

# Über die Charakterisierung von Zuständen hinsichtlich der Erwartungswerte quadratischer Operatoren

On the Characterization Of States Regarding Expectation Values Of  
Quadratic Operators

Diplomarbeit

vorgelegt am

22. März 2013

von

**Sebastian Schubert**

1. Gutachter: Prof. Dr. Klaus Fredenhagen
2. Gutachter: Dr. Jörg Teschner

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Möglichkeiten untersucht, um Zustände hinsichtlich ihrer Erwartungswerte in der algebraischen Quantenfeldtheorie zu charakterisieren. Als Modell wird das zweidimensionale, skalare, masselose Klein-Gordon-Feld verwendet. Die Nichtexistenz von translationsinvarianten Zuständen für dieses Modell wird gezeigt. Die Erwartungswerte von drei quadratischen Operatoren: dem Wickquadrat, dem Energieimpulstensor und der balancierten quadratischen Ableitung werden auf ihre Zustandsabhängigkeit und gegenseitige Abhängigkeiten untersucht. Die Methode von Fewster [?], um Quantenungleichungen aufzustellen, wird für das Wickquadrat und den Energieimpulstensor auf das Modell übertragen. Eine Klasse von Zuständen wird konstruiert und deren Erwartungswerte berechnet. Die Diskussion der Erwartungswerte eines allgemeinen Zustandes ohne Berücksichtigung der Positivität ergibt, dass die Differenz zweier Zweipunktfunktionen, wenn alle drei betrachteten Erwartungswerte identisch sind, indefinit oder Null ist. Notwendige und hinreichende Bedingungen an positive, reguläre, reelle und symmetrische bilineare Distributionen werden bewiesen und zusammengefasst. Unter anderem wird für solche Distributionen gezeigt, dass sich bilineare Positivität einer Distribution im Sinne von  $K(f^*, f) \geq 0$  und Positivität für alle Matrizen der Form  $K(x_i, x_j)$  äquivalente Forderungen sind. Es werden mögliche Wege zur Diskussion von rotationssymmetrischen Zuständen in vierdimensionalen Quantenfeldtheorien aufgezeigt.

## Abstract

In this work possibilities of characterisation of states in algebraic quantum field theory with regard to their expectation values are investigated. The examined model is the two-dimensional, scalar, massless Klein-Gordon field. The non-existence of translation invariant states for this model is shown. The expectation values of three quadratic operators: the Wick square, the energy momentum tensor and the quadratic balanced derivative are examined for their state dependence and mutual dependencies. Fewster's method [?] to establish quantum inequalities is extended to the Wick square and the energy density in this specific model. A class of states is constructed and the considered expectation values are computed. Leaving aside the positivity condition of the states it is shown, that the difference of two two-point functions are indefinite or zero, when all considered three expectation values are identical. Necessary and sufficient conditions of positive, regular, real and symmetric bilinear distributions are proven and summarised. For this type of distributions it is proven, that the bilinear positivity condition in the sense of  $K(f^*, f) \geq 0$  and the positivity condition for all matrices of the form  $K(x_i, x_j)$  are equivalent. Possible ways are discussed to extend the discussion to rotationally symmetric states in four dimensional quantum field theories.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung und Motivation</b>	<b>5</b>
<b>2. Grundlagen und Modell</b>	<b>8</b>
2.1. Die Borchers-Uhlmann Algebra und Zustände . . . . .	8
2.2. Hadamardzustände und die erweiterte Algebra $\mathcal{W}$ . . . . .	12
<b>3. Konstruktion von Hadamardzuständen</b>	<b>16</b>
3.1. Hadamardzustände und die Hadamardparametrix in 1+1 Dimensionen . . . . .	16
3.2. Impulsraumdarstellung der Hadamardparametrix . . . . .	19
3.3. Eine Klasse von Zuständen und ihre Erwartungswerte . . . . .	26
<b>4. Allgemeine Eigenschaften und Abschätzungen der Erwartungswerte</b>	<b>29</b>
4.1. Quantenungleichungen für das Wickquadrat und den Energieimpulstensor . . . . .	29
4.2. Nichtexistenz translationsinvarianter Zustände . . . . .	34
<b>5. Notwendige Bedingungen für die Erwartungswerte</b>	<b>39</b>
5.1. Die quadratische balancierte Ableitung . . . . .	40
5.2. Der Energieimpulstensor . . . . .	45
5.3. Das Wickquadrat . . . . .	47
5.4. Zur Vorgabe von Erwartungswerten . . . . .	48
<b>6. Fazit &amp; Ausblick</b>	<b>50</b>
<b>A. Balancierte Ableitung</b>	<b>52</b>
<b>B. Liegruppen</b>	<b>56</b>
B.1. Integration auf Liegruppen . . . . .	56
B.1.1. Haarsches Maß für $SO(3)$ . . . . .	59
<b>C. Distributionen</b>	<b>61</b>
C.1. Allgemeines . . . . .	61
C.2. Die Wellengleichung in zwei Dimensionen . . . . .	62
C.3. Die Wellengleichung in vier Dimensionen . . . . .	64
C.3.1. Bilineare Distributionen . . . . .	66
C.4. Glatte, symmetrische, positive bilineare Distributionen . . . . .	67

*Inhaltsverzeichnis*

C.5. Wellenfrontenmenge . . . . . 72

# 1. Einleitung und Motivation

Ein zentrales Problem der Physik tritt an vielen Stellen auf: Vorausgesetzt es gibt eine mathematisch vollständige Beschreibung, wird versucht eine Beziehung zwischen Beobachtungen und den berechneten Observablen der Theorie herzustellen. Zumeist ist die schiere Anzahl aller möglichen physikalischen Konfigurationen zu groß, um diese in effizienter Form mit Messergebnissen zu vergleichen. Zur Reduktion dieser Menge führt man meist Experimente durch, bei denen man die Kontrolle über die Komplexität der physikalischen Konfigurationen hat. Als ein Beispiel sei ein Sendemast genannt. Das Feld dieser Antenne hat eine gewisse Abstrahlungscharakteristik, die – für einen hinreichend idealen Sendemast – nur von wenigen Parametern, wie Länge der Antenne und Leistung des Senders, abhängt. Die Theorie hinter einer solchen Anordnung ist die Elektrodynamik, welche bekanntermaßen für Antennen gute Vorhersagen treffen kann. Möglich ist dies, da genügend Erfahrungen vorhanden sind, welche physikalischen Systeme existieren und wie sie miteinander wechselwirken. Probleme treten bei Theorien auf, bei denen nicht bekannt ist, welche physikalischen Konfigurationen mit welchen Beobachtungen in Verbindung zu bringen sind. In der algebraischen Quantenfeldtheorie gibt es ähnlich gelagerte Probleme, auf die in dieser Arbeit eingegangen wird.

Mit der algebraischen Quantenfeldtheorie gelingt zweierlei. Einerseits ermöglicht sie eine mathematisch rigorose Formulierung der Grundlagen jeder Quantentheorie und es ist möglich viele grundlegende Postulate, wie zum Beispiel den Zusammenhang zwischen Spin und Statistik und das PCT-Theorem, in sehr allgemeinen Zusammenhängen beweisen zu können. Andererseits können Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten beschrieben werden. Die zentralen Bestandteile dieser Theorie sind zum Einen eine abstrakte Algebra der Observablen und zum Anderen die positiven, normierten Funktionale (Zustände) auf dieser Algebra. Die Zustände ordnen jeder Observablen einen Erwartungswert zu. Die Algebra der Observablen enthält dabei sämtliche dynamische Informationen der Theorie, dass heißt sie erfüllt (Anti-)Vertauschungsrelationen und die Elemente sind Lösungen einer Bewegungsgleichung<sup>1</sup>. Die Zustände entsprechen einer Konfiguration eines physikalischen Systems. Beispiele wären thermische Zustände (KMS-Zustände) und Vielteilchenzustände. Es gibt unterschiedliche Methoden, die sich im Wesentlichen durch technische Aspekte unterscheiden, die Observablenalgebra zu definieren. In dieser Arbeit wurde die Borchers-Uhlmann Algebra (BU-Algebra) gewählt. Jeder Testfunktion  $f$  wird ein erzeugendes Element  $\varphi(f)$  zugeordnet, welches die kovariante Version der Vertauschungsrelationen erfüllt. Einige Observablen, wie beispielsweise

---

<sup>1</sup>In der Quantenmechanik würde man vom Heisenbergbild sprechen.

## 1. Einleitung und Motivation

der Energieimpulstensor oder das Quadrat des Feldes in einem Punkt, sind nicht in dieser Algebra enthalten. Man konstruiert diese Observablen aus den  $n$ -Punktfunktionen. Darunter versteht man die Auswertung eines Zustandes über dem Produkt von  $n$  Feldern.

$$\omega(\varphi(f_1) \cdots \varphi(f_n)) := \int dx_1 \cdots \int dx_n \omega(\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)) f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

Die Intuition würde es nahe legen Potenzen der Felder zu definieren, in dem man die Diagonalen der Distributionskerne der  $n$ -Punktfunktionen als Potenzen definiert. Allerdings besitzen diese Distributionen dort keinen glatten Träger. Beschränkt man sich auf die physikalisch relevanten Zustände, so ist dieser divergente Anteil zustandsunabhängig und kann in konsistenter Weise abgezogen werden - dies bezeichnet man als Normalordnung. Beispielsweise würde man für die Normalordnung der Zweipunktfunktionen immer die Zweipunktfunktion eines ausgewählten Zustandes abziehen. Die physikalisch relevanten Zustände auf flachen Raumzeiten sind diejenigen, deren Spektren der Impuls- und Energieoperatoren in der GNS-Darstellung<sup>2</sup> positiv sind. Jede so erweiterte Observablenalgebra hat nun eine passende Darstellung durch das GNS-Theorem bezüglich des Zustandes mit dem man die Normalordnung durchführt. Auf flachen Raumzeiten sind Zustände vorhanden, die poincaréinvariant sind und eine Art Nullpunkt für den Erwartungswert der Energie definieren. Deswegen werden diese Zustände als Vakuum interpretiert, da dieses auf flachen Raumzeiten für alle Beobachter identisch sein sollte. Für reine Zustände<sup>3</sup> lässt sich zeigen, dass mit Hilfe des Real- und Imaginärteils der Felder  $\varphi(f)$  Auf- und Absteigeoperatoren definiert werden können, welche einen Fockraum konstruieren [?]. In diesem Fockraum lassen sich nun Zustände konstruieren, die als Vielteilchenzustände interpretierbar sind. Damit kann beispielsweise ein Zustand identifiziert werden, der der Situation in einem Teilchenkollisionsexperiment entspricht. Auf allgemeinen gekrümmten Raumzeiten stehen nicht solche Methoden zur Verfügung. es lässt sich keine Erweiterung der Observablenalgebra im Sinne des flachen Falls konstruieren. Es können jedoch lokal-kovariante Felder durch eine – auf flachen Raumzeiten zur Normalordnung äquivalente – Methode konstruiert werden (Fredenhagen, Brunetti, Verch [?]). Dafür schränkt man die betrachteten Zustände auf Hadamardzustände ein. Diese verfügen alle über einen identischen divergenten Anteil, welcher nur von der lokalen Geometrie abhängt (die Hadamardparametrix). Da es auf einer allgemeinen Raumzeit keine Poincarésymmetrie gibt, entfällt die Möglichkeit einen invarianten Zustand bezüglich dieser Gruppe zu finden. Somit wird die Interpretation hinsichtlich von Vielteilchenzuständen auf gekrümmten Raumzeiten schwierig. Es muss deswegen nach weiteren Wegen gesucht werden, Zustände in Bezug auf ihre Erwartungswerte zu charakterisieren. Eine andere Frage wäre, inwieweit ein Zustand durch die Vorgabe von Erwartungswerten

---

<sup>2</sup>Jeder Zustand einer  $*$ -Algebra induziert eine Hilbertraumdarstellung dieser Algebra (siehe GNS-Theorem 2.1.1).

<sup>3</sup>Ein Zustand ist rein, wenn er sich nicht als Summe zweier Zustände schreiben lässt.

## 1. Einleitung und Motivation

ten der Observablen festgelegt wird. Diese Frage steht nicht im Fokus dieser Arbeit. Ein Beispiel für die Charakterisierung von Zuständen durch Erwartungswerte gibt es für thermodynamische Nichtgleichgewichtszustände bei Buchholz, Ojima und Roos [?]. Die Nichtgleichgewichtszustände werden so charakterisiert, dass sie lokal für eine bestimmte Menge von thermischen Observablen Erwartungswerte haben, die identisch mit KMS Zuständen (Thermische Gleichgewichtszustände) sind. Buchholz [?] zeigte dann, dass für ein bestimmtes Modell die Temperatur an einem bestimmten Raumzeitpunkt singulär sein muss. Andere Einschränkungen an die Erwartungswerte wurden durch die Positivität der Zustände in mehreren Arbeiten unter anderem von Fewster [?] oder auch von Ford [?] behandelt. Dabei handelt es sich um Quantenungleichungen für den Energieimpulstensor. In dieser Arbeit soll nach solchen oder anderen wechselseitigen Abhängigkeiten zwischen den Erwartungswerten verschiedener Observablen und Zuständen gesucht werden. Der Rahmen dieser Diplomarbeit behandelt dabei zur besseren Handhabung nur freie Quantenfeldtheorien und die betrachteten Observablen sind das Wickquadrat, der Energieimpulstensor und die balancierte quadratische Ableitung. Die quadratische balancierte Ableitung ist deswegen von Interesse, weil sie in thermischen Quantenfeldtheorien die Rolle des thermischen Energieimpulstensors spielt und schon in der Arbeit von BOR [?] auftaucht. Zur weiteren Vereinfachung wird ein masseloses, skalares Klein Gordon Feld in zwei Dimensionen verwendet. Dazu gibt es zwei grundsätzliche Erwägungen. Zum Einen vereinfacht die Form der Lösungen der Bewegungsgleichung in diesem Fall das Problem erheblich. Zum anderen wird oft behauptet, in diesem Rahmen wäre keine konsistente Quantenfeldtheorie möglich, da kein poincaréinvarianter Zustand existiert, obwohl es sich um eine Minkowskiraumzeit handelt. Mit Hilfe der Konzepte aus Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten ist dies, wie bereits erklärt wurde, kein Hindernis um eine Quantenfeldtheorie zu definieren. Dies wäre schon aus sich heraus von Interesse. Es besteht zusätzlich die stille Hoffnung, dass sich eventuelle Ergebnisse, die bereits in der Sprache von Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten formuliert sind, leichter verallgemeinern lassen.

Zunächst werden in Kapitel 1 die theoretischen Grundlagen zusammengefasst und erläutert. Die Konstruktion der Borchers-Uhlmann Algebra für skalare Felder wird beschrieben und Hadamardzustände werden definiert. Um die quadratischen Operatoren zu definieren, wird dann die BU-Algebra erweitert. Das zweite Kapitel ist eine Zusammenfassung der Eigenschaften von Hadamardzuständen, welche aus ihrer Definition abgeleitet werden können. Ein Klasse von Zuständen mit punktwiser positiver Energie wird beschrieben und ihre restlichen Erwartungswerte werden angegeben. Im dritten Kapitel werden zunächst Quantenungleichungen für den Energieimpulstensor und das Wickquadrat nach der Methode von Fewster angegeben. Außerdem wird gezeigt, dass keine translationsinvarianten Zustände in dem hier betrachteten Modell existieren. Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit notwendigen Bedingungen an die Erwartungswerte. Außerdem kann eine kleine Einschränkung an die Differenz von Zuständen gegeben werden, die in den hier betrachteten Observablen übereinstimmen.

## 2. Grundlagen und Modell

In dieser Arbeit wird das skalare, masselose Klein-Gordon-Feld auf einer 1+1 dimensionalen Minkowskiraumzeit betrachtet. Zunächst steht man vor dem Problem, dass auf dieser Raumzeit kein Zustand existiert, der als ein Vakuumzustand interpretiert werden kann [?, S. 14]. Normalerweise wäre ein Vakuumzustand auf Minkowskiraumzeiten dadurch festgelegt, dass er invariant unter der Wirkung der Poincarégruppe ist. Unterschiedliche Methoden wurden bereits angewendet, um dennoch eine Quantenfeldtheorie zu erhalten. Zum Einen suchte man nach einem Zustand, der invariant ist unter einer reduzierten Symmetriegruppe [?], zum Anderen untersuchte man Algebren auf eingeschränkten Testfunktionenräumen [?]. Auch bei Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten ist es nicht möglich einen Zustand anzugeben, der über diese Eigenschaften verfügt. Die Ursache dafür ist, dass es im Allgemeinen auf gekrümmten Raumzeiten keine globale Darstellung der Poincarégruppe gibt. Es existieren allerdings Hadamardzustände. Die Zweipunktfunktionen dieser Zustände verfügen alle über den gleichen divergenten Anteil. Dieser divergente Anteil wird Hadamardparametrix genannt, ist zustandsunabhängig und entspricht auf Minkowskiraumzeiten der Zweipunktfunktion des Vakuums. Die Normalordnung kann auf diese Weise auf gekrümmte Raumzeiten erweitert und alle, für Quantenfeldtheorien relevanten, Observablen konstruiert werden [?]. Eine Hadamardparametrix und Hadamardzustände existieren idealerweise auch auf 1+1 dimensionalen Minkowskiraumzeiten (für masselose sowie massive Felder). Kurz gesagt bedeutet das, dass die Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten es ermöglicht für den „Grenzfall“ von zweidimensionalen Minkowskiraumzeiten mit einem skalaren, masselosen Klein-Gordon-Feld eine Theorie zu formulieren, in soweit dies auch für gekrümmte Raumzeiten möglich ist.

### 2.1. Die Borchers-Uhlmann Algebra und Zustände

Grundsätzlich soll die BU-Algebra so definiert sein, dass jedem kompaktem Raumzeitgebiet ein Element einer Algebra zugeordnet wird – oft wird dies umschrieben mit  $\varphi(f)$  mit  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Diese Algebra wird als freie Algebra der Observablen oder als Feldalgebra bezeichnet. Produkte von Elementen werden dem entsprechenden Tensorprodukt der beiden Testfunktionen zugeordnet. Die gesamte sich ergebende Algebra soll nun schrittweise konstruiert werden und mit der Definition der Borchers-Uhlmann Algebra  $\mathcal{A}$  enden. Die BU-Algebra wird dann die kanonischen Vertauschungsrelationen (CCR) erfüllen, wie man sie für skalare Felder gewöhnlich fordert. Danach wird sie erweitert

## 2. Grundlagen und Modell

werden, um auch die für die Arbeit benötigten Observablen zu erhalten. Zuerst müssen allerdings die Voraussetzungen dafür geschaffen werden. Der Raum der kompakt getragenen Testfunktionen  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  verfügt über eine lokal konvexe Topologie. Diese ist dadurch festgelegt, dass eine Folge  $f_n$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gegen  $f$  konvergiert, wenn die Träger von  $f_n$  und  $f$  in einer kompakten Teilmenge  $K$  liegen und alle Ableitungen von  $f_n$  gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen von  $f$  konvergieren. Das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} (f_n(x) - f(x)) \right| = 0.$$

Man bildet zunächst aus dem Raum  $\mathcal{D}$  eine Tensoralgebra. Dazu bildet man zuerst das  $n$ -fache Tensorprodukt

$$T_n := \bigotimes_{j=0}^n \mathcal{D} =: \mathcal{D}^{\otimes n}.$$

Das Tensorprodukt  $V \otimes V$  eines Vektorraums  $V$  hat folgende Eigenschaften. Für  $f, g, h \in V$  und  $c \in \mathbb{C}$  gilt

- $(f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h,$
- $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h,$
- $(cf) \otimes g = c \cdot (f \otimes g) = f \otimes (cg).$

Jedes Element von  $T_n$  ist somit eine Funktion von  $n$  Punkten des Minkowskiraumes.  $T_0$  wird mit den komplexen Zahlen gleichgesetzt. Die Tensoralgebra  $\mathcal{A}_0$  ist als Menge aller direkten Summen aller dieser  $T_n$  definiert<sup>1</sup>.

$$\mathcal{A}_0 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_n$$

$\mathcal{A}_0$  hat die Eigenschaften einer Algebra. Jedes Element  $f$  lässt sich als eine endliche Summe über Funktionen  $f_n$  darstellen, die jeweils nur von  $n$  Punkten des Minkowskiraums abhängen

$$f = \sum_{n=0}^N f_n(x_1, \dots, x_n)$$

oder ebenso als ein Vektor von  $n$  Funktionen  $(f_0, f_1, \dots, f_N)$ . Eine Addition ist auf diesem Raum in naheliegender Weise durch simple Addition der einzelnen Komponenten erklärt. Für eine Algebra benötigt man jedoch auch eine Multiplikation. Diese ist gegeben durch das bereits definierte Tensorprodukt  $\otimes$ , welches auf zwei allgemeine Elemente  $f, g \in \mathcal{A}_0$  erweitert werden kann. Da die Multiplikation einer Algebra assoziativ und distributiv

---

<sup>1</sup>Ein Element soll immer Element eines Unterraums von  $\mathcal{A}_0$ , welcher nur eine direkte Summe von endlich vielen  $T_n$  ist. Diese Anzahl kann jedoch beliebig hoch sein.

## 2. Grundlagen und Modell

sein soll, werden sämtliche sich ergebende Tensorprodukte zwischen den Komponenten des Einen mit denen des Anderen gebildet und wiederum nach Zahl ihrer Argumente der entsprechenden Komponente zugeordnet. Die  $n$ -te Komponente des Tensorproduktes ist daher

$$(f \otimes g)_n := \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_i) g_{n-i}(x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Die lokal, konvexe Topologie auf den Testfunktionen  $\mathcal{D}$  ermöglicht es diese Algebra mit einer Topologie auszustatten. Die Konvergenz in  $\mathcal{A}_0$  soll dann gegeben sein, wenn alle Komponenten einer Folge in  $\mathcal{A}_0$  einzeln in der Topologie auf  $\mathcal{D}$  konvergieren und die Anzahl der Komponenten für die gesamte Folge beschränkt ist. Außerdem soll eine Involution  $*$  auf der Algebra definiert sein, so das  $\mathcal{A}_0$  zu einer  $*$ -Algebra wird. Eine Involution ist ein antilinearer Automorphismus, das heißt für  $a, b \in \mathcal{A}_0$  und  $c \in \mathbb{C}$  ist  $(ca + b)^* = \bar{c}a^* + b^*$  (antilinear),  $(a \otimes b)^* = b^* \otimes a^*$ ,  $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$  und  $a^{**} = a$ . Diese Operation wird daher so definiert, dass für  $f, g \in \mathcal{A}$  gilt

- $(f^*)_n(x_1, \dots, x_n) := \bar{f}_n(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$ ,
- $(f \otimes g)^* := g^* \otimes f^*$ .

Nun soll die Algebra der Observablen  $\mathcal{A}$  bestimmte Vertauschungsrelationen erfüllen. Außerdem sollen die Elemente der Algebra Lösungen eines Differentialoperators sein. Für den hier betrachteten Fall ist dies natürlich der Klein-Gordon Operator

$$\mathcal{P} := \partial^\mu \partial_\mu + m^2,$$

Die Vertauschungsrelationen werden durch den sogenannten kausalen Propagator  $\Delta(f, g)$  mit  $f, g \in \mathcal{D}$  beschrieben. Dieser ist die Differenz der avancierten ( $G^+$ ) und retardierten ( $G^-$ ) Fundamentallösung des Klein-Gordon Operators  $\mathcal{P}$ . Fundamentallösungen sind Abbildungen  $D : \mathcal{D} \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , welche die Relation  $D(\mathcal{P}f) = f$  für alle Testfunktion  $f$  erfüllen. Man kann diese in gewisser Weise als Inverse des Differentialoperators auffassen. Die beiden Fundamentallösungen  $G^\pm$  sind eindeutig bestimmt, wenn man Stetigkeit der Abbildung und  $\text{supp } G^\pm f \subset J^\pm(\text{supp } f)$  fordert.  $J^\pm(K)$  ist die Menge aller Punkte, welche sich durch zukunfts- (+) oder vergangenheitsgerichtete (-) Kurven im Minkowskiraum erreichen lassen. Diese Fundamentallösungen existieren für alle normal hyperbolischen Differentialoperatoren. Beweise und tiefere Erläuterungen findet man dazu bei Dimock [?]. Man will nun ein  $*$ -Ideal in der Algebra  $\mathcal{A}_0$  erzeugen aus Elementen der Form  $a_h := \mathcal{P}h$  und  $b_{f,g} := -i\Delta(f \otimes g) + f \otimes g - g \otimes f$ . Mit "erzeugen" meint man an dieser Stelle, dass man folgende Menge definiert.

$$\mathcal{I} := \text{span} \{ \mathcal{A}_0 \otimes a_h \otimes \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0 \otimes b_{f,g} \otimes \mathcal{A}_0 \mid \forall f, g, h \in \mathcal{D} \}$$

$\mathcal{I}$  erfüllt die Bedingung, dass man für eine beliebige Rechts- oder Linksmultiplikation wieder ein Element aus  $\mathcal{I}$  erhält. Die Abgeschlossenheit dieser Menge ist auch per Konstruktion gegeben. Damit ist  $\mathcal{I}$  ein abgeschlossenes  $*$ -Ideal der Algebra  $\mathcal{A}_0$ .

