren lässt, gewinnt man dagegen durch die **Weyl-Algebra**. Diese wiederum erhält man über einen reellen symplektischen Vektorraum $(V, \sigma)$ und dessen zugeordnetem *Weyl-System*.

[2] symplektische Form zum symplektischen Vektorraum $V$.

**Definition 5.10.** Ein Weyl-System von einem symplektischen Raum $(V, \sigma)$ besteht aus einer unitalen C*-Algebra $\mathcal{A}$ und einer Abbildung $W : V \to \mathcal{A}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $v, w \in V$ die Relationen

- $W(0) = \mathbb{1}$
- $W(-v) = W(v)^*$
- $W(v)W(w) = e^{\frac{-i}{2}\sigma(v,w)}W(v+w)$

erfüllt sind.

(Definition nach [9])
Die Weyl-Algebra ergibt sich dabei durch die C*-Algebra, die durch die Elemente $W(v), v \in V$ generiert wird.
Betrachtet man nun die Kategorie $\mathfrak{Sym}$,[3] deren Objekte durch symplektische Räume $(V, \sigma)$ gegeben werden, dann findet man einen funktoriellen Zusammenhang zwischen dieser Kategorie und der Kategorie der C*-Algebren $\mathfrak{Alg}$, indem man den symplektischen Räumen $(V, \sigma)$ Weyl-Algebren $\mathcal{W}(V, \sigma)$ zuordnet.

$$\begin{array}{ccc}
(V,\sigma) & \xrightarrow{\varrho} & (V',\sigma') \\
\mathcal{W}\big\downarrow & & \big\downarrow\mathcal{W} \\
\mathcal{W}(V,\sigma) & \xrightarrow[\mathcal{W}(\varrho)]{} & \mathcal{W}(V',\sigma')
\end{array}$$

Das gleiche gilt für CCR-Algebren. In diesem Fall ergibt sich der Funktor $\mathfrak{C}$ zwischen der Kategorie $\mathfrak{Sym}$ und der Kategorie $\mathfrak{Alg}$ der unitalen *-Algebren.

Eine der wesentlichsten Eigenschaften von CCR- und Weyl-Algebren ist deren Einfachheit. Diese besagt, dass sich keine weiteren nichttrivialen Ideale in einer CCR- bzw. Weyl-Algebra finden lassen. Im Falle von Weyl-Algebren finden wir dazu einen Beweis in [20]. Für den Fall von CCR-Algebren wollen wir dies selbst durchführen:

*Beweis.* Sei $\mathfrak{A}$ eine CCR-Algebra mit dem Kommutator

$$[\Phi(f), \Phi(g)] = i\sigma(f,g)\mathbb{1}, \quad \forall f, g \in (V, \sigma),$$

dann lässt sich ein beliebiges Element $A \in \mathfrak{A}$ durch

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j_i=1}^{n_i} \Phi(f_{j_i}) + c\mathbb{1}$$

formulieren, wobei $c, a_i \in \mathbb{R}$ und $f_{j_i} \in (V, \sigma)$ $\forall j_i \in \{1, \dots, n_i\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Sei $\hat{\mathcal{I}} \subset \mathfrak{A}$ ein Ideal, dann gilt mit $A \in \hat{\mathcal{I}}$ und $B \in \mathfrak{A}$;

$$BA, AB \in \hat{\mathcal{I}} \;\Rightarrow\; [B, A] \in \hat{\mathcal{I}}.$$

[3] Die Morphismen zwischen den Objekten werden durch lineare Symplektomorphismen $\varrho : (V, \sigma) \to (V', \sigma')$ gegeben.

$A \in \hat{\mathcal{I}}$ lässt sich dabei ebenfalls stets über ein Polynom $P(\Phi(f_i),\, i = 1, \dots n)$ in $\Phi(f_i)$ nach der obigen Definition konstruieren. Betrachtet man dabei die zum Polynom zugehörigen Elemente $f_i \in (V, \sigma)$, dann gewinnt man bzgl. $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(f_i)_{i \in \underline{n}}$ einen Untervektorraum von $(V, \sigma)$, der sich über weitere Elemente aus $(V, \sigma)$ zu einem symplektisch invarianten Teilraum $\tilde{V} \subset (V, \sigma)$ fortsetzen lässt. Für $\tilde{V}$ lässt sich aufgrund der Invarianz unter der symplektischen Form $\sigma$ eine symplektische Basis

$$\mathcal{B} = \{p_k, q_l \in \tilde{V} \,|\, \sigma(p_k, q_l) = \delta_{kl},\ \sigma(p_k, p_s) = 0 \,\text{und}\, \sigma(q_l, q_t) = 0,\ k, l, s, t \in \mathbb{N}\}$$

bestimmen. Dadurch kann man das Polynom $P$ auf eine Form bringen, die ein Element höchster Ordnung $\Phi(p_1)^{n_1} \dots \Phi(p_h)^{n_h} P(\Phi(q_r),\, r = 1, \dots g)$ besitzt. Mit den Ordnungen $n_1, \dots, n_h$ gewinnt man über die Vertauschungsrelationen von $\mathfrak{C}(V, \sigma)$ und

$$\underbrace{[\Phi(q_h), [\cdots, [\Phi(q_h),}_{n_h\,\text{fach}} [\Phi(q_{h-1})[\cdots, [\Phi(q_1), P(p, q)] \cdots ]] = P(\Phi(q_r),\, r = 1, \dots g)$$

ein Polynom, das nur aus den Elementen $q_i$ gebildet wird. Dabei besitzt $P(\Phi(q_r),\, r = 1, \dots g)$ ebenfalls ein Monom von höchster Ordnung, das über über die Vertauschungsrelation mit $\Phi(p_j)$ analog zur vorherigen Konstruktion auf ein vielfaches der Eins gebracht werden kann.
Daraus zeigt sich, dass die Eins $\mathbb{1}$ im Ideal liegt ($\mathbb{1} \in \hat{\mathcal{I}}$), was $\hat{\mathcal{I}} = \mathfrak{A}$ zur Folge hat und auf die Einfachheit der Algebra schließt. $\square$

Speziell in unserem Fall betrachten wir die Weyl-Algebren $\mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_{\mathcal{M}}))$, die sich über $u \in \mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_{\mathcal{M}})$ ergeben. Da der symplektische Raum $\mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_{\mathcal{M}})$ vollständig durch die Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ bestimmt ist, gilt desgleichen auch für die Weyl-Algebra.
Durch $A(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) = \mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_{\mathcal{M}}))$ erhält man eine Möglichkeit für einen kovarianten Funktor $A$, der alle Forderungen erfüllt, was in [1] explizit gezeigt wird.

Aus dieser Konstruktion kann man, was ebenfalls in [1] erläutert wird, lokal kovariante Quantenfelder $\varphi$ im Sinne einer natürlichen Transformation, die die Klein-Gordon-Felder und damit CCR-Algebren beschreiben, gewinnen, indem man über eine Hilbertraumdarstellung $\pi$ der C*-Algebra $A(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ die Feldoperatoren durch

$$\varphi_{(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})}(f) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \pi(W(sEf)) \qquad f \in C_0^\infty(\mathcal{M})$$

darstellt.
$\varphi_{(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})}(f)$ ist dabei wesentlich selbstadjungiert auf einer dichten Teilmenge des Hilbertraumes.

Die Einsicht dass sich CCR-Algebren für symplektische Räume $\mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_{\mathcal{M}})$ über Quantenfelder nach Def. 5.5 ergeben, gewinnt man auch aus der folgenden Konstruktion nach [1]. Bei diesem Zugang betrachtet man am Anfang die *Borchers-Uhlmann* Algebra der Raumzeit. Dabei handelt es sich um eine topologische *-Algebra $\mathfrak{B}(\mathcal{M})$ die man jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ zuordnen kann. Die Elemente dieser Algebra werden durch Folgen $(f_n), \quad n \in \mathbb{N}_0$

und $f_0 \in \mathbb{C},\ f_n \in C_0^\infty(\mathcal{M}^n)$, mit einer üblichen Addition und skalaren Multiplikation, sowie mit dem Produkt

$$(f_n)(g_n) = \sum_{i+j=n} f_i(x_1, \dots, x_i) g_j(x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}^n$$

gebildet.
Die *-Operation erhält man durch komplexe Konjugation der Folgeglieder und das Eins-Element ist durch $\mathbb{1} = (1, 0, 0, \dots)$ gegeben.
Mit den Morphismen $\psi \in hom_{\mathfrak{Man}}((\mathcal{M}_1, g_1), (\mathcal{M}_2, g_2))$ ergibt sich die Abbildung $\alpha_\psi : \mathfrak{B}(\mathcal{M}_1) \to \mathfrak{B}(\mathcal{M}_2)$ durch

$$\alpha_\psi((f_n)) = (\psi_*^n f_n),$$

wobei $(\psi_*^n f_n)(x_1, \dots, x_n) = f_n(\psi^{-1}(x_1), \dots, \psi^{-1}(x_n))$ ist.
Damit erhalten wir einen kovarianten Funktor $A$, indem wir $A(\mathcal{M}, g_\mathcal{M}) = \mathfrak{B}(\mathcal{M})$ setzen. Mit $f \in C_0^\infty(\mathcal{M}) = D(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$ folgt

$$\varphi_{(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})}(f) = (f_n)$$

wobei $(f_n) \in A(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$ und $f_1 = f,\ f_n = 0,\ \forall n \neq 1$.
Das lineare skalare Klein-Gordon-Feld[4] erhält man nun, durch herauskürzen des beidseitigen *-Ideals

$$J(\mathcal{M}, g_\mathcal{M}) = \left\{ \begin{array}{c} \varphi((\Box_{g_\mathcal{M}} + m^2) f) = 0 \\ \varphi(f)\varphi(g) - \varphi(g)\varphi(f) - \sigma_\mathcal{M}(Ef, Eg)\mathbb{1} \end{array} \right.$$

mit $(f_n), (g_n)$ aus der Feldkonstruktion.
Daraus gewinnt man einen neuen Funktor $\hat{A}$ zwischen $\mathfrak{Man}$ und $\mathfrak{TAlg}$ mit der Bedingung, dass $\hat{A}(\mathcal{M}, g_\mathcal{M}) = \mathfrak{B}(\mathcal{M})/J(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$ ist. Dieser Funktor erfüllt alle weiteren Kriterien wie Kausalität und das Zeitschichtaxiom.
Desweiteren erhalten wir über $\psi \in hom_{\mathfrak{Man}}((\mathcal{M}_1, g_1), (\mathcal{M}_2, g_2))$ die Beziehung

$$A(\psi)([(f_n)]) \equiv \alpha_\psi([(f_n)]) = [(\psi_*^n f_n)]$$

und gewinnen damit das allgemein kovariante Klein-Gordon-Feld

$$\varphi_{(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})}(f) = [(f_n)]$$

als natürliche Transformation mit $f \in D(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$ bzgl. des kovarianten Funktors $\hat{A}$.
Die *-Algebra die diesem Quantenfeld zugrunde liegt und allein aus diesen Elementen erzeugt wird, ist dabei durch die CCR-Algebra gegeben. Diese Konstruktion deutet damit auf die Existenz einer linearen Abbildung von $\mathcal{D}(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$ nach $\mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_\mathcal{M}))$, die sich als natürliche Transformation beschreiben lässt.

Für globalhyperbolische Raumzeiten $(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$ ergibt sich aus der vorherigen Konstruktion eine präzisere Formulierung der Beziehung zwischen den Objekten $\mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_\mathcal{M})$ aus $\mathfrak{Sym}$ und

[4] Quantenfeld, das die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt.

den zugehörigen CCR-Algebren aus $\mathfrak{TAlg}$. Betrachtet man nämlich die Funktoren $D$ und $\mathcal{R}$, so ergibt sich eine natürliche Transformation $E : D \to \mathcal{R}$ nach dem Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
D(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d, "E_{\mathcal{M}}"'] & D(\mathcal{M}', g_{\mathcal{M}'}) \arrow[d, "E_{\mathcal{M}'}"] \\
\mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_{\mathcal{M}}) \arrow[r, "\varrho_\psi"'] & \mathcal{R}(\mathcal{M}', \sigma_{\mathcal{M}'})
\end{tikzcd}
$$

wobei $\varrho_\psi \circ E_{\mathcal{M}} = E_{\mathcal{M}'} \circ \psi_*$

*Beweis.* Dabei müssen wir zeigen, dass es sich bei $\varrho_\psi$ um einen linearen Symplektomorphismus handelt.
OBdA:
Sei $\mu E_{\mathcal{M}}(f) + \lambda E_{\mathcal{M}}(g)$ eine beliebige Linearkombination zweier Elemente aus $\mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_{\mathcal{M}})$, dann ergibt sich bzgl. der Abbildung $\varrho_\psi$:

$$
\begin{aligned}
\varrho_\psi(\mu E_{\mathcal{M}}(f) + \lambda E_{\mathcal{M}}(g)) &= \varrho_\psi(E_{\mathcal{M}}(\mu f + \lambda g)) \\
&= E_{\mathcal{M}'} \circ \psi_*(\mu f + \lambda g) = E_{\mathcal{M}'}((\mu f + \lambda g) \circ \psi^{-1}) \\
&= \mu E_{\mathcal{M}'}(f \circ \psi^{-1}) + \lambda E_{\mathcal{M}'}(g \circ \psi^{-1}) \\
&= \mu \varrho_\psi(E_{\mathcal{M}} f) + \lambda \varrho_\psi(E_{\mathcal{M}} g)
\end{aligned}
$$

Betrachtet man nun zwei beliebige Elemente $\varrho_\psi(E_{\mathcal{M}}(f)), \varrho_\psi(E_{\mathcal{M}}(g)) \in \varrho_\psi(\mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_{\mathcal{M}}))$, dann ergibt sich bzgl der symplektischen Form $\sigma_{\mathcal{M}'}$:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{M}'}(\varrho_\psi(E_{\mathcal{M}}(f)), \varrho_\psi(E_{\mathcal{M}}(g))) &= \sigma_{\mathcal{M}'}(E_{\mathcal{M}'}(\psi_* f), E_{\mathcal{M}'}(\psi_* g)) \\
&= \sigma_{\mathcal{M}'}(E_{\mathcal{M}'}(f \circ \psi^{-1}), E_{\mathcal{M}'}(g \circ \psi^{-1}))
\end{aligned}
$$

Da es sich bei $\psi$ um eine Isometrie bzgl. des Bildraumes handelt, bleibt das Integrationsmass invariant unter der Transformation und nach Satz 3.6 gilt

$$
\sigma_{\mathcal{M}'}(\varrho_\psi(E_{\mathcal{M}}(f)), \varrho_\psi(E_{\mathcal{M}}(g))) = \sigma_{\mathcal{M}}(E_{\mathcal{M}} f, E_{\mathcal{M}} g),
$$

wodurch die Abbildung $\varrho_\psi$ einen linearen Symplektomorphismus darstellt. □

Mit $\hat{\varphi}_{(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})} : D(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to A(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ und $E_{\mathcal{M}} : D(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to \mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_{\mathcal{M}})$ hat man nun zwei Vektoraumhomomorphismen, die durch die Eigenschaft, dass $\mathrm{Ker}(E_{\mathcal{M}}) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_{(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})})$ ist, eine bis auf Isomorphie eindeutige Abbildung $\Phi_{(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})}$ erzeugen, wobei sich das folgende kommutierende Diagramm ergibt:

$$
\begin{tikzcd}
D(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \arrow[rr, "\varphi_{(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})}"] \arrow[dr, "E_{\mathcal{M}}"'] & & A(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \\
& \mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_{\mathcal{M}}) \arrow[ur, "\Phi_{(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ein interessanter Sachverhalt ergibt sich bzgl der Dynamik dieser Quantenfeldtheorien. Die durch das Zeitschicht-Axiom gegebene Definition von Quantenfeldtheorien wird in diesem Rahmen schon von den Symplektischen Räumen allein erfüllt.

**Satz 5.11.** *Für $(\mathcal{M}, g), (\mathcal{M}', g') \in Obj(\mathfrak{Man})$ mit $\psi \in hom_{\mathfrak{Man}}((\mathcal{M}, g), (\mathcal{M}', g'))$ wobei $\psi(\mathcal{M})$ eine Cauchy-Fläche von $(\mathcal{M}', g')$ enthält gilt*

$$\varrho_\psi(\mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_\mathcal{M})) = \mathcal{R}(\mathcal{M}', \sigma_{\mathcal{M}'})$$

*Beweis.* Für globalhyperbolische Raumzeiten der Kategorie $\mathfrak{Man}$ gilt nach Satz 3.1 stets dass

$$\mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_\mathcal{M}) \simeq \mathfrak{M}_S$$

für $(\mathcal{M}, g) \in Obj(\mathfrak{Man})$ mit einer Cauchy-Fläche $S \subset \mathcal{M}$ erfüllt ist.
Sei nun $\psi \in hom_{\mathfrak{Man}}((\mathcal{M}, g), (\mathcal{M}', g'))$ und enthält $\psi(\mathcal{M})$ eine Cauchy-Fläche $S'$ aus $(\mathcal{M}', g')$, dann ist $S'$ aufgrund der Abbildungsstruktur auch eine Cauchy-Fläche in $(\psi(\mathcal{M}), g_{\psi(\mathcal{M})})$. Aus dieser Folgerung gewinnen wir die Beziehung $\mathfrak{M}_{S'} \simeq \mathcal{R}(\psi(\mathcal{M}, \sigma_{\psi(\mathcal{M})}))$ die aufgrund der Existenz eines linearen Symplektoisomorphismuses $\varrho_{\hat{\psi}} : \mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_\mathcal{M}) \to \mathcal{R}(\psi(\mathcal{M}, \sigma_{\psi(\mathcal{M})}))$, gebildet aus der Isometrie $\hat{\psi} : (\mathcal{M}, g) \to (\psi(\mathcal{M}), g_{\psi(\mathcal{M})})$, auf

$$\mathfrak{M}_{S'} \simeq \mathcal{R}(\mathcal{M}, \sigma_\mathcal{M})$$

schließt. □

Damit zeigt sich, dass die symplektischen Räume schon die gesamte Dynamik des Systems in sich enthalten und sich die Dynamik, definiert nach dem Zeitschicht-Axiom, eindeutig über einen Funktor auf die Algebren überträgt.[5]

## 5.3 Konstruktion der Algebra einer globalhyperbolischen Raumzeit

In diesem Abschnitt betrachten wir ein Konstruktionsschema für Algebren von globalhyperbolischen Raumzeiten, das sich aus dem Lokalitätsprinzip begründet. Dabei weist dieses Prinzip darauf hin, dass die Algebra einer globalhyperbolischen Raumzeit $(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$ sich allein aus der Menge der Algebren aller globalhyperbolischen Teilmengen von $(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$ bilden lässt.