## 2. Grundlagen und Modell

**Definition 2.1.1** (Borchers-Uhlmann Algebra). Die Borchers-Uhlmann Algebra  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$  [?], [?] des Klein-Gordon Feldes ist

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)/I.$$

$I$  ist dabei das abgeschlossene  $*$ -Ideal, welches durch die Elemente der Form  $\mathcal{P}f$  und  $-i\Delta(f \otimes g) + f \otimes g - g \otimes f$  erzeugt wird ( $f$  und  $g$  sind beliebige Testfunktionen). Die  $*$ -Operation und die Topologie werden durch  $\mathcal{A}_0$  induziert. Die Äquivalenzklasse, die zu einem Repräsentanten einer Testfunktion  $f$  gehört, wird  $\varphi(f)$  genannt.

**Bemerkung 2.1.1.** Die induzierte Topologie wird bestimmt, indem man die Projektion  $\pi : \mathcal{A}_0 \mapsto \mathcal{A}$  betrachtet. Man bezeichnet alle Mengen  $U \subset \mathcal{A}$  als offen für die  $\pi^{-1}(U)$  offen in  $\mathcal{A}_0$  ist.

Nachdem die BU-Algebra definiert ist, sollen nun die Funktionale betrachtet werden, die als Zustände bezeichnet werden. Aus physikalischer Sicht kann der Zustand eines Systems dadurch festgelegt werden, in dem man alle relevanten Erwartungswerte ermittelt. Dies macht sehr plausibel, warum ein Zustand wie folgt definiert wird.

**Definition 2.1.2** (Zustand). Sei  $\mathcal{A}$  eine unitale  $*$ -Algebra. Eine stetige Abbildung  $\omega : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{C}$  heißt Zustand, wenn sie linear, normiert, d.h.  $\omega(\mathbf{1}) = 1$  und positiv, d.h.  $\omega(a^*a) \geq 0$ ,  $\forall a \in \mathcal{A}$  ist. Die  $n$ -Punktfunktion eines Zustandes auf der BU-Algebra ist definiert als  $\omega_n(f_1, \dots, f_n) := \omega(\varphi(f_1)\dots\varphi(f_n))$ ,  $f_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ .

Auf Grund der Stetigkeit der Zustände ist auch die  $n$ -Punktfunktion ein stetiges Funktional auf den einzelnen Testfunktionen. Über das Kerntheorem von Schwartz [?] folgt, dass die  $n$ -Punktfunktionen Distributionen aus  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n \cdot m})$  entsprechen. Alle  $n$ -Punktfunktionen eines Zustandes legen diesen eindeutig auf  $\mathcal{A}$  fest, da alle Elemente aus endlichen Linearkombinationen von  $\varphi(f)$  bestehen. Neben den  $n$ -Punktfunktionen definiert man auch die sogenannten trunkierten  $n$ -Punktfunktionen  $\omega_n^T$

$$\begin{aligned} \omega_1^T(f) &= \omega_1(f), \\ \omega_2^T(f_1, f_2) &= \omega_2(f_1, f_2) - \omega_1(f_1)\omega_1(f_2), \\ \omega_3^T(f_1, f_2, f_3) &= \omega_3(f_1, f_2, f_3) - \omega_1(f_1)\omega_2(f_2, f_3) - \\ &\quad \omega_1(f_2)\omega_2(f_1, f_3) - \omega_1(f_3)\omega_2(f_1, f_2) + 2\omega_1(f_1)\omega_1(f_2)\omega_1(f_3) \end{aligned}$$

Implizit definiert man diese Distributionen über

$$\omega_n(f_1, f_2, \dots, f_n) = \sum_{P \in \mathcal{I}_n} \prod_{r \in P} \omega_{|r|}^T(f_{r(1)}, f_{r(2)}, \dots, f_{r(|r|)}), \quad (2.1)$$

wobei  $P$  eine beliebige Partition von  $\mathcal{I}_n = \{1, \dots, n\}$  ist.  $r(i)$  sei das  $i$ -te Element der Menge  $r \in P$

## 2. Grundlagen und Modell

Ein Zustand wird quasifrei genannt, wenn alle seine trunkierten  $n$ -Punktfunktionen bis auf die Zweipunktfunktion verschwinden. Im Sinne der formalen Potenzreihe der Exponentialfunktion ist dies äquivalent zu

$$\omega^{qf}(e^{i\varphi(f)}) = e^{-\frac{1}{2}\omega_2^{qf}(f,f)}, \quad (2.2)$$

Mit Gleichung (2.1) folgt sogleich, dass alle  $n$ -Punktfunktionen quasifreier Zustände allein durch die trunkierte Zweipunktfunktion bestimmt sind. Jeder Zustand legt nun eine Darstellung der Algebra als operatorwertige Distributionen auf einem Hilbertraum fest. Dies besagt das folgende GNS-Theorem.

**Theorem 2.1.1** (Gelfand - Naimark - Segal Theorem). *Sei  $\omega$  ein Zustand auf einer  $*$ -Algebra  $\mathcal{A}$  mit Eins. Dann existiert eine Darstellung  $\pi$  in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , ein Einheitsvektor  $\Omega \in \mathcal{H}$  und ein dichter Teilraum  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ , sodass für alle  $a \in \mathcal{A}$  gilt  $\omega(a) = \langle \Omega, \pi(a)\Omega \rangle$  und  $\mathcal{D} = \{\pi(a)\Omega | a \in \mathcal{A}\}$  gilt.  $\pi, \mathcal{H}, \mathcal{D}$  und  $\Omega$  sind bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt.*

Das GNS-Theorem ermöglicht es zu dem „gewohnten“ Bild der Physik zurückzukehren, in dem man Zustände als Vektoren eines Hilbertraums auffasst.

## 2.2. Hadamardzustände und die erweiterte Algebra $\mathcal{W}$

Die Borchers-Uhlmann Algebra reicht nicht aus, um alle gewünschten Observablen zu definieren. Unter anderem gehören dazu die Potenzen des Feldes und deren Ableitungen in einem Punkt. Die Formulierung „in einem Punkt“ kann verstanden werden aus der Vorstellung eines Distributionskerns  $\varphi(x)$  mit dem die erzeugenden Elemente der BU-Algebra definiert werden ( $\varphi(f) = \int dx f(x)\varphi(x)$ ). Aus einer solchen Größe sollte etwas ableitbar sein, was „ $\varphi(x)^2$ “ entspricht. Dass dies nicht ohne weiteres möglich ist, sieht man bereits, wenn man die Vertauschungsrelationen betrachtet.

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = i\Delta(x - y).$$

Naiv würde man erwarten, dass man den Operator  $\varphi(x)^2$  durch einen Grenzprozess der Art  $\lim_{y \rightarrow x} \varphi(x)\varphi(y)$  erhält. Dies würde allerdings implizieren, dass der Kommutator des Feldes für diesen Grenzprozess auch für lichtartige Wege verschwindet, was aber offensichtlich nicht der Fall ist. Auf Minkowskiraumzeiten führt man deswegen - natürlich nicht im zweidimensionalen Fall - eine Normalordnung mit Hilfe des Vakuums  $\omega_0$  durch. Mit diesem wird beispielsweise das „normalgeordnete“ Quadrat definiert

$$:\varphi(x)^2: := \lim_{y \rightarrow x} \varphi(x)\varphi(y) - \mathbb{1}\omega_0(x, y)$$

Es soll nun eine Definition der Hadamardparametrix gegeben werden. Diese Definition wird zunächst so allgemein sein (also für global-hyperbolische Raumzeiten), dass we-

## 2. Grundlagen und Modell

sentliche Vereinfachungen durch das in dieser Arbeit verwendete Modell noch nicht in Erscheinung treten. Es wird jedoch auf den  $2d$  dimensionalen Fall, das heißt auf eine geradzahlige Dimensionsanzahl, beschränkt.

**Definition 2.2.1** (Hadamardparametrix). Sei  $(M, g)$  eine global-hyperbolische (2d)-dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  mit Metrik  $g$ . Sei  $\sigma_\epsilon(x, y) := \sigma(x, y) - 2i\epsilon(T(x) - T(y)) + \epsilon^2$  und  $\mu$  eine beliebige reelle Zahl<sup>2</sup>. Dann ist die Hadamardparametrix für alle  $x_0 \in M$ , mit  $\epsilon > 0$  und mit  $n \in \mathbb{N}$  in einer Umgebung  $\mathcal{O}(x_0) \times \mathcal{O}(x_0)$ <sup>3</sup> gegeben durch

$$H^n(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{\Gamma(d-1)}{2\pi^d} \frac{U(x, y)}{\sigma(x, y)_\epsilon} + (-1)^d \frac{2^{1-2d}}{\Gamma(d)\pi} V^n(x, y) \ln \frac{\sigma(x, y)_\epsilon}{\mu^2}. \quad (2.3)$$

$V$  und  $U$  sind  $n$ -fach stetig differenzierbare, reelle bilineare Distributionen.  $V$  lässt sich durch eine Reihenentwicklung in  $\sigma(x, y)$  darstellen (bis zur  $n$ -ten Ordnung). Die Reihenentwicklung von  $U$  hängt hingegen von der Dimension  $2d$  ab<sup>4</sup>.

Die genaue Form von  $V$  und  $U$  der Hadamardparametrix wird durch die Hadamardrekursionsrelationen festgelegt. Diese ergeben sich aus den Bedingungen, welche man an die Hadamardzustände stellt. Dazu erfolgt zunächst die Definition eines Hadamardzustandes.

**Definition 2.2.2** (Hadamardzustand). Die Zweipunktfunktion  $\omega_2$  eines quasifreien Zustandes erfüllt die Hadamardbedingung, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  eine Hadamardparametrix  $H^n$  gegeben ist, sodass die Distribution  $\omega_2 - H^n$  mit Hilfe einer  $n$ -fach differenzierbaren Funktion  $W^n(x, y) \in C^n(U \times U)$  dargestellt werden kann ( $U \times U$  sei eine geodätisch konvexe Umgebung der Diagonalen).

Aus den Eigenschaften von Zweipunktfunktionen folgt bereits, dass die Summe  $H^n + W^n$  eine positive, bilineare Lösung der Klein-Gordon Gleichung ist und der antisymmetrische Teil dem halben Kommutator  $\frac{i}{2}\Delta$  entspricht. Unter Benutzung der Reihenentwicklung in  $\sigma$  ergeben sich durch diese Forderungen die Hadamardrekursionsrelationen<sup>5</sup> für die Entwicklungskoeffizienten dieser beiden Distributionen. Auf analytischen Raumzeiten kann auf das Abbrechen der Reihenentwicklung verzichtet werden und die Definitionen im „Limes“  $n \rightarrow \infty$  verwendet werden. Für den in dieser Arbeit zu untersuchenden Fall wird also auf den Index  $n$  verzichtet werden. Diese Version der Hadamardzustände ist nur die lokale Version der Hadamardbedingung. Das heißt, sie bezieht sich immer nur auf eine Umgebung der Diagonalen. Allerdings wurde von Radzikowski und Verch [?] gezeigt, dass diese lokale Version die globale Hadamardbedingung

<sup>2</sup> $\sigma(x, y) = x^\mu y^\nu g_{\mu\nu}$  ist der geodätische Abstand zweier Punkte.  $T(x)$  ist in die Zukunft monoton wachsend und entspricht der „Zeitfunktion“.

<sup>3</sup>Die Umgebung  $\mathcal{O}(x_0)$  soll geodätisch konvex sein, das heißt, dass alle Punkte durch eine Geodäte verbunden werden können, die innerhalb der Umgebung verläuft.

<sup>4</sup>Bei Moretti [?] sind diese Reihenentwicklungen explizit angegeben.

<sup>5</sup>Eine explizite Angabe dieser Relationen findet sich bei Moretti [?]

## 2. Grundlagen und Modell

von Kay und Wald [?] bereits impliziert. Dabei benutzte man eine zur Definition der Hadamardzustände äquivalente Formulierung. Diese wurde auch von Radzikowski [?] gefunden und besagt, dass die Wellenfrontenmenge (siehe C.5) der Zweipunktfunktion eines quasifreien Zustandes in einer bestimmten Menge genau dann enthalten ist, wenn er die Hadamardbedingung erfüllt. Mit Hilfe der Wellenfrontenmenge können dann auch kovariante Ableitungen und zeitgeordnete Produkte der Felder definiert werden. Dies wurde erstmals gezeigt bei Fredenhagen, Brunetti und Köhler [?].<sup>6</sup> Im Folgenden soll eine grobe Zusammenfassung der dort beschriebenen Normalordnung und Definition der erweiterten Algebra  $\mathcal{W}$  gegeben werden.

**Definition 2.2.3** (Normalordnung). Die normalgeordneten  $n$ -Punktprodukte bezüglich einer Hadamardparametrix  $H$  sind

$$:\varphi^{\otimes n}(\otimes_i f_i): \equiv :\varphi(f_1)\varphi(f_2)\dots\varphi(f_n):_H = \frac{\partial^n}{i^n \partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} G \left( \sum_i t_i f_i \right) \Big|_{t_1=t_2=\dots=0}$$

mit  $G(f) = e^{\frac{1}{2}H(f,f)} e^{i\varphi(f)}$  und alle  $f_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

Mit Hilfe der Wellenfrontmenge  $WF$  (siehe Anhang C.5) kann ein Produkt der normalgeordneten  $n$ -Punktprodukte mit Distributionen, die kompakt getragen aber nicht glatt sind, definiert werden. Somit kann man konkret angeben, wie die erweiterte Algebra  $\mathcal{W}$  aussieht.

**Definition 2.2.4.** Die Algebra  $\mathcal{W}$  wird durch das Produkt von Elementen aus  $\mathcal{E}'_m$  und den normalgeordneten  $m$ -Punktfunktionen erzeugt.

$$\mathcal{E}'_m = \{t | t \in \mathcal{D}'((\mathbb{R}^n)^{2m}), \text{ symmetrisch, } \text{supp}(t) \text{ kompakt und } WF(t) \not\subset V_+^m \cup V_-^m\}$$

Die sich ergebende Algebra ist wohldefiniert und vollständig, wie bei Hollands und Ruan [?] gezeigt wird. Um die quadratischen Operatoren zu konstruieren, die in dieser Arbeit von Interesse sind, ist die folgende Klasse kompakt getragener Distributionen entscheidend.

**Definition 2.2.5.** Die Wickmonome sind die Elemente aus  $\mathcal{A}$ , die durch die Distributionen  $t(x_1 \dots x_n) = f(x_1)\delta(x_1; \dots; x_n)$  erzeugt werden

$$:\varphi^n(f):_H := :\varphi^{\otimes n}(f(x_1)\delta(x_1; \dots; x_n)):_\omega^0. \quad (2.4)$$

Zu den Distributionen aus  $\mathcal{E}'_m$  gehören auch Funktionen der Art

$$\partial_\mu(f(x_1, \dots, x_n)\delta(x_1; \dots; x_n)).$$

---

<sup>6</sup>Auch Hollands und Ruan [?] bieten eine gute Übersicht dazu an.

## 2. Grundlagen und Modell

Die normalgeordneten Produkte von Ableitungen der Felder sind in dieser Menge mit eingeschlossen.

**Beispiel 2.2.1** (Energieimpulstensor auf Minkowskiraumzeiten<sup>7</sup>).

$$: (T^{\mu\nu}) (f) :_H := : \varphi^{\otimes 2} \left( \left[ \partial_\mu^x \partial_\nu^y - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left( \partial_\lambda^x \partial^\lambda^y - m^2 \right) \right] f(x) \delta(x-y) \right) :_H$$

In der Notation soll in Zukunft  $T^{\mu\nu}$  auch für die Ableitungsoperatoren in  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  stehen. Dann wirkt dieser auf eine normalgeordnete Zweipunktfunktion  $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  im Sinne von  $T^{\mu\nu} : W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (T^{\mu\nu} W)(\mathbf{x})$ .

**Beispiel 2.2.2** (Die quadratische balancierte Ableitung). Dieses Produkt wird durch den Ableitungsoperator  $\tilde{\partial}^{\mu\nu}$  definiert, welcher auf die normalgeordnete Zweipunktfunktion wirkt.

$$\tilde{\partial}^{\mu\nu} = \left( \partial^{x^\mu} - \partial^{y^\mu} \right) \left( \partial^{x^\nu} - \partial^{y^\nu} \right)$$

Diese Notation wird genauer im Anhang A erläutert und eingeführt.

---

<sup>7</sup>Auf gekrümmten Raumzeiten sollte dieser abgeändert werden, wenn man Spurfreiheit für konforme Theorien fordert und erhalten möchte [?].

# 3. Konstruktion von Hadamardzuständen

Die Erwartungswerte von quadratischen Operatoren in einem Zustand ergeben sich aus der jeweiligen normalgeordneten Zweipunktfunktion. Dieses Kapitel setzt sich zwei Ziele. Zum einen soll eine möglichst große Klasse von Hadamardzuständen angegeben werden, für die eine explizite Angabe der normalgeordneten Zweipunktfunktion möglich ist. Als Zweites sollen notwendige Eigenschaften, welche die normalgeordneten Zweipunktfunktionen erfüllen, gefunden werden. Die Betrachtung wird auf das zweidimensionale masselose Klein-Gordon-Feld beschränkt. Außerdem werden nur quasifreie Zustände behandelt, weil dadurch bereits durch die Angabe einer Zweipunktfunktion ein Zustand festgelegt ist.

## 3.1. Hadamardzustände und die Hadamardparametrix in 1+1 Dimensionen

In zwei und vier Dimensionen soll als erstes die Hadamardparametrix mit Hilfe der bei Moretti [?] angegebenen Hadamardrekursionsrelationen berechnet werden. Bei Moretti wird unter anderem gezeigt, dass die Parametrix auf gekrümmten Raumzeiten im Allgemeinen nicht eine Lösung der Klein-Gordon Gleichung (KGG) ist. Im masselosen Fall in zwei und vier Dimensionen auf flachen Raumzeiten ist dies allerdings der Fall. Dies war für den vier dimensionalen Fall natürlich zu erwarten, da hier die Hadamardparametrix der Zweipunktfunktion des Vakuums entspricht. Die Integralkerne der Parametrix in 2 und 4 Dimensionen sind

$D = 2 :$

$$H(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{\sigma(x, y)_\epsilon}{\lambda^2} \right) \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!} U_k(x, y) \sigma^k(x, y),$$

$D = 4 :$

$$H(x, y) = -\frac{1}{2(\pi)^2} \left( \frac{U_0(x, y)}{\sigma(x, y)_\epsilon} + \ln \left( \frac{\sigma(x, y)_\epsilon}{\lambda^2} \right) \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k-1} k!} U_{k+1}(x, y) \sigma^k(x, y) \right).$$

Die Hadamardrekursionsrelationen für alle  $U_k$  sind dann nach Moretti

### 3. Konstruktion von Hadamardzuständen

$$\square_x U_{k-1}(x, y) + 2(x^\mu - y^\mu) \overset{x}{\partial}_\mu U_k(x, y) + 2k U_k(x, y) = 0.$$

Sie sind bereits an den flachen, masselosen Fall angepasst. Als Anfangsbedingungen sind gesetzt  $U_{-1} = 0$  und  $U_0(x, x) = 0$ . Für  $k = 0$  ist dann

$$\begin{aligned} 2(x^\mu - y^\mu) \overset{x}{\partial}_\mu U_0(x^\nu, y^\nu) &= 0 \\ t \frac{d}{dt} U_0(y^\nu + ta^\nu, y^\nu) &= 0, \quad a^\nu = (x^\nu - y^\nu) \text{ und } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Für  $t = 0$  betrachtet man die Diagonale, welche bereits vorgegeben ist. Für  $t \neq 0$  ist dann

$$\frac{d}{dt} U_0(y^\nu + ta^\nu, y^\nu) = 0.$$

Das bedeutet, dass  $U_0$  überall konstant ist. Es folgt, dass  $U_0(x, y) = 1$ . Für den Fall  $k \neq 1$  ist  $U_k$  immer Null auf der Diagonale. Zunächst betrachtet man  $U_1$ .

$$\begin{aligned} (x^\nu - y^\nu) \overset{x}{\partial}_\nu U_1(x^\nu, y^\nu) + U_1(x^\nu, y^\nu) &= 0 \\ ta^\nu \overset{x}{\partial}_\nu U_1(y^\nu + ta^\nu, y^\nu) + U_1(y^\nu + ta^\nu, y^\nu) &= 0, \quad ta^\nu = (x^\nu - y^\nu) \\ t \frac{d}{dt} U_1(y^\nu + ta^\nu, y^\nu) + U_1(y^\nu + ta^\nu, y^\nu) &= 0 \end{aligned}$$

Es gibt stetige von Null verschiedene Lösungen für  $t$  aus Intervallen, die nicht „0“ enthalten. Diese sind  $\propto t^{-1}$ . Sie sind damit nicht stetig fortsetzbar auf  $t = 0$ . Durch Induktion zeigt man dies für alle  $k$ . Da  $U_1[t]$  in einer Umgebung der Null in  $t$  stetig sein muss – wie man es von Lösungen einer Differentialgleichung fordert – folgt, dass es keine Lösung außer Null gibt. Damit ergibt sich für die Parametrixen

$D = 2$  :

$$H(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{\sigma(x, y)_\epsilon}{\lambda^2} \right),$$

$D = 4$  :

$$H(x, y) = -\frac{1}{2(\pi)^2} \frac{1}{\sigma(x, y)_\epsilon}.$$

Dies sind für  $x \neq y$  Bilösungen der masselosen KGG. Als nächstes seien noch einige Ergebnisse zur Struktur von Zweipunktfunktionen im Allgemeinen gesammelt. Die Form

### 3. Konstruktion von Hadamardzuständen

einer Zweipunktfunktion unterliegt bereits entscheidenden Einschränkungen durch den bekannten Kommutator zweier Felder der BU-Algebra. Dazu zerlegt man die Zweipunktfunktion in ihren symmetrischen und antisymmetrischen Anteil. Sei  $\omega$  ein Hadamardzustand.

$$\begin{aligned}\omega(\varphi(f)\varphi(g)) &= \frac{1}{2}(\omega(\varphi(f)\varphi(g)) + \omega(\varphi(g)\varphi(f))) + \frac{1}{2}(\omega(\varphi(f)\varphi(g)) - \omega(\varphi(g)\varphi(f))) \\ &= \frac{1}{2}(\omega(\varphi(f)\varphi(g)) + \omega(\varphi(g)\varphi(f))) + \frac{1}{2}i\Delta(f, g)\end{aligned}$$

Durch Zerlegung von  $f$  und  $g$  in Real- und Imaginärteil ( $g = R_g + iI_g$  und  $f = R_f + iI_f$ ) erhält man Folgendes für den symmetrischen Teil der Zweipunktfunktion.

$$\frac{1}{2}(\omega(\varphi(f)\varphi(g)) + \omega(\varphi(g)\varphi(f))) = \omega(\varphi(R_f)\varphi(R_g)) + \omega(\varphi(R_g)\varphi(R_f))$$

Der symmetrische Teil ist folglich reell.

**Satz 3.1.1.** *Die Zweipunktfunktion eines Hadamardzustandes hat die Form*

$$\omega(\varphi(f)\varphi(g)) = S(f, g) + \frac{1}{2}i\Delta(f, g).$$

$S$  ist eine symmetrische und reelle Distribution.

Zur Konstruktion von Hadamardzuständen ist es also notwendig Distributionen  $S$  zu finden, welche in der Summe mit dem Propagator eine positive Distribution ergeben. Die Positivitätsbedingung stellt – wie gleich gezeigt wird – eine Bedingung an  $S$ . Sei  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und seien die Real- und Imaginärteile  $R, J$ , so dass  $f = R + iJ$ .

$$\begin{aligned}\omega(\varphi(f^*)\varphi(f)) &= S(f^*, f) + \frac{1}{2}i\Delta(f^*, f) \geq 0 \\ S(f^*, f) &\geq -\frac{1}{2}i\Delta(f^*, f) \\ S(R, R) + S(J, J) &\geq \Delta(R, J)\end{aligned}\tag{3.1}$$

$S$  ist also bereits für sich selbst genommen positiv (setze  $R = 0$ ). Führt man sich vor Augen, wie die Normalordnung (nach 2.2.3) in diesem Fall definiert ist –  $\omega(\varphi(f)\varphi(g)) = \omega_2(f, g) - H(f, g)$  – und bedenkt, dass der antisymmetrische Teil der Hadamardparametrix und der Zweipunktfunktion  $\frac{i}{2}\Delta$  entspricht, so gilt folgender Satz für die normalgeordnete Zweipunktfunktion eines Hadamardzustandes.

**Satz 3.1.2.** *Die normalgeordnete Zweipunktfunktion  $W$  eines Hadamardzustandes  $\omega$  ist die Differenz einer positiven bilinearen Distribution  $S$  und des symmetrischen Teils der Hadamardparametrix*

$$W(f, g) = S(f, g) - \frac{1}{2}(H(f, g) + H(g, f)).\tag{3.2}$$

### 3. Konstruktion von Hadamardzuständen

$S$  und  $W$  sind bilineare Lösungen der KGG.

*Beweis.* Da der antisymmetrische Teil der Hadamardparametrix und der Zweipunkt-funktion identisch sind, reduziert sich die Normalordnung auf die Differenz der sym-metrischen Anteile. Es bleibt zu klären, warum  $S$  und  $W$  Bilösungen der KGG sind. Dies folgt daraus, dass alle Zweipunkt-funktionen und die Hadamardparametrix (für das betrachtete Modell) Bilösungen sind.  $\square$

Um zu klären inwieweit und für welche Testfunktionen die Hadamardparametrix posi-tiv ist, untersucht man nun die Impulsraumdarstellung der Hadamardparametrix. Damit beschäftigt sich der nächste Abschnitt, um dann wieder zur Konstruktion von Zuständen zurückzukehren.