Eine Voraussetzung für die Anwendung dieses Verfahrens ist dabei die Existenz einer gerichteten Netz-Indexmenge[6].

**Definition 5.12.** Bei einer Netz-Indexmenge $\mathcal{I}$ handelt es sich um eine Menge, die die folgenden Axiome erfüllt:

1. $\mathcal{I}$ ist partiell geordnet, d.h. es existiert eine Relation auf der Menge $\mathcal{I}$, welche reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

2. Es existiert eine unendliche unbeschränkte Folge $(j_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{I}$, wobei es ein $j_k$ zu jedem $i \in \mathcal{I}$ mit $i \leq j_k$ gibt. („ $<$ " steht hierbei für die Relation )

[5] Bei der Existenz eines Symplektoisomorphismus $\varrho$ gibt es über den Funktor $F$, der in eine $^*$- bzw C$^*$-Algebra führt, auch einen zugehörigen $^*$-Algebrenisomomorphismus $\alpha_\varrho$.

[6] Eine präzisere Erklärung findet man dabei nach [22].

3. Jede endliche Teilmenge $(j_1, \ldots, j_n) \subset \mathcal{I}$ hat eine obere Schranke $i \in \mathcal{I}$ ( $j_k \leq i \quad \forall k \in (1, \ldots, n)$).

Für den Fall einer globalhyperbolischen Raumzeit ist eine solche Menge stets durch $\mathcal{K}(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ gegeben, wobei die partielle Ordnung durch die Inklusion bestimmt wird. Das heißt das $\mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_2$, wenn $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ und $i_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{O}_2$ ist.
Eine weitere Definition, die sich die Vorherige zunutze macht, ist die folgende:

**Definition 5.13.** Ein System $\mathcal{A}_{\mathcal{I}} := \{\mathcal{A}_I; I \in \mathcal{I}\}$ bezeichnet man als Netz von $^*$-Algebren[7], wenn:

1. jedes Element $\mathcal{A}_I$ eine unitale $^*$-Algebra beschreibt (wobei $\mathbb{1}_I \in \mathcal{A}_I \quad \Rightarrow \quad \mathbb{1}_I \in \mathcal{A}_J$ und $\mathbb{1}_I = \mathbb{1}_J \quad \forall J \in \mathcal{I}$).
2. gilt $I < J$, dann folgt daraus $\mathcal{A}_I \subseteq \mathcal{A}_J$ (Isotonie)

Mit dieser Definition haben wir nun ein Gerüst um die Observablen-Algebra $A(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ einer globalhyperbolischen Raumzeit $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ aus dem Netz der $^*$-Algebren bzw. C$^*$-Algebren $\mathcal{A}_{\mathcal{I}} = \{A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}); \mathcal{O} \in \mathcal{I} = \mathcal{K}(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})\}$ zu konstruieren.

**Definition 5.14.** Der C$^*$-induktive Limes einer Familie von unitalen C$^*$-Algebren $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ mit Eins-Element $\mathbb{1}_{\mathcal{O}} \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$, wobei $\mathcal{I}$ eine gerichtete Netz-Indexmenge beschreibt, ist durch eine unitale C$^*$-Algebra $\mathcal{A}$ mit Eins-Element $\mathbb{1}$ gegeben, für das jedes $\mathcal{O} \in \mathcal{I}$ einen Monomorphismus

$$\alpha_{\mathcal{O}} : A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \to \mathcal{A}$$

mit $\alpha_{\mathcal{O}}(A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}})) \subset \mathcal{A}$ und $\alpha_{\mathcal{O}}(\mathbb{1}_{\mathcal{O}}) = \mathbb{1}$ besitzt (Inklusionsabbildung).

Für die Konstruktion muss dabei für Elemente der Indexmenge $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{I}$ und $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ die Existenz von Monomorphismen

$$\alpha_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1} : \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \to \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$$

gewährleistet sein, die die Bedingungen $\alpha_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}(\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ und $\alpha_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}(\mathbb{1}_{\mathcal{O}_1}) = \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2}$ erfüllen. Dabei gilt desweiteren die Kompositionseigenschaft $\alpha_{\mathcal{O}_3\mathcal{O}_1} = \alpha_{\mathcal{O}_3\mathcal{O}_2} \circ \alpha_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}$ wenn $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_3 \in \mathcal{I}$.
Durch das allgemein kovariante Lokalitätsprinzip sind diese Anforderungen stets erfüllt und man kann mit diesem System von Abbildungen nun die $^*$-Algebraische Hülle $\mathcal{A}_\infty$ über die Universalitätseigenschaft definieren. Diese fordert, dass Monomorphismen $\alpha_{\mathcal{O}} : A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \to \mathcal{A}_\infty$ existieren, für die:

$$\alpha_{\mathcal{O}_2} \circ \alpha_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1} = \alpha_{\mathcal{O}_1}$$

mit $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ gilt.
Desweiteren folgt, dass für jede Familie von Abbildungen $\beta_{\mathcal{O}} : A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \to \mathcal{B}$, die die **Kompatibilitäts-Bedingung** $\beta_{\mathcal{O}_2} \circ \alpha_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1} = \beta_{\mathcal{O}_1}$ erfüllt, eine eindeutige Abbildung $\beta : \mathcal{A}_\infty \to \mathcal{B}$ existiert mit $\beta \circ \alpha_{\mathcal{O}} = \beta_{\mathcal{O}}$.

[7] Das Ganze kann auf $C^*$-Algebren erweitert werden, wenn man zusätzlich fordert, dass die Normen von den $C^*$-Algebren $\mathcal{A}_I$ und $\mathcal{A}_J$ für alle $\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_J \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ und $I, J \in \mathcal{I}$ übereinstimmen.

$\mathcal{A}_\infty$ lässt sich in diesem Sinne durch Elemente $\alpha_\mathcal{O}(A)$ mit $A \in A(\mathcal{O}, g_\mathcal{O})$ generieren, und man erhält aus der Forderung, dass $\mathcal{K}(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$ eine gerichtete Menge beschreibt, die Formulierung der $^*$-algebraischen Hülle über die Vereinigung

$$\mathcal{A}_\infty = \bigcup_{\mathcal{O}\subset\mathcal{I}} \alpha_\mathcal{O}(A(\mathcal{O}, g_\mathcal{O}))$$

.

Behandeln wir C$^*$ bzw. von Neumann-Algebren, dann erhalten wir mit der eindeutigen C$^*$-Norm von $\mathcal{A}_\infty$ und über den Abschluss des C$^*$-induktiven Limes

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{\mathcal{O}\subset\mathcal{I}} \alpha_\mathcal{O}(A(\mathcal{O}, g_\mathcal{O}))}$$

Für das gerichtete Netz einer globalhyperbolischen Raumzeit beschreibt $\mathcal{A}$ damit die Observablenalgebra $A(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$ aus dem allgemein kovarianten Lokalitätsprinzip.

Eine für unsere Betrachtungen wesentliche Eigenschaft des C$^*$-induktiven Limes besteht darin, dass keine neuen durch das Verfahren induzierten Relationen auftreten können. (Beweis nach [18])

*Beweis.* Sei $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Homomorphismus vom C$^*$-induktiven Limes $\mathcal{A}$ zur C$^*$-Algebra $\mathcal{B}$ (z.B. eine Darstellung der Algebra $\mathcal{A}$) und sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\psi(A) = 0$, dann existiert eine Folge $\mathcal{O}_n \in \mathcal{K}(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$, $A_n \in A(\mathcal{O}_n, g_{\mathcal{O}_n})$ mit $\|A_n - A\| \to 0$. Daraus folgt, dass $\|\psi(A_n)\| = \|\psi(A_n - A)\| \to 0$ ist (in diesem Fall haben wir die Stetigkeit und die Eigenschaft das $\psi$ ein Algebrenhomomorphismus ist, ausgenutzt).
Auf $\mathcal{B}$ lässt sich die Norm durch

$$\|\psi(A_n)\| = inf\big\{\|A_n - B_n\|,\, B_n \in A(\mathcal{O}_n, g_{\mathcal{O}_n}),\, \psi(B_n) = 0\big\}$$

definieren.
Durch diese Aussage folgt die Existenz einer Folge $B_n \in A(\mathcal{O}_n, g_{\mathcal{O}_n})$ mit $\psi(B_n) = 0$ und $\|A_n - B_n\| \to 0$ (lässt sich über die Stetigkeit von $\psi$ zeigen).
Damit erhält man nun $\|A - B_n\| \leq \|A - A_n\| + \|A_n - B_n\| \to 0$. □

Aus dieser Betrachtung ergibt sich die Erkenntnis, dass der Kern einer Abbildung $\psi$ sich allein durch den Abschluss der Vereinigung der Kerne der Einschränkungen der Abbildung $\psi|_{A(\mathcal{O},g_\mathcal{O})}$ ergibt. Betrachtet man z.B ein Familie von treuen Darstellungen (mit der Kompatibilitäts-Bedingungen) $\pi_\mathcal{O}$ bzgl. der Algebren $A(\mathcal{O}, g_\mathcal{O})$, dann ergibt sich ebenfalls für die zugeordnete Dartellung $\pi$ von $\mathcal{A}$ eine treue Darstellung.
Eine mit der vorherigen Aussage verwandtes Kriterium besagt nun, dass wenn $A(\mathcal{O}, g_\mathcal{O})$ einfach für alle $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$ ist, dann gilt dasselbe auch für den C$^*$-induktiven Limes $\mathcal{A}$.
Dieses Kriterium des C$^*$-induktiven Limes versuchen wir im nächsten Abschnitt bzgl. einer anderen Konstruktionsvorschrift ebenfalls zu beachten.

Wollen wir diese Konstruktion des induktiven Limes für die Observablen-Algebra einer nichtglobalhyperbolischen Raumzeit übernehmen, so geraten wir in einige Schwierigkeiten.
Das Problem liegt darin, dass man kein gerichtetes Netz auf diesen Räumen konstruieren kann, welches eine Überdeckung für den diesbezüglichen Raum liefert. Deswegen verwenden wir einen anderen Ansatz, um die Algebra einer nichtglobalhyperbolischen Raumzeit zu bestimmen.
Dies wollen wir im nächsten Kapitel explizit formulieren.

# Kapitel 6

# Algebren von nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten

In diesem Kapitel wollen wir unter Verwendung des allgemein kovarianten Lokalitätsprinzips ein Konstruktionsschema für Algebren von nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten entwickeln. Dabei versuchen wir einerseits das Verfahren des induktiven Limes durch ein anderes Konzept zu ersetzen und andererseits eine Analyse der Eigenschaften dieser Konstruktion durchzuführen. Prinzipien, die auf eine Beschreibung von Quantenfeldtheorien auf nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten hinweisen, versuchen wir etwas genauer zu studieren. Anschließend untersuchen wir am Beispiel von *CCR*- bzw. *Weyl*-Algebren, Observablen-Algebren von Quantenfeldtheorien auf nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten und betrachten die Anforderungen, die sie an unsere Konstruktion stellen. Dabei vertiefen wir diesen Sachverhalt speziell für den Fall von nichtglobalhyperbolischen statischen Raumzeiten.

## 6.1 Allgemeines Konstruktionsschema der Observablen-Algebra

Speziell betrachten wir in diesem Ansatz die Kategorie $\mathfrak{Lor}$ der 4-dimensionalen zusammenhängenden (orientierten und zeitorientierten) Lorentzmannigfaltigkeiten $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \in Obj(\mathfrak{Lor})$, die eine offene Überlagerung bzgl. der Menge $\mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ besitzen.
Dabei werden für zwei Objekte $(\mathcal{N}_1, g_1)$ und $(\mathcal{N}_2, g_2)$ die Morphismen $\psi \in \hom_{\mathfrak{Lor}}((\mathcal{N}_1, g_1), (\mathcal{N}_2, g_2))$ analog zu Abschnitt 5 durch isometrische Einbettungen gegeben.

In unserem Zugang gehen wir von der **freien Algebra** $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ aus, die man zu jedem Objekt $\mathcal{N}$ in $\mathfrak{Lor}$ konstruieren kann. Dabei handelt es sich um die durch die Menge $\mathcal{G}_{\mathcal{N}} = \{(B, \mathcal{O}); B \in A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}),\ \mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})\}$[1] von Paaren $(B, \mathcal{O})$ und bzgl. einer formal definierten Addition $+$, Multiplikation $\cdot$ und Multiplikation mit einem Skalaren $\eta$ erzeugte *-Algebra

$$
\begin{aligned}
+, \cdot : \mathcal{A}_{\mathcal{N}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{N}} &\to \mathcal{A}_{\mathcal{N}} & \qquad \eta : \mathbb{C} \times \mathcal{A}_{\mathcal{N}} &\to \mathcal{A}_{\mathcal{N}} \\
(B, C) &\mapsto (B + C), (BC) & (\lambda, B) &\mapsto \lambda B,
\end{aligned}
$$

[1] Die Mengen $A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}})$ werden nach dem allgemein kovarianten Lokalitätsprinzip definiert.

die ein gemeinsames Eins-Element $\mathbb{1} = (\mathbb{1}, \mathcal{O})$ für alle $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ besitzt.
Handelt es sich bei den Mengen $A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}})$ um C*-Algebren, dann lässt sich auf der zugehörigen freien Algebra eine C*-Norm definieren. Dies gelingt uns über die Menge der Darstellungen $\Pi := \{\pi | \pi : \mathcal{A}_{\mathcal{N}} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)\}$ der freien Algebra. Dabei erlangt man eine Norm über die Beziehung

$$\|B\| = \sup_{\pi \in \Pi} \|\pi(B)\|$$

für alle $B \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$. Ist die Menge $\Pi$ allerdings leer, dann gibt es über diesem Wege keine Möglichkeit eine Norm zu definieren. Über den Abschluss der Norm lässt sich damit die freie Algebra als C*-Algebra $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^{\|\cdot\|}$ auszeichnen.

*Bemerkung* 6.1. Im folgenden Verlauf wollen wir anstelle von $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^{\|\cdot\|}$ kurz $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ schreiben.

Die freie Algebra ist zum grössten Teil rein formal erklärt und weist nur wenige Relationen zwischen den Elementen auf.
Über den Lokalitätsbegriff aus der Arbeit [23] von B. S. Kay , der sich aus dem Lokalitätsprinzip des algebraischen Formalimus der Quantenfeldtheorie begründet, das besagt, dass physikalische Systeme sich gegenseitig nur lokal beeinflussen können, finden wir eine Forderung an unser Konstruktionsschema. Aufgrund der Lokalität besitzen die Algebren der observablen Größen, die nur in einem kausal abgeschlossenen relativkompakten Gebiet gemessen werden können, keine wesentlichen Information über die Topologie der Raumzeit selbst. Demzufolge muss eine Observablen-Algebra der Raumzeit bei Einschränkung auf ein derartiges Gebiet unabhängig von der globalen Topologie sein und damit über die üblichen Beziehungen einer Quantenfeldtheorie nach dem allgemein kovarianten Lokalitätsprinzip beschreibbar sein.
Diese Eigenschaft lässt sich in unserem Ansatz über die Konstruktion eines beidseitigen *-Ideals, das durch die erzeugenden Elemente

$$\underbrace{\mathcal{E}_{\mathcal{N}}}_{\subset \mathcal{A}_{\mathcal{N}}} = \begin{cases} (A, \mathcal{O}) + (B, \mathcal{O}) - (A + B, \mathcal{O}) \\ (A, \mathcal{O})(B, \mathcal{O}) - (AB, \mathcal{O}) \\ \lambda(A, \mathcal{O}) - (\lambda A, \mathcal{O}) \\ (A, \mathcal{O}_1) - (\alpha_{\mathcal{O}_2 \mathcal{O}_1}(A), \mathcal{O}_2) \\ \text{für} \quad \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \quad \text{und} \quad \mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \end{cases}$$

gebildet wird, einführen.

*Bemerkung* 6.2. Dabei gilt für das Ideal die Beziehung $\mathcal{I}_{\mathcal{N}} = \mathcal{A}_{\mathcal{N}} \mathcal{E}_{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{\mathcal{N}} := \{A \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}} | \, A = \sum_{i=1}^n B_i \epsilon_i C_i, \, B_i, C_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}, \, \epsilon_i \in \mathcal{E}_{\mathcal{N}}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$.