## 3.2. Impulsraumdarstellung der Hadamardparametrix

Um die Impulsraumdarstellung der Hadamardparametrix zu finden, kann man folgenden heuristischen Weg nehmen, welcher, wie gezeigt wird, zur gewünschten Hadamardpara-metrix führt. Die Zweipunkt-funktion des Vakuumzustands auf Minkowskiraumzeiten in vier Dimensionen sei der Ausgangspunkt. Man übertrage diesen auf zwei Dimensionen. Dann erhält man den folgenden Ausdruck.

$$u(f) = \int dp_0 \int dp_1 \delta(p_0^2 - p_1^2) \Theta(p_0) f(p_0, p_1). \quad (3.3)$$

Man definiert dazu eine entsprechende bilineare Distribution im Ortsraum durch

$$H_{pos}(g, h) := u(\mathcal{F}\{g \star h\}). \quad (3.4)$$

$\star$  ist die Korrelation<sup>1</sup> der beiden Testfunktionen und  $\mathcal{F}$  ist die Fouriertransformation auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . Allerdings ist die Distribution  $u$  nur aus  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ . Unter Erhaltung des Skalengrades soll die Distribution nun auf  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  fortgesetzt werden. Eine gute Zusammenfassung zu diesem Thema findet man bei Keller [?], welcher den folgenden Weg ausführlich beschreibt. Der Divergenzgrad dieser Distribution ist Null. Somit gibt es eine ganz Klasse von Erweiterungen  $\tilde{u}$  der Distribution  $u$ , welche klassifiziert werden durch Funktionen  $w(p_0, p_1) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  mit  $w(0) = 1$  (siehe [?]).

$$\tilde{u}(f) := u(f(p_0, p_1) - f(0, 0)w(p_0, p_1)) + Cf(0, 0), \quad (3.5)$$

---

<sup>1</sup>Für zwei Schwartzfunktionen  $f$  und  $g$  ist die Korrelation  $f \star g := (Pf) \ast g$ .  $\ast$  ist die Faltung zweier Funktionen und  $P$  soll die Punktspiegelung am Nullpunkt einer Funktion sein.

### 3. Konstruktion von Hadamardzuständen

$C$  ist eine beliebige komplexe Zahl. Es wird zunächst gezeigt, dass der Teil  $u(f(p_0, p_1) - f(0, 0)w(p_0, p_1))$  einer Regularisierung mit dem Cauchyschen Hauptwert entspricht.

$$\begin{aligned} u(f) &= u(f(p_0, p_1) - f(0, 0)w(p_0, p_1)) + Cf(0, 0) \\ &= \int dp_0 \int dp_1 \delta(p_0^2 - p_1^2) \Theta(p_0) (f(p_0, p_1) - f(0, 0)w(p_0, p_1)) + Cf(0, 0) \\ &= \int dp \frac{1}{|p|} (f(|p|, p) - f(0, 0)w(|p|, p)) + Cf(0, 0) \end{aligned}$$

Sei nun  $\text{supp } w(|p|, p) \in [-c, c]$  und  $v(p) := 1 - w(|p|, p)$

$$\begin{aligned} &= \int_{[-c, c]} dp \frac{f(|p|, p) - f(0, 0)}{|p|} + \int_{\mathbb{R} \setminus [-c, c]} dp \frac{f(|p|, p)}{|p|} + \\ &+ f(0, 0) \left( \int_{[-c, c]} \frac{v(p)}{|p|} + C \right) \end{aligned}$$

Das zweite Integral ist endlich, da  $v$  im Nullpunkt Null ist. Damit können die letzten beiden Terme effektiv durch eine neue Konstante  $C'$  (im weiteren wieder  $C$  genannt) beschrieben werden, d.h.  $C'f(0, 0)$ .

$$\begin{aligned} &= \int_{[-c, c]} dp \frac{f(|p|, p) - f(0, 0)}{|p|} + \int_{\mathbb{R} \setminus [-c, c]} dp \frac{f(|p|, p)}{|p|} + C'f(0, 0) \\ &= \int_0^c dp \frac{f(p, p) - f(0, 0)}{p} + \int_c^\infty dp \frac{f(p, p)}{p} + \\ &+ \int_{-c}^0 dp \frac{f(-p, p) - f(0, 0)}{-p} + \int_{-\infty}^{-c} dp \frac{f(-p, p)}{-p} + C'f(0, 0) \\ &= \int_0^c dp \frac{f(p, p) + f(p, -p) - 2f(0, 0)}{p} + \int_c^\infty dp \frac{f(p, p) + f(p, -p)}{p} + \\ &+ C'f(0, 0) \end{aligned}$$

$f$  kann nun durch ihre Fouriertransformierte  $g \star h$  dargestellt werden. Sobald man einen Konvergenzterm  $e^{-\epsilon|p_0|}$  einfügt, ist nach dem Satz von Fubini die Vertauschung der Integrationen über  $p$  und über den Ortsraum möglich.

$$f(p_0, p_1) = \frac{1}{2\pi} \int dt \int dx e^{-|p_0|\epsilon} e^{i(p_0 t - p_1 x)} (g \star h)(t, x)$$

### 3. Konstruktion von Hadamardzuständen

Die Ausdrücke sind von jetzt an implizit als Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0^+$  zu verstehen. Die Vertauschung der Integrationen kann ausgeführt werden.

$$\begin{aligned}
 H_{ort}(g, h) &= \frac{1}{2\pi} \int dt \int dx (g \star h)(t, x) \left( \int_0^c dp \frac{e^{-p\epsilon} e^{i(pt-px)} + e^{-p\epsilon} e^{i(pt+px)} - 2}{p} + \right. \\
 &\quad \left. + \int_c^\infty dp \frac{e^{-p\epsilon} e^{i(pt-px)} + e^{-p\epsilon} e^{i(pt+px)}}{p} + C' \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int dt \int dx (g \star h)(t, x) \\
 &\quad \int_0^c dp \frac{e^{p(ix_- - \epsilon)} + e^{p(ix_+ - \epsilon)} - 2}{p} + \int_c^\infty dp \frac{e^{p(ix_- - \epsilon)} + e^{p(ix_+ - \epsilon)}}{p} + C'
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die Lichtkegelkoordinaten wurden wieder verwendet  $x_- := t - x$  und  $x_+ := t + x$ .

**Satz 3.2.1.** Die Distribution  $H_{ort}(g, h)$  entspricht der Hadamardparametrix

$$-\frac{1}{2\pi} \int d(s, y) \int d(t, x) g(t, x) h(s, y) \ln \left( \frac{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})_\epsilon}{\lambda^2} \right)$$

aus (3.1). Es gelte  $(t, x) = \mathbf{x}$  und  $(s, y) = \mathbf{y}$ .

*Beweis.* Die Berechnung reduziert sich nun auf die Berechnung von

$$I(z) := \int_0^c dp \frac{e^{-pz} - 1}{p} + \int_c^\infty dp \frac{e^{-pz}}{p}.$$

$I(z)$  ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Als Nebenbedingung sei der Realteil von  $z$  größer als Null. Der Integrationsweg<sup>2</sup> von 0 nach  $c$  und schließlich von  $c$  nach  $\infty$  wird aufgeteilt auf einen Weg durch die komplexe Ebene ohne die negative reelle Halbachse zu schneiden.

$$\begin{array}{ll}
 \alpha : \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \\ t \mapsto \frac{1}{z}t \end{array} & \beta : \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \\ t \mapsto \frac{1}{z} + t \left( c - \frac{1}{z} \right) \end{array} \\
 \gamma : \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \\ t \mapsto \frac{1}{z}(1 + t(M - 1)) \end{array} & \delta : \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \\ t \mapsto \frac{1}{z}M e^{-it \text{Arg}(1/z)} \end{array}
 \end{array}$$

Der Weg  $-\beta$  steht im Folgenden für den Weg in umgekehrter Richtung.  $I(z)$  wird

---

<sup>2</sup>Ich möchte an dieser Stelle ausdrücklich Jan Schlemmer danken, der mir diesen Integrationsweg zur Lösung des Problems vorschlug.

### 3. Konstruktion von Hadamardzuständen

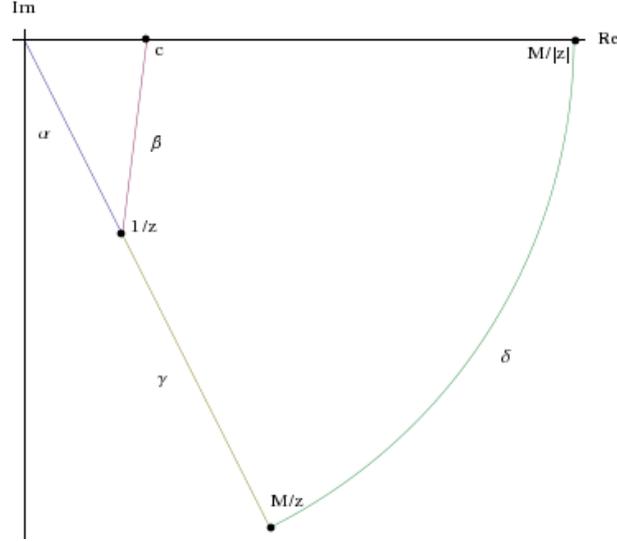


Abbildung 3.1.: Weg in der komplexen Ebene

damit zu

$$\begin{aligned}
 I(z) &= \int_{\alpha} dp \frac{e^{-pz} - 1}{p} + \int_{\beta} dp \frac{e^{-pz} - 1}{p} + \int_{-\beta} dp \frac{e^{-pz}}{p} + \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \int_{\gamma} dp \frac{e^{-pz}}{p} + \int_{\delta} dp \frac{e^{-pz}}{p} \right) \\
 &= \int_0^1 dt \frac{e^{-t} - 1}{t} - \int_0^1 dt \left( c - \frac{1}{z} \right) \frac{1}{\frac{1}{z} + t \left( c - \frac{1}{z} \right)} + \int_0^1 dt \left( c - \frac{1}{z} \right) \frac{e^{-\beta(t)z}}{\frac{1}{z} + t \left( c - \frac{1}{z} \right)} \\
 &\quad - \int_0^1 dt \left( c - \frac{1}{z} \right) \frac{e^{-\beta(t)z}}{\frac{1}{z} + t \left( c - \frac{1}{z} \right)} + \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\int_0^1 dt (M-1) \frac{e^{-1-tM+t}}{1+t(M-1)}}_{\text{Substitution } t'=1+t(M-1)} + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^1 dt (-i \text{Arg}(1/z)) \frac{e^{-Me^{-it \text{Arg}(1/z)}}}{t} \right) \\
 &= \int_0^1 dt \frac{e^{-t} - 1}{t} - \ln \left( \frac{1}{z} + t \left( c - \frac{1}{z} \right) \right) \Big|_0^1 + \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^1 dt (-i \text{Arg}(1/z)) \\
 &\quad \frac{e^{-M \text{Re}[e^{-it \text{Arg}(1/z)}]} e^{-i M \text{Im}[e^{-it \text{Arg}(1/z)}]} \frac{1}{t}}{t} \\
 &= \underbrace{\int_0^1 dt \frac{e^{-t} - 1}{t}}_{\gamma \text{ Euler-Mascheroni Konstante}} + \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} + \ln \left( \frac{1}{cz} \right) + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^1 dt (-i \text{Arg}(1/z)) \\
 &\quad \frac{e^{-M \cos(-t \text{Arg}(1/z))} e^{-M i \sin(-t \text{Arg}(1/z))}}{t} = \gamma + \ln \left( \frac{1}{cz} \right)
 \end{aligned}$$

### 3. Konstruktion von Hadamardzuständen

$\cos(-t\text{Arg}(1/z))$  ist größer Null, da  $|t| < 1$  und der Realteil von  $1/z$  auch größer Null ist. Dadurch ist das letzte Integral im Limes  $M \rightarrow \infty$  Null. Mit diesem Ergebnis setzt man die Berechnung von  $H_{ort}$  fort:

$$\begin{aligned}
H_{ort}(g, h) &= \frac{1}{2\pi} \int dt \int dx (g \star h)(t, x) (I(-ix_- + \epsilon) + I(-ix_+ + \epsilon) + C') \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dt \int dx (g \star h)(t, x) ((-1) \ln(c^2(-ix_- + \epsilon)(-ix_+ + \epsilon)) + 2\gamma + C') \\
&\quad \text{mit } \lambda^2 := \frac{e^{-2\gamma - C'}}{c^2} \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int dt \int dx (g \star h)(t, x) \ln \left( \frac{-(t + i\epsilon)^2 + x^2}{\lambda^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int d(s, y) \int d(t, x) g(t, x) h(s, y) \ln \left( \frac{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})_\epsilon}{\lambda^2} \right)
\end{aligned}$$

□

Betrachtet man die „reine“ Impulsraumdarstellung in Gleichung (3.6), kann man positive von nichtpositiven Anteilen der Distribution unterscheiden.

**Satz 3.2.2.** *Ein Anteil der Impulsraumdarstellung der Hadamardparametrix ist*

$$H_{neg}(g, h) := \frac{1}{2\pi} \int_0^c dp \int dt \int dx (g \star h)(t, x) \frac{e^{ipx_-} + e^{ipx_+} - 2}{p}.$$

$H_{neg}$  ist eine reguläre Distribution und Bilösung der KGG. Außerdem ist  $H_{neg}$  keine positive Distribution.

*Beweis.* Dass diese Distribution nicht positiv ist, folgt nach dem Theorem von Bochner und Schwartz [?, Th IX.10, S.14]. Da sich die bilineare Distribution in diesem Fall als Distribution auf der Korrelation der beiden Argumente auffassen lässt, müsste nach diesem Theorem die fouriertransformierte Distribution ein positives Maß mit maximal polynomiellern Wachstum sein.

Um die Glattheit zu zeigen, vertauscht man die Reihenfolge der Integration. Dies ist ohne die Einführung eines Konvergenzterms möglich.

$$H_{neg}(g, h) = \frac{1}{2\pi} \int dt \int dx (g \star h)(t, x) \int_0^c dp \frac{e^{ipx_-} + e^{ipx_+} - 2}{p}$$

### 3. Konstruktion von Hadamardzuständen

Man wendet sich folgenden Teilausdrücken zu:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^c dp \frac{e^{ipx} - 1}{p} \\ &= \int_0^c dp \frac{\cos(px) - 1}{p} + i \int_0^c dp \frac{\sin(px)}{p}. \end{aligned}$$

Beide Integrale lassen sich beliebig oft nach  $x$  differenzieren, außerdem hängt das Integral stetig von  $x$  ab. Die Stetigkeit ist erfüllt, da beide Integranden  $\mathcal{L}^1$  integrabel sind und stetig in  $x$  sind. Die Ableitungen der Integranden sind alle Produkte aus einfachen Monomen und trigonometrischen Funktionen, welche auf beschränkten Intervallen auch integrabel sind. Diese Voraussetzungen führen zur Glattheit von  $I(x)$  [?]. Der positive Anteil ist nun eine Lösung der KGG, da er eine Summe von Funktionen ist, welche nicht simultan von  $x_-$  und  $x_+$  bzw.  $y_-$  und  $y_+$  abhängen (siehe C.2.1).

$$H_{neg}(g, h) = \frac{1}{2\pi} \int d(t, x) \int d(s, y) g(t, x) h(s, y) (I(x_- - y_-) + I(x_+ - y_+))$$

Im Weiteren soll  $I(x_- - y_-) + I(x_+ - y_+)$  als  $H_{neg}(x, y)$  bezeichnet werden.  $\square$

**Satz 3.2.3.** *Der positive Anteil der Impulsraumdarstellung ist die Distribution*

$$H_{pos}(g, h) := \frac{1}{2\pi} \int_c^\infty dp \int dt \int dx (g \star h)(t, x) \frac{e^{ipx_-} + e^{ipx_+}}{p} e^{-cp}.$$

$H_{pos}$  ist keine reguläre Distribution, allerdings Bilösung der KGG und positiv.

*Beweis.* Die Positivität folgt nach dem Theorem von Bochner-Schwartz, da die fouriertransformierte Distribution ein positives Maß besitzt, welches polynomiell beschränkt ist. Die Distribution ist außerdem durch ihre Aufspaltung in separate Funktionen von Lichtkegelkoordinaten automatisch eine KG Lösung.  $\square$

**Bemerkung 3.2.1.** Trennt man die Hadamardparametrix nun in positive und nichtpositive, sowie in symmetrische und antisymmetrische Teile, so ist die Zweipunktfunktion eines Hadamardzustandes  $\omega$ .

$$\begin{aligned} \omega_2(f, g) &= W(f, g) + H_{neg}^s(f, g) + H_{neg}^a(f, g) + H_{pos}^s(f, g) + H_{pos}^a(f, g) \\ &= W(f, g) + H_{neg}^s(f, g) + H_{pos}^s(f, g) + \frac{i}{2} \Delta(f, g) \end{aligned}$$

$W$  ist wie zuvor die normalgeordnete Zweipunktfunktion. Zur Konstruktion von Hadamardzuständen müsste man nun nach Distributionen suchen, welche in der Summe mit der nichtpositiven Distribution  $H_{neg}$  eine positive bilineare Distribution ergeben.

Es lässt sich nun eine notwendige Bedingung zur Positivität der normalgeordneten Zweipunktfunktion gegenüber des negativen Teils der Hadamardparametrix finden. Zur

### 3. Konstruktion von Hadamardzuständen

Vereinfachung soll folgendes Funktional auf den Schwartzfunktionen definiert sein:

$$\mathfrak{D}(f)(p) := \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{x} (f^* \star f)(t, x) (e^{ipx_-} + e^{ipx_+}).$$

Die Ausführung der Integration liefert Folgendes

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(f)(p) &= \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} f^*(\mathbf{x}+\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) (e^{ipx_-} + e^{ipx_+}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \int d(p_0, p_1) \tilde{f}(p_0, p_1) e^{-ip_0(t+s)} e^{+ip_1(x+y)} \\ &\quad \int d(q_0, q_1) \tilde{f}(q_0, q_1) e^{iq_0s} e^{-iq_1y} (e^{ipx_-} + e^{ipx_+}) \\ &= \left| \tilde{f}(p, p) \right|^2 + \left| \tilde{f}(p, -p) \right|^2 \end{aligned}$$

**Satz 3.2.4.** *Sei  $\omega$  ein beliebiger quasifreier Hadamardzustand. Sei außerdem eine Funktion  $\phi \in \mathcal{C}^\infty([0, c])$  gegeben. Zu dieser seien Funktionen  $\rho_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty([c, c + \epsilon])$  gegeben für die Folgendes gilt.*

- $g_\epsilon := \phi + \rho_\epsilon$  ist glatt
- $g_\epsilon(c + \epsilon) = 0$

Sei nun  $f_\epsilon$  eine Funktion für die gilt  $g_\epsilon = \mathfrak{D}(f_\epsilon)$ . Dann gilt für jede Funktion  $\phi$ , dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(f_\epsilon^*, f_\epsilon) + H_{neg}(f_\epsilon^*, f_\epsilon) \geq 0$$

*Beweis.* Aufgrund der Positivität der Zweipunktfunktion gilt für alle  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$W(f^*, f) + H_{neg}(f^*, f) + H_{pos}(f^*, f) \geq 0.$$

Der positive Teil der Hadamardparametrix  $H_{pos}$  hat seinen Träger im Impulsraum in einem Intervall  $[c, \infty)$ . Da der Träger von  $\mathfrak{D}(f_\epsilon)$  eingeschränkt werden soll, müssen die Distributionen auf Schwartzfunktionen fortgesetzt werden, denn die Fouriertransformation bildet die kompakt getragenen Testfunktion auf schnellfallende Schwartzfunktionen  $\mathcal{S}$  ab. Allerdings gilt die Ungleichung bereits nach dem Theorem von Borchers und Schwartz [?, Th IX.10, S.14] auch für Schwartzfunktionen. Es kann damit ein  $f_\epsilon \in \mathcal{S}$  gewählt werden, für das der Träger von  $\mathfrak{D}(f_\epsilon)$  auf dem Intervall  $[0, c + \epsilon]$  liegt und somit in die zwei Funktionen  $\phi + \rho_\epsilon$  zerlegt werden kann (wie im Satz gefordert). Aufgrund der Träger von  $H_{neg}$  und  $H_{pos}$  hängt für ein  $\phi$  die Distribution  $H_{pos}(f^*, f)$  nur von  $\rho_\epsilon$  ab.

$$W(f_\epsilon^*, f_\epsilon) + H_{neg}(f_\epsilon^*, f_\epsilon) + K(\rho_\epsilon) \geq 0$$

### 3. Konstruktion von Hadamardzuständen

$K(\rho_\epsilon)$  ist  $H_{pos}(f_\epsilon^*, f_\epsilon)$ . Da  $\epsilon$  beliebig klein gewählt werden kann, ist auch  $K(\rho_\epsilon)$  beliebig klein. Es folgt für alle  $\phi$  mit  $\mathfrak{D}(f_\epsilon) = \phi + \rho_\epsilon$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(f_\epsilon^*, f_\epsilon) + H_{neg}(f_\epsilon^*, f_\epsilon) \geq 0.$$

□

**Satz 3.2.5.** Sei  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  und  $\partial_{x_\pm} = \partial_t \pm \partial_x$ . Dann gilt

$$H(\partial_{x_\pm} f^*, \partial_{x_\pm} f) \geq 0$$

*Beweis.* Unter Verwendung der Impulsraumdarstellung (3.6) für die Hadamardparametrix ergibt sich Folgendes

$$\begin{aligned} H(\partial_{x_\pm} f^*, \partial_{x_\pm} f) &= \frac{1}{2\pi} \int dt \int dx (\partial_{x_\pm} f^* \star \partial_{x_\pm} f)(t, x) \left( \int_0^c dp \frac{e^{i(pt-px)} + e^{i(pt+px)} - 2}{p} \right. \\ &\quad \left. + \int_c^\infty dp \frac{e^{-p\epsilon} e^{i(pt-px)} + e^{-p\epsilon} e^{i(pt+px)}}{p} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dt \int dx (f^* \star f)(t, x) \int_0^\infty dp p e^{ipx_\pm} \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist positiv nach dem Satz von Bochner und Schwartz. Man sieht dies dadurch, dass durch die Fouriertransformation von  $f$  sich das Folgende ergibt:

$$= \int_0^\infty dp p |\tilde{f}(p, \pm p)|^2.$$

□

**Korollar 1.** Da der antisymmetrische Teil der Hadamardparametrix der halbe Kommutator ist (wie auch bei Zweipunktfunktionen), folgt für solche Testfunktionen, dass

$$H(\partial_{x_\pm} f^*, \partial_{x_\pm} f) + H(\partial_{x_\pm} f, \partial_{x_\pm} f^*) \geq i\Delta(\partial_{x_\pm} f^*, \partial_{x_\pm} f)$$

### 3.3. Eine Klasse von Zuständen und ihre Erwartungswerte

**Satz 3.3.1.** Seien  $f, g$  Testfunktionen,  $H_s$  der symmetrische Anteil der Hadamardparametrix und  $P$  eine Projektion

$$Pf = f - \psi \int f.$$

### 3. Konstruktion von Hadamardzuständen

mit  $\int \psi = 1$ . Dann ist

$$H_s(Pg, Pf) + \frac{r^2}{4} \int f \int g + \frac{1}{r^2} \Delta(f, \psi) \Delta(g, \psi) + \frac{i}{2} \Delta(g, f).$$

die Zweipunktfunktion eines quasifreien Hadamardzustandes ( $r \in \mathbb{R}$ ).

*Beweis.* Die Positivität wird als Erstes überprüft. Dabei wird Satz 3.2.5 verwendet. Dies wird wichtig durch die Beobachtung, dass

$$\int Pf = 0$$

Das wiederum bedeutet, dass eine weitere kompakt getragene Testfunktion  $\eta$  existiert, welche nach einer der beiden Lichtkegelkoordinaten abgeleitet  $Pf$  ergibt. Dann gilt nach Satz 3.2.5, dass

$$H_s(Pf^*, Pf) + \frac{i}{2} \Delta(Pf^*, Pf) \geq 0$$

ist. Man erhält Folgendes, wenn man den Kommutator mit Hilfe der Projektion  $P$  zerlegt und  $g := f^*$  wählt,

$$\frac{i}{2} \Delta(f^*, f) = \frac{i}{2} \Delta(Pf^*, Pf) + \frac{i}{2} \Delta(\psi, f) \int f^* + \frac{i}{2} \Delta(f^*, \psi) \int f$$

Sei nun definiert ( $a, b \in \mathbb{C}$  und  $r \in \mathbb{R}$ )

$$a := r \Delta(\psi, f), \quad b := \frac{1}{r} \int f.$$

Dann ergibt sich für den Kommutator

$$\frac{i}{2} \Delta(f^*, f) = \frac{i}{2} \Delta(Pf^*, Pf) + a^* b + ab^*.$$

Mit der Ungleichung  $r^2 |a|^2 + \frac{1}{r^2} |b|^2 \geq a^* b + ab^*$  und der bereits gefundenen Ungleichung ergibt sich

$$H_s(Pf^*, Pf) + r^2 |a|^2 + \frac{1}{r^2} |b|^2 \geq \frac{i}{2} \Delta(Pf^*, Pf) + a^* b + ab^*.$$

Damit ist die Positivität der Zweipunktfunktion gezeigt. Diese ist außerdem eine bilineare Lösung. Es verbleibt zu zeigen, dass die Differenz mit der Hadamardparametrix eine

### 3. Konstruktion von Hadamardzuständen

symmetrische reelle glatte Distribution ergibt.

$$\begin{aligned}
& H_s(Pg, Pf) + \frac{r^2}{4} \int f \int g + \frac{1}{r^2} \Delta(f, \psi) \Delta(g, \psi) + \frac{i}{2} \Delta(g, f) - H(g, f) \\
&= H_s(Pg, Pf) + \frac{r^2}{4} \int f \int g + \frac{1}{r^2} \Delta(f, \psi) \Delta(g, \psi) - H_s(g, f) \\
&= H(\psi, \psi) \int g \int f - H_s(\psi, f) \int g - H_s(\psi, g) \int f + \frac{r^2}{4} \int f \int g + \frac{1}{r^2} \Delta(f, \psi) \Delta(g, \psi)
\end{aligned}$$

Die sich ergebende Distribution ist symmetrisch und reell. Die Glattheit der Distribution ist gesichert, da  $H(\mathbf{x}, \psi)$  glatt ist. Außerdem ist dies eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung, da  $H$  eine Bilösung ist.  $\square$

Da sich dieser Zustand aus einer Erweiterung der Hadamardparametrix von Testfunktionen, welche Ableitungen von Testfunktionen sind, auf alle Testfunktionen darstellt, soll dieser Zustand im Folgenden  $\omega_0$  genannt werden.  $\omega_0$  ergibt für das Wickquadrat Folgendes

$$\omega_0(:\varphi^2:)(\mathbf{x}) = H(\psi, \psi) - 2H_s(\psi, \mathbf{x}) + \frac{r^2}{4} + \frac{1}{r^2} \Delta(\mathbf{x}, \psi)^2$$

Für den Energieimpulstensor ergibt sich folgendes Ergebnis. Es sei daran erinnert, dass nur Terme beitragen können, die in beiden Argumenten der Zweipunktfunktion nicht konstant sind.  $\Delta(\mathbf{x}, \psi)$  ist eine beliebige Lösung der Klein-Gordon Gleichung mit kompakt getragenen Anfangsbedingungen und es sei  $g(x_+) + h(x_-) = \Delta(\mathbf{x}, \psi)$ .

$$\omega_0(:T^{\mu\nu}:)(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2} (g'(x_+)^2 + (-1)^{\mu+\nu} h'(x_-)^2)$$

Für balancierte quadratische Ableitung<sup>3</sup> ergibt sich mit etwas schwer fälliger Berechnung

$$\omega_0(:\delta^{\mu\nu}:)(\mathbf{x}) = -2H_s(\partial^\mu \partial^\nu \psi, \mathbf{x}) + \frac{2}{r^2} (\Delta(\mathbf{x}, \partial^\mu \partial^\nu \psi) \Delta(\mathbf{x}, \psi) - \Delta(\mathbf{x}, \partial^\nu \psi) \Delta(\mathbf{x}, \partial^\mu \psi))$$

Der konstruierte Zustand besitzt eine punktweise positive Energiedichte. Der Betrag des Erwartungswertes der Energie kann durch den Parameter  $r$  beliebig klein gewählt werden.

---

<sup>3</sup>Für eine genaue Definition und weitergehende Untersuchung siehe Anhang A und Kapitel 5.1

# 4. Allgemeine Eigenschaften und Abschätzungen der Erwartungswerte

## 4.1. Quantenungleichungen für das Wickquadrat und den Energieimpulstensor

Einige klassische Observablen, wie beispielsweise der EIT, können nur positive Werte annehmen. Dies wird bekanntermaßen in Quantenfeldtheorien so stark verletzt, dass die Energiedichte in einem Punkt beliebig negativ sein kann [?]. Jedoch können die verschmierten Größen für solche klassisch positiven Größen zustandsunabhängig nach unten abgeschätzt werden. Neben anderen hat Fewster in [?] solche Quantenungleichungen genannten Abschätzungen für die Energiedichte eines bewegten Beobachters aufgestellt. Dabei wurde die Normalordnung durch einen beliebigen Hadamardzustand definiert. Zustandsunabhängig heißt, dass die Abschätzung einer mit einer Testfunktion  $f$  verschmierten Energiedichte nur von dieser Testfunktion und dem zur Normalordnung verwendeten Hadamardzustand abhängt. Der konforme zweidimensionale masselose Fall wird in Fewsters Veröffentlichung jedoch nicht behandelt<sup>1</sup>. Es soll hier gezeigt werden, dass Fewsters Methode auch in diesem Fall zu einer Quantenungleichung führt. Einfachheit halber wird hier nur die verschmierte Energiedichte im Ruhesystem eines Zustandes abgeschätzt. Sei nun ein beliebiger Hadamardzustand  $\omega$  gegeben, welcher eine normalgeordnete Zweipunktfunktion  $W$  besitzt. Desweiteren sei  $G(t, x)$ <sup>2</sup> eine Schwartzfunktion mit der die Energiedichte verschmiert wird.

$$\omega(:T^{00}:)(G^2) = \int dt \int dx (T^{00}W(\mathbf{x}, \mathbf{y}))|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} G(t, x)^2.$$

---

<sup>1</sup>Zu ganz allgemeinen zweidimensionalen konformen Modellen gibt es auch Quantenungleichungen bei Fewster und Hollands [?]

#### 4. Allgemeine Eigenschaften und Abschätzungen der Erwartungswerte

Der Limes der Punktsplattung kann auch mit Hilfe der Fouriertransformierten von Deltafunktionen ausgedrückt werden. Da der Energieimpulstensor nur von den chiralen Anteilen der Zweipunktfunktion abhängt (siehe 5.9), benötigt man nur Deltafunktionen die von der Differenz der Lichtkegelkoordinaten abhängen.

$$= \int \frac{d\alpha}{2\pi} \int \frac{d\beta}{2\pi} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} (\partial_{x_-} \partial_{y_-} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_{x_+} \partial_{y_+} W(\mathbf{x}, \mathbf{y})) G(\mathbf{x}) G(\mathbf{y}) e^{i\alpha(x_+ - y_+)} e^{i\beta(x_- - y_-)}$$

Da die normalgeordnete Zweipunktfunktion symmetrisch ist, kann die Integration über  $\alpha$  und  $\beta$  auf  $\mathbb{R}^+$  beschränkt werden. Außerdem wird partiell integriert in  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ .

$$= \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty d\beta \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\partial_{x_-} \partial_{y_-} + \partial_{x_+} \partial_{y_+}) G(\mathbf{x}) G(\mathbf{y}) e^{i\alpha(x_+ - y_+)} e^{i\beta(x_- - y_-)}$$

Sei nun  $G$  reellwertig und  $F_{\alpha\beta}^\pm(\mathbf{x}) := \partial_{x_\pm} G(\mathbf{x}) e^{-i\alpha x_+} e^{-i\beta x_-}$

$$= \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty d\beta W(F_{\alpha\beta}^{+*}, F_{\alpha\beta}^+) + W(F_{\alpha\beta}^{-*}, F_{\alpha\beta}^-)$$

Durch die Positivität der Zweipunktfunktion folgt, dass  $W + H$  positiv ist<sup>2</sup>. Somit gilt folgende Ungleichung

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty d\beta W(F_{\alpha\beta}^{+*}, F_{\alpha\beta}^+) + W(F_{\alpha\beta}^{-*}, F_{\alpha\beta}^-) \geq - \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty d\beta H(F_{\alpha\beta}^{+*}, F_{\alpha\beta}^+) + H(F_{\alpha\beta}^{-*}, F_{\alpha\beta}^-)$$

Im Folgenden wird die rechte Seite dieser Ungleichung berechnet. Die Impulsraumdarstellung der Hadamardparametrix aus Gleichung (3.6) wird eingesetzt und die partielle

---

<sup>2</sup>H ist die Hadamardparametrix

#### 4. Allgemeine Eigenschaften und Abschätzungen der Erwartungswerte

Integration rückgängig gemacht.

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty d\beta H(F_{\alpha\beta}^{+*}, F_{\alpha\beta}^+) + H(F_{\alpha\beta}^{-*}, F_{\alpha\beta}^-) \\
&= \frac{1}{2\pi^3} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int d\mathbf{x} (G \star G)(\mathbf{x}) e^{i\alpha x_+} e^{i\beta x_-} \\
&\quad (\partial_{x_-}^2 + \partial_{x_+}^2) \left\{ \int_0^c dp \frac{e^{p(ix_- - \epsilon)} + e^{p(ix_+ - \epsilon)} - 2}{p} + \int_c^\infty dp \frac{e^{p(ix_- - \epsilon)} + e^{p(ix_+ - \epsilon)}}{p} \right\} \\
&= \frac{-1}{2\pi^3} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int d(x_+, x_-) (G \star G)(x_+, x_-) e^{i\alpha x_+} e^{i\beta x_-} \\
&\quad \int_0^\infty dp p (e^{p(ix_- - \epsilon)} + e^{p(ix_+ - \epsilon)}) \\
&= \frac{-1}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty dp p e^{-\epsilon p} (\mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha, \beta + p) + \mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha + p, \beta))
\end{aligned}$$

Das Integral über  $\beta$  und  $p$  bzw.  $\alpha$  und  $p$  ist endlich, da  $\mathcal{F}^{-1}(G \star G)$  in der Richtung  $\alpha + p$  bzw.  $\beta + p$  schnell abfällt. Die Rechnung wird nun exemplarisch an dem ersten Term fortgeführt.

$$\begin{aligned}
& \frac{-1}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty dp p \mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha, \beta + p) \\
&= \frac{-1}{2\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d(\beta + p) \int_{-\beta-p}^{\beta+p} d(p - \beta) p \mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha, \beta + p)
\end{aligned}$$

Da die Korrelation zweier Funktionen symmetrisch ist, können die Integrale auf die gesamten reellen Zahlen erweitert werden - kompensiert mit einem Faktor  $\frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{4\pi^2} \int dv \int dw v^2 \mathcal{F}^{-1}(G \star G)(w, v) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dx_- \partial_{x_-}^2 (G \star G)(0, x_-)|_{x_- = 0} = -\frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{x} (\partial_{x_-} G(t, x))^2
\end{aligned}$$

Für den zweiten Teil erfolgt die Berechnung in entsprechender Weise und man erhält als gesamte Abschätzung

$$\begin{aligned}
\omega(:T^{00}:)(G^2) &\geq -\frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{x} \{(\partial_{x_-} G(t, x))^2 + (\partial_{x_+} G(t, x))^2\} \\
&\geq -\frac{1}{\pi} \int d\mathbf{x} \{(\partial_t G(t, x))^2 + (\partial_x G(t, x))^2\}.
\end{aligned}$$

Man fasst dies als einen Satz zusammen.

**Satz 4.1.1.** *Sei  $\omega$  ein Hadamardzustand und  $f$  eine beliebige punktweise positive Test-*

#### 4. Allgemeine Eigenschaften und Abschätzungen der Erwartungswerte

funktion, dann gilt

$$\omega(:T^{00}:)(f^2) \geq -\frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{x} \{(\partial_{x_-} f(t, x))^2 + (\partial_{x_+} f(t, x))^2\}.$$

Die gleiche Methode lässt sich auf das Wickquadrat anwenden. Sei  $F_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) := G(\mathbf{x}) e^{-i\alpha x_+} e^{-i\beta x_-}$  eine Schwartzfunktion und sei  $\omega$  ein Hadamardzustand, dann gilt

$$\omega(:\varphi^2:)(G^2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta W(F_{\alpha\beta}^*, F_{\alpha\beta}).$$

In Anlehnung an das Vorgehen für den Energieimpulstensor lässt sich der Integrand durch die Hadamardparametrix nach unten abschätzen:

$$\begin{aligned} &\geq -\frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta H(F_{\alpha\beta}^*, F_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{-1}{2\pi^3} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int d\mathbf{x} (G \star G)(\mathbf{x}) e^{i\alpha x_+} e^{i\beta x_-} \\ &\quad \left\{ \int_0^c dp \frac{e^{p(ix_- - \epsilon)} + e^{p(ix_+ - \epsilon)} - 2}{p} + \int_c^\infty dp \frac{e^{p(ix_- - \epsilon)} + e^{p(ix_+ - \epsilon)}}{p} \right\} \\ &= \frac{-1}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \\ &\quad \left\{ \int_0^c dp \frac{\mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha, p + \beta) + \mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha + p, \beta) - 2\mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha, \beta)}{p} \right. \\ &\quad \left. + \int_c^\infty dp \frac{\mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha, p + \beta) + \mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha + p, \beta)}{p} \right\} \end{aligned}$$

Partielle Integration innerhalb des „ $p$ “ Integrals führt zu

$$\begin{aligned} &= \frac{-1}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \left\{ -2\mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha, \beta) \ln(c) + \right. \\ &\quad \left. \int_0^\infty dp \ln(p) \partial_\beta (\mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha, p + \beta) + \partial_\alpha \mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha + p, \beta)) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha, \beta) \ln\left(\frac{\alpha\beta}{c^2}\right) \end{aligned}$$

#### 4. Allgemeine Eigenschaften und Abschätzungen der Erwartungswerte

Der Integrand ist wieder in  $\alpha$  und  $\beta$  symmetrisch und es ergibt sich.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha, \beta) \left( \ln\left(\frac{|\alpha|}{c}\right) + \ln\left(\frac{|\beta|}{c}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \mathcal{F}^{-1}(G \star G)(\alpha, \beta) (\ln(|\alpha|) + \ln(|\beta|) - 2\ln(c)) \end{aligned}$$

Die Fouriertransformation soll nun wieder von der Korrelation auf den Logarithmus verschoben werden. Um die Integrationen nach dem Satz von Fubini vertauschen zu können, müssen die Konvergenzterme  $e^{-\epsilon\alpha}$  bzw.  $e^{-\delta\beta}$  eingeführt werden.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_+ \int_{-\infty}^{\infty} dx_- (G \star G)(x_+, x_-) \sqrt{2\pi} (\delta(x_-) \mathcal{F}(e^{-\epsilon \ln(|\cdot|)})(x_+) \\ &\quad + \delta(x_+) \mathcal{F}(e^{-\delta \ln(|\cdot|)})(x_-) - 2\sqrt{\pi} \ln(c) \delta(x_+) \delta(x_-)) \end{aligned}$$

Die Fouriertransformation von  $\mathcal{F}(e^{-\epsilon \ln(|\cdot|)})(x)$  ist  $-i \frac{(\ln(\epsilon - ix) - \ln(\epsilon + ix))}{\sqrt{2\pi}(x + i\epsilon)}$  damit ergibt sich der nachfolgende Term:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_+ \int_{-\infty}^{\infty} dx_- (G \star G)(x_+, x_-) \left( \delta(x_-) \frac{-i(\ln(\epsilon - ix_+) - \ln(\epsilon + ix_+))}{(x_+ + i\epsilon)} \right. \\ &\quad \left. + \delta(x_+) \frac{-i(\ln(\delta - ix_-) - \ln(\delta + ix_-))}{(x_- + i\delta)} - 4\pi \ln(c) \delta(x_+) \delta(x_-) \right) \end{aligned}$$

Der Grenzwert für den Term  $-i(\ln(\epsilon - ix_+) - \ln(\epsilon + ix_+))$  lässt sich bereits berechnen. Der Realteil ist symmetrisch in  $x$  und fällt deswegen heraus. Übrig bleibt nur die Differenz der Imaginäranteile des Logarithmus. Es ergibt sich, dass  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} -i(\ln(\epsilon - ix) - \ln(\epsilon + ix)) = -\operatorname{sgn}(x)\pi$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d(x_+, x_-) (G \star G)(x_+, x_-) \left( \delta(x_-) \frac{\operatorname{sgn}(x_+)}{(x_+ + i\epsilon)} + \delta(x_+) \frac{\operatorname{sgn}(x_-)}{(x_- + i\delta)} \right) \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \ln(c) \int d\mathbf{x} G(\mathbf{x})^2 \end{aligned}$$

#### 4. Allgemeine Eigenschaften und Abschätzungen der Erwartungswerte

Der Term wird symmetrisiert und die Ableitung nach  $x_-$  resp.  $x_+$  aus dem Integranden herausgezogen.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi} \left[ \int_0^\infty dx_+ (G \star G)(x_+, 0) \partial_{x_+} \ln(x_+^2 - \epsilon^2) + \right. \\
&\quad \left. \int_0^\infty dx_- (G \star G)(0, x_-) \partial_{x_-} \ln(x_-^2 - \delta^2) \right] - \frac{2}{\pi} \ln(c) \int d\mathbf{x} G(\mathbf{x})^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^\infty dx_+ (\partial_{x_+} (G \star G)(x_+, 0)) \ln(|x_+|) + \right. \\
&\quad \left. \int_{-\infty}^\infty dx_- (\partial_{x_-} (G \star G)(0, x_-)) \ln(|x_-|) \right] - \frac{2}{\pi} \ln(c) \int d\mathbf{x} G(\mathbf{x})^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^\infty dx_+ \int_{-\infty}^\infty dy_+ \int_{-\infty}^\infty dy_- \ln(|x_+ - y_+|) \partial_{x_+} G(x_+, y_-) G(y_+, y_-) + \right. \\
&\quad \left. \int_{-\infty}^\infty dx_- \int_{-\infty}^\infty dy_+ \int_{-\infty}^\infty dy_- \ln(|x_- - y_-|) \partial_{x_-} G(y_+, x_-) G(y_+, y_-) \right] \\
&\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{\pi} \ln(c^2) \int d\mathbf{x} G(\mathbf{x})^2.
\end{aligned}$$

Die Abschätzung für das Wickquadrat ist weitaus komplizierter als für den Energieimpulstensor. Die untere Schranke ist nicht strikt negativ auf Grund des ersten Terms, dessen Integrand einen Logarithmus enthält und somit nicht klar positiv oder negativ ist.

**Satz 4.1.2.** *Sei  $\omega$  ein Hadamardzustand und  $G$  eine beliebige punktweise positive Testfunktion, dann gilt*

$$\begin{aligned}
\omega(\cdot \varphi^2 \cdot)(G^2) &\geq \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^\infty dx_+ \int d\mathbf{y} \ln(|x_+ - y_+|) \partial_{x_+} G(x_+, y_-) G(y_+, y_-) + \right. \\
&\quad \left. \int_{-\infty}^\infty dx_- \int d\mathbf{y} \ln(|x_- - y_-|) \partial_{x_-} G(y_+, x_-) G(y_+, y_-) \right] \\
&\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{\pi} \ln(c^2) \int d\mathbf{x} G(\mathbf{x})^2.
\end{aligned}$$

## 4.2. Nichtexistenz translationsinvarianter Zustände

Bereits im ersten Kapitel wurde erwähnt, dass es im zweidimensionalen konformen Fall keinen poincaréinvarianten Vakuumvektor im Hilbertraum der GNS-Darstellung gibt. Es soll hier gezeigt werden, dass bereits translationsinvariante Zustände nicht existieren können.

**Definition 4.2.1.** Ein Hadamardzustand  $\omega$  ist translationsinvariant, wenn die 2-Punkt-

#### 4. Allgemeine Eigenschaften und Abschätzungen der Erwartungswerte

funktion  $\omega_2$  dargestellt werden kann unter Verwendung einer Distribution  $\tilde{\omega}_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\omega_2(f, g) = \tilde{\omega}_2(f \star g)$$

$\star$  ist die Korrelation<sup>3</sup> zweier Funktionen.

Die Hadamardparametrix ist in diesem Sinne auch translationsinvariant. Damit ist die normalgeordnete Zweipunktfunktion eines translationsinvarianten Zustandes auch translationsinvariant.

**Satz 4.2.1.** *Alle glatten bilinearen Lösungen  $W$  der KGG, welche translationsinvariant sind, sind gegeben durch zwei  $C^\infty(\mathbb{R})$  Funktionen  $g$  und  $h$ .*

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(x_+ - y_+) + h(x_- - y_-)$$

*Beweis.* Wie nachfolgend noch besprochen wird, muss  $W$  aus drei Funktionen  $f_1, f_2$  und  $f_3$  aus  $C^\infty(\mathbb{R})^2$  bestehen:<sup>4</sup>

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(x_+, y_+) + f_2(x_-, y_-) + f_3(x_-, y_+) + f_3(y_-, x_+)$$

Die Translationsinvarianz fordert nun für alle  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ , dass

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x} + \mathbf{a}, \mathbf{y} + \mathbf{a}) &= W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \Rightarrow f_1(x_+ + a_+, y_+ + a_+) + f_2(x_- + a_-, y_- + a_-) + f_3(x_- + a_-, y_+ + a_+) + \\ & f_3(y_- + a_-, x_+ + a_+) = f_1(x_+, y_+) + f_2(x_-, y_-) + f_3(x_-, y_+) + f_3(y_-, x_+) \end{aligned}$$

Betrachtet man nun eine Ableitung nach  $x_-$  und  $y_+$ , so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_{x_-} \partial_{y_+} W(\mathbf{x} + \mathbf{a}, \mathbf{y} + \mathbf{a}) &= \partial_{x_-} \partial_{y_+} f_3(x_-, y_+) \\ \partial_{x_-} \partial_{y_+} f_3(x_- + a_-, y_+ + a_+) &= \\ \partial_{a_-} \partial_{a_+} W(\mathbf{x} + \mathbf{a}, \mathbf{y} + \mathbf{a}) &= \partial_{x_-} \partial_{y_+} f_3(x_-, y_+) \\ \partial_{a_-} \partial_{a_+} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \partial_{x_-} \partial_{y_+} f_3(x_-, y_+) \\ 0 &= \partial_{x_-} \partial_{y_+} f_3(x_-, y_+) \end{aligned}$$

$f_3$  muss also konstant sein.  $f_1$  und  $f_2$  hingegen müssen gegeben sein durch Funktionen ( $g$  und  $h$ ), welche nur von der Differenz  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  abhängen.

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(x_+ - y_+) + h(x_- - y_-) \quad \square$$

Es soll nun gezeigt werden, dass translationsinvariante Bilösungen in der Summe mit dem nicht positiven Anteil  $H_{neg}$  keine positive Distribution ergeben können.

<sup>3</sup>Die Korrelation zweier Testfunktionen  $f, g$  ist definiert durch die Faltung  $*$ , in dem  $f \star g := f^*(-x) * g$   
<sup>4</sup> siehe Diskussion in 5.1

#### 4. Allgemeine Eigenschaften und Abschätzungen der Erwartungswerte

**Satz 4.2.2.** *Sei  $W$  eine translationsinvariante Bilösung der KGG. Es existiert ein  $\phi \in C^\infty([0, c])$ , sodass für alle  $\epsilon > 0$  ein beliebiges  $\rho_\epsilon \in C^\infty([c, c + \epsilon])$  gewählt werden kann, welches folgende Eigenschaften erfüllt*

- $\phi + \rho_\epsilon$  ist glatt,
- $\rho_\epsilon(c + \epsilon) = 0$ .

Für alle Funktionen  $f_\epsilon$  für die gilt  $\mathfrak{D}(f_\epsilon) = \phi + \rho_\epsilon$  gilt dann die folgende Ungleichung.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(f_\epsilon^*, f_\epsilon) + H_{neg}(f_\epsilon^*, f_\epsilon) < 0.^5$$

*Beweis.*  $W$  ist im Allgemeinen keine schnellabfallende Funktion. Es ist jedoch möglich die Fouriertransformation im Sinne von Distributionen durchzuführen. Der Kern der Distribution  $W$  kann somit unter Verwendung der Fouriertransformierten  $\chi_\pm$  angegeben werden. Da  $W$  reell und symmetrisch ist, sind auch  $\chi_\pm$  reell und symmetrisch.

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \int dp (\chi_+(p)e^{ip(x_+ - y_+)} + \chi_-(p)e^{ip(x_- - y_-)})$$

Es genügt Testfunktionen  $f(t, x) = g(x_+)h(x_-)$  zu betrachten.  $\tilde{g}$  steht für die Fouriertransformierte einer Funktion  $g$ . Für die einzelnen Beiträge der hier betrachteten Summe erhält man dann Folgendes.

$$\begin{aligned} H_{neg}(f^*, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^c dp \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \frac{e^{ip(x_- - y_-)} + e^{ip(x_+ - y_+)} - 2}{p} g(x_+)^* h(x_-)^* g(y_+) h(y_-) \\ &= \frac{1}{4} \int_0^c dp \frac{1}{p} \left( |\tilde{g}(p)|^2 |\tilde{h}(0)|^2 + |\tilde{h}(p)|^2 |\tilde{g}(0)|^2 - 2|\tilde{h}(0)|^2 |\tilde{g}(0)|^2 \right) \\ W(f^*, f) &= \frac{1}{4} \int dp \left( \chi_+(p) |\tilde{g}(p)|^2 |\tilde{h}(0)|^2 + \chi_-(p) |\tilde{h}(p)|^2 |\tilde{g}(0)|^2 \right) \end{aligned}$$

Da  $\tilde{g}$  und  $\tilde{h}$  die Fouriertransformierten von Schwartzfunktionen sind, kann man  $g$  und  $h$  so wählen, dass ihr Träger im Intervall  $[0, c + \epsilon]$  liegt. Man wählt nun für jedes  $\epsilon > 0$  die zwei Funktionen  $\tilde{g}$  und  $\tilde{h}$  so, dass  $\tilde{g}(c + \epsilon) = 0$  und  $\tilde{h}(c + \epsilon) = 0$ . Sei jetzt  $f_\epsilon$  die entsprechende Schwartzfunktion, sodass  $\mathfrak{D}(f_\epsilon) = \tilde{g}\tilde{h}$  ist.

$$\begin{aligned} W(f_\epsilon^*, f_\epsilon) + H_{neg}(f_\epsilon^*, f_\epsilon) &= |\tilde{h}(0)|^2 \frac{1}{4} \int_0^c dp \frac{1}{p} \left( |\tilde{g}(p)|^2 (1 + \chi_+(p)p) - |\tilde{g}(0)|^2 \right) + \\ &\quad |\tilde{g}(0)|^2 \frac{1}{4} \int_0^c dp \frac{1}{p} \left( |\tilde{h}(p)|^2 (1 + \chi_-(p)p) - |\tilde{h}(0)|^2 \right) + K(\epsilon) \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup> $f_\epsilon$  ist eventuell eine Schwartzfunktion. Siehe dazu Satz 3.2.5

#### 4. Allgemeine Eigenschaften und Abschätzungen der Erwartungswerte

Im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  wird  $K(\epsilon)$  beliebig klein, somit ergibt sich für den Grenzwert.