Die Quotienten-Algebra bezeichnen wir dabei durch den Ausdruck

$$\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) := \mathcal{A}_{\mathcal{N}} / \mathcal{I}_{\mathcal{N}}.$$

Beschreibt $\mathcal{N}$ eine globalhyperbolische Mannigfaltigkeit, dann erhält man nach der Konstruktion mit $\mathcal{A}(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ die bereits bekannte Observablen-Algebra aus dem funktoriellen Ansatz zurück. In diesem Fall ist $\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ durch $A(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ gegeben.

Auf den Algebren $\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ der nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ lassen sich in

Analogie zum globalhyperbolischen Fall gewisse Abbildungen[2] den Morphismen aus der Kategorie $\mathfrak{Lor}$ zuordnen. Dabei fallen diese Abbildungen bei Einschränkung auf globalhyperbolische Teilmengen von $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ mit den Algebrenhomomorphismen aus der funktoriellen Beziehung zusammen. Die Konstruktion dieser Abbildungen lässt sich dabei im folgenden Sinne durchführen:
Sei $\hat{\mathcal{N}} \in Obj(\mathfrak{Lor})$ eine 4-dimensionale konvexe Lorentzuntermannigfaltigkeit von $\mathcal{N}$ und sei $(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \in \mathcal{K}(\hat{\mathcal{N}}, g_{\hat{\mathcal{N}}})$, dann ist $(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}})$ auch in $\mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ enthalten. $\mathcal{K}(\hat{\mathcal{N}}, g_{\hat{\mathcal{N}}})$ stellt damit eine Teilmenge von $\mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ dar. Daraus ergibt sich für die Menge $\mathcal{G}_{\hat{\mathcal{N}}} = \{(C, \mathcal{O});\ C \in A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}),\quad \mathcal{O} \in \mathcal{K}(\hat{\mathcal{N}}, g_{\hat{\mathcal{N}}})\}$ und die dadurch erzeugte freie Algebra $\mathcal{A}_{\hat{\mathcal{N}}}$, dass $\mathcal{E}_{\hat{\mathcal{N}}} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{N}}$ und damit $\mathcal{A}_{\hat{\mathcal{N}}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$.
Mit dem Ideal $\mathcal{I}_{\hat{\mathcal{N}}}$, das durch die Erzeugendenmenge $\mathcal{E}_{\hat{\mathcal{N}}} \subset \mathcal{A}_{\hat{\mathcal{N}}}$ generiert wird, gewinnt man nun die Quotienten-Algebra

$$\mathcal{A}(\hat{\mathcal{N}}, g_{\hat{\mathcal{N}}}) := \mathcal{A}_{\hat{\mathcal{N}}}/\mathcal{I}_{\hat{\mathcal{N}}}$$

für $\hat{\mathcal{N}}$. Aus den vorangegangenen Aussagen, die darauf hinweisen, dass $\mathcal{A}_{\hat{\mathcal{N}}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ und $\mathcal{I}_{\hat{\mathcal{N}}} \subset \mathcal{I}_{\mathcal{N}}$, erhält man einen kanonischen *-Algebrenhomomorphismus über die Beziehung

$$\begin{array}{rcl} \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\hat{\mathcal{N}}} : \mathcal{A}(\hat{\mathcal{N}}, g_{\hat{\mathcal{N}}}) & \rightarrow & \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \\ (A + \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{N}}}) & \mapsto & (A + \mathcal{I}_{\mathcal{N}}) \quad \forall A \in \mathcal{A}_{\hat{\mathcal{N}}}. \end{array}$$

Es ergibt sich dabei für alle $J \in \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{N}}}$ das Verhältnis

$$\hat{\alpha}_{\mathcal{N}\hat{\mathcal{N}}}([A + J]_{\hat{\mathcal{N}}}) = [A + J]_{\mathcal{N}} = [A]_{\mathcal{N}},$$

da $J \in \mathcal{I}_{\mathcal{N}}$.
Bei $\hat{\alpha}_{\mathcal{N}\hat{\mathcal{N}}}$ handelt es sich allerdings im Allgemeinen um keine injektive Abbildung und damit um keinen Morphismus, der in der Kategorie $\mathfrak{Alg}$ definiert ist. Dies zeigt sich z.B in der folgenden Untersuchung:
Wir betrachten zwei Gebiete $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{K}(\hat{\mathcal{N}}, g_{\hat{\mathcal{N}}}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$, für die es in $(\hat{\mathcal{N}}, g_{\hat{\mathcal{N}}})$ keine Umgebung $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\hat{\mathcal{N}}, g_{\hat{\mathcal{N}}})$ gibt, welche die Beziehung $i_{\mathcal{O}\mathcal{O}_j}((\mathcal{O}_j, g_{\mathcal{O}_j}))$, $\forall j \in \{1, 2\}$ erfüllt. In $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ soll allerdings eine solche Umgebung existieren. Unter der Annahme, das für zwei Elemente $(A, \mathcal{O}_1), (B, \mathcal{O}_2) \in \mathcal{A}_{\hat{\mathcal{N}}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ mit $A, B \neq 0$ und $(A, \mathcal{O}_1), (B, \mathcal{O}_2) \notin \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{N}}}$ in $\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ die Beziehung

$$[[(\alpha_{\mathcal{O}\mathcal{O}_1}(A), \mathcal{O})]_{\mathcal{N}}, [(\alpha_{\mathcal{O}\mathcal{O}_2}(B), \mathcal{O})]_{\mathcal{N}}] = [(\underbrace{[\alpha_{\mathcal{O}\mathcal{O}_1}(A), \alpha_{\mathcal{O}\mathcal{O}_2}(B)]}_{=0}, \mathcal{O})]_{\mathcal{N}} = 0$$

erfüllt sei, gewinnt man über $[(A, \mathcal{O}_1), (B, \mathcal{O}_2)] = C$ ein Element aus $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$, das nur im Falle, dass $A$ oder $B$ der Null entspricht, zu Null wird. Bei einer Abbildung $\hat{\alpha}_{\mathcal{N}\hat{\mathcal{N}}}$ muss $[C]_{\hat{\mathcal{N}}} \in \mathcal{A}(\hat{\mathcal{N}}, g_{\hat{\mathcal{N}}})$ also im zugehörigen Kern enthalten sein. Aufgrund der Beziehung $C \notin \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{N}}}$ ist damit die Injektivität der Abbildung nicht gegeben.
Für Gebiete $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ werden allerdings mit $\hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}}$ injektive *-Algebrenhomomorphismus beschrieben, die Inklusionsabbildungen von lokalen Algebren $A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}})$ nach $\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ definieren.[3]

[2] injektive Algebrenhomomorphismen

[3] $A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ bzgl. $\hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}}$ und die Abbildungen $\alpha_{\mathcal{O}\hat{\mathcal{O}}}$ lassen sich mit $\hat{\alpha}_{\mathcal{O}\hat{\mathcal{O}}}$ für Gebiete $\hat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ identifizieren.

Betrachtet man desweiteren für $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ die Gruppe $G_{\mathcal{N}}$ der isometrischen Diffeomorphismen (siehe Kapitel. 5) $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, so ergibt sich die Beziehung, dass für Einschränkungen auf Gebiete $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ isometrische Einbettungen $\psi|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \mathcal{N}$ und damit bzgl. des Bildraumes $\psi(\mathcal{O}) = \hat{\mathcal{O}} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ isometrische Diffeomorphismen $\tilde{\psi}_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \psi(\mathcal{O})$ definiert sind. Man findet $\psi|_{\mathcal{O}} := i_{\mathcal{N}\psi(\mathcal{O})} \circ \tilde{\psi}_{\mathcal{O}} = \psi \circ i_{\mathcal{M}_B\mathcal{O}}$ und es ergibt sich bzgl. der Kategorien $\mathfrak{Man}$ und $\mathfrak{Alg}$ die Existenz der $^*$-Algebrenisomorphismen $\alpha_{\tilde{\psi}_{\mathcal{O}}} = A(\tilde{\psi}_{\mathcal{O}})$ für alle $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$. Damit ergibt sich

$$\alpha_{\tilde{\psi}_{\mathcal{O}}}(A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}})) = A(\psi(\mathcal{O}), g_{\psi(\mathcal{O})})$$

und es lassen sich Abbildungen $\hat{\alpha}_{\psi_{\mathcal{O}}} : A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \to \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$

$$\hat{\alpha}_{\psi_{\mathcal{O}}} = \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\psi(\mathcal{O})} \circ \alpha_{\tilde{\psi}_{\mathcal{O}}}$$

aus der Komposition der injektiven $^*$-Algebrenhomomorphismen definieren.
Diese Abbildungen gehorchen dabei der Kompatibilitäts-Bedingung auf globalhyperbolischen Gebieten der Raumzeit $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$, denn betrachtet man $\hat{\alpha}_{\psi_{\mathcal{O}}} \circ \hat{\alpha}_{\mathcal{O}\hat{\mathcal{O}}}$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{\psi_{\mathcal{O}}} \circ \hat{\alpha}_{\mathcal{O}\hat{\mathcal{O}}} &= \hat{\alpha}_{\psi_{\mathcal{O}}} \circ \alpha_{\mathcal{O}\hat{\mathcal{O}}} = \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\psi(\mathcal{O})} \circ \alpha_{\tilde{\psi}_{\mathcal{O}}} \circ \alpha_{\mathcal{O}\hat{\mathcal{O}}} \\
&= \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\psi(\mathcal{O})} \circ \alpha_{\tilde{\psi}_{\mathcal{O}} \circ i_{\mathcal{O}\hat{\mathcal{O}}}} = \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\psi(\mathcal{O})} \circ \alpha_{\tilde{\psi}_{\mathcal{O}}|_{\hat{\mathcal{O}}}} \\
&= \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\psi(\mathcal{O})} \circ \alpha_{\psi(\mathcal{O})\psi(\hat{\mathcal{O}})} \circ \alpha_{\tilde{\psi}_{\hat{\mathcal{O}}}} = \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\psi(\mathcal{O})} \circ \hat{\alpha}_{\psi(\mathcal{O})\psi(\hat{\mathcal{O}})} \circ \alpha_{\tilde{\psi}_{\hat{\mathcal{O}}}} \\
&= \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\psi(\hat{\mathcal{O}})} \circ \alpha_{\tilde{\psi}_{\hat{\mathcal{O}}}} = \hat{\alpha}_{\psi_{\hat{\mathcal{O}}}}
\end{aligned}$$

für Gebiete $\hat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$.[4]
Durch diese Bedingungen erfolgt der Satz:

**Satz 6.3.** *Für die $C^*$-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ mit einer kompatiblen Familie von $^*$-Algebrenhomomorphismen $\{\hat{\alpha}_{\psi_{\mathcal{O}}} : A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \to \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}),\ \mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})\}$ existiert ein eindeutiger $^*$-Algebrenisomorphismus $\hat{\alpha}_{\psi} : \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \to \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$,und das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) & \xrightarrow{\hat{\alpha}_{\psi}} & \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \\
\hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}} \nwarrow & & \nearrow \hat{\alpha}_{\psi_{\mathcal{O}}} \\
& A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) &
\end{array}$$

*welches für alle $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ kommutiert. Damit gilt $\hat{\alpha}_{\psi} \circ \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}} = \hat{\alpha}_{\psi_{\mathcal{O}}}$, womit sich die Beziehung $\hat{\alpha}_{\psi_{\mathcal{O}}} := \hat{\alpha}_{\psi \circ i_{\mathcal{N}\mathcal{O}}}$ stets erfüllt.*

*Beweis.* Wir betrachten die Menge $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ aus der man die freie Algebra $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ konstruiert und dazu die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned}
c_{\mathcal{G}_{\mathcal{N}}} : \mathcal{G}_{\mathcal{N}} &\longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{N}} \\
(A, \mathcal{O}) &\mapsto (A, \mathcal{O}),
\end{aligned}$$

[4]Der vorletzte Schritt ergibt sich dabei aufgrund der kanonischen Abbildungskonstruktion.

deren Bildmenge ebenfalls die freie Algebra generiert. Mit einer weiteren Abbildung der Menge $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, die durch die Familie $\{\hat{\alpha}_{\psi_{\mathcal{O}}} : A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \to \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}),\ \mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})\}$ konstruiert wird und durch den Ausdruck

$$\begin{array}{rcl} c_\psi : \mathcal{G}_{\mathcal{N}} & \longrightarrow & \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \\ (A, \mathcal{O}) & \mapsto & [(\alpha_{\tilde{\psi}_{\mathcal{O}}}(A), \psi(\mathcal{O}))], \end{array}$$

darstellen lässt, ergibt sich aufgrund der **universellen Eigenschaft** (siehe B.1), die Existenz eines eindeutigen $^*$-Algebrenhomomorphismus $\alpha^{\psi}_{\mathcal{N}}$, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_{\mathcal{N}} \arrow[rr, "c_{\mathcal{G}_{\mathcal{N}}}"] \arrow[dr, "c_\psi"'] & & \mathcal{A}_{\mathcal{N}} \arrow[dl, "\alpha^{\psi}_{\mathcal{N}}"] \\ & \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) & \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Gemäß des folgenden Satzes nach [24]

**Satz 6.4.** *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Algebren und $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ein Ideal in $\mathcal{A}$ mit $\iota : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ (kanonische Abb.).*
*Ist $\zeta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein Algebrenhomomorphismus, wobei der Kern von $\zeta$ das Ideal $\mathcal{I}$ enthält, dann gibt es einen eindeutigen Algebrenhomomorphismus $\tilde{\zeta}$ mit*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "\zeta"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \mathcal{B} \\ & \mathcal{A}/\mathcal{I} \arrow[ur, "\tilde{\zeta}"'] & \end{tikzcd}$$

erhält man mit $\mathcal{I}_{\mathcal{N}} \subset \mathrm{Ker}(\alpha^{\psi}_{\mathcal{N}})$ die Forderung nach einem eindeutigen $^*$-Algebrenhomomorphismus $\hat{\alpha}_\psi$ und damit das kommutierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_{\mathcal{N}} \arrow[rr, "\alpha^{\psi}_{\mathcal{N}}"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \\ & \underbrace{\mathcal{A}_{\mathcal{N}}/\mathcal{I}_{\mathcal{N}}}_{=\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})} \arrow[ur, "\hat{\alpha}_\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Dieselbe Konstruktion lässt sich analog für $\hat{\alpha}_{\psi^{-1}}$ durchführen.
Für Elemente $[(A, \mathcal{O})]_{\mathcal{N}}$ mit $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ ergibt sich bzgl. der Komposition der Abbildungen $\hat{\alpha}_\psi$ und $\hat{\alpha}_{\psi^{-1}}$ stets:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{\psi^{-1}} \circ \hat{\alpha}_\psi([(A, \mathcal{O})]_{\mathcal{N}}) &= \hat{\alpha}_{\psi^{-1}}([\alpha_{\tilde{\psi}_{\mathcal{O}}}(A), \psi(\mathcal{O})]_{\mathcal{N}}) \\ &= [\alpha_{\tilde{\psi}^{-1}_{\psi(\mathcal{O})}}(\alpha_{\tilde{\psi}_{\mathcal{O}}}(A)), \psi^{-1}(\psi(\mathcal{O}))]_{\mathcal{N}} \\ &= [(\alpha_{(\tilde{\psi}_{\mathcal{O}})^{-1}} \circ \alpha_{\tilde{\psi}_{\mathcal{O}}}(A), \mathcal{O})]_{\mathcal{N}} \\ &= [(A, \mathcal{O})]_{\mathcal{N}}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\psi}^{-1}_{\psi(\mathcal{O})} = (\tilde{\psi}_{\mathcal{O}})^{-1}$ entspricht.
Damit gilt dies Beziehung auch für eine dichte Teilmenge von $\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$, was dazu führt, dass für alle $C \in \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ stets $\hat{\alpha}_{\psi^{-1}} \circ \hat{\alpha}_\psi = id_{\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})}$ besteht. Damit erfüllt sich die Bedingung $\hat{\alpha}_{\psi^{-1}} = \hat{\alpha}^{-1}_\psi$ und fordert damit, dass $\hat{\alpha}_\psi$ ein $^*$-Algebrenisomorphismus darstellt. $\square$

Desweiteren erhalten wir die Beziehung:

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}_\psi(\underbrace{\mathcal{A}(\mathcal{O})}_{\subset\mathcal{A}(\mathcal{N},g_\mathcal{N})}) &= \hat{\alpha}_\psi \circ \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}}(A(\mathcal{O},g_\mathcal{O})) \\
&= \hat{\alpha}_{\psi\circ i_{\mathcal{N}\mathcal{O}}}(A(\mathcal{O},g_\mathcal{O})) = \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\psi(\mathcal{O})} \circ \alpha_{\tilde{\psi}_\mathcal{O}}(A(\mathcal{O},g_\mathcal{O})) \\
&= \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\psi(\mathcal{O})}(A(\psi(\mathcal{O}),g_{\psi(\mathcal{O})})) \\
&= \mathcal{A}(\psi(\mathcal{O}))
\end{aligned}
$$

Die Abbildung $\hat{\alpha}_\psi$ existiert damit als Morphismus in der Kategorie $\mathfrak{Alg}$.