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(f^*, f) + H_{neg}(f^*, f) &= |\tilde{h}(0)|^2 \frac{1}{4} \int_0^c dp \frac{1}{p} (|\tilde{g}(p)|^2 (1 + \chi_+(p)p) - |\tilde{g}(0)|^2) + \\ &|\tilde{g}(0)|^2 \frac{1}{4} \int_0^c dp \frac{1}{p} (|\tilde{h}(p)|^2 (1 + \chi_-(p)p) - |\tilde{h}(0)|^2) \end{aligned}$$

Man wähle nun einmal  $\tilde{g}$  und  $\tilde{h}$  so, dass eine der Funktionen Null im Nullpunkt ist, während die andere einen beliebig schmalen Träger um ein  $p \in (0, c)$  habe. Daraus folgt, dass nur  $\chi_{\pm}$  noch ausgeschlossen werden müssen für die gilt

$$\chi_{\pm}(p) \geq -\frac{1}{p} \text{ oder } 1 + p\chi_{\pm}(p) \geq 0.$$

Sei nun  $\chi_{\pm}(p)$  für ein  $p'$  negativ, dann folgt für eine Umgebung  $I$  dieses Punktes, dass

$$1 - p\chi_{\pm}(p) \geq 0$$

Sei dann  $|\tilde{g}(p)|^2$  in dem betreffenden Intervall  $I$  identisch  $1 - p\chi_+(p)$  und außerhalb dessen Null bzw. eine Funktion, deren Integral beliebig klein ist.  $|\tilde{h}(p)|^2$  sei dann verschieden von Null bei  $p = 0$ , dann erhält man den Grenzwert.

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(f^*, f) + H_{neg}(f^*, f) &= |\tilde{h}(0)|^2 \frac{1}{4} \int_I dp \frac{1}{p} ((1 - p\chi_+(p)) (1 + \chi_+(p)p) - 1) \\ &= -|\tilde{h}(0)|^2 \frac{1}{4} \int_I dp \frac{1}{p} (\chi_+(p)p)^2 < 0 \end{aligned}$$

Dies gilt entsprechend für  $\chi_-$ . Damit verbleiben nun noch Funktionen mit  $\chi_{\pm}(p) \geq 0$ . Man wähle wieder für die beiden Testfunktionen die Ausdrücke

$$|\tilde{g}(p)|^2 := \frac{1}{(1 + \chi_+(p)p)^2} \text{ und } |\tilde{h}(p)|^2 := \frac{1}{(1 + \chi_-(p)p)^2}.$$

Diese sind wohldefiniert und stets kleiner gleich eins, wegen der Positivität beider  $\chi_{\pm}$ . Man setzt diese konstruierten Funktionen ein und erhält

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(f_{\epsilon}^*, f_{\epsilon}) + H_{neg}(f_{\epsilon}^*, f_{\epsilon}) &= \frac{1}{4} \int_0^c dp \frac{1}{p} \left( \frac{1}{1 + \chi_+(p)p} - 1 \right) + \\ &\frac{1}{4} \int_0^c dp \frac{1}{p} \left( \frac{1}{1 + \chi_-(p)p} - 1 \right) < 0. \end{aligned}$$

Wenn  $\chi_{\pm}$  verschieden von Null ist auf  $[0, c]$ , dann ist dieser Ausdruck kleiner als Null.

#### 4. Allgemeine Eigenschaften und Abschätzungen der Erwartungswerte

Für den Fall dass  $\chi_{\pm}$  auf dem Intervall  $[0, c]$  Null ist, ist das Integral für jede auf dem Intervall  $[0, c]$  monoton abfallende Funktion negativ. Es sind somit alle Fälle abgedeckt. Es gibt somit keine Wahl für  $\chi_{\pm}$ , für die keine Folge von Testfunktion  $f_{\epsilon}$  mit  $\text{supp } \mathfrak{D}(f_{\epsilon}) \subset [0, c + \epsilon]$  gefunden werden kann, sodass die gewünschte Ungleichung gilt.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(f_{\epsilon}^*, f_{\epsilon}) + H_{neg}(f_{\epsilon}^*, f_{\epsilon}) < 0. \quad \square$$

**Korollar 2.** *Da dies im Widerspruch zu Satz 3.2.4 steht, kann es keinen translationsinvarianten Zustand geben.*

## 5. Notwendige Bedingungen für die Erwartungswerte

Die drei quadratischen Operatoren, die in der vorliegenden Arbeit behandelt werden, sollen in diesem Kapitel in vereinfachter Weise untersucht werden. Die normalgeordneten 2-Punktfunktionen werden dazu als eine glatte, bilineare Lösung der KGG, beschrieben. Das heißt die Positivität der Zweipunktfunktion muss implizit gefordert werden. Der Sinn dieser Betrachtung hat zwei Gründe. Erstens ist die Positivität einer bilinearen Distribution nicht konstruktiv gegeben und es gibt keine allgemeinen Aussagen über die Art solcher Distributionen. Im Anhang unter C.4 findet man einige allgemeine Aussagen zu regulären positiven Bidistributionen. Zweitens können in dieser Weise bezüglich der gegenseitigen Abhängigkeit der Erwartungswerte bestimmte Zusammenhänge ausgeschlossen werden. Der Ausgangspunkt dieses Kapitels ist ein beliebiger Hadamardzustand  $\omega$ . Die zugehörige normalgeordnete Zweipunktfunktion wäre mit Verweis auf Gleichung (3.1.2), durch die Funktion  $W$  gegeben.  $W$  ist symmetrisch und reell. Die Aussage aus C.4 zu solchen glatten Bilösungen besagt nun, dass immer vier glatte Funktion  $g, h, \Xi$  und  $\Xi'$  existieren, welche alle reelle Abbildungen aus  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  sind.

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(x_+, y_+) + h(x_-, y_-) + \Xi(x_-, y_+) + \Xi'(y_-, x_+)$$

In diesem Abschnitt wird sehr stark von den sich ergebenden Eigenschaften der Funktionen durch die Verwendung von Lichtkegelkoordinaten Gebrauch gemacht. Zur Erinnerung: Diese sind definiert als  $x_\pm = t \pm x$ . In dieser Arbeit ist immer dann die Rede von Funktionen des Typs  $g, h$  und  $\Xi$ , wenn Funktionen nur von den entsprechenden Argumenten abhängen. Diese Zerlegung ist auf keinen Fall eindeutig und es sollen nun einige Konventionen festgelegt werden, mit denen diese Freiheit etwas eingeschränkt wird. Die Symmetrie unter Vertauschung von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  ermöglicht eine erste Vereinfachung. Für jede symmetrische Funktion  $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  gilt, dass eine nichtsymmetrische Funktion  $W'$  existiert, sodass  $W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = W'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + W'(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ . Somit hat  $W$  in der Darstellung durch  $g, h, \Xi$  und  $\Xi'$  die Form

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(x_+, y_+) + h(x_-, y_-) + \Xi(x_-, y_+) + \Xi'(y_-, x_+) + \\ g(y_+, x_+) + h(y_-, x_-) + \Xi(y_-, x_+) + \Xi'(x_-, y_+)$$

Die Funktionen sind selbstverständlich nicht identisch mit denen aus der vorangegangenen Gleichung. Somit kann die Zerlegung reduziert werden auf drei glatte Funktionen

## 5. Notwendige Bedingungen für die Erwartungswerte

$g$ ,  $h$  und  $\Xi$ .  $g$  und  $h$  sind symmetrisch unter Vertauschung ihrer Argumente.

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(x_+, y_+) + h(x_-, y_-) + \frac{1}{2} (\Xi(x_-, y_+) + \Xi(y_-, x_+)) \quad (5.1)$$

Nach der Sicherung der Symmetrie legt man fest, dass alle ersten Ableitungen von  $\Xi$  Null sein sollen. Damit gehören Funktionen, die nur von einer Lichtkegelkoordinate abhängen zu Funktionen des Typs  $g$  und  $h$ .

Die nachfolgenden Betrachtungen sind alle nach der gleichen Vorgehensweise aufgebaut. Zunächst wird für eine normalgeordnete Zweipunktfunktion  $W$  (nach (5.1)) das entsprechende Feld berechnet. Dann stellen sich zwei Fragen. Einerseits soll eine Art Umkehrung dieser Zuordnung von  $W$  zu einem Erwartungswert gefunden werden. Statt der normalgeordneten Zweipunktfunktion einen Erwartungswert eines Operators zuzuordnen, soll mindestens einem Erwartungswert eine normalgeordnete Zweipunktfunktion zugeordnet werden. Anschließend wird untersucht, inwieweit die normalgeordnete Zweipunktfunktion unter beibehaltenem Erwartungswert durch Addition eines Kerns erweitert werden könnte. Als Kern soll hier eine glatte normalgeordnete Zweipunktfunktion bezeichnet sein, die den Erwartungswert Null hat. Schließlich sollen auch Abhängigkeiten zwischen den quadratischen Operatoren gezeigt werden.

**Bemerkung 5.0.1.** An dieser Stelle soll noch eine technische Anmerkung gemacht werden. Im Laufe dieses Kapitels werden gelegentlich glatte Funktionen  $f_1, \dots, f_i$  verwendet. Diese Funktionen sind immer im Kontext des betreffenden Satzes zu betrachten und bezeichnen nicht über das gesamte Kapitel hinweg die gleichen Funktionen.

### 5.1. Die quadratische balancierte Ableitung

Die quadratische balancierte Ableitung wird im Folgenden vereinfacht balancierte Ableitung genannt. Eine Definition dieser Ableitung findet sich im Anhang A.0.3. Interessant ist dieser Operator, da er auch als thermischer Energieimpulstensor aufgefasst werden kann [?].

$$\begin{aligned} (\tilde{\partial}^{\mu\nu} W)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \partial_h^\mu \partial_h^\nu g(x_+ + h_+, x_+ - h_+) + h(x_- + h_-, x_- - h_-) + \\ &\quad \frac{1}{2} (\Xi(x_- + h_-, x_+ - h_+) + \Xi(x_- - h_-, x_+ + h_+)) \end{aligned}$$

Für die Übersichtlichkeit seien für  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die partiellen Ableitungen  $\partial_x^{(n)} \partial_y^{(m)} f(x, y)|_{(x,y) = (x_0, y_0)}$  abgekürzt mit  $f^{(n,m)}(x_0, y_0)$ .

## 5. Notwendige Bedingungen für die Erwartungswerte

$$\begin{aligned}
(\tilde{\partial}^{\mu\nu}W)(x) &= g^{(2,0)}(x_+, x_+) - 2g^{(1,1)}(x_+, x_+) + g^{(0,2)}(x_+, x_+) + \\
& (-1)^{\mu+\nu}h^{(2,0)}(x_-, x_-) + 2(-1)^{\mu+\nu+1}h^{(1,1)}(x_-, x_-) + (-1)^{\mu+\nu}h^{(0,2)}(x_-, x_-) + \\
& (-1)^{\mu+\nu}\Xi^{(2,0)}(x_-, x_+) + ((-1)^{\mu+1} + (-1)^{\nu+1})\Xi^{(1,1)}(x_-, x_+) + \Xi^{(0,2)}(x_-, x_+)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Die Ableitung von  $\Xi$  können zu Ableitungen auf der Diagonalen von  $\Xi$  zusammengefasst werden. Mit Hilfe der Funktion  $\tilde{\Xi}(x, t) := \Xi(x_-, x_+)$ , gilt nun für die Ableitungen von  $\Xi$

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \partial_x)^2 \tilde{\Xi}(t, x) &= 4 \Xi^{(2,0)}(x_-, x_+) \\
(\partial_t + \partial_x)^2 \tilde{\Xi}(t, x) &= 4 \Xi^{(0,2)}(x_-, x_+) \\
(\partial_t^2 - \partial_x^2) \tilde{\Xi}(t, x) &= 4 \Xi^{(1,1)}(x_-, x_+)
\end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich die balancierte Ableitung von  $\Xi$ . Zur besseren Übersicht notieren wir die Gleichung mit  $2 \times 2$  Matrizen. Das heißt  $\tilde{\partial}^{\mu\nu}W$  ist eine Matrix, deren Darstellung in den Komponenten  $\mu = 0, 1$  und  $\nu = 0, 1$  ist:

$$\begin{aligned}
& (\tilde{\partial}^{\mu\nu}\Xi)(\mathbf{x}) \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (\partial_t - \partial_x)^2 + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} (\partial_t^2 - \partial_x^2) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (\partial_t + \partial_x)^2 \right\} \tilde{\Xi}(t, x) \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \partial_t^2 + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \partial_t \partial_x \right\} \tilde{\Xi}(t, x) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x^2 & \partial_t \partial_x \\ \partial_t \partial_x & \partial_t^2 \end{pmatrix} \tilde{\Xi}(t, x)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Für die Ableitungen der Funktionen  $g$  und  $h$  sei zur Übersicht noch der Operator  $P$  eingeführt

$$Pg(z) := g^{(2,0)}(z, z) - 2g^{(1,1)}(z, z) + g^{(0,2)}(z, z)$$

Die balancierte Ableitung zerfällt dann in zwei Ausdrücke

$$\begin{aligned}
& g^{(2,0)}(x_+, x_+) - 2g^{(1,1)}(x_+, x_+) + g^{(0,2)}(x_+, x_+) + \\
& (-1)^{\mu+\nu}h^{(2,0)}(x_-, x_-) + 2(-1)^{\mu+\nu+1}h^{(1,1)}(x_-, x_-) + (-1)^{\mu+\nu}h^{(0,2)}(x_-, x_-) \\
&= \begin{pmatrix} Pg(x_+) + Ph(x_-) & Pg(x_+) - Ph(x_-) \\ Pg(x_+) - Ph(x_-) & Pg(x_+) + Ph(x_-) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (Pg(x_+) + Ph(x_-)) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (Pg(x_+) - Ph(x_-))
\end{aligned} \tag{5.4}$$

## 5. Notwendige Bedingungen für die Erwartungswerte

Die sich aus dem  $\Xi$  Teil ergebende Matrix  $H_{\Xi}^Q$  ist die an der Querdiagonale gespiegelte Hessematrix von  $\Xi$ <sup>1</sup>. Das Umkehrungsproblem zur Zuordnung eines Erwartungswertes zu einer normalgeordneten Zweipunktfunktion soll so gelöst werden, dass die von  $g$  und  $h$  abhängigen Teile und der von  $\Xi$  abhängige Teil separat vorgegeben werden. Diese können natürlich nicht rein willkürlich gewählt werden. Der  $\Xi$  Teil wird nun zuerst behandelt, gefolgt von  $g$  und  $h$ . Zunächst hat man folgende Proposition für die Hessematrix einer Funktion.

**Satz 5.1.1** (Hessematrix). *Sei  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  und  $H_g$  ihre zugehörige Hessematrix, dass heißt  $H_{ij} := \partial_i \partial_j g(t, x)$ . Sei nun eine Hessematrix vorgegeben durch drei Funktionen  $f_1 = \partial_x^2 g$ ,  $f_2 = \partial_x \partial_t g$  und  $f_3 = \partial_t^2 g$ . Als notwendiges Kriterium für diese drei Funktionen sei angenommen, dass*

$$\partial_t^2 f_1(t, x) = \partial_x^2 f_3(t, x) \ , \ \partial_t f_1(t, x) = \partial_x f_2(t, x) \ , \ \partial_x f_3(t, x) = \partial_t f_2(t, x)$$

(Hessematrixkriterium). *Dann hat die Funktion  $\eta$*

$$\eta(t, x) = \int_{\psi}^t dt' \int_{\varphi}^x dx' f_2(t', x') + \int_{d_1}^x dx' \int_{d_2}^{x'} dx'' f_1(\psi, x'') + \int_{c_1}^t dt' \int_{c_2}^{t'} dt'' f_3(t'', \varphi)$$

*genau die durch alle  $f_i$  vorgegebene Hessematrix.  $\psi, \varphi, c_i, d_j$  sind beliebige reelle Konstanten.*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch einfaches Ausrechnen und Ausnutzung der Voraussetzungen. □

**Korollar 3.** *Man gebe für die balancierte Ableitung des  $\Xi$ -Teils drei Funktionen vor, welche das Hessematrixkriterium erfüllen.  $\Xi$  ist dann folgendermaßen bestimmt*

$$\Xi(x_-, y_+) = \eta \left( \frac{y_+ + x_-}{2}, \frac{y_+ - x_-}{2} \right).$$

Betrachten wir nun die Anteile durch  $g$  und  $h$ . Diese „zerfallen“ chiral zu einer Linearkombination von Funktionen die jeweils nur von  $x_+$  oder  $x_-$  abhängen (5.4). Zur Rekonstruktion von  $g$  und  $h$  benötigt man folglich zwei Funktionen  $a(x_+)$  und  $b(x_-)$ . Um den Konvergenzlimes bei der Bildung der quadratischen Ableitung umzukehren, sucht man zunächst die Funktionen  $\tilde{a}(x_+, y_+)$  und  $\tilde{b}(x_-, y_-)$ , welche auf der Diagonale  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  mit  $a$  und  $b$  übereinstimmen. Dies ist immer möglich, da es sich um eine stetige Fortsetzung von glatten Funktionen handelt. Gleichzeitig ist diese Art der Erweiterung natürlich hochgradig nicht eindeutig. Die gefundenen Ausdrücke für  $g$  und  $h$  in Gleichung (5.2) lassen sich durch die Symmetrien in den Lichtkegelkoordinaten umschreiben

---

<sup>1</sup>Eine an der Querdiagonale gespiegelte Matrix soll mit dem oberen Index  $^Q$  bezeichnet sein.

## 5. Notwendige Bedingungen für die Erwartungswerte

in

$$\begin{aligned}\delta^{\mu\nu}g(x_+, y_+)|_{x=y} &= (\partial_{t_x} - \partial_{t_y})^2 g(x_+, y_+)|_{x=y}, \\ \delta^{\mu\nu}h(x_-, y_-)|_{x=y} &= (\partial_{t_x} - \partial_{t_y})^2 h(x_-, y_-)|_{x=y} (-1)^{\mu+\nu}.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Rückwärts lässt sich also aus  $a(x_+)$  und  $b(x_-)$  die Zweipunktfunktion konstruieren.

$$\begin{aligned}g(x_+, y_+) &= \int_{a_1}^{x_+ - y_+} d\xi_1 \int_{a_2}^{\xi_1} d\xi_2 \tilde{a}(x_+ + y_+ - \xi_2, x_+ + y_+ + \xi_2) \\ h(x_-, y_-) &= \int_{b_1}^{x_- - y_-} d\xi_1 \int_{b_2}^{\xi_1} d\xi_2 \tilde{b}(x_- + y_- - \xi_2, x_- + y_- + \xi_2)\end{aligned}\tag{5.6}$$

Diese Funktionen können umgeschrieben werden in eine einfachere und übersichtlichere Form. Sie lassen sich ebenso durch die zwei Funktionen  $A(x_+ - y_+, x_+ + y_+)$  (resp.  $B(x_- - y_-, x_- + y_-)$ ) ausdrücken, sodass  $A^{(2,0)}(0, 2y) = a(y)$  (resp.  $B$  und  $b$ ). Man kann diese Gleichung auffassen als einen Weg, das Urbild des Operators  $P$  zu erhalten. Diese Erkenntnisse über die Form der balancierten Ableitung lassen sich nun zusammenfassen in einem Satz.

**Satz 5.1.2.** *Die balancierte Ableitung  $\delta^{\mu\nu}W(t, x)$  ist eine Funktion, die zum Einen aus einem chiralen Anteil  $a(x_+)$  und  $b(x_-)$  und zum Anderen dem „ $\Xi$  Anteil“ besteht. Der  $\Xi$ -Anteil besteht aus drei Funktionen  $f_1, f_2$  und  $f_3$ , welche das Hessematrixkriterium 5.1.1 erfüllen. Die Funktionen  $A(x_+ - y_+, x_+ + y_+)$  und  $B(x_- - y_-, x_- + y_-)$  sind Funktionen für deren Ableitungen  $A^{(2,0)}(0, 2x_+) = a(x_+)$  und  $B^{(2,0)}(0, 2x_-) = b(x_-)$  gilt und sie bestimmen den  $g$  und  $h$  Teil der balancierten quadratischen Ableitung.*

$$\begin{aligned}(\delta^{\mu\nu}W)(\mathbf{x}) &= \\ \left( \begin{array}{cc} \partial_x^2 f_1(\mathbf{x}) + A^{(2,0)}(0, 2x_+) + B^{(2,0)}(0, 2x_-) & \partial_t \partial_x f_2(\mathbf{x}) + A^{(2,0)}(0, 2x_+) - B^{(2,0)}(0, 2x_-) \\ \partial_t \partial_x f_2(\mathbf{x}) + A^{(2,0)}(0, 2x_+) - B^{(2,0)}(0, 2x_-) & \partial_t^2 f_3(\mathbf{x}) + A^{(2,0)}(0, 2x_+) + B^{(2,0)}(0, 2x_-) \end{array} \right)\end{aligned}$$

Die zu einer solchen balancierten Ableitung gehörigen Funktionen  $W(x, y)$  sind gegeben durch

$$\begin{aligned}W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= A(x_+ - y_+, x_+ + y_+) + B(x_- - y_-, x_- + y_-) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( \eta \left( \frac{y_+ + x_-}{2}, \frac{y_+ - x_-}{2} \right) + \eta \left( \frac{x_+ + y_-}{2}, \frac{x_+ - y_-}{2} \right) \right)\end{aligned}$$

Welche Funktionen  $K_B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  kann man zu einem beliebigen  $W(x, y)$  addieren, sodass  $(\delta^{\mu\nu}W)(t, x) = (\delta^{\mu\nu}(W + K_B))(t, x)$ , ist die zu beantwortende Frage.

**Satz 5.1.3** (Kern der balancierten Ableitung). *Der Kern  $K_B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  der balancierten*

## 5. Notwendige Bedingungen für die Erwartungswerte

Ableitungen ist

$$K_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(x_+ - y_+, x_+ + y_+) + f_2(x_- - y_-, x_- + y_-)$$

mit  $f_1^{(2,0)}(0, 2x_+) = 0$  und  $f_2^{(2,0)}(0, 2x_-) = 0$

*Beweis.* Die Teile einer balancierten Ableitung von  $g$  und  $h$  bzw. aus  $\Xi$  können sich nicht gegenseitig zu Null ergänzen. Deswegen müssen beide Teile des Kerns Null werden. Angenommen es gäbe eine solche Funktion  $K_B$  im Kern, dann betrachtet man den  $\Xi$ -Teil  $K_B^\Xi$  dieser Funktion. Dazu beschränkt man sich zunächst auf die Diagonale und verwendet daher nur die Koordinaten  $(t, x)$ .

$$\begin{aligned} \partial_x \partial_x K_B^\Xi(t, x) = 0 & \text{ es folgt } K_B^\Xi(t, x) = a(t)x + b(t) \\ \partial_t \partial_t K_B^\Xi(t, x) = 0 & \text{ es folgt } a''(t) = 0 \text{ und } b''(t) = 0 \\ \partial_t \partial_x K_B^\Xi(t, x) = 0 & \text{ es folgt } K_B^\Xi(t, x) = dx + et + f \end{aligned}$$

$a(t)$  und  $b(t)$  sind beliebige glatte Funktionen von  $t$ . Die Parameter  $d, e, f$  sind reell. Dies bedeutet, dass  $K_B^\Xi(x_-, y_+) = (x_+ + y_+) \frac{1}{4}(d + e) + (x_- + y_-) \frac{1}{4}(e - d) + f$ . Diese Funktion ist eigentlich, da unsere Zerlegung von  $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  nicht eindeutig war, ein Teil des  $g$  und  $h$  Anteils. Als nächstes bleibt zu überprüfen, ob der  $g$  und  $h$  Anteil auch einen derartigen Kern besitzt. Dazu sieht man aus (5.4), dass die Gleichungen  $Pg = 0$  und  $Ph = 0$  erfüllt sein müssen (für  $P$  siehe (5.4)). Aus der Rekonstruktion dieser beiden Funktionen erkennt man, dass Funktionen  $f_i^{(2,0)}(0, x_\pm + y_\pm) = 0$  im Kern liegen.  $\square$

Nachdem der Kern nun gefunden ist, verbleiben noch die Berechnungen der Auswirkungen auf die restlichen Erwartungswerte. Zunächst erfolgt dies für das Wickquadrat.

$$K_B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f_1(0, 2x_-) + f_2(0, 2x_+). \quad (5.7)$$

Diese können beliebige Funktionen der beiden Lichtkegelkoordinaten sein. Um sich davon zu überzeugen nehme man einfach Funktionen der Art  $G(x_\pm + y_\pm)$ . Für den Energieimpulstensor erhält man

$$(T^{\mu\nu} K_B)(t, x) = f_1^{(0,2)}(0, 2x_-) + f_2^{(0,2)}(0, 2x_+). \quad (5.8)$$

Der Energieimpulstensor des Kerns ist also die zweimalige Ableitung des Wickquadrates nach den Lichtkegelkoordinaten. Damit kann der Energieimpulstensor nicht mit beliebigen Klein-Gordon-Lösungen verändert werden.

**Satz 5.1.4** (Über die balancierte Ableitung und das Wickquadrat). *Gegeben seien zwei Hadamardzustände  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , deren balancierte Ableitungen identisch sind. Die Differenz der beiden Wickquadrate ist eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung.*

*Beweis.* Wenn die balancierten quadratischen Ableitungen identisch sind, heißt das, dass sich die normalgeordneten Zweipunktfunktionen maximal um eine Funktion aus dem

## 5. Notwendige Bedingungen für die Erwartungswerte

Kern der balancierten Ableitung unterscheiden. Dieser ist, wie gezeigt wurde, eine Lösung der KGG.  $\square$

**Satz 5.1.5** (Über die balancierte Ableitung und den Energieimpulstensor II). *Gegeben seien zwei Hadamardzustände  $\omega_1$  und  $\omega_2$  mit den normalgeordneten Zweipunktfunktionen  $W_1$  und  $W_2$ , deren balancierte Ableitungen identisch sind. Die Differenz der Energieimpulstensoren ist*

$$T^{\mu\nu}W_1 - T^{\mu\nu}W_2 = f''(x_+) + (-1)^{\mu+\nu}g''(x_-).$$

mit  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

**Korollar 4.** *Seien zwei Hadamardzustände  $(\omega_1, \omega_2)$  gegeben, deren EIT und BQA identisch sind. Die Differenz ihrer Wickquadrate ist eine Funktion  $c_1t + c_2x + c_3$  ( $c_i$  sind beliebige Konstanten).*

## 5.2. Der Energieimpulstensor

Es wird der Energieimpulstensor aus (A.0.1) verwendet. Der sich aus dem  $\Xi$  Teil ergebende Teil des Energieimpulstensors ist Null, daher ist

$$\begin{aligned} (T^{\mu\nu}W)(\mathbf{x}) &= \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \left( \partial^{\mu} \partial^{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial^{\lambda} \partial_{\lambda} \right) (g(x_+, y_+) + h(x_-, y_-) + \Xi(x_-, y_+)) \\ &= g^{(1,1)}(x_+, x_+) + h^{(1,1)}(x_-, x_-) (-1)^{\mu+\nu}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Der Energieimpulstensor ist nach C.2.1 eine Lösung der Wellengleichung. Es soll eine Matrix von glatten Funktionen Energieimpulstensor genannt werden, sobald die Matrix eine Lösung der Wellengleichung in dieser Form ist. Man rekonstruiert eine zugehörige Funktion  $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , indem zwei Funktionen  $a(x_+) = \frac{1}{2}(T^{00} + T^{01})$  und  $b(x_-) = \frac{1}{2}(T^{00} - T^{01})$  vorgegeben werden. Mit diesen verfährt man wie für die  $g$ - und  $h$ -Teile in (5.5) und erhält somit folgenden Satz.

**Satz 5.2.1.** *Für alle  $a(x_+)$  und  $b(x_-)$  existiert eine normalgeordnete Zweipunktfunktion  $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ <sup>2</sup>, sodass  $(T^{\mu\nu}W)(\mathbf{x}) = a(x_+) + (-1)^{\mu+\nu}b(x_-)$ .  $W$  ist gegeben durch*

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(x_+ - y_+, x_+ + y_+) + f_2(x_- - y_-, x_- + y_-) + G(x_-, y_+) + G(y_-, x_+) \quad (5.10)$$

$f_1^{(0,2)}(0, 2x_+) - f_1^{(2,0)}(0, 2x_+) = a(x_+)$  und  $f_2^{(0,2)}(0, 2x_-) - f_2^{(2,0)}(0, 2x_-) = b(x_-)$ .  $G$  ist eine beliebige glatte Funktion. Alle Funktionen sind symmetrisch unter Vertauschung von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ .

*Beweis.* Da man eine Funktion  $f(x, y)$  auch stets als eine Funktion  $\hat{f}(x - y, x + y) := f(x, y)$  betrachten kann, sind die genannten Bedingungen an  $f_1$  und  $f_2$  einfache Umformulierungen des Energieimpulstensors in Gleichung (5.9).  $G$  kann im Rahmen der allgemeinen Voraussetzungen an  $W$  beliebig gewählt werden, da dieser Anteil verschwindet.

---

<sup>2</sup>unter Vernachlässigung der Positivität

## 5. Notwendige Bedingungen für die Erwartungswerte

Als Beispiel für eine solche Konstruktion kann man angeben

$$\begin{aligned} f_1(x_+ - y_+, x_+ + y_+) &= -\frac{1}{2}(x_+ - y_+)^2 a \left( \frac{x_+ + y_+}{2} \right), \\ f_2(x_- - y_-, x_- + y_-) &= -\frac{1}{2}(x_- - y_-)^2 b \left( \frac{x_- + y_-}{2} \right). \end{aligned} \quad \square$$

Der Kern des Energieimpulsoperators  $K_{eit}$  lässt sich durch diesen Satz leicht finden. Er besteht nun aus solchen oben erwähnten Funktion  $f_1$  und  $f_2$  für die  $a$  bzw.  $b$  Null sind. Betrachtet man zunächst das quadrierte Feld,

$$K_{eit}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f_1(0, 2x_+) + f_2(0, 2x_-) + \Xi(x_-, x_+),$$

stellt sich die Frage, ob dies beliebige Funktionen von  $\mathbf{x}$  sind. Dazu betrachtet man Funktionen der Form  $g(x_+, y_+) + h(x_-, y_-) = \psi_1(x_+) + \phi_2(y_+) + \psi_1(x_-) + \phi_2(y_-)$ . Diese erfüllen die Bedingungen für den Kern. Ihr quadriertes Feld ist  $2\psi_1(x_+) + 2\phi_2(x_-)$ .  $\Xi(x_-, x_+)$  ist eine gänzlich allgemeine Funktion von  $\mathbf{x}$  deren Ableitung nach den Lichtkegelkoordinaten nicht verschwindet. Für die balancierte Ableitung des Kerns  $K_{eit}$ , greift man auf die naheliegende Form zurück, die durch die Bedingungen  $g^{(1,1)}(x_+, x_+) = 0$  und  $h^{(1,1)}(x_-, x_-) = 0$  charakterisiert wird. Der Ausdruck der balancierten Ableitung schreibt sich dann:

$$\begin{aligned} (\tilde{\partial}^{\mu\nu} K_{eit})(t, x) &= (\tilde{\partial}^{\mu\nu} \Xi)(t, x) + g^{(2,0)}(x_+, x_+) + g^{(0,2)}(x_+, x_+) + \\ &\quad + (-1)^{\mu+\nu} (h^{(2,0)}(x_-, x_-) + h^{(0,2)}(x_-, x_-)) \end{aligned}$$

Aufgrund der Kernbedingung ( $g^{(1,1)}(x_+, x_+) = 0$  und  $h^{(1,1)}(x_-, x_-) = 0$ ) gilt für diesen Ausdruck, dass

$$\begin{aligned} &= g^{(2,0)}(x_+, x_+) + g^{(0,2)}(x_+, x_+) + (-1)^{\mu+\nu} (h^{(2,0)}(x_-, x_-) + h^{(0,2)}(x_-, x_-)) \\ &= \partial^\mu \partial^\nu (g(x_+, x_+) + h(x_-, x_-)) = \begin{pmatrix} \partial_x^2 & \partial_t \partial_x \\ \partial_t \partial_x & \partial_t^2 \end{pmatrix} (g(x_+, x_+) + h(x_-, x_-)). \end{aligned}$$

Wenn man nun die Form des  $\Xi$  Teils aus (5.3) berücksichtigt wird klar, dass sich die Änderung für die balancierte Ableitung durch  $g$  und  $h$  aus dem Kern des Energieimpulstensors beispielsweise auch durch Folgendes  $\Xi$  erreichen lassen.

$$\Xi_{gh}(x_-, y_+) := h(x_-, x_-) + g(y_+, y_+) + \Xi(x_-, y_+). \quad (5.11)$$

Weiterhin bestätigt sich hier auch, die bereits in A.3 getroffene Beobachtung, dass sich balancierte Ableitungen und Energieimpulstensenoren direkt beeinflussen. Für ein beliebi-

## 5. Notwendige Bedingungen für die Erwartungswerte

ges  $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  gilt für die Summe

$$(2T^{\mu\nu}W)(x) + (\partial^{\mu\nu}W)(\mathbf{x}) = (\partial^{\mu\nu}\Xi)(x_-, x_+) + g^{(2,0)}(x_+, x_+) + g^{(0,2)}(x_+, x_+) + (-1)^{\mu+\nu}(h^{(2,0)}(x_-, x_-) + h^{(0,2)}(x_-, x_-))$$

Mit Hilfe von  $\Xi_{gh}$  ist dies

$$= \partial^{\mu\nu}(\Xi_{gh})(t, x).$$

Zum Ende dieses Abschnittes sollen diese Abhängigkeiten zusammengefasst werden.

**Satz 5.2.2** (Die balancierte Ableitung und der Energieimpulstensor). *Seien  $\omega_1$  und  $\omega_2$  Hadamardzustände und deren normalgeordnete Zweipunktfunktionen  $W_1$  und  $W_2$ . Sei außerdem die Differenz  $T^{\mu\nu}W_1 - T^{\mu\nu}W_2 = 0$ . Die Differenz der balancierten Ableitungen ist damit eine Hessematrix.*<sup>3</sup>

*Beweis.* Der Kern des Energieimpulstensor kann vollständig durch Funktionen des Typs  $\Xi$  beschrieben werden. Die balancierte Ableitung einer solchen Funktion ist eine Hessematrix. □

**Satz 5.2.3** (Über den Energieimpulstensors und das Wickquadrat). *Seien  $\omega$  und  $\omega'$  Hadamardzustände und die zugehörigen normalgeordneten Zweipunktfunktionen  $W_\omega$  und  $W_{\omega'}$ . Ist  $T^{\mu\nu}W_\omega = T^{\mu\nu}W_{\omega'}$ , so ist die Differenz der Wickquadrate  $W_\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - W_{\omega'}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  eine beliebige glatte Funktion von  $\mathbf{x}$ .*

### 5.3. Das Wickquadrat

Das Wickquadrat der normalgeordneten Zweipunktfunktion  $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ist

$$W(x, x) = g(x_+, x_+) + h(x_-, x_-) + \Xi(x_-, x_+). \tag{5.12}$$

Zunächst ist dies eine beliebige glatte Funktion in  $\mathbf{x}$ . Die Umkehrung dieser Zuordnung ist immer möglich und fordert von  $g$ ,  $h$  und  $\Xi$  nichts außer, dass die Diagonale die geforderte Funktion ist. Da der Kern alle Zweipunktfunktionen enthält, welche Null auf ihrer Diagonale sind, ergibt sich folgender Satz.

**Satz 5.3.1** (Kern des Wickquadrates). *Der Kern des Wickquadrates ist auf der Diagonalen eine Funktion vom Typ  $g$  oder  $h$ .*

---

<sup>3</sup>gespiegelt an der Querdiagonale

## 5. Notwendige Bedingungen für die Erwartungswerte

*Beweis.* Sei  $K_Q$  im Kern des Wickquadrates. Dann ist die Diagonale Null.

$$\begin{aligned} K_Q(x, x) &= 0 \\ 0 &= g(x_+, x_+) + h(x_-, x_-) + \Xi(x_-, x_+) \\ \Rightarrow \Xi(x_-, x_+) &= -g(x_+, x_+) - h(x_-, x_-) \end{aligned}$$

Da Funktionen vom Typ  $\Xi$  nicht vom Typ  $g$  oder  $h$  sein können, es sei denn sie sind konstant, folgt dass  $\Xi$  Null ist.  $\square$

Die Darstellung des Kerns lässt sich insofern in die übersichtliche Form

$$K_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(x_+, y_+) - g(x_+, x_+) + h(x_-, y_-) - h(x_-, x_-) \quad (5.13)$$

bringen. Der Energieimpulstensor ist also frei beeinflussbar, da  $g(x_+, x_+)$  und  $h(x_-, x_-)$  nicht dazu beitragen. Für die balancierte Ableitung ergibt sich hingegen

$$(\partial^{\mu\nu} K_Q)(t, x) = -4g^{(1,1)}(x_+, x_+) - (-1)^{\mu+\nu} 4h^{(1,1)}(x_-, x_-).$$

Dadurch ergibt sich wiederum folgende Relation zwischen dem Energieimpulstensor und der balancierten Ableitung des Kerns  $K_Q$

$$(\partial^{\mu\nu} K_Q)(t, x) = -4(T^{\mu\nu} K_Q)(t, x).$$

**Satz 5.3.2** (Über den Kern des Wickquadrates). *Zu einem vorgegebenen Wickquadrat  $Q(\mathbf{x})$  kann man einen beliebigen Energieimpulstensor wählen.*

## 5.4. Zur Vorgabe von Erwartungswerten

Mit Vorgabe von Erwartungswerten ist Folgendes gemeint. Man nehme an, dass es einen Zustand gäbe, dessen Erwartungswerte für bestimmte Observablen bereits vorgegeben seien. Gibt es nun andere Zustände mit den selben Erwartungswerten und inwieweit unterscheiden sie sich? Diese Frage lässt sich nur begrenzt diskutieren, da die Positivität in diesem Kapitel nicht vollständig berücksichtigt wurde. Es lassen sich jedoch einige Aussagen ableiten.

**Satz 5.4.1.** *Sind für zwei Hadamardzustände das Wickquadrat und der Energieimpulstensor (resp. BQA) identisch, so ist auch der Erwartungswert der BQA (resp. des Energieimpulstensors) identisch.*

*Beweis.* Der Kern des Wickquadrates ist bis auf konstante Vorfaktoren identisch für den EIT und BQA. Daraus folgt die Behauptung prompt.  $\square$

Es stellt sich weiter die Frage inwieweit sich zwei normalgeordnete Zweipunktfunktionen unterscheiden können, wenn alle drei Erwartungswerte übereinstimmen. Dazu be-

## 5. Notwendige Bedingungen für die Erwartungswerte

trachtet man den Kern des Wickquadrates. Die Differenz der Zweipunktfunktion kann also höchstens aus zwei Funktionen des Typs  $g$  und  $h$  mit den Eigenschaften

- $g(x_+, x_+) = 0$  und  $h(x_-, x_-) = 0$ ,
- $g^{(1,1)}(x_+, x_+) = 0$  und  $h^{(1,1)}(x_-, x_-) = 0$ .

bestehen. Nach Satz C.4.6 kann keine dieser Funktionen eine positive Distribution sein (außer sie sind Null), da die Diagonalen immer Null sind. Dadurch lässt sich folgender Satz formulieren.

**Satz 5.4.2.** *Seien  $\omega$  und  $\omega'$  Hadamardzustände deren Erwartungswerte der quadratischen Operatoren übereinstimmen. Ist die Differenz ihrer normalgeordneten Zweipunktfunktionen nicht Null, so erhält man eine indefinite bilineare Distribution.*

*Beweis.* Der bereits in Gleichung (5.13) angegebene Kern des Wickquadrates enthält alle Differenzen von Zweipunktfunktionen. Diese können weder positiv noch negativ sein nach Satz C.4.6. □

## 6. Fazit & Ausblick

In dieser Arbeit wurden die Möglichkeiten zur Charakterisierung der Zustände einer algebraischen Quantenfeldtheorie hinsichtlich ihrer Erwartungswerte untersucht. Auf Grund der Tatsache, dass es zum Einen zu diesem Thema relativ wenig bekannte Resultate gibt. Zum Anderen, wegen der Komplexität der Problemstellung keine einfachen Resultate zu erwarten, wurde die einfachste Quantenfeldtheorie – ein skalares, masseloses Klein-Gordon-Feld auf der zweidimensionalen Minkowskiraumzeit – gewählt. Um diese Theorie zu verwenden, wurden zuerst die Bedenken ausgeräumt, dass eine Solche keine konsistente Quantenfeldtheorie ergeben würde. Durch die Formulierung von Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten ist es klar geworden, dass es keineswegs eines poincaréinvarianten Grundzustandes und damit verbundenen Teilchenbildes bedarf, um eine kovariante Quantentheorie zu konstruieren. Von diesem Standpunkt aus sind Theorien auf dem Minkowskiraum mit einem Vakuumzustand ein Spezialfall, der eine Teilcheninterpretation erlaubt.

Ein Versuch, um Zustände zu konstruieren, bestand darin, die explizite Darstellung der Hadamardparametrix im Impulsraum auszunutzen. Es war möglich, diese Darstellung in einen indefiniten und einen positiven Teil zu zerlegen. Damit konnte die Nichtexistenz translationsinvarianter Zustände bewiesen werden.

Ein weiterer Ansatz war die Konstruktion von Zuständen ausgehend von dem Vakuum der Stromalgebra. Es war möglich, für jede Testfunktion einen quasifreien Zustand zu konstruieren, der über eine strikt positive Energiedichte verfügt. Allgemeine Aussagen über Erwartungswerte sind hier begrenzt möglich. Allerdings ist bereits die Tatsache bemerkenswert, dass die Existenz eines Zustandes die vorherrschende Ansicht, das masselose Klein-Gordon-Feld in zwei Dimensionen existiere nicht als Quantenfeldtheorie, widerlegt. Anschließend wurden die sich durch die Positivität der Zweipunktfunktion ergehende Einschränkungen an die Erwartungswerte ausgewählter quadratischer Observablen untersucht. Die Methode von Fewster [?] konnte auf den hier untersuchten Fall erweitert werden, insbesondere konnten Quantenungleichungen für den Energieimpulstensor und das Wickquadrat aufgestellt werden. Für die balancierte quadratische Ableitung war dies nicht möglich, da sie keine symmetrische Ableitung ist. Weitere derartige Ergebnisse konnten nicht gefunden werden. Der Vorteil des betrachteten Modells ist, dass sich alle Lösungen der Feldgleichung als Funktionen von Lichtkegelkoordinaten schreiben lassen C.2.1. Diese einfache Struktur ließ vermuten, dass bei Vernachlässigung der Positivität der Zustände eventuell Relationen zwischen den Erwartungswerten gefunden werden könnten. Ein wesentliches Ergebnis ist, dass die Differenz von zwei Zweipunktfunktionen – mit identischem Erwartungswert des Wickquadrates und des

## 6. Fazit & Ausblick

Energieimpulstensors – eine indefinite Distribution ist. Dies ist in soweit interessant, als man erwarten könnte, dass eine solche Differenz im Allgemeinen auch positiv oder negativ sein könnte.

Bei Betrachtung der Resultate aus der Vogelperspektive scheint das fundamentale Problem zu sein, dass es im Grunde keine Klassifizierung von positiven bilinearen Distributionen gibt. Selbst für glatte positive bilineare Distributionen existiert eine solche nicht, außer für den Spezialfall einer translationsinvarianten Distribution. Da eine solche Klassifikation hilfreich für die Klassifikation von Zuständen wäre, ist im Anhang C.4 eine Sammlung von Sätzen über solche Distributionen aufgeführt. Insbesondere wird gezeigt, dass die Positivitätsbedingung  $D(f^*, f) \geq 0$  äquivalent zur Forderung ist, dass alle Matrizen des Distributionskerns  $D(x_i, x_j)$  positiv sind. Dieser Beweis existierte nach Meinung des Autors in dieser Form bisher nicht.

Die bisherige Analyse läßt sich vermutlich auf rotationssymmetrische Zustände in höheren Dimensionen erweitern. Auch hier ergibt sich eine einfache Struktur der Lösungen, wie im Anhang C.3.1 gezeigt wurde. Dagegen scheint es dem Autor nicht erfolgversprechend, die Betrachtung der Erwartungswerte unter Vernachlässigung der Positivität zu vertiefen. Vermutlich werden die entscheidenden Einschränkungen an Erwartungswerte durch die Positivität bedingt. Darüber hinaus wäre es interessant zu untersuchen, ob eine Zweipunktfunktion genau dann positiv ist, wenn eine gewisse Klasse von Erwartungswerten eine Quantenungleichung erfüllt.

# A. Balancierte Ableitung

Die folgende Betrachtung führt einige grundlegende Eigenschaften balancierter Ableitungen vor und beschreibt, wie sich diese in natürlicher Weise durch die Betrachtungen von Polynomen aus Ableitungsoperatoren ergeben. Die nachfolgende Definition und Beweisführung entstammt einem Artikel von Dütsch und Fredenhagen [?].

**Definition A.0.1** (Darstellung für ein beliebiges Polynom von Funktionen und deren Ableitungen). Sei  $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4)$  und  $\mathcal{P}$  alle Polynome von  $f$  und deren Ableitungen  $\partial_\mu f$ , dann läßt sich jedes  $A \in \mathcal{P}$  eindeutig darstellen als

$$A(x) = \sum_{n=0}^N p_n(\partial_{\mu_1}^1, \dots, \partial_{\mu_n}^n) f(x_1) \dots f(x_n) |_{x_1=\dots=x_n}.$$

Die griechischen Indizes stehen für alle vier möglichen Ableitungen nach Raum und Zeit. Der obere Index von 1 bis  $n$  gibt an, auf welche Koordinate die Ableitung wirkt.  $p_n$  ist ein beliebiges Polynom (Diese Menge sei mit  $P_n$  bezeichnet).

Da die Ableitungen miteinander vertauschen, ergibt sich, dass alle  $p_n$  symmetrisch unter Vertauschung der oberen Indizes sein müssen.

**Satz A.0.3.** Seien mit  $P^{sp}$  die Polynome der Ableitungen  $\partial_\mu = \sum_{k=1}^4 \partial_\mu^k$  mit  $\mu = 0, \dots, 4$  bezeichnet.  $P_n^{rel}$  seien die Polynome der relativen Ableitungen  $\partial_\mu^{ij} := \partial_\mu^i - \partial_\mu^j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , welche symmetrisch unter beliebigen Vertauschungen der Indizes sind, das heißt:  $\forall \sigma \in S_n$  mit  $\sigma(\partial_\mu^{ij}) := \partial^{\sigma(i)\sigma(j)}$  und  $\forall p \in P_n^{rel}$  gilt  $p(\{\sigma(\partial_\mu^{ij})\}) = p(\{\partial_\mu^{ij}\})$ . Dann ist  $P_n$  isomorph zu  $P^{sp} \otimes P_n^{rel}$ .

*Beweis.* Sei  $\hat{P}_n^{rel}$  die Menge aller Polynome der relativen Ableitungen  $\partial_\mu^{in}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Die Menge  $P_n^{rel}$  läßt sich durch die Identität  $\partial^{ij} = \partial^{in} - \partial^{jn}$  als Teilmenge von  $\hat{P}_n^{rel}$  identifizieren. Damit ist  $P^{sp} \otimes P_n^{rel}$  eine Teilmenge von  $P^{sp} \otimes \hat{P}_n^{rel}$ . Offenbar ist

$$\alpha : \begin{cases} P^{sp} \otimes \hat{P}_n^{rel} & \rightarrow P^n \\ \partial_\mu \otimes \mathbf{1} & \mapsto \sum_{k=1}^4 \partial_\mu^k \\ \mathbf{1} \otimes \partial_\mu^{in} & \mapsto \partial_\mu^i - \partial_\mu^n \end{cases}$$

ein Algebraisomorphismus zwischen den betrachteten Räumen ( $P^n$  sind die Polynome aller Ableitungen  $\partial_\mu^i$ ), welcher durch die Abbildungsvorschrift auf den erzeugenden Elementen  $\partial_\mu \otimes \mathbf{1}$  und  $\mathbf{1} \otimes \partial_\mu^{in}$  der Algebra  $P^{sp} \otimes \hat{P}_n^{rel}$  definiert ist. Die Umkehrung erfolgt

## A. Balancierte Ableitung

durch die Identität  $\partial_\mu^j = \frac{1}{n}\partial_\mu - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\partial^{in} - \partial^{jn})$ . Dadurch sieht man explizit, dass  $P^n$  auch durch  $\partial_\mu^{in}, \forall i < n$  und  $\partial_\mu$  erzeugt werden kann.

Sowohl auf  $\hat{P}_n^{rel}$  existiert eine lineare Darstellung der  $S_n$  durch  $\sigma(\partial_\mu^{in}) = \partial_\mu^{\sigma(i)n} - \partial_\mu^{\sigma(n)n}$ , als auch auf  $P^n$ . Die Abbildung  $\alpha$  ist der ‘‘Intertwiner’’ für diese beiden Darstellungen, dass heißt sie ‘‘vertauschen’’ mit  $\alpha$ .

Man nehme aus den beiden isomorphen Mengen alle Elemente auf denen  $S_n$  trivial, das heißt  $\sigma(x) = x$ , wirkt. Sei also  $A$  der maximale trivial invariante Teilraum zu  $P^{sp} \otimes \hat{P}_n^{rel}$  und  $B$  zu  $P^n$ , dann

$$\begin{aligned} \forall x \in A \wedge \forall \sigma \in S_n : \sigma(x) &= x \\ \rightarrow \sigma(\alpha(x)) &= \alpha(\sigma(x)) = \alpha(x) \\ \rightarrow \alpha(A) \subset B, \text{ in gleicher Weise gilt dies für } \alpha^{-1} &\rightarrow \alpha(A) = B \end{aligned}$$

Die trivial invarianten maximalen Unterräume von  $P^{sp} \otimes \hat{P}_n^{rel}$  und  $P^n$  sind  $P^{sp} \otimes P_n^{rel}$  und  $P_n$  □

**Definition A.0.2.** Der Vektorraum der balancierten Ableitungen einer Funktion  $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4)$  wird definiert als

$$\mathcal{P}_{bal} = \{p_n(\{\partial^{ij}\})f(x_1)\dots f(x_n)|_{x_1=\dots=x_n} | p_n \in P_n^{rel}, n \in \mathbb{N}\}$$

Man kann somit den Isomorphismus  $\mathcal{P} \cong P^{sp} \otimes \mathcal{P}_{bal}$  ableiten.