Eigenschaften wie die *Kausalität* zwischen den Algebren von globalhyperbolischen Untermannigfaltigkeiten der Raumzeit $(\mathcal{N},g_\mathcal{N})$ sind allerdings nur in einigen Fällen gewährleistet. Betrachtet man nämlich zwei relativkompakte globalhyperbolische Untermannigfaltigkeiten $\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2$ in $(\mathcal{N},g_\mathcal{N})$, dann lässt sich nur im Falle einer weiteren globalhyperbolischen Raumzeit $\mathcal{O}_3 \in \mathcal{K}(\mathcal{N},g_\mathcal{N})$, die die Gebiete $i_{\mathcal{O}_3\mathcal{O}_j}((\mathcal{O}_j,g_{\mathcal{O}_j})),\ j \in \{1,2\}$ in einem kausal unabhängigen Zusammenhang enthält, eine derartige Beziehung formulieren. Dabei gilt

$$
\begin{aligned}
[\hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}_1}(A(\mathcal{O}_1,g_{\mathcal{O}_1})),\hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}_2}(A(\mathcal{O}_2,g_{\mathcal{O}_2}))] &= [\hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}_3}\circ\alpha_{\mathcal{O}_3\mathcal{O}_1}(A(\mathcal{O}_1,g_{\mathcal{O}_1})),\hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}_3}\circ\alpha_{\mathcal{O}_3\mathcal{O}_2}(A(\mathcal{O}_2,g_{\mathcal{O}_2}))] \\
&= \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}_3}([\alpha_{\mathcal{O}_3\mathcal{O}_1}(A(\mathcal{O}_1,g_{\mathcal{O}_1})),\alpha_{\mathcal{O}_3\mathcal{O}_2}(A(\mathcal{O}_2,g_{\mathcal{O}_2}))])
\end{aligned}
$$

für den Kommutator von $A(\mathcal{O}_1,g_{\mathcal{O}_1})$ und $A(\mathcal{O}_2,g_{\mathcal{O}_2})$ in $\mathcal{A}(\mathcal{N},g_\mathcal{N})$, der sich in diesem Falle vollkommen durch den Kommutator in $A(\mathcal{O}_3,g_{\mathcal{O}_3})$ beschreiben lässt.

Um eine Quantenfeldtheorie für die erweiterte Klasse von Raumzeiten aus $\mathfrak{Lor}$ zu definieren, brauchen wir allerdings ein kausales dynamisches Gesetz, welches die Vergangenheit mit der Zukunft der algebraischen Strukturen in Beziehung setzt. Für die globalhyperbolischen Untermannigfalten einer Raumzeit $(\mathcal{N},g_\mathcal{N})$ ist dies durch das Zeitschicht-Axiom gegeben. Diese Regel ist allerdings in ihrer bestehenden Form nicht auf nichtglobalhyperbolische Raumzeiten übertragbar, da diese keine Cauchy-Flächen beinhalten (Siehe Abschnitt 2.2). Für gewisse algebraische Strukturen (im Sinne von $^*$-bzw. C$^*$-Algebren) lässt sich allerdings ein Ersatz für diese Forderung finden.
Dies gelingt uns durch Einführung weiterer Relationen. Dabei dürfen diese die bestehenden Strukturen der lokalen Algebren $A(\mathcal{O},g_\mathcal{O})$ nicht verändern. Die Relationen lassen sich dabei, in Analogie zur Konstruktion von $\mathcal{A}(\mathcal{N},g_\mathcal{N})$, durch $^*$-Ideale definieren.
Da die Observablenalgebren der bisher bekannten Quantenfeldtheorien stets durch einfache Algebren gegeben sind, können wir dieses Verhalten auch für unsere Konstruktion berücksichtigen. Damit verbunden lässt sich das gesuchte $^*$-Ideal als **maximales $^*$-Ideal** auszeichnen (siehe Anhang B.2). Diese Einschränkung an unsere Konstruktion hinterlässt allerdings immer noch eine grosse Klasse an möglichen $^*$-Ideal Konstellationen.
Auf Raumzeiten, die eine zugehörige Gruppe von isometrischen Diffeomorphismen besitzen, lässt sich die Wahl möglicher maximaler Ideale noch etwas weiter einschränken. Betrachten wir nämlich die aus der Gruppe der isometrischen Diffeomorphismen $\psi \in G_\mathcal{N}$ der Raumzeit $(\mathcal{N},g_\mathcal{N})$ gebildete zugehörige Gruppe der $^*$-Algebrenisomorphismen
$\hat{\alpha}_\psi \in hom_{\mathfrak{Alg}}(\mathcal{A}(\mathcal{N},g_\mathcal{N}),\mathcal{A}(\mathcal{N},g_\mathcal{N}))$, dann gilt:

**Satz 6.5.** *Zu jedem* $^*$*-Algebrenisomorphismen* $\hat{\alpha}_\psi$ *in* $\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ *gibt es einen eindeutigen zugehörigen Isomorphismus* $\alpha_\psi$ *in der Quotienten-Algebra* $\mathfrak{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$, *wenn das maximale* $^*$*-Ideal* $\mathcal{J}(\mathcal{N})$ *invariant unter* $\hat{\alpha}_\psi$ *ist, d.h. es gilt*

$$\hat{\alpha}_\psi(\mathcal{J}(\mathcal{N})) = \mathcal{J}(\mathcal{N})$$

*für alle* $\psi \in G_{\mathcal{N}}$.

*Beweis.* Mit $\mathcal{J}(\mathcal{N}) = \mathrm{Ker}\alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})}$ und $\hat{\alpha}_\psi$ ergibt sich das kommutierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})}"] \arrow[dr, "\hat{\alpha}_\psi"'] & & \mathfrak{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \\ & \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \arrow[ur, "\tau"'] & \end{tikzcd}$$

mit einem eindeutigen $^*$-Algebrenhomomorphismus $\tau$, der sich durch $\tau = \alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})} \circ \hat{\alpha}_{\psi^{-1}}$ ergibt. Dabei folgt aus der Eigenschaft $\mathrm{Ker}\hat{\alpha}_\psi = \{0\}$, dass $\mathrm{Ker}\tau \simeq \mathrm{Ker}\alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})}$ ist.
Nach Satz 6.4 gilt nun, dass durch das kommutierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})}"'] & & \mathfrak{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \\ & \mathfrak{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \arrow[ur, "\alpha_{\psi^{-1}}"'] & \end{tikzcd}$$

ein eindeutiger $^*$-Algebrenhomomorphismus $\alpha_{\psi^{-1}}$ definiert ist, wenn $\mathrm{Ker}\alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})} \subset \mathrm{Ker}\tau$.
Da $\mathrm{Ker}\tau$ ein maximales Ideal repräsentiert, gilt für den Fall das $\mathrm{Ker}\tau \neq \mathrm{Ker}\alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})}$ stets, dass $\mathrm{Ker}\alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})} \not\subset \mathrm{Ker}\tau$ ist.
Daraus folgt $\mathrm{Ker}\alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})} = \mathrm{Ker}\tau$ und damit $\hat{\alpha}_\psi(\mathcal{J}(\mathcal{N})) = \mathcal{J}(\mathcal{N})$ □

*Bemerkung* 6.6. Aus der Isomorphie der Kerne von $\tau$ und $\alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})}$ folgt desweiteren, dass $\mathrm{Ker}\alpha_{\psi^{-1}} = \{0\}$ ist. Damit handelt es sich bei den Abbildungen $\alpha_\psi$ um $^*$-Algebrenisomorphismen.

Für maximale Ideale, die diese Bedingung nicht erfüllen, gibt es keinen direkten eindeutigen Übergang für die Gruppenstruktur $G_{\mathcal{N}}$. Von unseren Quantenfeldtheorien erwarten wir allerdings diese Eigenschaft.

## 6.2 CCR- und Weyl-Algebren auf nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten

Für eine nichtglobalhyperbolische Raumzeit $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$, die eine retardierte und avancierte Fundamentallösung der Klein-Gordon-Gleichung zulässt, ergeben sich über die zugehörigen symplektischen Räume $\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}}) = E_{\mathcal{N}}(C_0^\infty(\mathcal{N}))$ und die Funktoren $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathcal{W}$ Quantenfeldtheorien im Sinne von CCR-Algebren $\mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}}))$ bzw. Weyl-Algebren $\mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}})$. Diese Quantenfeldtheorien, die sich auf nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten nicht allein nach dem Konzept des allgemein kovarianten Lokalitätsprinzips beschreiben lassen, versuchen wir nun in unseren neu entwickelten Zugang zu integrieren.

Vorerst wollen wir allerdings die symplektischen Räume $\mathcal{R}(\mathcal{N},\sigma_{\mathcal{N}})$ bzgl. $(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ etwas genauer betrachten. Aufgrund deren Konstruktion über die Räume der Funktionen mit kompakten Träger $C_0^\infty(\mathcal{N})$ und dem Kriterium, dass sich jedes Element $f$ aus $C_0^\infty(\mathcal{N})$ stets über eine endliche Zerlegung der Eins als Summe von Funktionen $f_j := \chi_j f$ mit supp$f_j \in i_{\mathcal{N}\mathcal{O}_j}(\mathcal{O}_j)$, $\mathcal{O}_j \in \mathcal{K}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ schreiben lässt, erfolgt für Elemente $E_{\mathcal{N}}(f) \in \mathcal{R}(\mathcal{N},\sigma_{\mathcal{N}})$ stets folgende Zerlegung.

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{N}}(f) &= E_{\mathcal{N}}(\sum_{j=1}^n f_j) = \sum_{j=1}^n E_{\mathcal{N}}(f_j) \\ &= \sum_{j=1}^n E_{\mathcal{N}}(i_{\mathcal{N}\mathcal{O}_j *}(\hat{f}_j)) \\ &= \sum_{j=1}^n \varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}_j}(E_{\mathcal{O}_j}(\hat{f}_j)) \end{aligned}$$

Dabei ergibt sich der letzte Schritt aufgrund von Satz 3.6 und der eindeutigen Beziehung von $\hat{f}_j \in C_0^\infty(\mathcal{O})$ zu $f_j$, gegeben durch$f_j = i_{\mathcal{N}\mathcal{O}_j *}(\hat{f}_j)$. Jedes Element von $\mathcal{R}(\mathcal{N},\sigma_{\mathcal{N}})$ lässt sich demnach lokal zerlegen und über symplektische Abbildungen aus den Räumen $\mathcal{R}(\mathcal{O},\sigma_{\mathcal{O}})$ mit $(\mathcal{O},g_{\mathcal{O}}) \in \mathcal{K}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ rekonstruieren (**Zerlegungseigenschaft**).
Diese Eigenschaft hilft uns insofern weiter, dass sich über die Abbildungen $\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}}$ und dem Funktor $\mathfrak{C}$, die CCR-Algebren der globalhyperbolischen Raumzeiten $(\mathcal{O},g_{\mathcal{O}}) \in \mathcal{K}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ über *-Algebrenhomomorphismen $c(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}})$ nach $\mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{N},\sigma_{\mathcal{N}}))$ einbetten lassen, und sich jedes Element $\Phi_{(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})}(E_{\mathcal{N}}(f))$ aus $\mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{N},\sigma_{\mathcal{N}}))$ über eine endliche Linearkombination

$$\Phi_{(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})}(E_{\mathcal{N}}(f)) = \sum_{j=1}^n c(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}_j})(\Phi_{\mathcal{O}_j,g_{\mathcal{O}_j}}(E_{\mathcal{O}_j}(\hat{f}_j)))$$

bildet.
Für Weyl-Algebren fordert die Zerlegungseigenschaft der symplektischen Elemente, das sich die Weylelemente $\mathcal{W}(E_{\mathcal{N}}(f))$ stets nach

$$\begin{aligned} W(E_{\mathcal{N}}(f)) &= W(\sum_{j=1}^n E_{\mathcal{N}}(f_j)) = W(\sum_{j=1}^{n-1} E_{\mathcal{N}}(f_j))W(E_{\mathcal{N}}(f_n))e^{-i/2\sigma_{\mathcal{N}}(\sum_{j=1}^{n-1} E_{\mathcal{N}}(f_j),E_{\mathcal{N}}(f_n))} \\ &= \prod_{j=1}^n (W(E_{\mathcal{N}}(f_j)\prod_{i<j} e^{-i/2\sigma_{\mathcal{N}}(E_{\mathcal{N}}(f_i),E_{\mathcal{N}}(f_j))})) \\ &= \prod_{j=1}^n (\mathcal{W}(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}_j})(W(E_{\mathcal{O}_j}(\hat{f}_j)))\prod_{i<j} e^{-i/2\sigma_{\mathcal{N}}(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}_i}(E_{\mathcal{O}_i}(\hat{f}_i)),\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}_j}(E_{\mathcal{N}}(f_j)))}) \\ &= \lambda\prod_{j=1}^n \mathcal{W}(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}_j})(W(E_{\mathcal{O}_j}(\hat{f}_j))) \end{aligned}$$

mit $\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1$ umformen lassen.
Andererseits lässt sich aus den CCR-Algebren $\mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{O},\sigma_{\mathcal{O}}))$ die Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ nach der

Konstruktionsvorschrift von Abschnitt 6.1 gewinnen. Diese algebraische Struktur in Verbindung mit der Kompatibilitätseigenschaft bzgl. globalhyperbolischer Teilmengen von $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$, die sich über

$$\begin{aligned} c(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}_2}) \circ \alpha_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1} &= c(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}_2}) \circ c(\varrho_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}) \\ &= c(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}_2} \circ \varrho_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}) \\ &= c(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}_1}) \end{aligned}$$

für alle $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ mit $i_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{O}_2$ ergibt, folgt eine Beziehung zwischen $\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ und $\mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}}))$, die sich nach dem folgenden Satz formulieren lässt.

**Satz 6.7.** *Für die Familie $\{c(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}}) : A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \to \mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}})),\ \mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})\}$ der $^*$-Algebrenhomomorphismen des Funktors $\mathfrak{C}$ folgt die Existenz eines eindeutigen surjektiven $^*$-Algebrenhomomorphismus $\alpha_{\sigma_{\mathcal{N}}}$ und das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \arrow[rr, "\hat{\alpha}_{\sigma_{\mathcal{N}}}"] & & \mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}})) \\ & A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}), \arrow[ul, "\hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}}"] \arrow[ur, "c(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}})"'] & \end{tikzcd}$$

*das für alle $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ kommutiert.*

*Beweis.* [5] Für die Algebren $A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) = \mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{O}, \sigma_{\mathcal{O}}))$ ergibt sich über die zugehörige freie Algebra $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ und den Abbildungen $c_{\mathcal{G}_{\mathcal{N}}}$ (siehe Satz 6.3) sowie

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{G}_{\mathcal{N}}} : \mathcal{G}_{\mathcal{N}} &\to \mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}})) \\ (B, \mathcal{O}) &\mapsto c(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}})(B) \end{aligned}$$

die Existenz eines eindeutigen $^*$-Algebrenhomomorphismus $\alpha^{\mathcal{N}}_{\sigma_{\mathcal{N}}}$ mit

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_{\mathcal{N}} \arrow[rr, "c_{\mathcal{G}_{\mathcal{N}}}"] \arrow[dr, "c_{\mathcal{G}_{\mathcal{N}}}"'] & & \mathcal{A}_{\mathcal{N}} \arrow[dl, "\alpha^{\mathcal{N}}_{\sigma_{\mathcal{N}}}"] \\ & \mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}})) & \end{tikzcd}$$

aufgrund der universellen Eigenschaft.
Betrachtet man nun Elemente $(A, \mathcal{O}) \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$, die sich im allgemeinen durch

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j_i=1}^{n_i} \Phi_{(\mathcal{O}_{j_i}, g_{\mathcal{O}_{j_i}})}(E_{\mathcal{O}_{j_i}} f_{j_i}) + \lambda_0 \mathbb{1},\ f_{j_i} \in C_0^\infty(\mathcal{O}_{j_i})$$

darstellen lassen, dann ergibt sich für $(A, \mathcal{O}_1) - (\alpha_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}(A), \mathcal{O}_2) \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ bzgl. $\alpha^{\mathcal{N}}_{\sigma_{\mathcal{N}}}$ die Beziehung

[5] Der Beweis zu Satz 6.7 hat dabei denselben Aufbau wie der Beweis von Satz 6.3.

$\alpha^{\mathcal{N}}_{\sigma_{\mathcal{N}}}((A,\mathcal{O}_1)-(\alpha_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}(A),\mathcal{O}_2))=0$, da sich für die einzelnen Feldterme $\Phi_{(\mathcal{O},g_{\mathcal{O}})}(E_{\mathcal{O}}f)$

$$\begin{aligned}
\alpha^{\mathcal{N}}_{\sigma_{\mathcal{N}}}((\Phi_{(\mathcal{O}_1,g_{\mathcal{O}_1})}(E_{\mathcal{O}_1}f),\mathcal{O}_1) &- (\alpha_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}(\Phi_{(\mathcal{O}_1,g_{\mathcal{O}_1})}(E_{\mathcal{O}_1}f)),\mathcal{O}_2)) \\
&= \alpha^{\mathcal{N}}_{\sigma_{\mathcal{N}}}((\Phi_{(\mathcal{O}_1,g_{\mathcal{O}_1})}(E_{\mathcal{O}_1}f),\mathcal{O}_1))-\alpha^{\mathcal{N}}_{\sigma_{\mathcal{N}}}((\Phi_{(\mathcal{O}_2,g_{\mathcal{O}_2})}(E_{\mathcal{O}_2}(i_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1*}f)),\mathcal{O}_2)) \\
&= c(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}_1})((\Phi_{(\mathcal{O}_1,g_{\mathcal{O}_1})}(E_{\mathcal{O}_1}f),\mathcal{O}_1)) \\
&\quad -c(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}_2})((\Phi_{(\mathcal{O}_2,g_{\mathcal{O}_2})}(E_{\mathcal{O}_2}(i_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1*}f)),\mathcal{O}_2)) \\
&= \Phi_{(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})}(E_{\mathcal{N}}(i_{\mathcal{N}\mathcal{O}_1*}f))-\Phi_{(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})}(E_{\mathcal{N}}((\underbrace{i_{\mathcal{N}\mathcal{O}_2*}\circ i_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1*}}_{i_{\mathcal{N}\mathcal{O}_1*}})f))=0.
\end{aligned}$$

ergibt. Elemente wie $(A,\mathcal{O})+(B,\mathcal{O})-(A+B,\mathcal{O})$, $(A,\mathcal{O})(B,\mathcal{O})-(AB,\mathcal{O})$ und $\lambda(A,\mathcal{O})-(\lambda A,\mathcal{O})$ mit $B=\Phi_{(\mathcal{O},g_{\mathcal{O}})}(E_{\mathcal{O}}(g))$, $g\in C_0^\infty(\mathcal{O})$ werden demnach über $\alpha^{\mathcal{N}}_{\sigma_{\mathcal{N}}}$ ebenfalls auf die Null abgebildet. Aus dieser Eigenschaft von $\alpha^{\mathcal{N}}_{\sigma_{\mathcal{N}}}$ ergibt sich damit die Beziehung

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}\subset \mathrm{Ker}\alpha^{\mathcal{N}}_{\sigma_{\mathcal{N}}}.$$

Dieses Kriterium erlaubt damit (analog zu Satz 6.3) über Satz 6.4 die Existenz eines eindeutigen *-Algebrenhomomorphismus $\hat\alpha_{\sigma_{\mathcal{N}}}$ mit dem kommutierenden Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_{\mathcal{N}} \arrow[rr, "\alpha^{\mathcal{N}}_{\sigma_{\mathcal{N}}}"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{N},\sigma_{\mathcal{N}}),\sigma_{\mathcal{N}}) \\
& \mathcal{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}}) \arrow[ur, "\hat\alpha_{\sigma_{\mathcal{N}}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Die Surjektivität von $\hat\alpha_{\sigma_{\mathcal{N}}}$ folgt dabei aus der Surjektivität von $\alpha^{\mathcal{N}}_{\sigma_{\mathcal{N}}}$, die sich wiederum aus der Zerlegungseigenschaft von $\mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{N},\sigma_{\mathcal{N}}))$ bzgl. $\mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{O},\sigma_{\mathcal{O}}))$, $(\mathcal{O},g_{\mathcal{O}})\in\mathcal{K}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ ergibt. □

Damit verbunden ergibt sich ein *-Ideal in $\mathcal{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ aus den Algebrenhomomorphismus zu $\mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{N},\sigma_{\mathcal{N}})$ mit

$$\mathcal{J}(\mathcal{N}):=\mathrm{Ker}\hat\alpha_{\sigma_{\mathcal{N}}}.$$

Dabei handelt es sich um ein **maximales *-Ideal** in $\mathcal{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ (siehe Abschnitt B.2), dass sich durch die Erzeugendenelemente

$$\begin{aligned}
\big[[(\mathbf{\Phi}_{\mathcal{O}}(\mathbf{E}_{\mathcal{O}}\mathbf{f}),\mathcal{O})]_{\mathcal{N}},[(\mathbf{\Phi}_{\hat{\mathcal{O}}}(\mathbf{E}_{\hat{\mathcal{O}}}\mathbf{g}),\hat{\mathcal{O}})]_{\mathcal{N}}\big] &- \mathbf{i}\sigma_{\mathcal{N}}(\varrho_{\mathcal{N}\mathcal{O}}(\mathbf{E}_{\mathcal{O}}\mathbf{f}),\varrho_{\mathcal{N}\hat{\mathcal{O}}}(\mathbf{E}_{\hat{\mathcal{O}}}\mathbf{g}))\mathbb{1} \\
\forall\mathcal{O},\hat{\mathcal{O}}\in\mathcal{K}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}}) &
\end{aligned}$$

ausdrücken lässt. $\mathcal{J}(\mathcal{N})$ bezeichnet man in diesen Sinne als **Kommutator-Ideal**.

Dabei definieren wir den Quotientenraum $\mathcal{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})/\mathcal{J}(\mathcal{N})$ durch $\mathfrak{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$, der auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}}) \arrow[rr, "\hat\alpha_{\sigma_{\mathcal{N}}}"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})}"'] & & \mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{N},\sigma_{\mathcal{N}}),\sigma_{\mathcal{N}}) \\
& \mathfrak{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}}). \arrow[ur, "\alpha_{\sigma_{\mathcal{N}}}"'] &
\end{tikzcd}$$

führt.
Unter Anwendung des zum Ideal zugehörigen surjektiven kanonischen *- Algebrenhomomorphismus $\alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})}$ gewinnt man mit den injektiven *-Algebrenhomomorphismen $\hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}}$ die Abbildungen $\alpha_{\mathcal{N}\mathcal{O}} : A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \to \mathfrak{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ und das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) & \overset{\alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})}}{\longrightarrow} & \mathfrak{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \\ \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}} \nwarrow & & \nearrow \alpha_{\mathcal{N}\mathcal{O}} \\ & A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}). & \end{array}$$

Dabei ist $\alpha_{\mathcal{N}\mathcal{O}} = \alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})} \circ \hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}}$ ein injektiver *-Algebrenhomomorphismus, da $A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}})$ nach Voraussetzung einfach ist.

Betrachtet man Weyl-Algebren anstelle von CRR-Algebren, so gewinnt über die Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ eine Quantenfeldtheorie auf $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$, indem man zu den symplektischen Räumen $\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}}) = E_{\mathcal{N}}(C_0^\infty(\mathcal{N}))$ die zugehörigen Weylalgebren betrachtet. Mit $A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) = \mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{O}, \sigma_{\mathcal{O}}))$ für alle $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ ergeben sich aufgrund der funktoriellen Beziehung zwischen $\mathfrak{Sym}$ und $\mathfrak{Alg}$, die Abbildungen

$$\mathcal{W}(\varrho_{\mathcal{O}}) : \mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{O}, \sigma_{\mathcal{O}})) \to \mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}})),$$

die wiederum injektive *-Algebrenhomomorphismen beschreiben. Für $A(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}})$ und $\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ erhält man andererseits die Abbildungen $\hat{\alpha}_{\mathcal{N}\mathcal{O}}$.
Über die Abbildung

$$\alpha^{\mathcal{N}}_{(\mathcal{W}, \sigma_{\mathcal{N}})} : \mathcal{A}_{\mathcal{N}} \to \mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}})),$$

die sich analog zum Beweis von Satz 6.3 aufgrund der universellen Eigenschaft ergibt, erhält man mit $\mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}}), \sigma_{\mathcal{N}})$ eine Darstellung der freien C*-Algebra $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$, die dazu führt, dass die Konvergenz in $\mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}}), \sigma_{\mathcal{N}})$ bzgl. der zugehörigen C*-Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ auch in $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ erfüllt ist.
Betrachten wir nun für die Abbildung $\alpha^{\mathcal{N}}_{(\mathcal{W}, \sigma_{\mathcal{N}})}$ Elemente der Form $(A, \mathcal{O}_1) - (\alpha_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1}(A), \mathcal{O}_2)$, $(A, \mathcal{O}) + (B, \mathcal{O}) - (A+B, \mathcal{O})$, $(A, \mathcal{O})(B, \mathcal{O}) - (AB, \mathcal{O})$ sowie $\lambda(A, \mathcal{O}) - (\lambda A, \mathcal{O})$, wobei $A$ und $B$ durch Weylelemente $\mathcal{W}(E_{\mathcal{O}} f)$ repräsentiert werden, dann ergibt sich nach einer analogen Betrachtung zum Beweis von Satz 6.7 die Erkenntnis, dass diese Elemente im Kern von $\alpha^{\mathcal{N}}_{(\mathcal{W}, \sigma_{\mathcal{N}})}$ enthalten sind. Damit gelten diese Relationen ebenfalls für alle $A$ und $B$, die sich durch eine endliche Linearkombination $\sum_{i=1}^n \lambda_i \prod_{j_i=1}^{n_i} [(W(s_{j_i} E_{\mathcal{O}_{j_i}}(f_{j_i})), \mathcal{O}_{j_i})]_{\mathcal{N}} + \lambda_0 \mathbb{1}$ formen lassen. Da die Menge der endlichen Linearkombination von Produkten der Weylelemente eine dichte Unteralgebra von $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ bildet, lässt sich diese über $\alpha^{\mathcal{N}}_{(\mathcal{W}, \sigma_{\mathcal{N}})}$ aufgrund der Zerlegungseigenschaft von $\mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}}))$ auf eine dicht liegende Unteralgebra in $\mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}}))$ abbilden. Aufgrund der Konvergenzbeziehung von $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ und $\mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}}))$ lässt sich damit das *-Ideal $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}$ als eine Teilmenge von $\mathrm{Ker}\alpha^{\mathcal{N}}_{(\mathcal{W}, \sigma_{\mathcal{N}})}$ ausdrücken, was analog zum Beweis von Satz 6.7 zu einem eindeutigen *-Algebrenhomomorphismus $\hat{\alpha}_{(\mathcal{W}, \sigma_{\mathcal{N}})} : \mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \to \mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{N}, \sigma_{\mathcal{N}}))$ führt. Durch den Kern der Abbildung $\hat{\alpha}_{(\mathcal{W}, \sigma_{\mathcal{N}})}$,[6] der ein maximales *-Ideal auf $\mathcal{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ darstellt, gewinnt man

[6] Wir bezeichnen $\mathrm{Ker}\hat{\alpha}_{(\mathcal{W}, \sigma_{\mathcal{N}})} =: \mathcal{J}(\mathcal{N})$.

eine Fortsetzung der algebraischen Struktur von den Algebren $A(\mathcal{O},g_{\mathcal{O}})$ mit $\mathcal{O} \in \mathcal{K}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ zur Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ indem man die Quotienten-Algebra

$$\mathfrak{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}}) := \mathcal{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})/\mathcal{J}(\mathcal{N})$$

bildet.
Bei $\mathfrak{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ handelt es sich demnach um eine aus Elementen von $\mathcal{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ gebildete Weyl-Algebra, die aufgrund von Satz 6.4 über die eindeutige Existenz eines $^*$-Algebrenisomorphismus $\alpha_{(\mathcal{W},\sigma_{\mathcal{N}})}$ auf das kommutierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}}) \arrow[rr, "\hat{\alpha}_{(\mathcal{W},\sigma_{\mathcal{N}})}"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathcal{J}(\mathcal{N})}"'] & & \mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{N},\sigma_{\mathcal{N}})) \\ & \mathfrak{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}}) \arrow[ur, "\alpha_{(\mathcal{W},\sigma_{\mathcal{N}})}"'] & \end{tikzcd}$$

führt.

Die Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$, die auf globalhyperbolischen Unterraumzeiten $\mathcal{O} \subset \mathcal{K}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ eingeschränkt Observablen-Algebren im Sinne des allgemein kovarianten Lokalitätsprinzips liefert, und in $1:1$ Korrespondenz mit der im klassichen Bild erhobenen Ansicht steht, dass sich Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung einer Raumzeit aus $\mathfrak{Lor}$ stets lokal auf deren globalhyperbolischen Unterraumzeiten ergeben, lässt sich damit bei Existenz einer globalen Lösung auf eine freie Observablen-Algebra erweitern.
In unserem Zugang lassen sich damit Quantenfeldtheorien implementieren.

## 6.3 Charakterisierung der maximalen $^*$-Ideale

Im vorherigen Abschnitt wurden explizit freie Quantenfeldtheorien im Sinne von Weyl- bzw. CCR-Algebren auf nichtglobalhyperbolischen Raumzeit aufgestellt und mit dem Konstruktionsschema aus Abschnitt 6.1 vereinbart. Dabei unterschieden sich die algebraischen Strukturen von $\mathcal{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ und $\mathcal{W}(\mathcal{R}(\mathcal{N},\sigma_{\mathcal{N}}))$ sowie $\mathfrak{C}(\mathcal{R}(\mathcal{N},\sigma_{\mathcal{N}}))$ nur bis auf eine endliche Menge von Relationen, die sich in einem maximalen $^*$-Ideal $\mathcal{J}(\mathcal{N})$ aus $\mathcal{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ zusammenfassen ließen.
In diesem Abschnitt wollen wir nun aus den gewonnen Informationen weitere Eigenschaften ableiten, die uns bei der Charakterisierung einer freien Quantenfeldtheorie auf nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten behilflich sein können. Dabei folgt aus der Aussage, dass die Observablen-Algebra einer freien Theorie einer nichtglobalhyperbolischen Raumzeit stets durch Bestimmung eines maximalen $^*$-Ideals aus $\mathcal{A}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ gewonnen werden kann, die Frage, ob dieses maximale $^*$-Ideal bis auf Isomorphie eindeutig einer klassischen Dynamik zugeordnet werden kann, so dass allein aus der algebraischen Quantenstruktur die klassisch möglichen dynamischen Strukturen abgeleitet werden können?
Für CCR- bzw. Weyl-Algebren lässt sich diese Frage durch die folgenden Aussagen beantworten.

**Lemma 6.8.** *Sei $\varrho \in hom_{\mathfrak{Sym}}((\mathcal{R},\sigma),(\mathcal{R}',\sigma'))$ und sei $\mathfrak{C}(\mathcal{R},\sigma) \simeq \mathfrak{C}(\mathcal{R}',\sigma')$ dann beschreibt $\varrho$ einen Symplektoisomorphismus.*

*Beweis.* Für $\varrho$ gibt es über den Funktor $\mathfrak{C}$ einen zugeordneten *-Algebrenhomomorphismus $c(\varrho)$ aus $Mor(\mathfrak{Alg})$, der sich durch die Beziehung $\Phi_{\mathcal{R}}(f) \mapsto \Phi_{\mathcal{R}'}(\varrho(f))$ ausdrücken lässt. Aufgrund der Injektivität von $c(\varrho)$ und der Isomorphie der CCR-Algebren beschreibt $c(\varrho)$ einen *-Algebrenisomorphismus von $\mathfrak{C}(\mathcal{R},\sigma)$ nach $\mathfrak{C}(\mathcal{R}',\sigma')$.
Sei nun $f \in (\mathcal{R}',\sigma')$ und $f \neq \varrho(g)$, $\forall g \in (\mathcal{R},\sigma)$, dann gilt mit $c(\varrho)^{-1}$ und dem Kommutator $[\Phi_{\mathcal{R}'}(f), \Phi_{\mathcal{R}'}(h)] = i\sigma'(f,h)\mathbb{1}$

$$\begin{aligned} c(\varrho)^{-1}([\Phi_{\mathcal{R}'}(f), \Phi_{\mathcal{R}'}(h)]) &= [c(\varrho)^{-1}(\Phi_{\mathcal{R}'}(f)), c(\varrho)^{-1}(\Phi_{\mathcal{R}'}(\varrho(s)))] \\ &= [A, \Phi_{\mathcal{R}}(s)] = i\sigma'(f,\varrho(s))\mathbb{1}, \end{aligned}$$

wobei $h$ ein beliebiges Element aus $(\mathcal{R}',\sigma')$ darstellt, das sich stets durch $h = \varrho(s)$, $s \in (\mathcal{R},\sigma)$ ausdrücken lässt. Da die einzigsten Elemente aus $\mathfrak{C}(\mathcal{R},\sigma)$, die bzgl. des Kommutators mit $\Phi_{\mathcal{R}}(s)$, $\forall s \in (\mathcal{R},\sigma)$ eine Vielfaches der Eins ergeben, durch $\Phi_{\mathcal{R}}(g)$ selbst oder $\Phi_{\mathcal{R}}(g) + \lambda\mathbb{1}$ gegeben sind, folgt daraus zwingend, dass sich $f$ durch $\varrho(g)$ mit $g \in (\mathcal{R},\sigma)$ ausdrücken lässt. □

Für Weyl-Algebren lässt sich dieses Verhalten ebenfalls zeigen, wobei man in diesem Falle von der Erkenntnis ausgeht, dass $\mathcal{W}(\mathcal{R},\sigma) = \mathcal{W}(\hat{\mathcal{R}},\hat{\sigma})$ für einen Unterraum $(\hat{\mathcal{R}},\hat{\sigma}) \subset (\mathcal{R},\sigma)$ genau dann gilt, wenn die Gleichheit der symplektischen Räume besteht (der Beweis dazu ist in [20] gegeben). Wenn für einen linearen Symplektomorphismus $\varrho \in hom_{\mathfrak{Sym}}((\mathcal{R},\sigma),(\mathcal{R}',\sigma'))$ die zugehörige Abbildung $\mathcal{W}(\varrho)$ einen *-Algebrenisomorphismus ergibt, dann folgt mit der Eigenschaft das $\varrho$ einen Symplektoisomorhismus bzgl. seines Bildraumes $\varrho(\mathcal{R},\sigma) \subset (\mathcal{R}',\sigma')$ bildet und durch die Hilfe der obigen Aussage, dass $(\mathcal{R},\sigma) \simeq (\mathcal{R}',\sigma')$ ist.