**Definition A.0.3** (Balancierte Ableitung für ein quadratisches klassisches Klein-Gordon-Feld). Sei  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4)$  und Lösung der Gleichung  $(\square + m^2)\varphi = 0$ , dann soll die klassische Variante der balancierte Ableitungen nach [?] des Quadrats von  $\varphi$  definiert sein als

$$\partial^\mu \varphi^2(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \partial_h^\mu \varphi(x+h)\varphi(x-h)$$

wobei  $\mu$  ein Multiindex der Art  $\mu = (\mu_1, \mu_2 \dots)$  ist und  $\partial_h^\mu = \partial_{h_{\mu_1}} \partial_{h_{\mu_2}} \dots$

**Korollar 5.** Die in Definition A.0.3 beschriebene Ableitung ist ein balanciertes Feld nach Definition A.0.2.

$$\partial_\mu \varphi^2(x) = \partial_\mu^{xy} \varphi(x)\varphi(y)|_{x=y} = 2^{|\mu|} \partial_\mu^{rel} \varphi(x)\varphi(y)|_{x=y}$$

Desweiteren definiert man zur Behandlung allgemeiner Ableitungen die Ableitung nach dem Schwerpunkt  $\partial_\mu^s = \frac{1}{2}(\partial_\mu^x + \partial_\mu^y)$

## A. Balancierte Ableitung

**Definition A.0.4.** Der balancierte Wellenoperator sei  $\tilde{\square} = g_{\mu\nu} \overset{rel}{\partial}_\nu \overset{rel}{\partial}_\mu$

**Satz A.0.4.** Das Quadrat von  $\varphi$  erfüllt nun folgende Gleichung

$$(\tilde{\square} + 2m^2 + \square + 2m^2) \varphi^2 = 0 \quad (\text{A.1})$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \tilde{\square} \varphi^2(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} g_{\mu\nu} \partial_h^\mu \partial_h^\nu \varphi(x+h) \varphi(x-h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} g_{\mu\nu} (\partial_h^\mu \partial_h^\nu \varphi(x+h)) \varphi(x-h) + \\ &\quad + (\partial_h^\mu \varphi(x+h)) (\partial_h^\nu \varphi(x-h)) + \\ &\quad + (\partial_h^\nu \varphi(x+h)) (\partial_h^\mu \varphi(x-h)) + \\ &\quad + \varphi(x+h) (\partial_h^\mu \partial_h^\nu \varphi(x-h)) \\ &\quad , \text{ da } \partial_h^\nu \varphi(x \pm h) = \pm \partial_x^\nu \varphi(x \pm h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} g_{\mu\nu} (\partial_x^\mu \partial_x^\nu \varphi(x+h)) \varphi(x-h) - \\ &\quad - (\partial_x^\mu \varphi(x+h)) (\partial_x^\nu \varphi(x-h)) - \\ &\quad + (\partial_x^\nu \varphi(x+h)) (\partial_x^\mu \varphi(x-h)) + \\ &\quad + \varphi(x+h) (\partial_x^\mu \partial_x^\nu \varphi(x-h)) \\ &= -(\square + 4 \cdot m^2) \varphi^2(x) \end{aligned}$$

und damit folgt

$$(\tilde{\square} + 2m^2 + \square + 2m^2) \varphi^2 = 0$$

□

**Beispiel A.0.1** (Energieimpulstensor). Für ein freies Klein-Gordon Feld ist der kanonische Energieimpulstensor

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\lambda \varphi \partial^\lambda \varphi - m^2 \varphi^2). \quad (\text{A.2})$$

In der Darstellung im Koinzidenzlimites bekommt man

$$T_{\mu\nu} = \left\{ \left( \overset{s}{\partial}_\mu \overset{s}{\partial}_\nu - g_{\mu\nu} \overset{s}{\partial}_{\mu'} \overset{s}{\partial}^{\mu'} - \overset{rel}{\partial}_\mu \overset{rel}{\partial}_\nu \right) \varphi(x) \varphi(y) \right\}_{x=y} \quad (\text{A.3})$$

Auf Basis dieser Darstellung kann man nach anderen kovarianten erhaltenen zwei-stufigen Tensoren suchen. Da einfache Ableitungen nach den Relativkoordinaten immer verschwinden, begrenzt sich die Zahl der Möglichkeiten auf zweifache Ableitungen in den Schwerpunkts- und Relativkoordinaten. Man erhält, wenn man konstante Vorfaktoren betrachtet.

$$K^{\mu\nu} = A (\partial_\mu \partial_\nu \varphi) \varphi + B \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{2} C g_{\mu\nu} (\partial_\lambda \varphi \partial^\lambda \varphi - m^2 \varphi^2) \quad (\text{A.4})$$

## A. *Balancierte Ableitung*

mit  $A + B + C = 0$

## B. Liegruppen

Das Ziel dieses Abschnittes soll es sein, das Haarsche Maß auf Liegruppen zu definieren. Dazu werden zuerst einige Definitionen gegeben um ein wenig Orientierung zu schaffen. Maßtheorie und Liegruppen werden ausführlich bei Elstrodt [?] und Hall [?] behandelt. Den Anfang macht die Definition einer Liegruppe.

**Definition B.0.5** (Liegruppe). Eine Liegruppe  $G$  ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die darüber hinaus eine Gruppe ist, sodass die Abbildung  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(g, h) \mapsto gh^{-1}$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus ist.

Im Wesentlichen beschäftigt man sich in der Physik nur mit kompakten Liegruppen. Deswegen sollen nur diese im Folgenden behandelt werden auch wenn nicht explizit daraufhin gewiesen wird.

**Definition B.0.6** (Kompakte Liegruppe). Eine Liegruppe ist kompakt, wenn sie eine kompakte Mannigfaltigkeit ist.

Da die Liegruppe von Interesse die  $SO(3)$  ist, bietet sich eine weitere Spezialisierung auf wegzusammenhängende Liegruppen an.

**Definition B.0.7** (Wegzusammenhängende Liegruppe). Eine Liegruppe  $G$  ist wegzusammenhängend, wenn es für zwei beliebige Elemente  $g$  und  $h$  einen stetigen Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  gibt mit  $\gamma(a) = g$  und  $\gamma(b) = h$ .

### B.1. Integration auf Liegruppen

Liegruppen sind topologische Hausdorffräume. Die Maßtheorie eröffnet die Möglichkeit auf topologischen Hausdorffräumen Integrale zu definieren. Dazu wird zunächst eine  $\sigma$ -Algebra definiert, welche die Menge aller Teilmengen ist, welchen ein Volumen zugeordnet werden soll.

**Definition B.1.1** ( $\sigma$ -Algebra). Sei  $\Omega$  eine Menge und  $2^\Omega$  ihre Potenzmenge (Menge aller Teilmengen). Eine  $\sigma$ -Algebra  $A$  über eine Menge  $\Omega$  ist eine Teilmenge von  $2^\Omega$ , welche folgende Eigenschaften erfüllt

- $\Omega \in A$ ,
- $B \in A \Rightarrow \Omega \setminus B \in A$  ,

## B. Liegruppen

- $B_1, B_2, \dots \in A \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in A$ .

Auf dieser Algebra wird ein Funktional definiert. Im Falle des  $\mathbb{R}^3$  ist dies äquivalent mit der Zuordnung eines räumlichen möglicherweise gewichteten Volumens.

**Definition B.1.2** (Maß). Sei  $\Sigma$  eine  $\sigma$ -Algebra über einer Menge  $\Omega$ . Eine Funktional  $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$  heißt Maß, falls

- **Positivität** für alle  $B \in \Sigma$  gilt  $\mu(B) \geq 0$
- **Leere Menge**  $\mu(\emptyset) = 0$
- **Additivität**  $\mu\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(B_i)$ , für alle abzählbaren Familien  $\{B_i\}_{i \in I}$ , mit paarweise disjunkten  $B_i$

Das Tripel  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  heißt Maßraum. Enthält eine  $\Sigma$  bereits alle offenen Mengen von  $\Omega$  so heißt sie borelsche  $\sigma$ -Algebra.

Ein spezielles Maß ist das Radonmaß.

**Definition B.1.3** (Radonmaß). In einem Maßraum  $(\mu, \Sigma, \Omega)$  sei  $\Omega$  ein lokal-kompakter Hausdorffraum und  $\Sigma$  eine borelsche  $\sigma$ -Algebra. Das Maß  $\mu$  sei von innen regulär, das heißt alle Elemente aus  $\Sigma$  sind von innen regulär. Ein Element  $A$  aus  $\Sigma$  heißt von innen regulär, falls für alle  $A \in \Sigma$  gilt  $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{ kompakt}\}$ . In diesem Fall ist  $\mu$  ein Radonmaß.

Wendet man sich dem Fall der Liegruppe  $SO(3)$  zu, so kann man sich die Eigenschaft zu Nutze machen, dass diese lokal-kompakt ist. Der Darstellungssatz von Riesz [?, Seite 335] gibt zu positiven linearen Funktionalen auf stetigen und kompakt getragenen Funktionen auf lokal-kompakten Hausdorffräumen genau ein Radonmaß. Auf  $SO(3)$  sucht man demnach zunächst ein solches positiv lineares und stetiges Funktional, in dem man die 3-Formen betrachtet. Seien  $\{x_i\}_{i=1,2,3}$  ein lokales Koordinatensystem. Eine 3-Form  $\omega$  hat dann die Form

$$\omega = f(x_1, x_2, x_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

$dx_i$  sind die kanonischen 1-Formen, welche durch die Bedingung  $dx_i(\partial_{x_j}) = \delta_{ij}$  auf den Vektorfeldern  $\partial_{x_j}$  bestimmt werden. Die Positivität folgt dabei unmittelbar daraus, dass  $SO(3)$  eine orientierbare Mannigfaltigkeit ist.

$$\int_X h \omega := \int_X h(x_1, x_2, x_3) f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3, \quad h \in C_0^\infty(SO(3))$$

Dies ist, wie bereits erwähnt, außerdem ein Radonmaß.  $SO(3)$  ist jedoch auch eine Gruppe. Auf diesen existiert nach dem Haarschen Theorem ein eindeutiges Radonmaß, welches linksinvariant ist.

**Definition B.1.4** (Haarsches Maß). Für jede lokal-kompakte Gruppe  $G$  existiert ein Borelmaßraum  $(\mu, \Sigma, G)$  mit einem linksinvarianten Radonmaß  $\mu$ , das bis auf eine positive multiplikative Konstante eindeutig bestimmt ist. Ein Maß ist linksinvariant, wenn  $\mu(A) = \mu(gA)$  für alle  $A \in \Sigma$  und  $g \in G$  gilt [?, Seite 362 Theorem 3.12].

Unter den zur Konstruktion von Radonmaßen oben benutzten 3-Formen bilden die linksinvarianten 3-Formen jenes Haarsche Maß. Die linksinvarianten Formen auf Mannigfaltigkeiten sind wie folgt definiert.

**Definition B.1.5** (Linksinvariante  $k$ -Form). Für alle  $\tau \in G$  sei ein Diffeomorphismus  $l_\tau : g \in G \mapsto \tau g$  gegeben. Das Differential sei  $d\tau : T_p G \rightarrow T_{\tau p} G$ . Damit ist es möglich mit dem „Pullback“ zu definieren.

$$\delta\tau : \bigwedge^k (T_{\tau p}^* G) \rightarrow \bigwedge^k (T_p^* G), \omega(X_1, \dots, X_k) \mapsto \omega(d\tau X_1, \dots, d\tau X_k).$$

Eine  $n$ -Form ist linksinvariant, falls  $\delta\tau \omega = \omega$  ist.

Eine linksinvariante  $n$ -Form konstruiert man über das Dachprodukt „ $\wedge$ “ aus linksinvarianten 1-Formen. Seien nun  $\{\omega_e^i\}_{i \in N}$  die duale Basis des Kotangentialraums ( $\omega_e^i(\partial_{x_j}) = \delta_{ij}$ ) des Einselementes  $e$  der Liegruppe  $G$ . Dann ist

$$\omega : X \mapsto [p \mapsto \omega_p^i(X_p) := \omega_e^i(d\Phi_{p^{-1}}(X_p))]$$

eine linksinvariante 1-Form. Dies sieht man leicht durch Anwendung des Pullbacks  $\delta\tau$ .

$$\begin{aligned} \delta\phi_\tau(\omega_{\tau p}^i)(X_p) &= \omega_{\tau p}^i(d\phi_\tau(X_p)) \\ &= \omega_e^i(d\phi_{\tau p}^{-1}d\phi_\tau X_p) \\ &= \omega_e^i(d\phi_p^{-1}X_p) = \omega_p^i(X_p) \end{aligned}$$

Seien nun  $\{dx_i\}_{i \in N}$  die duale Basis der 1-Formen, dass heißt  $dx_i(X) = X_p^i$ , dann erhält man für  $\omega^i$

$$\begin{aligned} \omega^i(X) &= \omega_e^i(X_p(f \circ \phi_{p^{-1}})) \\ &= \omega_e^i\left(\sum_j X_p^j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p (f \circ \phi_{p^{-1}})\right) \\ &= \sum_{j,l} X_p^j \omega_e^i\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}(e) \frac{\partial \phi_{p^{-1}}^l}{x_j}\right) \\ &= \sum_j X_p^j \frac{\partial \phi_{p^{-1}}^i}{x_j} = \sum_j \frac{\partial \phi_{p^{-1}}^i}{x_j} dx_j \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis konstruiert man eine linksinvariante  $n$ -Form  $\rho$ . Dazu bilden wir

## B. Liegruppen

das antisymmetrische Tensorprodukt (Dachprodukt “ $\wedge$ “) der  $\omega^i$ .

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial \phi_{p-1}^1}{x_{i_1}} \dots \frac{\partial \phi_{p-1}^n}{x_{i_n}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \det \left( \frac{\partial \phi_{p-1}^i}{x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{1}{\det \left( \frac{\partial \phi_p^i}{x_j} \right)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

Das antisymmetrische Tensorprodukt führt dazu, dass sich als Vorfaktor einfach die Determinante der Jacobimatrix der Transformation  $\Phi_{p-1}$  ergibt.

### B.1.1. Haarsches Maß für $SO(3)$

Zur Anwendung auf die  $SO(3)$  muss im Wesentlichen nur die Determinante  $\det \left( \frac{\partial \phi_p^i}{x_j} \right)$  berechnet werden. Dazu wählen wir eine Parametrisierung der  $SO(3)$  wie folgt

$$\begin{aligned} R(\lambda, \vartheta, \varphi) &= R_z(\lambda) R_y(\vartheta) R_x(\varphi) = \\ &\begin{pmatrix} \cos(\lambda) \cos(\vartheta) & \cos(\varphi) \sin(\lambda) - \cos(\lambda) \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \cos(\lambda) \cos(\varphi) \sin(\vartheta) + \sin(\lambda) \sin(\varphi) \\ -\cos(\vartheta) \sin(\lambda) & \cos(\lambda) \cos(\varphi) + \sin(\lambda) \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \cos(\lambda) \sin(\varphi) - \cos(\varphi) \sin(\lambda) \sin(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta) \sin(\varphi) & \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$R_x$ ,  $R_y$  und  $R_z$  stehen für Rotationen um die entsprechenden Achsen, wenn man sich die  $SO(3)$  als Rotationen im  $\mathbb{R}^3$  definiert. Die Definitionsbereiche der Winkel sind  $\lambda \in (-\pi, \pi)$ ,  $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ . Das Einselement  $e$  hat somit die Koordinaten  $(0, 0, 0)$ . Die inverse Abbildung dieser Karte ist

$$\begin{aligned} \lambda &= -\arctan \left( \frac{R_{21}}{R_{11}} \right) \\ \vartheta &= -\arcsin(R_{31}) \\ \varphi &= -\arctan \left( \frac{R_{32}}{R_{33}} \right) \end{aligned}$$

Der Arkustangens soll hier in dem Sinne verstanden werden, als dass er auch berück-

## B. Liegruppen

sichtigt welche Vorzeichen die beiden Argumente haben, das heißt

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) := \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y \geq 0, \\ \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2\pi & \text{für } y < 0; \end{cases}$$

Die Jacobimatrix der Linkstranslation  $\phi_p$  ( $p = (y_1, y_2, y_3)$ ) ist damit

$$J_{ij}\left(\frac{\partial \phi_p^i}{x_j}\right)(e) = \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} R(y_1, y_2, y_3) R(x_1, x_2, x_3) \Big|_e \right]^i$$

Für ein beliebiges  $h$  aus  $G$  ist  $[h]^i$  die  $i$ -te Koordinate.

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sec(\vartheta) & \sec(\vartheta) \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ \cos(\varphi) \tan(\vartheta) & \sin(\varphi) \tan(\vartheta) & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist  $\det(J) = \sec(\vartheta)$ . Eine linksinvariante 3-Form auf  $\text{SO}(3)$  ist damit

$$\rho = \cos(\vartheta) d\varphi \wedge d\vartheta \wedge d\gamma. \tag{B.1}$$

# C. Distributionen

## C.1. Allgemeines

**Definition C.1.1** (Distribution). Eine Distribution  $u$  ist eine Linearform über den Testfunktionen mit kompaktem Träger auf einer offenen Teilmenge  $X \subset \mathbb{R}^n$  (bzw.  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ) nach  $\mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}$ )

$$u : C_0^\infty(X) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\text{C.1})$$

für die für alle kompakten Teilmengen  $K \subset X$  die Konstanten  $C$  und  $k$  existieren, sodass

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial_\alpha \varphi(x)|. \quad (\text{C.2})$$

Die Menge der Distributionen bezeichnet man mit  $\mathcal{D}'(X)$  [?].

**Satz C.1.1** (Verschwinden der ersten Ableitung). Sei  $u \in \mathcal{D}'(Y \times I)$ , wobei  $Y \subset \mathbb{R}^{n-1}$  offen und  $I \subset \mathbb{R}$  offen. Wenn  $\partial_n u = 0$ , dann ist

$$u(\varphi) = \hat{u} \left( \int \varphi(\cdot, x_n) dx_n \right), \text{ wobei } \hat{u} \in \mathcal{D}'(Y)$$

*Beweis.* Seien  $(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  und  $g \in C_0^\infty(Y \times I)$ . Für  $y \in \mathbb{R}$  sei ein Funktional  $J_y$  gegeben  $(J_y g)(x', y) := \int_{-\infty}^y dx_n g(x', x_n)$ . Das Funktional  $J_y$  bildet alle Testfunktionen  $g \in C_0^\infty(Y \times I)$  in  $C^\infty(Y \times \mathbb{R})$  ab. Da  $g$  kompakt getragen ist in  $I \subset \mathbb{R}$ , gibt es ein  $y_0$  für das  $J_y g$  mit  $y \leq y_0$  Null ist. Existiert darüber hinaus ein  $y_1$  mit  $J_y g = 0$ , falls  $y \geq y_1$  gilt, dann ist  $(J_y g)(x', y) = f(x', y) \in C_0^\infty(Y \times I)$ . Schließlich ist damit  $\partial_y f = g$ . Die Bedingung bezüglich  $y_0$  ist für alle kompakt getragenen Testfunktionen  $g$  erfüllt. Äquivalent zur zweiten Bedingung für kompakt getragene Testfunktionen ist  $Jg := J_\infty g = 0$ . Nun konstruiert man eine Funktion, die genau diese Bedingung erfüllt und den Beweis zum Ziel führt. Zuerst wählt man ein  $\Psi_0 \in C_0^\infty(I)$  mit  $\int \Psi_0 dx = 1$ . Damit wird  $\hat{u}(\chi[x']) := u(\chi(x')\Psi_0(x_n)) \in \mathcal{D}'(Y)$  definiert, wobei  $\chi(x') \in C_0^\infty(Y)$  ist. Dann ist  $J(\varphi(x', x_n) - (J\varphi)(x')\Psi_0(x_n)) = 0$  mit  $\varphi \in C_0^\infty(Y \times I)$  und es folgt, dass  $u(\varphi) = u((J\varphi)(x')\Psi_0(x_n)) = \int dx_n \hat{u}(\varphi(x', x_n))$

□

**Satz C.1.2** (Allgemeine Form von Distributionen). Nach [?, Seite 37 (2.1.1)] gilt für

## C. Distributionen

jede Distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , dass Borelmaße  $d\nu_\alpha$  existieren, so dass

$$u(\varphi) = \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} d\nu_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x)$$

$\alpha$  ist ein beliebiger Multiindex.

### C.2. Die Wellengleichung in zwei Dimensionen

**Theorem C.2.1** (2D Wellengleichung für Distributionen). Sei  $\omega \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  und erfülle für den zweidimensionalen Wellenoperator  $\square$  die Gleichung  $\square\omega = 0$ . Dann zerfällt die Distribution in

$$\begin{aligned} \omega(g) = & \omega_{x_+} \left( \int dx_- g(x_+ + x_-, x_+ - x_-) \right) + \\ & \omega_{x_-} \left( \int dx_+ g(x_+ + x_-, x_+ - x_-) \right) \end{aligned}$$

$$x_- = \frac{t-x}{2}, x_+ = \frac{t+x}{2}$$

*Beweis.* Man führt zunächst eine Koordinatentransformation von  $(x, t)$  zu den Lichtkegelkoordinaten  $(x_+, x_-) = (\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2})$  durch. Der Raum der Testfunktionen ist invariant unter dieser Transformation. Die homogene Wellengleichung wird dann zu

$$\partial_{x_+} \partial_{x_-} \omega = 0$$

Unter Benutzung von Proposition C.1.1

$$\begin{aligned} \partial_{x_-} \omega(f) &= (\partial_{x_-} \omega) \left( \Psi(x_+) \int dx'_+ f(x_-, x'_+) \right), \text{ mit } \Psi(x) \in C_0^\infty \text{ und } \int \Psi dx = 1 \\ &\Rightarrow \partial_{x_-} \left( \omega \left( f(x_-, x_+) - \Psi(x_+) \int dx'_+ f(x_-, x'_+) \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

### C. Distributionen

Unter Benutzung von Proposition C.1.1

$$\begin{aligned}\omega(f) &= \omega(\Psi(x_+) \int dx_+ f(x_-, x_+)) + \omega(\Phi(x_-) \int dx_- f(x_-, x_+)) - \\ &\quad - \omega(\Psi(x_+) \Phi(x_-) \int dx_+ dx_- f(x_-, x_+)) \\ \text{mit } \Phi(x) &\in C_0^\infty \text{ und } \int \Phi dx = 1\end{aligned}$$

□

**Korollar 6.** Sei  $f(x_-, x_+) = g(x_+)h(x_-)$  und  $\int g = \int f = 1$  dann ist  $\omega(f) = \omega_+(g) + \omega_-(h)$ ;  $\omega_\pm \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

Es wird nun deutlich, dass die Distributionen auf  $x_\pm$  keinen Einschränkungen unterliegen müssen, damit sie eine Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung bilden. Um das nachfolgende Ergebnis übersichtlicher zu machen, definiert man Projektionen auf den Testfunktionen. Dazu seien nun die Koordinaten von  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet mit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Dazu wähle man  $n$  Testfunktionen  $\Psi_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  mit  $\int \Psi_i = 1$ . Für eine Testfunktion  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt nun.

$$(P_i f)(\mathbf{x}) := \Psi_i(x_i) \int ds f(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Diese Projektionen benutzt man nun für Distributionen im folgenden Sinne. Sei  $\omega \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

$$\begin{aligned}\omega_z(f) &:= \omega(P_z f) \\ \omega_{z,y}(f) &:= \omega(P_z P_y f)\end{aligned}$$

Eine bilineare Distribution  $G \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ , mit  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$  soll die homogene Wellengleichung sowohl in  $X$  als auch in  $Y$  erfüllen.

$$\square_{(t_x, x)} G = \square_{(t_y, y)} G = 0, \quad (t_y, y) \in Y, (t_x, x) \in X \quad (\text{C.3})$$

Es kann wiederum durch mehrmaliges Verwenden von Theorem C.2.1 gezeigt werden, dass diese bilineare Distribution in ähnlicher Weise zerfällt, wie die einfachen Lösungen der KGG.

$$G = G_{x_- y_-} + G_{x_- y_+} + G_{x_+ y_-} + G_{x_+ y_+} - G_{x_+ y_+ y_-} - G_{x_- y_+ y_-} - G_{y_- x_+ x_-} - G_{y_+ x_+ x_-} \quad (\text{C.4})$$

### C.3. Die Wellengleichung in vier Dimensionen

**Definition C.3.1.** Sei  $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$  und  $\varphi \in C_\infty^0$ . Ist für alle  $R \in \text{SO}(3)$

$$G(\varphi) = G(R\varphi),$$

so ist  $G$  radialsymmetrisch. Wobei  $R(\varphi(\cdot)) = \varphi(R(\cdot))$  ist.

**Satz C.3.1.** Ist  $G$  eine radialsymmetrische Distribution und  $G(\square\varphi) = 0$ , so ist

1.  $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  im Sinne von  $G(\varphi) = G\left(\int \frac{d\Omega}{4\pi} \varphi(t, r, \Omega)\right)$
2.  $G(\square\varphi) = G\left(\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)r\right]\varphi\right)$

$\Omega$  ist der Raumwinkel bestehend aus  $\vartheta$  und  $\Phi$ .