Speziell für die freien Quantenfeldtheorien von statischen nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten, die über Weyl- und CCR-Algebren beschrieben werden, bietet unser Ansatz einen interressanten Sachverhalt.
Für statische Raumzeiten aus $\mathfrak{Lor}$ haben wir in Abschnitt 3.5 eine direkte Beziehung für die globalen Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung gefunden. Unter Verwendung dieser Ergebnisse ließen sich in diesem Falle symplektische Räume $\mathcal{R}^a(\mathcal{N},\sigma_{\mathcal{N}})$ konstruieren, deren bis auf Isomorphie eindeutig zugehörigen CCR- und Weyl-Algebren Quantenfeldtheorien beschrieben. Das charackteristische an diesen Konstruktionen war die Gewinnung der Fundamentallösungen über Randbedingungen $a$ der Klein-Gordon-Gleichung, die wiederum die symplektische Struktur, die sich daraus ergab, eindeutig charakterisierten.
Aufgrund dieses Tatbestands und dem Lemma 6.8, das die eindeutige Beziehung zwischen den symplektischen Räumen und den Algebren garantiert, findet man damit als Analogon zu den Randbedingungen $a$ der klassischen Theorie, die es erlauben lokal wohldefinierte Lösungen zu globalen Lösungen fortzusetzen, die maximalen *-Ideale $\mathcal{J}^a(\mathcal{N})$ im algebraischen Formalismus. Dabei besteht aufgrund von Lemma 6.8 eine $1:1$ Korrespondenz zwischen diesen Objekten.
Im CCR-Fall ergibt sich damit die Tatsache, dass die klassischen Randbedingungen allein in den Kommutator der Felder eingehen und über diesen Weg auch auf die Quantenfeldtheorie eindeutig übertragen werden. Man muss damit nicht direkt auf den Feldern die Randbedingungen einführen, (Was mathematisch auch keinen Sinn ergibt) sondern hat über die symplektischen Formen einen geeigneten und mathematisch wohldefinierten Rahmen, der den Begriff der Randbedingung in die Quantenfeldtheorie überträgt.

# Kapitel 7

# CCR-Halbraum-Algebra und Spiegelungsprinzip

Als Beispiel einer Quantenfeldtheorie einer nichtglobalhyperbolischen Raumzeit dient in diesem Rahmen die *-Algebra eines skalaren massiven Klein-Gordon-Feldes für den Minkowski-Halbraum. Dabei beschreibt der Halbraum eine ultrastatische Raumzeit, die aufgrund ihrer Verwandtschaft zum Minkowskiraum[1] einen alternativen Ansatz zur Gewinnung der CCR-Algebrenstruktur zulässt. Im folgenden versuchen wir diese Konstruktion etwas genauer zu untersuchen.
Die Grundlage des alternativen Ansatzes liefert uns das **Schwarzsche-Spiegelungsprinzip** aus der Elektrodynamik[2]. Man gewinnt damit einen Ansatz für die Konstruktion der retardierten und avancierten Greensfunktionen des Klein-Gordon-Operators bzgl. Randbedingungen.

## 7.1 Halbraum mit Dirichlet-Randbedingungen

Für den Halbraum gilt die Notation:

$$H \text{ Halbraum } \mathbb{R}^4 \supset H \simeq \widehat{H} = \{x \in \mathbb{R}^4, x_3 > 0\}$$

Wie schon gezeigt, erhält man in diesem Falle die retardierten und avancierten Lösungen des Klein-Gordon-Operators $(\Box + m^2)$, aus denen man die Fundamentallösung $E_{\mathcal{M}_\mathcal{B}}$ gewinnt.
Die selbstadjungierte Erweiterung des Laplace-Operators $\Delta$, die zu einer wohldefinierten Fundamentallösung führt, wird in diesem Fall durch Dirichlet-Randbedingungen gegeben. Diese lassen sich auf die Fundamentallösung übertragen, wobei sie sich durch die Bedingung

$$\underbrace{E^D(f)}_{\in C^\infty(H)}\Big|_{\partial H} = 0 \quad \forall f \in C_0^\infty(H)$$

[1] Der Halbraum lässt sich aus dem Minkowskiraum konstruieren und erbt die meisten Symmetriestrukturen (Isometrien).

[2] In der Elektrostatik benutzt man im Falle einer leitenden Platte die eine Ladung verdeckt, Spiegelladungen als Ersatz für die induzierten Oberflächenladungen, die wiederum stark von den Randbedingungen des zugehörigen Laplace-Operators abhängig sind.

äussern.
Einen Ansatz für die Kommutatorfunktion $E^D$ gewinnt man aus dem Schwarzschen-Spiegelungsprinzip aus der Elektrodynamik. Dieser ergibt sich, indem man für den Integralkern (Kommutatorfunktion) $E^D(x,y)$ der Fundamentallösung

$$E^D(x,y) = \Delta(x-y) - \Delta(Sx-y)$$

setzt. Für $S \in O(4)$; gilt

$$S : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

mit $\det(S) = -1$.
Dabei handelt es sich um eine Spiegelung an der $x_3$-Achse. Dieser Ansatz erfüllt die Dirichlet-Randbedingung, denn es folgt

$$\begin{aligned} E^D f(x)\Big|_{x_3=0} &= \int d^4y f(y)(\Delta(x-y) - \Delta(Sx-y))|_{x_3=0} = 0 \\ E^D(f)\Big|_{\partial H} &= 0 \qquad \forall C_0^\infty(H). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} E^D((\Box + m^2)f) &= \int d^4y((\Box + m^2)f(y))(\Delta(x-y) - \Delta(Sx-y)) \\ &= \int d^4y f(y)((\Box + m^2)\Delta(x-y) - (\Box + m^2)\Delta(Sx-y)) = 0 \end{aligned}$$

*Bemerkung* 7.1. Über die 2-Punktfunktion $\Delta_+^D(x,y) = \Delta_+(x-y) - \Delta_+(Sx-y)$ mit $\Delta_+(x-y) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} e^{-ip(x-y)}$ kann man ebenfalls die Kommutatorfunktion bestimmen, die sich aus dem Imaginärteil dieser Funktion ergibt ($E^D(x,y) = \Delta(x-y) - \Delta(Sx-y) = 2\mathrm{Im}(\Delta_+^D(x-y))$). Dabei gibt es allerdings bei den statischen Raumzeiten bzgl. der Randbedingungen schwerwiegende Probleme hinsichtlich der Konvergenz der Zweipunktfunktion (z.B beim Casimireffekt [5]).

Die Kommutatorfunktion $E^D(x,y)$ erfüllt die Bedingungen:

$$\begin{aligned} E^D(0,\mathbf{x}) &= 0, \ \text{ da } E(0,\mathbf{x}) = 0 \\ \partial_t E^D(0,\mathbf{x}) &= -(\delta^3(\mathbf{x}) - \delta^3(S\mid_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x})) \end{aligned}$$

Mit der Kommutatorfunktion $E^D(x,y) = \Delta(x-y) - \Delta(Sx-y)$, die den Integralkern der Fundamentallösung $E^D$ bildet, haben wir einen speziellen Ausdruck der Fundammentallösung $E_{H_D}$ aus dem Beispiel 3.23. Dies zeigt sich, wenn man den Audruck

$$E_{H_D}(t,\mathbf{x};s,\mathbf{y}) = -\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})} \sin(\omega(\mathbf{p})(t-s)) e^{i\mathbf{p}_\perp(\mathbf{x}-\mathbf{y})_\perp} 2\sin(p_3x_3)\sin(p_3y_3)$$

aus 3.23 etwas weiter zerlegt. Es ergibt sich nämlich die Beziehung

$$\begin{aligned}
E_{H_D}(t,\mathbf{x};s,\mathbf{y}) &= -\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})}\sin(\omega(\mathbf{p})(t-s))e^{i\mathbf{p}_\perp(\mathbf{x}-\mathbf{y})_\perp}2\sin(p_3x_3)\sin(p_3y_3)\\
&= -2\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})}\sin(\omega(\mathbf{p})(t-s))e^{i\mathbf{p}_\perp(\mathbf{x}-\mathbf{y})_\perp}\sin(p_3x_3)\frac{e^{ip_3y_3}}{2i}\\
&+ \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})}\sin(\omega(\mathbf{p})(t-s))e^{i\mathbf{p}_\perp(\mathbf{x}-\mathbf{y})_\perp}\sin(p_3x_3)\frac{e^{-ip_3y_3}}{2i}.
\end{aligned}$$

Im ersten Integral lässt sich allerdings bzgl. einer Transformation

$$\hat{S}:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\-x_3\end{pmatrix}$$

mit $|\det(\hat{S})|=1$ der Ausdruck zu

$$E_{H_D}(t,\mathbf{x};s,\mathbf{y}) = -2\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})}\sin(\omega(\mathbf{p})(t-s))e^{i\mathbf{p}_\perp(\mathbf{x}-\mathbf{y})_\perp}\sin(p_3x_3)\frac{e^{-ip_3y_3}}{i}$$

umformen und damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
E_{H_D}(t,\mathbf{x};s,\mathbf{y}) &= -2\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})}\sin(\omega(\mathbf{p})(t-s))e^{i\mathbf{p}_\perp(\mathbf{x}-\mathbf{y})_\perp}\sin(p_3x_3)\frac{e^{-ip_3y_3}}{i}\\
&= -2\frac{1}{2}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})}\sin(\omega(\mathbf{p})(t-s))e^{i\mathbf{p}_\perp(\mathbf{x}-\mathbf{y})_\perp}\left(e^{ip_3(x_3-y_3)}-e^{-ip_3(x_3+y_3)}\right)\\
&= -\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})}\sin(\omega(\mathbf{p})(t-s))\left(e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}-e^{i\mathbf{p}(S(\mathbf{x})-\mathbf{y})}\right)\\
&= \Delta(x-y)-\Delta(Sx-y).
\end{aligned}$$

Dieses Verhalten gibt uns die Äquivalenz dieser beiden Ausdrücke und gibt dem alternativen Ansatz über das Spiegelungsprinzip das Recht einer legitimen Darstellung der Verhältnisse von Beispiel 3.23.
Aus diesen Definitionen kann man nun die Feldoperatoren für den Halbraum gewinnen.
Für das Klein-Gordon-Feld im Minkowski-Raum hatten wir nach [3] die Formulierung

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})}(e^{-ipx}a(p)+e^{ipx}a^*(p))$$

in der zugehörigen Fockraumkonstruktion.
Aufgrund des Spiegelungsprinzips kann man in diesem Fall die Felder des Halbraumes aus der Fockraumkonstruktion des Minkowski-Raumes konstruieren. Dies lässt sich über die Kommutatorrelation für das Feld $\tilde{\varphi}$ im Halbraum bewerkstelligen. Dabei gilt

$$[\tilde{\varphi}(f),\tilde{\varphi}(g)] = i(f,E^Dg)\quad \forall f,g\in C_0^\infty(H).$$

Durch diese Bedingung erhält man einen Ansatz für die Felder mit

$$\begin{aligned}[\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)] &= i(\Delta(x-y) - \Delta(Sx-y)) = [\varphi(x), \varphi(y)] - [\varphi(Sx), \varphi(y)] \\ &= [\varphi(x) - \varphi(Sx), \varphi(y)].\end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$\begin{aligned}f(x) &= \varphi(x) - \varphi(Sx) \\ &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} e^{-ipx} a(p) + e^{ipx} a^*(p) - (e^{-ipSx} a(p) + e^{ipSx} a^*(p)) \\ \text{mit } pSx &= (Sp)x \\ \Rightarrow \ f(x) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} (e^{-ipx} - e^{-iSpx}) a(p) + (e^{ipx} - e^{iSpx}) a^*(p)\end{aligned}$$

bildet dabei unsere Grundlage. Wir setzen nun mit dem Feldansatz $\tilde{\varphi}(x) := cf(x), \quad c \in \mathbb{C}$ unsere Betrachtung fort, indem wir den zugehörigen Kommutator formulieren.

$$\begin{aligned}[\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)] &= (2\pi)^{-3} \Bigg[ \Bigg( \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} c(e^{-ipx} - e^{-iSpx}) a(p) + c(e^{ipx} - e^{iSpx}) a^*(p) \\ &\quad \int \frac{d^3\mathbf{q}}{2\omega(\mathbf{q})} c(e^{-iqy} - e^{-iSqy}) a(q) + c(e^{iqy} - e^{iSqy}) a^*(q) \Bigg) \\ &- \Bigg( \int \frac{d^3\mathbf{q}}{2\omega(\mathbf{q})} c(e^{-iqy} - e^{-iSqy}) a(q) + (e^{iqy} - e^{iSqy}) a^*(q) \\ &\quad \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} c(e^{-ipx} - e^{-iSpx}) a(p) + (e^{ipx} - e^{iSpx}) a^*(p) \Bigg) \Bigg]\end{aligned}$$

Mit den Vertauschungsrelationen für die Erzeuger und Vernichter ergibt sich

$$\begin{aligned}[\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)] &= (2\pi)^{-3} c^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{d^3\mathbf{q}}{2\omega(\mathbf{q})} (e^{-ipx} - e^{-iSpx})(e^{iqy} - e^{iSqy}) a(p) a^*(q) \\ &+ (e^{ipx} - e^{iSpx})(e^{-iqy} - e^{-iSqy}) a^*(p) a(q) \\ &- ((e^{-iqy} - e^{-iSqy})(e^{ipx} - e^{iSpx}) a(q) a^*(p) \\ &+ (e^{iqy} - e^{iSqy})(e^{-ipx} - e^{-iSpx}) a^*(q) a(p)) \\ &= (2\pi)^{-3} c^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{d^3\mathbf{q}}{2\omega(\mathbf{q})} (e^{-ipx} - e^{-iSpx})(e^{iqy} - e^{iSqy}) 2\omega(\mathbf{p}) \delta(p-q) \\ &- (e^{ipx} - e^{iSpx})(e^{-iqy} - e^{-iSqy}) 2\omega(\mathbf{q}) \delta(p-q) \\ &= (2\pi)^{-3} c^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \Bigg( \underbrace{e^{-ip(x-y)}}_{1} - \underbrace{e^{-ipS(Sx-y)}}_{2} - \underbrace{e^{-ip(Sx-y)}}_{3} + \underbrace{e^{-ipS(x-y)}}_{4} \Bigg) \\ &- \Bigg( \underbrace{e^{ip(x-y)}}_{5} - \underbrace{e^{ipS(Sx-y)}}_{6} - \underbrace{e^{ip(Sx-y)}}_{7} + \underbrace{e^{ipS(x-y)}}_{8} \Bigg)\end{aligned}$$

Die Terme 2,3,6 und 7 im letzten Integral geben, da $|\det(S)| = 1$ ist, den gleichen Beitrag zur Integration bei wie 1,4,5 und 8. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
[\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)] &= 2(2\pi)^{-3}c^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})}(e^{-ip(x-y)} - e^{-ip(Sx-y)}) - (e^{ip(x-y)} - e^{ip(Sx-y)}) \\
&= i2c^2(\Delta(x-y) - \Delta(Sx-y)) \\
\Rightarrow \quad c^2 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Und damit gilt,

$$\tilde{\varphi}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})}\left(\frac{(e^{-ipx} - e^{-iSpx})}{\sqrt{2}}a(p) + \frac{(e^{ipx} - e^{iSpx})}{\sqrt{2}}a^*(p)\right)$$

für das skalare massive Feld im Halbraum mit Dirichlet-Randbedingungen.
Aufgrund der Äquivalenz der Kommutatorfunktionen von Beispiel 3.23 und der hier konstruierten Form, ergibt sich auch eine Äquivalenz der zugehörigen symplektischen Räume, und damit verbunden eine Isomorphie bzgl. der CCR-Algebra, konstruiert nach dem Verfahren in Abschnitt6.7 und der hier erworbenen CCR-Algebra,erschaffen aus einer Fockraumkonstruktion im Minkowskiraum.

## 7.2 Halbraum mit von Neumann-Randbedingungen

Die von Neumann-Randbedingungen sind bzgl. der Fundamentallösung folgendermaßen definiert.

**Definition 7.2.**

$$E^N(\partial_n f)|_{\partial H} = 0 \;\Rightarrow\; E^N(\partial_3 f)\;|_{\partial \widehat{H}} = 0$$

(wobei $n$ den Normalenvektor am Punkt $x$ auf $\partial H$ beschreibt.)

Den Ansatz für die Kommutatorfunktion erhält man wie schon im vorherigen Dirichlet-Fall über das Schwarzsche-Spiegelungsprinzip. Es ergibt sich

$$E^N(x,y) = \Delta(x-y) + \Delta(Sx-y)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
E^N(\partial_{3,y} f)(x)\;|_{x_3=0} &= \int d^4y f(y)\partial_{3,x}(\Delta(x-y) + \Delta(Sx-y))\;|_{x_3=0} \\
\Rightarrow \quad \partial_{3,x}(\Delta(x-y) + \Delta(Sx-y)))\;|_{x_3=0} &= ((2\pi)^{-3}2\int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})}(-ip_3\cos(-ip(x-y)) \\
&\quad +ip_3\cos(-ip(Sx-y))))\;|_{x_3=0} = 0
\end{aligned}$$

Analog zum Dirichlet-Randwertproblem erhalten wir mit der 2-Punktfunktion die Kommutatorfunktion durch den Imaginärteil. ($\Delta^N(x,y) = \Delta(x-y) + \Delta(Sx-y) = 2\mathrm{Im}(\Delta_+^N(x-y))$).

Mit den von Neumann-Randbedingungen erhalten wir ebenfalls die Felder $\hat{\varphi}$ über die Kommutatorrelation $[\hat{\varphi}(f), \hat{\varphi}(g)] = i(f, E^N g) \quad \forall f, g \in C_0^\infty(H)$. Mit dieser Bedingung für die Felder lässt sich wieder ein Ansatz gewinnen. Daraus folgt nach einer analogen Rechnung zum vorherigen Dirichlet-Fall das Feld für den Halbraum mit von Neumann-Randbedingungen:

$$\hat{\varphi}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( \frac{(e^{-ipx} + e^{-iSpx})}{\sqrt{2}} a(p) + \frac{(e^{ipx} + e^{iSpx})}{\sqrt{2}} a^*(p) \right).$$

Die Klein-Gordon-Gleichung wird durch diesen Feldansatz erfüllt,da

$$\int d^4x f(x)(\Box + m^2)\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \int d^4x f(x)(\Box + m^2)\varphi(x) + \underbrace{\int d^4x f(x)(\Box + m^2)\varphi(Sx)}_{\int d^4x' f(Sx')(\Box + m^2)\varphi(x')} \right),$$

ergibt, wobei $\varphi((\Box + m^2)f) = 0$ ist.
Damit gilt

$$\hat{\varphi}((\Box + m^2)f) = 0 \qquad \forall f \in C_0^\infty(H).$$

Analog zum Dirichlet-Fall lassen sich diese Ergebnisse mit dem Verfahren, dass wir in den vorherigen Kapiteln verwendet haben, herleiten und der Vergleich zeigt eine Übereinstimmung der Resultate.

# Kapitel 8

# Zusammenfassung und Ausblick

Der Begriff der Randbedingung, der in der klassischen Feldtheorie zur Implementierung von Eigenschaften der Umgebung mit direktem Bezug zum System verwendet wird, liefert für eine Vielzahl physikalischer Effekte (siehe Kapitel 1) vernünftige Erklärungsmodelle, die in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Beobachtungen stehen.
Auch in der Quantenfeldtheorie führen theoretische Modelle von Effekten, wie z.B für den Casimir-Effekt, unter Anwendung von Randbedingungen zu beobachtungstreuen Ergebnissen (siehe [2]). Gerade dieser Sachverhalt zeigt uns, dass das Konzept von Randbedingungen auch in der Quantenfeldtheorie von essentieller Bedeutung ist. Trotz allem ist die direkte Anwendung der Methode aus der klassischen Theorie, wie wir es in Kapitel 1 verdeutlicht haben, kein mathematisch wohldefinierter Ansatz.
Motiviert durch die Erforderlichkeit eines vernünftigen Ersatzes für das Konzept der Randbedingungen in der Quantenfeldtheorie, um den Casimir-Effekt und andere Phänomene durch ein solides theoretisches Gerüst zu stützen, haben wir innerhalb des mathematisch wohldefinierten Rahmens der algebraischen Quantenfeldtheorie einen äquivalenten Begriff gefunden.
Ausgehend von der klassischen Klein-Gordon-Feldtheorie auf nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten haben wir in diesem Rahmen unter Einschränkung der Betrachtung auf statische Raumzeiten, den Begriff der Randbedingung durch das Konzept der selbstadjungierten Erweiterung aus der Funktionalanalysis wiedergefunden. Damit verbunden, ließen sich die Lösungsräume der Klein-Gordon-Feldgleichung unter Berücksichtigung der Randbedingungen konstruieren. Den Lösungsräumen, die symplektische Räume darstellen, konnte über einen funktoriellen Zusammenhang eine freie Quantenfeldtheorie in Form von Weyl- und CCR-Algebren zugeordnet werden. Aus einem von uns entwickelten Zugang, der auf der freien Algebra der lokalen Observablen Algebren beruht, konnte über Quotientenbildung mit einem $^*$-Ideal eine Algebra für die gesamte Raumzeit konstruiert werden, die lokal mit den Observablenalgebren übereinstimmte. Im Vergleich mit den Weyl- und CCR-Algebren der symplektischen Lösungsräume, ließen sich weitere Relationen in Form eines $^*$-Ideals fixieren, die aus der Konstruktion unseres Ansatzes zu einer freien Quantenfeldtheorie auf nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten führten. Dem $^*$-Ideal konnte dabei die Fortsetzung der lokalen zu globalen Lösungen, welche im statischen Fall der Bestimmung von Randbedingungen entsprach, in eindeutiger Weise zugeordnet werden. Damit verbunden haben wir in unserer Arbeit eine Beschreibungmöglichkeit gefunden, die uns

erlaubt das Konzept der Randbedingungen in die Quantenfeldtheorie zu übertragen.
Ausgehend von unserem Konzept könnten sich in Zukunft auch Betrachtungen zu komplexeren Quantenfeldtheorien durchführen lassen. Wechselwirkende Theorien, Eichtheorien und Theorien mit Spin wären zum Beispiel geeignete Kandidaten. Auch eine Betrachtung im Rahmen von dynamischen Randbedingungen wäre eine Möglichkeit, die hier entwickelten Konzepte auf allgemeinere Konstruktionen zu erweitern. Dabei könnte der Begriff des Zustands auf Raumzeiten mit Randbedingungen eine wesentliche Rolle spielen. Die Diskussion dieser Objekte wurde schließlich in unserer Arbeit vollkommen vernachläßigt. Um allerdings präzise Berechnungen hinsichtlich des Casimir-Effekts durchzuführen zu können, muss eine derartige Diskussion aufgenommen werden.

# Anhang A

# Kategorientheorie

In diesem Abschnitt der nach [24] und [25] aufgebaut ist, sollen einige Strukturen aus der Kategorientheorie erläutert werden, die wir in der vorliegenden Arbeit verwenden wollen.

**Definition A.1.** Eine *Kategorie* $\mathfrak{A}$ besteht aus einer Klasse von Objekten $Obj(\mathfrak{A})$, wobei es für je zwei Objekte $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Obj(\mathfrak{A})$ eine Menge $mor(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gibt, die sich aus den *Morphismen* (strukturerhaltende Abbildungen) von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ergibt. Betrachtet man drei Objekte $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in Obj(\mathfrak{A})$ sowie die Morphismen zwischen diesen Objekten, dann gilt das Kompositions-Gesetz

$$mor(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \times mor(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \;\rightarrow\; mor(\mathcal{A}, \mathcal{C}).$$

Desweiteren gelten für eine Kategorie die folgenden drei Axiome:

1. Die zwei Mengen $mor(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und $mor(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ sind disjunkt, außer $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ und $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

2. Für jedes $\mathcal{A} \in Obj(\mathfrak{A})$ existiert ein Morphismus $id_{\mathcal{A}} \in mor(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, wobei dieser als links- und rechts-Identität für Elemente aus $mor(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und $mor(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ für alle $\mathcal{B} \in Obj(\mathfrak{A})$ agiert.

3. Das Kompositions-Gesetz ist assoziativ, d.h. für $f \in mor(\mathcal{A}, \mathcal{B}), g \in mor(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ und $h \in mor(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ gilt
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$
für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in Obj(\mathfrak{A})$

Die Klasse der Morphismen wird durch $Mor(\mathfrak{A})$ gegeben.

Eine weitere Aussage, die wir in unserem Fall verwenden können ist die folgende.

**Definition A.2.** Ein Objekt $\mathcal{A}$ einer Kategorie $\mathfrak{A}$ bezeichnet man als universell, wenn für jedes Objekt $\mathcal{B}$ der Kategorie ein eindeutiger Morphismus von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$ besteht.

Für veschiedene Kategorien lassen sich Zusammenhänge finden, d.h. man kann die Kategorien miteinander in Beziehung bringen. Dies kann z.B. über die folgende Struktur definiert werden.

**Definition A.3.** Hat man zwei Kategorien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, dann beschreibt ein *kovarianter Funktor* $F$ von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ eine Regel, die jedem Objekt $\mathcal{A}$ in $\mathfrak{A}$ ein Objekt $F(\mathcal{A})$ in $\mathfrak{B}$ und jedem Morphismus $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ einen Morphismus $F(f) : F(\mathcal{A}) \to F(\mathcal{B})$ zuordnet. Damit erhalten wir:

- Für alle $\mathcal{A} \in Obj(\mathfrak{A})$ gilt $F(id_{\mathcal{A}}) = id_{F(\mathcal{A})}$.
- Wenn $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ zwei Morphismen von $\mathfrak{A}$ sind, dann folgt damit

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Für einen *kontravarianten Funktor* $\widehat{F}$ gilt bei denselben Voraussetzungen, dass $F(f) : F(\mathcal{B}) \to F(\mathcal{A})$ und $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ erfüllt ist.

Als Letztes wollen wir noch das Konzept einer *natürlichen* Transformation erläutern.

**Definition A.4.** Haben wir zwei Kategorien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, dann können wir die Funktoren von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ als Objekte einer weiteren Kategorie betrachten, wobei dessen Morphismen so definiert werden können, dass mit zwei (kovarianten) Funktoren $F$ und $\widetilde{F}$ dieser Kategorie, der Morhismus $\zeta : F \to \widetilde{F}$ genannt *natürliche* Transformation die Regel beschreibt, die jedem Objekt $\mathcal{A} \in Obj(\mathfrak{A})$ einen Morphismus

$$\zeta_{\mathcal{A}} : F(\mathcal{A}) \to \widetilde{F}(\mathcal{A})$$

zuordnet, so dass für Morphismen $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} F(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\zeta_{\mathcal{A}}} & \widetilde{F}(\mathcal{A}) \\ {\scriptstyle F(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{F}(f)} \\ F(\mathcal{B}) & \xrightarrow[\zeta_{\mathcal{B}}]{} & \widetilde{F}(\mathcal{B}) \end{array}$$

## A.1 Konstruktion einer Tensorkategorie

In diesem Abschnitt klären wir zuerst einmal den Begriff eines Tensorprodukts für Kategorien.

**Definition A.5.** Für eine Kategorie $\mathfrak{A}$ beschreibt ein Funktor $\otimes : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ ein *Tensorprodukt*, wenn

- es ein Objekt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \in Obj(\mathfrak{A})$ für jedes Paar $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ von Objekten aus $\mathfrak{A}$ gibt
- es einen Morphismus $f \otimes g$ für jedes Paar $(f, g)$ von Morphismen aus $\mathfrak{A}$ gibt, wobei die Bedingungen $(f \otimes g)(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = f(\mathcal{A}) \otimes g(\mathcal{B})$, $id_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} = id_{\mathcal{A}} \otimes id_{\mathcal{B}}$ und $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$ gelten müssen.

Mit dieser Konstruktion können wir nun eine Tensorkategorie definieren.

**Definition A.6.** Eine *Tensorkategorie* ist eine Kategorie $\mathfrak{A}$ mit einem Funktor (*Tensorfunktor*)

$$\otimes : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$$

und einem Objekt $\mathbb{1}$, der *Tensoreins*. Dabei ist die Tensoroperation $\otimes$ assoziativ in dem Sinne, dass es einen natürlichen Isomorphismus $\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}} : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ gibt. Es folgt damit, dass die Tensoreins $\mathbb{1}$ eine links- und rechts Identität darstellt, d.h. es existieren natürliche Isomorphismen $l : \otimes(\mathbb{1} \times id) \to id$ und $r : \otimes(id \times \mathbb{1}) \to id$, wodurch die Isomorphismen

$$l_{\mathcal{A}} : \mathbb{1} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad \text{bzw} \quad r_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \otimes \mathbb{1} \to \mathcal{A}$$

für jedes Objekt $\mathcal{A}$ definiert sind.
Aus diesen Bedingungen folgt, dass das *Pentagon*-Axiom

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C})) \otimes \mathcal{D} \arrow[dd, "\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{B}\otimes\mathcal{C},\mathcal{D}}"] & ((\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C}) \otimes \mathcal{D} \arrow[l, "\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}} \otimes id_{\mathcal{D}}"'] \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}}"] \\
 & (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes (\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}}"] \\
\mathcal{A} \otimes ((\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \otimes \mathcal{D}) \arrow[r, "id_{\mathcal{A}} \otimes \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}}"'] & \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes (\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}))
\end{tikzcd}$$

und das *Dreiecks*-Axiom

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{A} \otimes \mathbb{1}) \otimes \mathcal{B} \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{A},\mathbb{1},\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "r_{\mathcal{A}} \otimes id_{\mathcal{B}}"'] & & \mathcal{A} \otimes (\mathbb{1} \otimes \mathcal{B}) \arrow[dl, "id_{\mathcal{A}} \otimes l_{\mathcal{B}}"] \\
 & \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} &
\end{tikzcd}$$

erfüllt sind.

Zwischen diesen Kategorien kann man ebenfalls formerhaltende Abbildungen definieren.

**Definition A.7.** Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Tensorkategorien, dann ist ein *Tensorfunktor* von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ durch ein Tripel $(F, \eta_0, \eta_2)$ gegeben, wobei

$$F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

einen Funktor beschreibt.
$\eta_0$ behandelt einen Isomorphismus

$$\eta_0 : \mathbb{1}_{\mathfrak{B}} \to F(\mathbb{1}_{\mathfrak{A}})$$

und $\eta_2$ einen natürlichen Isomorphismus von Funktoren von $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ und es gilt

$$\eta_2 : \otimes_{\mathfrak{B}} \circ (F \times F) \to F \circ \otimes_{\mathfrak{A}}$$

und damit

$$\eta_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : F(\mathcal{A}) \otimes_{\mathfrak{B}} F(\mathcal{B}) \to F(\mathcal{A} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathcal{B})$$

## A.2 Quantenfeldtheorie als kovarianter Tensorfunktor

Betrachten wir nun die Kategorie $\mathfrak{Man}$ der globalhyperbolischen Mannigfaltigkeiten, dann können wir diese zur Kategorie $\mathfrak{Man}^{\otimes}$ der Mannigfaltigkeiten mit globalhyperbolischen Zusammenhangskomponenten erweitern und es lässt sich zeigen, dass es sich bei dieser Kategorie um eine Tensorkategorie handelt.
Der Tensorfunktor $\otimes$ ist in diesem Fall durch die disjunkte Vereinigung bzgl. der Objekte mit $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2$ für $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in Obj(\mathfrak{Man}^{\otimes})$ gegeben.
Da es sich bei den Morphismen zwischen den Objekten um isometrische Einbettungen handelt (stetige Abbildungen), ist der Bildraum zweier disjunkter Vereinigungen zusammenhängender Objekte $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ ebenfalls als disjunkte Vereinigung zweier Objekte (jeweils einzeln zusammenhängende Gebiete) aus $\mathfrak{Man}^{\otimes}$ charakterisierbar. D.h. die globalhyperbolischen Zusammenhangskomponenten $\mathcal{M}_i$ werden einzeln und unabhängig voneinander über isometrische Einbettungen aus $\mathfrak{Man} \subset \mathfrak{Man}^{\otimes}$ auf globalhyperbolische Mannigfaltigkeiten $\mathcal{N}_i$ abgebildet, wobei das Bild der gesamten Abbildung in der disjunkten Vereinigung der globalhyperbolischen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{N}_i = \psi(\mathcal{M}_i)$ liegt. Der Morphismus einer disjunkten Vereinigung lässt sich also als ein Tensorprodukt der Morphismen der Zusammenhangskomponenten beschreiben:

$$\widetilde{\psi} = \psi_1 \otimes \psi_2 : \mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2 \to \mathcal{N}_1 \sqcup \mathcal{N}_2$$

mit $\psi_i : \mathcal{M}_i \to \mathcal{N}_i \quad \forall i \in \{1, 2\}$.

Die Tensoreins ist in diesem Modell durch die leere Menge $\varnothing$ gegeben. Mit dieser und den anderen Bedingungen erkennt man sehr leicht, dass die Einheitsregeln sowie die Axiome erfüllt sind.

Für eine Kategorie von C*-Algebren (*-Algebren, von Neumann Algebren usw.) lässt sich ein Tensorfunktor über das Tensorprodukt von Algebren definieren. Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ beliebige Objekte (Algebren) aus der Kategorie $\mathfrak{Alg}$, dann ist durch das algebraische Tensorprodukt $\odot$ eine *-Algebra $\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$ gegeben, für die das Produkt $\cdot : \mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$ durch

$$(A_1 \odot A_2)(A_1' \odot A_2') = (A_1 A_1' \odot A_2 A_2') \qquad \forall A_i, A_i' \in \mathcal{A}_i$$

erklärt ist.
Bzgl. des algebraischen Tensorprodukts erhält man Algebrenhomomorphismen $\hat{\alpha}$ über das Tensorprodukt von Algebrenhomomorphismen der Algebren $\mathcal{A}_i$, d.h.

$$\hat{\alpha} = \alpha_1 \odot \alpha_2 : \mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}_1 \odot \mathcal{B}_2,$$

wobei $\alpha_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i$ gilt.
Über den Normabschluß erhält man das Tensorprodukt $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ der C*-Algebren, was wiederum eine C*-Algebra darstellt und damit in der Kategorie enthalten ist.
Bei der Kategorie $\mathfrak{Alg}$ handelt es sich also um eine Tensorkategorie.
Dabei ist die Tensoreins durch den Körper gegeben, was in unserem Fall den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ entspricht.

Für diese beiden Kategorien kann man einen Tensorfunktor $\tilde{A}$ definieren, indem man fordert, dass

- $\tilde{A}(\varnothing) = \mathbb{C}$
- Für $\mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2$ erhält man $\tilde{A}(\mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2) := \tilde{A}(\mathcal{M}_1) \otimes_{\mathfrak{Alg}} \tilde{A}(\mathcal{M}_2) = \tilde{A}(\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathfrak{Man}^\otimes} \mathcal{M}_2)$
- Für die Morphismen ergibt sich $\tilde{A}(\psi_1 \otimes_{\mathfrak{Man}^\otimes} \psi_2) = \tilde{A}(\psi_1) \otimes_{\mathfrak{Alg}} \tilde{A}(\psi_2)$

Diese Bedingungen alleine reichen noch nicht aus um einen Tensorfunktor zu definieren, denn haben wir zwei Raumzeiten $(\mathcal{M}_j, g_j) \in Obj(\mathfrak{Man})$ $(j \in \{1,2\})$ mit $\psi_j$ und $\psi_j(\mathcal{M}_j) \subset \mathcal{N} \in Obj(\mathfrak{Man})$, dann erhalten wir nur mit Abbildungen $\tilde{\psi} = \psi_1 \otimes \psi_2$ ,die die Bedingung $\psi_1(\mathcal{M}_1) \subset (\psi_2(\mathcal{M}_2))^\perp$ erfüllen einen Tensorfunktor zwischen den Kategorien. Nach dem allgemein kovarianten Lokalitätsprinzip, das in diesem Fall auf die Kommutatorbeziehung $[\alpha_1(\mathcal{A}_1), \alpha_2(\mathcal{A}_2)] = \{0\}$ führt (dabei wollen wir in diesem Abschnitt $\mathcal{A}_j = A(\mathcal{M}_j, g_j)$ und $\alpha_j = \alpha_{\psi_j}$ setzen), gilt nämlich für die von den Unteralgebren $\alpha_k(\mathcal{A}_k)$ $(k \in \{1,2\})$ in $A(\mathcal{N}, g_\mathcal{N})$ erzeugte $^*$-Algebra die Unteralgebra $\alpha_1(\mathcal{A}_1) \vee \alpha_2(\mathcal{A}_2)$ von $A(\mathcal{N}, g_\mathcal{N})$ die Beziehung:

**Lemma A.8.** *$\alpha_1(\mathcal{A}_1) \vee \alpha_2(\mathcal{A}_2) \cong \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ für alle $^*$-Algebren $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{B}$ (Inklusionsabbildung) mit $\mathcal{A}_1 \subset (\mathcal{A}_2)'$ bzgl. $\mathcal{B}$.*

*Beweis.* Wir betrachten die $^*$-Algebra $\mathcal{A} = \alpha_1(\mathcal{A}_1) \vee \alpha_2(\mathcal{A}_2)$ mit

$$\mathcal{A} = \{\hat{A} \in \alpha_1(\mathcal{A}_1) \vee \alpha_2(\mathcal{A}_2) | \quad \hat{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j_i=1}^{n_i} \hat{A}_{j_i} \quad \hat{A}_{j_i} \in \alpha_k(\mathcal{A}_k)\},$$

die durch endliche Summen von Produkten der beiden verschiedenen Teilalgebren (Produkt aus $\mathcal{B}$) gebildet wird.
Da Elemente aus $\alpha_1(\mathcal{A}_1)$ mit Elementen $\alpha_2(\mathcal{A}_2)$ kommutieren und sich jedes Element $\hat{C}$ aus $\alpha_j(\mathcal{A}_j)$ durch $\hat{C} = \alpha_j(C)$ ($\alpha_j$ ist ein $^*$-Algebrenisomorphismus) schreiben lässt, gilt

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j_i=1}^{n_i} \hat{A}_{j_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{r_i=1}^{m_i} \hat{A}_{r_i} \prod_{s_i=1}^{k_i} \hat{A}_{s_i} \\
& \quad \text{wobei} \quad \hat{A}_{r_i} \in \alpha_1(\mathcal{A}_1) \quad \text{und} \quad \hat{A}_{s_i} \in \alpha_2(\mathcal{A}_2) \\
& \quad (m_i + k_i = n_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}) \\
\Rightarrow \qquad \hat{A} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_1(\underbrace{\prod_{r_i=1}^{m_i} A_{r_i}}_{=A_i \in \mathcal{A}_1}) \alpha_2(\underbrace{\prod_{s_i=1}^{k_i} A_{s_i}}_{=B_i \in \mathcal{A}_2}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_1(A_i) \alpha_2(B_i)
\end{aligned}$$

für alle $\hat{A} \in \mathcal{A}$.
Man gelangt stets zu solch einer Zerlegung für beliebige Elemente aus $\mathcal{A}$.
Daraus gewinnt man eine Abbildung

$$\xi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$$

mit
$$\xi(\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_1(A_i)\alpha_2(B_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \otimes B_i.$$
Für alle Elemente $\alpha_k(A_k) \in \mathcal{A}$ $(k \in \{1,2\})$ gilt damit $\xi(\alpha_1(A_1)) = \xi(\alpha_1(A_1)\alpha_2(\mathbb{1})) = A_1 \otimes \mathbb{1}$ und $\xi(\alpha_2(A_2)) = \xi(\alpha_1(\mathbb{1})\alpha_2(A_2)) = \mathbb{1} \otimes A_2$. Daraus folgt
$$\begin{aligned}\xi(\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_1(A_i)\alpha_2(B_i) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \otimes B_i)\\ = \sum_{i=1}^n \lambda_i (A_i \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes B_i) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi(\alpha_1(A_i))\xi(\alpha_2(B_i))\end{aligned}$$
Damit beschreibt $\xi$ einen $^*$-Algebrenhomomorphismus.
Für den Kern von $\xi$ erhält man nach Definition; $\mathrm{Ker}(\xi) = \{\hat{A} \in \mathcal{A}, \xi(\hat{A}) = 0\}$.
Die Algebren $\alpha_k(\mathcal{A}_k) \subset \mathcal{A}$ ergeben bzgl. $\xi$
$$\begin{aligned}\xi(\alpha_1(\mathcal{A}_1)) &= \mathcal{A}_1 \otimes \mathbb{1} \cong \mathcal{A}_1\\ \xi(\alpha_2(\mathcal{A}_2)) &= \mathbb{1} \otimes \mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_2\end{aligned}$$
was uns zeigt, dass $\xi|_{\alpha_k(\mathcal{A}_k)}$ ein $^*$-Algebrenisomorphismus von $\alpha_k(\mathcal{A}_k)$ nach $\xi(\alpha_k(\mathcal{A}_k))$ ist und damit die $\alpha_k(\mathcal{A}_k)$ injektiv abgebildet werden.
Für die Menge $\mathcal{P} = \{\hat{C} \in \mathcal{A} | \hat{C} = \hat{A}\hat{B}\ ,\ \hat{A} \in \alpha_1(\mathcal{A}_1), \hat{B} \in \alpha_2(\mathcal{A}_2)\}$ gilt bzgl. $\xi$
$$\begin{array}{rl} & \forall \hat{C} \in \mathcal{P}, \qquad (\hat{C} = \hat{A}\hat{B})\\ \text{wenn} & \xi(\hat{C}) = 0 \iff \xi(\alpha_1(A))\xi(\alpha_2(B)) = 0\\ \Rightarrow & A = 0 \text{ oder } B = 0\\ \Rightarrow & \hat{C} = 0,\end{array}$$
d.h. die Menge $\mathcal{P}$ wird injektiv auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ abgebildet.
Alle Elemente von $\mathcal{A}$ lassen sich aufgrund der Zerlegung durch endliche Linearkombinationen von Elementen aus $\mathcal{P}$ gewinnen ($\mathcal{P}$ bildet ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$).
Daraus folgt, dass $\mathrm{Ker}(\xi)$ nur Elemente $\hat{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_1(A_i)\alpha_2(B_i)$ enthalten kann, wobei mindestens zwei Terme der Summe ungleich sind, d.h. für mindestens zwei Paare gilt $(A_k, B_k) \neq (A_j, B_j)$ mit $j \neq k$.
$\hat{A}$ lässt sich aufgrund der Vektorraumstruktur stets in eine Summe mit $A_j \neq \beta A_k$ und $B_j \neq \gamma B_k$ für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j \neq k$ umformen.
Daraus folgt
$$\begin{array}{rl} & \xi(\hat{A}) = 0\\ \iff & \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \otimes B_i = 0\\ \iff & A_k \otimes B_k = \displaystyle\frac{1}{\lambda_k}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n \lambda_i A_i \otimes B_i\end{array}$$

Da die Elemente $A_j \otimes B_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ in $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ linear unabhängig voneinander sind, folgt damit ein Wiederspruch!

Bei $\xi$ handelt es sich also um einen injektiven $^*$-Algebrenhomomorphismus, der bzgl. $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ einen $^*$-Algebrenisomorphismus beschreibt. $\square$

Für C$^*$-Algebren ist diese Bedingung nicht unbedingt erfüllt, da die Wahl der Norm nicht eindeutig ist.

# Anhang B

# Algebraische Methoden

## B.1 Universelle Eigenschaft

Die *universelle Eigenschaft* ist eine Methode in der abstrakten Algebra bzw. Kategorientheorie, um sich eine gewünschte Struktur ohne Angabe einer konkreten Konstruktion zu verschaffen. Dies funktioniert so, dass für Elemente einer bestimmten Kategorie $\mathfrak{K}$ eine Eigenschaft festgelegt wird. Die *Universalkonstruktion* fordert nun die Existenz eines *kleinsten* (oder *grössten*) Elements $K$ der Kategorie $\mathfrak{K}$, welches die Eigenschaft erfüllt. *Kleinstes* zu sein bedeutet dabei, dass zu jedem Element $V$ der Kategorie $\mathfrak{K}$, welches die Eigenschaft erfüllt, ein eindeutiger Morphismus $\phi : K \to V$ existiert, welcher mit der Eigenschaft verträglich ist (*Grösstes* ist in diesem Sinne verbunden mit der Umkehrung der obigen Aussage: $\phi : V \to K$). Das *kleinste* (bzw. *grösstes*)-Element muss dabei nicht eindeutig bestimmt sein, jedoch sind alle kleinsten Elemente, sofern existent, isomorph.

## B.2 Maximale Ideale

Die Kommutatorideale, die wir in Abschnitt 6.7 definiert haben, führten auf "einfache" Quotienten-Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$. Diese Schlussfolgerung weist auf eine spezielle Klasse von Idealen.

**Definition B.1.** Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Algebra und $\mathcal{I}$ ein Ideal (beidseitig) in $\mathcal{A}$, dann ist genau dann $\mathcal{I}$ maximal, wenn für alle Ideale $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ der Algebra, für die $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ gilt, folgt das

$$\mathcal{J} = \mathcal{I} \text{ oder } \mathcal{J} = \mathcal{A}.$$

Nun zeigt man leicht, dass gilt:

**Satz B.2.** *$\mathcal{I}$ ist genau dann ein maximales Ideal in $\mathcal{A}$, wenn die Quotienten-Algebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ einfach ist.*

*Beweis.* "$\Rightarrow$"
(OBdA)

Sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}/\mathcal{I}$ ein Ideal in $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, dann gilt für

$$\begin{aligned}
& (a+\mathcal{I}) \in \mathcal{L} \quad (b+\mathcal{I}) \in \mathcal{A}/\mathcal{I} \text{ mit } a, b \notin \mathcal{I} \\
\Rightarrow \quad & (b+\mathcal{I})(a+\mathcal{I}) = ba + b\mathcal{I} + \mathcal{I}a + \mathcal{I} = (ba+\mathcal{I}) \in \mathcal{L} \\
\Rightarrow \quad & \exists \mathcal{J} \subset \mathcal{A} \text{ mit } (a+c) \in \mathcal{J}\ \forall c \in \mathcal{I} \text{ wenn } (a+\mathcal{I}) \in \mathcal{L} \\
& \text{Da } (ba+\mathcal{I}) = (b+\mathcal{I})(a+\mathcal{I}) \in \mathcal{L}\ \ \forall (b+\mathcal{I}) \in \mathcal{A}/\mathcal{I} \\
& \text{gilt } \underbrace{(b+d)}_{\in \mathcal{J}} \underbrace{(a+c)}_{\in \mathcal{A}} = (ba + \underbrace{bc + da + dc}_{=t}) \in \mathcal{J} \\
& \quad \forall c, d \in \mathcal{I} \text{ und } \forall b \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Mit der übertragenen Vektorraumstruktur von $\mathcal{L}$ auf $\mathcal{J}$ folgt, dass $\mathcal{J}$ ein Ideal in der Algebra $\mathcal{A}$ ist.
Da $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ gilt nach Vorraussetzung

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J} = \mathcal{I} \text{ oder } \mathcal{J} = \mathcal{A} \\
\Rightarrow \quad & \mathcal{L} = \mathcal{A}/\mathcal{I} \text{ oder } \mathcal{L} = \{0\}
\end{aligned}$$

“$\Leftarrow$”
(OBdA)
$\mathcal{J}$ ist ein Ideal in $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, dann ist $\mathcal{J}/\mathcal{I}$ eine Algebra, und es gilt bzgl. der Inklusionsabbildung

$$\mathcal{J}/\mathcal{I} \subset \mathcal{A}/\mathcal{I} \ \ \text{(Unteralgebra)}$$

Es gilt nun für alle $(a+\mathcal{I}) \in \mathcal{J}/\mathcal{I}$ und $(b+\mathcal{I}) \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$ (mit $b \in \mathcal{A}$ und $a \in \mathcal{J}$)

$$(a+\mathcal{I})(b+\mathcal{I}) = (\underbrace{ab}_{\in \mathcal{J}} + \mathcal{I}) \in \mathcal{J}/\mathcal{I}$$

Daraus folgt das $\mathcal{J}/\mathcal{I}$ ein Ideal in $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ ist, wodurch

$$\mathcal{J}/\mathcal{I} = \mathcal{A}/\mathcal{I} \text{ oder } \mathcal{J}/\mathcal{I} = \{0\}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{J} = \mathcal{A} \text{ oder } \mathcal{J} = \mathcal{I}$$

$\square$

Die Kommutatorideale vom letzten Abschnitt, welche uns die Feldalgebren lieferten, gehören zu dieser Klasse von Idealen.

# Literaturverzeichnis


[1] Romeo Brunetti, Klaus Fredenhagen, and Rainer Verch. The generally covariant locality principle: A new paradigm for local quantum physics. *Commun. Math. Phys.*, 237:31–68, 2003.

[2] V.M.Mostepanenko M.Bordag, U.Mohideen. New developments in the casimir effect. *Phsics Reports 353*.**1-205**, 2001.

[3] K.Fredenhagen. Quantenfeldtheorie. Vorlesungsskript, 2001.

[4] C.Bär. Lorentzgeometrie. Vorlesungsskript, 2004.

[5] S.A.Fulling. *Aspects of quantum field theory in curved space-time*. Cambridge University Press, 1989.

[6] C. Bär. Differentialgeometrie. Vorlesungsskript, 2001/2002.

[7] Wolfgang Junker. Adiabatic vacua and hadamard states for scalar quantum fields on curved space-time. 1995.

[8] J.Dimock. Algebras of local observables on a manifold. *Commun. Math. Phys. 77, 219-228*, 1980.

[9] N.Ginoux und F.Pfäffle C.Bär. Normally hyperbolic operators on lorentzian manifolds and their quantization. 2005.

[10] M.Reed und B.Simon. *Methods of modern mathematical pysics 1: functional analysis*. Academic Press, 1980.

[11] W.G.Faris. *Self-Adjoint Operators*. Springer-Verlag, 1975.

[12] M.Reed und B.Simon. *Methods of modern mathematical physics 2: Fourier Analysis,Selfadjointness*. Academic Press, 1975.

[13] Akihiro Ishibashi and Robert M. Wald. Dynamics in non-globally hyperbolic static spacetimes. iii: anti-de sitter spacetime. *Class. Quant. Grav.*, 21:2981–3014, 2004.

[14] R. M. Wald. Dynamics in nonglobally hyperbolic, static space-times. *J. Math. Phys.*, 21:2802–2805, 1980.

[15] Akihiro Ishibashi and Robert M. Wald. Dynamics in non-globally-hyperbolic static spacetimes. ii: General analysis of prescriptions for dynamics. *Class. Quant. Grav.*, 20:3815–3826, 2003.

[16] K.Fredenhagen. Quantenfeldtheorie in gekrümmter raumzeit. Vorlesungsskript, 1999.

[17] K.Fredenhagen. Quantenmechanik 1. Vorlesungsskript, Wintersemester 1999/2000.

[18] K.Fredenhagen. Superselection sectors. Notes from lectures, Hamburg-University in winter term.(94/95).

[19] O. Bratteli and D. W. Robinson. Operator algebras and quantum statistical mechanics 1. New York, Usa: Springer-verl.(1979) 500 P.(Texts and Monographs In Physics).

[20] O. Bratteli and D. W. Robinson. Operator algebras and quantum statistical mechanics. vol. 2. Berlin, Germany: Springer (1996) 517 p.

[21] Michael Keyl. Algebraische methoden der quantentheorie. Institut für Mathematische Physik, Technische Universität Braunschweig SoSe 1999.

[22] H. Baumgaertel and M. Wollenberg. Causal nets of operator algebras: Mathematical aspects of algebraic quantum field theory. Berlin, Germany: Akademie-Verl. (1992) 460 p. (Mathematische Lehrbuecher und Monographien, Abt. 2: Mathematische Monographien, 80).

[23] B. S. Kay. Casimir effect in quantum theory. *Physical Review D*, 1979.

[24] S.Lang. *Algebra*. Springer-Verlag, 2002.

[25] C. Schweigert. Quantengruppen und tensorkategorien. Vorlesungsskript, 2004.

# Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Herrn Fredenhagen für die interessante Aufgabenstellung und für die zahlreichen unterstützenden Diskussionen und Beratungen bedanken. Für die interessanten Gespräche und die schöne gemeinsame Zeit möchte ich mich auch bei den Mitgliedern der Arbeitsgruppe bedanken. Besonders möchte ich Ferdinand Brennecke für die lustige Zeit danken, sowie Felix Reszewski, Werner Bauer, Joachim Brod, Tobias Kasprzik, Pelangi Saichu und Björn Freter. Mein tiefer Dank gebührt meinem Vater, der mich während meines Studiums stets unterstützt hat.

# Erklärung gemäß Diplomprüfungsverordnung

Ich versichere, diese Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen verfasst zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Christian Sommer