*Beweis.* Nach (B.1) gibt es ein Maß  $d\mu(R)$  auf der  $\text{SO}(3)$  welches, da die Gruppe kompakt ist – dass heißt sie ist eine kompakte Mannigfaltigkeit – der gesamten  $\text{SO}(3)$  ein endliches Volumen zuordnet  $\mu(\text{SO}(3)) = 8\pi^2$ . Es folgt für eine rotationssymmetrische Distribution  $u$  mit Testfunktion  $\varphi$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi^2}u(\varphi) &= \frac{1}{8\pi^2}u(R\varphi) \\ \int_{\text{SO}(3)} d\mu(R) \frac{1}{8\pi^2}u(\varphi) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\text{SO}(3)} d\mu(R) u(R\varphi) \\ u(\varphi) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\text{SO}(3)} d\mu(R) u(R\varphi) \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz C.1.2 gilt nun, dass Maße  $d\nu_\alpha$  existieren, so dass

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\text{SO}(3)} d\mu(R) u(R\varphi) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\text{SO}(3)} d\mu(R) \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} d\nu_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha (R\varphi)(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Da  $(R\varphi)(x)$  sowohl stetig in  $R$  als auch in  $x$  ist und außerdem die Maße  $d\mu$  und  $d\nu_\alpha$  Borelmaße sind, folgt mit Hilfe des Satzes von Fubini (Vertauschbarkeit der Integration [?, Seite 175]), dass

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} d\nu_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha \int_{\text{SO}(3)} d\mu(R) (R\varphi)(\mathbf{x}) \\ &= u\left(\frac{1}{8\pi^2} \int_{\text{SO}(3)} d\mu(R) (R\varphi)(\mathbf{x})\right) =: u(\tilde{\varphi}) \end{aligned}$$

### C. Distributionen

Setzt man nun die in B.1.1 benutzte Parametrisierung von  $SO(3)$  ein, so erhält man

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{SO(3)} d\mu(R) (R\varphi)(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{SO(3)} d\phi d\vartheta d\lambda \cos(\vartheta) \varphi(R_z(\Phi)R_y(\vartheta)R_x(\lambda)\mathbf{x})$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen  $\mathbf{x}$  sei in Richtung der x-Achse, das heißt die Parametrisierung der  $SO(3)$  wird so gewählt, dass die Rotation um die x-Achse immer in Richtung des Arguments von  $\tilde{\varphi}$  zeigt. Damit haben alle Drehungen  $R_x$  keinerlei Wirkung.

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(r\hat{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \cos(\vartheta) \varphi(r R_z(\Phi)R_y(\vartheta)\hat{x}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \cos(\vartheta) \varphi \left( \begin{pmatrix} r \cos(\vartheta) \cos(\Phi) \\ -r \cos(\vartheta) \sin(\Phi) \\ -r \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \varphi(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (C.5)$$

Damit ist 1. bewiesen. Es wird zu Kugelkoordinaten in den drei räumlichen Dimensionen gewechselt  $(t, r, \Theta, \Phi)$ . Der Wellenoperator in Kugelkoordinaten hat die Form

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Die Ableitungen nach  $\partial_\Phi$  und  $\frac{1}{\cos(\vartheta)}\partial_\vartheta$  verschwinden aufgrund von (C.5), dass heißt

$$\begin{aligned} G(\square \varphi(x)) &= G \left( \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \varphi(\mathbf{x}) \right) \\ &= G \left( \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \varphi(\mathbf{x}) \right) \\ &= G \left( \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] r\varphi(\mathbf{x}) \right) \end{aligned}$$

□

Es werden nun, wie schon im zweidimensionalen Fall, Lichtkegelkoordinaten eingeführt.

$$r_+ := t + r$$

$$r_- := t - r$$

Zur Unterscheidung mit den Lichtkegelkoordinaten in zwei Dimensionen, heißen sie im

weiteren Verlauf Radiallichtkegelkoordinaten.

**Satz C.3.2.** *Ist eine Distribution  $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$  radialsymmetrisch und  $G(\square f) = 0$ , dann ist*

$$G(f) = G \left( \frac{1}{r} \xi_1(r_+) \int dr'_+ \int d\Omega \frac{r'_+ - r_-}{2} f(r'_+, r_-, \Omega) \right) + \\ G \left( \frac{1}{r} \xi_2(r_-) \int dr'_- \int d\Omega \frac{r'_+ - r_-}{2} f(r'_+, r_-, \Omega) \right)$$

$\xi_1(r_+)$  und  $\xi_2(r_-)$  sind Testfunktionen auf den Radiallichtkegelkoordinaten

*Beweis.* Es wird zunächst die Distribution  $\tilde{G}(\varphi) := G\left(\frac{1}{r}\varphi(r, t)\right)$  betrachtet, wobei  $\tilde{G} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  und  $\varphi \in \mathcal{D}_r$ . Alle  $\varphi$  können mit Hilfe einer Testfunktion  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$  als  $\varphi(r, t) = r \int d\Omega \cdot f(\mathbf{x})$  dargestellt werden. Nach C.3.1 folgt damit die Wohldefiniertheit von  $\tilde{G}$ .  $\tilde{G}$  erfüllt dann Gleichung (nach C.3.1)

$$\tilde{G} \left( \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \varphi \right) = 0.$$

Mit C.2.1 folgt die Behauptung. □

### C.3.1. Bilineare Distributionen

Gegeben sei eine bilineare Distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4) \otimes \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ , die in „beiden Argumenten“ Lösung der Wellengleichung ist, das heißt

- $u(f \otimes \square g) = u(\square f \otimes g) = 0$  für alle  $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$
- Es gibt eine eindeutige Distribution  $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^4)$  nach dem Kernsatz von Schwartz [?, Seite 128, Th. 5.2.1] mit  $\tilde{u}(f \otimes g) = u(f \otimes g)$  für alle  $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ .

Unter Benutzung der Ergebnisse für nicht bilineare Distributionen erhält man sogleich

$$u(f) = u \left( \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \cos \vartheta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda f \left( R_z(\phi) R_y(\vartheta) R_x(\lambda) \mathbf{x}, R_z(\phi) R_y(\vartheta) R_x(\lambda) \mathbf{y} \right) \right)$$

Die ausintegrierte Funktion  $f$  wird nun weiter betrachtet, in dem wiederum ihre Argumente  $x$  und  $y$  parametrisiert werden.

$$\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \hat{x} \qquad \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\| \begin{pmatrix} \sin \theta_y \\ \cos \theta_y \cos \phi_y \\ \cos \theta_y \sin \phi_y \end{pmatrix}$$

Die Parametrisierung der  $SO(3)$  wird so gewählt, dass die x-Achse (Rotationen  $R_x$ ) parallel zu  $\hat{x}$  ist

$$\begin{aligned} & f\left(R_z(\phi)R_y(\vartheta)R_x(\lambda)\mathbf{x}, R_z(\phi)R_y(\vartheta)R_x(\lambda)\mathbf{y}\right) \\ &= f\left(R_z(\phi)R_y(\vartheta)\mathbf{x}, R_z(\phi)R_y(\vartheta)R_x(\lambda)\|\mathbf{y}\|\begin{pmatrix} \sin\theta_y \\ \cos\theta_y\cos\phi_y \\ \cos\theta_y\sin\phi_y \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(R_z(\phi)R_y(\vartheta)\mathbf{x}, \|\mathbf{y}\|R_z(\phi)R_y(\vartheta)\begin{pmatrix} \sin\theta_y \\ \cos\theta_y\cos(\phi_y-\lambda) \\ \cos\theta_y\sin(\phi_y-\lambda) \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Mit der Integration folgt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \cos\vartheta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \\ & \quad f\left(R_z(\phi)R_y(\vartheta)\mathbf{x}, \|\mathbf{y}\|R_z(\phi)R_y(\vartheta)\begin{pmatrix} \sin\theta_y \\ \cos\theta_y\cos(\phi_y-\lambda) \\ \cos\theta_y\sin(\phi_y-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \cos\vartheta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \\ & \quad f\left(R_z(\phi)R_y(\vartheta)\mathbf{x}, \|\mathbf{y}\|R_z(\phi)R_y(\vartheta)\begin{pmatrix} \sin\theta_y \\ \cos\theta_y\cos(\lambda) \\ -\cos\theta_y\sin(\lambda) \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Die ausintegrierte Funktion ist nur noch eine Funktion von  $\|\mathbf{x}\|$ ,  $\|\mathbf{y}\|$  und  $\theta_y$   
 $=: \tilde{f}(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\|, \theta_y)$

## C.4. Glatte, symmetrische, positive bilineare Distributionen

Betrachten wir zunächst einige allgemeine Sätze über bilineare Distributionen, welche symmetrisch, positiv und glatt sind. Zunächst fassen wir einige allgemeine Erkenntnisse über solche Distributionen zusammen.

**Satz C.4.1** (Diagonale). *Sei  $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n)$  symmetrisch, reell, positiv und glatt. Dann muss ihre Diagonale  $K(x, x)$  positiv sein.*

*Beweis.* Man nehme an es existiere ein Punkt  $P = (a, a)$  für den gilt  $K(a, a) < 0$ . Es folgt auf Grund der Stetigkeit von  $K$ , dass es eine Umgebung  $U_P$  von  $P$  geben muss, auf der  $K$  auch negativ ist. Es existiert weiterhin eine überall positive Testfunktion  $f$  mit

### C. Distributionen

dem Träger  $\text{supp } f$ , für welchen gilt  $\text{supp } f \times \text{supp } f \subset U_P$ . Damit ist  $K(f, f) < 0$ , was ein Widerspruch ist.  $\square$

Diesen Satz kann man erweitern auf alle symmetrischen Ableitungen von einem solchen  $K$ . Das wird im kommenden Satz genauer geklärt.

**Satz C.4.2** (Ableitungen der Diagonale). *Sei  $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n)$  symmetrisch, reell, positiv und glatt. Sei  $A$  eine positive, symmetrische  $n \times n$  Matrix vom Rang  $n$ . Dann ist die Distribution, welche definiert ist durch den Integralkern  $A_{ij} \overset{x}{\partial}_i \overset{y}{\partial}_j K(x, y)$ , positiv. Die Summation über  $i$  und  $j$  ist implizit angenommen. Die partiellen Ableitungen sind als die entsprechenden Ableitungen auf  $\mathbb{R}^n$  zu verstehen.*

*Beweis.* Sei  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Betrachtet man den Ausdruck  $A_{ij} \overset{x}{\partial}_i \overset{y}{\partial}_j f(x) f(y)$ , so nutzt man zunächst, dass  $A$  symmetrisch und positiv ist. Damit lässt sich  $A$  mit Hilfe einer orthogonalen Matrix  $O$  diagonalisieren, das heißt es gibt eine Diagonalmatrix  $D$ , sodass  $A = O^T D O$ . Damit ist

$$A_{ij} \overset{x}{\partial}_i \overset{y}{\partial}_j f(x) f(y) = D_{ij} O_{ik} \overset{x}{\partial}_k f(x) O_{il} \overset{y}{\partial}_l f(y).$$

Da  $A$  eine positive Matrix ist, sind alle  $D_{ij} = \delta_{ij} D_j$  größer gleich Null. Setzt man nun alles in die bilineare Distribution  $K$  ein, erhält man

$$\begin{aligned} \int dx \int dy A_{ij} \left( \overset{x}{\partial}_i \overset{y}{\partial}_j K \right) (x, y) f(x) f(y) &= \int dx \int dy A_{ij} K(x, y) \overset{x}{\partial}_i \overset{y}{\partial}_j f(x) f(y) \\ &= D_{ij} \int dx \int dy K(x, y) O_{ik} \overset{x}{\partial}_k f(x) O_{jl} \overset{y}{\partial}_l f(y) \\ &= D_j K(O_{jk} \overset{x}{\partial}_k f, O_{jk'} \overset{y}{\partial}_{k'} f) \geq 0 \end{aligned}$$

Damit ist die Positivität gezeigt.  $\square$

**Korollar 7.** *Dieser Satz gilt auch für Distributionen die nicht überall regulär sind.*

Man kann diesen Satz auch auf mehrfache Ableitungen erweitern, die jeweils mit positiven Matrizen kontrahiert sind. Die orthogonalen  $(2 \times 2)$  Matrizen haben eine einfache Struktur

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Dadurch ergibt sich für die nach C.4.2 positiven Ableitungen einer positiven symmetrischen reellen Distribution  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \sin \alpha & \sin \alpha \\ -\cos \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{t_y} \\ \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha & \sin \alpha \\ -\cos \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{t_x} \\ \partial_x \end{pmatrix} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= (a \sin \alpha \partial_{x_+} \partial_{y_+} + b \cos \alpha \partial_{x_-} \partial_{y_-}) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

### C. Distributionen

Das bedeutet jegliche Linearkombinationen mit positiven Vorfaktoren sind wiederum positive Distributionen im zweidimensionalen Fall. Man sei hier schon verwiesen auf den Energieimpulstensor 5.9.

**Satz C.4.3.** *Die Distributionen  $h(\mathbf{x})h(\mathbf{y})$  definieren symmetrische, reelle, positive und glatte  $K \in \mathcal{D}'(C^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes C^\infty(\mathbb{R}^n))$ .*

*Beweis.* Sei  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Es folgt sofort aus  $h(f)h(f) \geq 0$ . □

**Satz C.4.4** (Notwendige Bedingungen positiver Distributionen). *Es sei  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  positiv im Sinne einer bilinearen Distribution. Weiterhin sei  $K$  glatt und symmetrisch. Dann gilt für  $K$*

$$\sqrt{K(\mathbf{x}, \mathbf{x}) K(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \geq K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ .

*Beweis.* Zunächst wird eine spezielle Testfunktion  $f$  gewählt, welche besondere Trägereigenschaften hat. Der positive Teil  $f_+$  habe einen Träger  $U_\epsilon(a)$  um einen Punkt  $a$ . Der negative Teil  $f_-$  habe einen Träger  $U_\delta(b)$  um einen beliebigen Punkt  $b$ . Weiterhin sei durch  $\epsilon > 0$  und  $\delta > 0$  der Durchmesser dieser Umgebungen beschränkt. Für eine Distribution  $K$  bedeutet das, dass

$$\begin{aligned} K(f, f) &= \int_{U_\epsilon(a)} \int_{U_\epsilon(a)} d\mathbf{x}d\mathbf{y} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_+(\mathbf{x}) f_+(\mathbf{y}) + \int_{U_\delta(b)} \int_{U_\delta(b)} d\mathbf{x}d\mathbf{y} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_-(\mathbf{x}) f_-(\mathbf{y}) \\ &\quad - 2 \int_{U_\delta(b)} \int_{U_\epsilon(a)} d\mathbf{x}d\mathbf{y} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_-(\mathbf{x}) f_+(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Der Mittelwertsatz besagt, dass für stetige Funktionen  $g$  und  $h$  auf einem Intervall  $[a, b]$  gilt, dass ein Punkt  $\xi \in [a, b]$  existiert, sodass  $\int_{[a,b]} dx g(x)h(x) = g(\xi) \int_{[a,b]} dx h(x)$ . Dies benutzt man nun in Bezug auf  $K$ . Dabei soll gelten  $a^\epsilon \in U_\epsilon(a)$

$$\begin{aligned} &= K(a^\epsilon, a^\epsilon) \int_{U_\epsilon(a)} \int_{U_\epsilon(a)} d\mathbf{x}d\mathbf{y} f_+(\mathbf{x}) f_+(\mathbf{y}) + K(b^\delta, b^\delta) \\ &\quad \int_{U_\delta(b)} \int_{U_\delta(b)} d\mathbf{x}d\mathbf{y} f_-(\mathbf{x}) f_-(\mathbf{y}) - 2K(b^\delta, a^\epsilon) \int_{U_\delta(b)} \int_{U_\epsilon(a)} d\mathbf{x}d\mathbf{y} f_-(\mathbf{x}) f_+(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Die Integrale über die positiven und negativen Anteile werden auf die Konstanten  $c$  und  $d$  fixiert:  $\int f_+ = c$  und  $\int f_- = d$ . Dies kann unabhängig von der Wahl von  $\epsilon$  und  $\delta$  erfolgen.

$$= K(a^\epsilon, a^\epsilon)c^2 + K(b^\delta, b^\delta)d^2 - 2cdK(b^\delta, a^\epsilon)$$

### C. Distributionen

Da gelten soll, dass  $K(f, f) \geq 0$  ist, kann man nun den Grenzwert von  $\epsilon$  und  $\delta$  gegen Null betrachten. Da  $K(f, f)$  für alle  $\epsilon$  und  $\delta$  größer Null ist, konvergiert dieser Limes auch auf dem Intervall  $[0, \infty)$  oder er divergiert. Da  $K$  glatt ist kommt es zu keiner Divergenz, das heißt auch der Grenzwert ist  $\geq 0$ .

$$= K(a, a)c^2 + K(b, b)d^2 - 2cdK(b, a) \geq 0$$

$c$  und  $d$  können alle positiven Werte annehmen. Im Weiteren betrachten wir nun das Minimum dieses Ausdrucks in Abhängigkeit von diesen Parametern. Das Problem wird vereinfacht durch Einführung von  $e := \frac{c}{d}$

$$K(a, a)e + K(b, b)\frac{1}{e} - 2K(b, a) \geq 0$$

Für den Fall, dass  $K(a, a)$  oder  $K(b, b)$  Null ist, folgt sofort, dass alle anderen Werte hierbei auch Null sind. Ansonsten kann die Ungleichung nicht für alle positiven  $e$  erfüllt sein. Schließt man diesen Fall zunächst aus, so erhält man für das Minimum folgenden Ausdruck

$$\sqrt{K(a, a)K(b, b)} - K(b, a) \geq 0$$

□

Dies erlaubt Aussagen über Ableitungen positiver Distributionen.

**Satz C.4.5.** *Für eine positive glatte bilineare Distribution  $K$  gilt*

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq -\sqrt{K(\mathbf{x}, \mathbf{x})K(\mathbf{y}, \mathbf{y})}$$

*Beweis.* Auf C.4.4 verweisend geht man zunächst den gleichen Weg und wählt eine spezielle Testfunktion. In diesem Fall sollen die Träger die Selben sein, jedoch sollen die Funktionen überall positiv sein, das heißt die Testfunktion  $f$  wird zerlegt in:  $f(\mathbf{x}) := f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})$  mit  $\text{supp } f_1 \subset U_\epsilon(a)$  und  $\text{supp } f_2 \subset U_\delta(b)$

$$\begin{aligned} K(f, f) &= \int_{U_\epsilon(a)} \int_{U_\epsilon(a)} d\mathbf{x}d\mathbf{y} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_1(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{y}) + \int_{U_\delta(b)} \int_{U_\delta(b)} d\mathbf{x}d\mathbf{y} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_2(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{y}) \\ &\quad + 2 \int_{U_\delta(b)} \int_{U_\epsilon(a)} d\mathbf{x}d\mathbf{y} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_2(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Dies führt zu einer leicht veränderten Ungleichung für  $K$

$$\sqrt{K(a, a)K(b, b)} + K(b, a) \geq 0$$

□

### C. Distributionen

Es lassen sich nun Schlussfolgerungen bezüglich Träger und Extrema treffen.

**Satz C.4.6.** *Sei  $K$  eine glatte bilineare positive Distribution. Sei weiterhin  $M$  der Träger der Diagonale  $D(\mathbf{x}) := K(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ , dann gilt  $\text{supp } K \subset M \times M$ . Außerdem gilt  $\text{sup } K \leq \text{sup } D$*

*Beweis.* Die beiden vorhergehenden Sätze C.4.4 und C.4.5 erlauben eine entsprechende Abschätzung. □

Man kann noch beliebige andere Beschränkungen für solche Distributionen finden, indem man die in den vorangegangenen Sätzen benutzte Methode erweitert und man Testfunktionen betrachtet, deren Träger die Vereinigung  $n$  zusammenhängender kompakter Mengen ist.

**Satz C.4.7.** *Eine bilineare glatte Distribution  $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  sei positiv genau dann, wenn alle Matrizen  $K(a_i, a_j) \in M_{N \times N}$  positiv sind.  $\{a_i\}_{i \in N}$  sei eine beliebige endliche Folge aus  $\mathbb{R}^n$ .*

*Beweis.* 1. Sei  $K$  positiv. Man betrachte Testfunktionen  $f(\mathbf{x}) := \sum_{j=0}^N f_j(\mathbf{x})$  mit  $\text{supp } f_j(\mathbf{x}) \cap \text{supp } f_i(\mathbf{x}) = \emptyset$ . Desweiteren sei  $\text{supp } f_i(\mathbf{x}) \subset U_{\epsilon_i}(a_i)$  mit  $\epsilon_i > 0$  und  $|\text{supp } U_{\epsilon_i}(a_i)| < \epsilon_i$ . Jede einzelne Funktion sei entweder punktweise positiv oder punktweise negativ.

$$\begin{aligned} 0 &\leq K(f, f) \\ &\leq \sum_{i,j}^N \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_i(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Per Mittelwertsatz kann für jeden Summanden ein Punkt  $(a_i^\epsilon, a_j^\epsilon)$  mit  $a_i^\epsilon \in U_{\epsilon_i}(a_i)$  gefunden werden, sodass

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i,j}^N K(a_i^\epsilon, a_j^\epsilon) \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} f_i(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{y}) \\ &\leq \sum_{i,j}^N K(a_i^\epsilon, a_j^\epsilon) c_i c_j \end{aligned}$$

### C. Distributionen

Da alle  $\epsilon_i$  beliebig klein gewählt werden können, während alle  $c_i$  konstant bleiben, wird durch eine geeignete Wahl der einzelnen  $f_i$  sicher gestellt, dass für den Limes dieses Grenzprozesses weiterhin die Ungleichung gilt.

$$0 \leq \sum_{i,j}^N K(a_i, a_j) c_i c_j$$

Da die Konstanten  $c_i$  grundsätzlich beliebig wählbar sind, sind damit alle Matrizen  $K(a_i, a_j)$  positiv.

2. Seien nun für alle  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  die Matrizen  $K(a_i, a_j)$  positiv. Man betrachtet nun  $K(f, f)$  für eine beliebige Testfunktion. Die Integrale über  $x$  und  $y$  sollen nun durch einen Limes von Integralen über Folgen von Treppenfunktionen  $u_n$  und  $v_n$  dargestellt werden. Dabei werden als Stützpunkte für jedes  $n$  beliebige Folgen  $\{a_i^n\}_{i \in \mathbb{N}}$  gewählt. Jedem Folgenglied wird eine charakteristische Funktion  $\chi_i^n$  zugeordnet, sodass diese disjunkte Träger besitzen. Vereinigt sollen diese Träger den Träger von  $f$  ergeben. Im Grenzprozess  $n \rightarrow \infty$  kann somit eine entsprechende konvergente Folge von Treppenfunktionen gefunden werden.

$$\begin{aligned} K(f, f) &= \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}) f(\mathbf{y}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) K(\mathbf{x}, a_i^n) f(a_i^n) \mu(\chi_i^n) \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{ij} \mu(\chi_j^m) f(a_j^m) K(a_j^n, a_i^n) f(a_i^n) \mu(\chi_i^n) \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} K_{n, m} \end{aligned}$$

$\mu(\chi_i^n)$  ist das Maß der charakteristischen Funktion  $\chi_i^n$ . Da nun für alle  $(n, m)$  nach der Voraussetzung  $K_{n, m} \geq 0$  gilt, gilt dies Auch für den Grenzwert  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} K_{n, m} = K(f, f) \geq 0$

□

## C.5. Wellenfrontenmenge

Die Wellenfrontenmenge einer Distribution gibt neben dem singulären Träger an, welcher Art diese Singularitäten sind. Dies soll im Folgenden erläutert und erklärt werden. Bei Hörmander [?] findet man eine mathematisch vollständige Abhandlung zu diesem

### C. Distributionen

Thema. Sei die Fouriertransformierte einer Testfunktion  $f$

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(x) e^{-i\langle p, x \rangle}.$$

$\langle p, x \rangle$  ist die entsprechende (Halb-)Norm auf  $\mathbb{R}^n$ . Wenn  $f$  eine kompakte Testfunktion ist, dann erfüllt ihre Fouriertransformierte folgendes Abfallverhalten. Es existiert eine Konstante  $C$  für alle  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|\tilde{f}(p)| \leq \frac{C}{(1 + |p|)^N}$$

Diese Implikation gilt auch umgekehrt. Die Fouriertransformierte  $\tilde{u}$  einer Distribution  $u$  ist

$$\tilde{u}(f) := u(\tilde{f})$$

Unter einer regulären Distribution versteht man eine Distribution deren Distributionskern sich als glatte Funktion darstellen lässt, wenn man den Träger der Testfunktionen auf eine beliebige offene Menge einschränkt. Für nicht reguläre Distributionen definiert man den singulären Träger  $\text{singsupp } u$

$$\text{singsupp } u = \mathbb{C} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \text{supp } f \ni x : u \in C^\infty\}$$

$u$  lässt sich also in einer Umgebung dieser Punkte nicht als glatte Funktion darstellen.

**Satz C.5.1.** *Die Fouriertransformierte einer Distribution mit kompakten Träger hat keinen singulären Träger.*

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \tilde{u}(f) &= u(\tilde{f}) \\ &= u \left( \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n p f(p) e^{-i\langle p, \cdot \rangle} \right) \end{aligned}$$

Auf Grund der Darstellung von Distributionen mit Hilfe von Borelmaßen lässt sich das gleiche Argument wie in C.3.1 zur Vertauschung der Integrale anführen, da die Konvergenz über  $x$  durch den kompakten Träger gesichert ist.

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n p f(p) u(e^{-i\langle p, \cdot \rangle})$$

$u(e^{-i\langle p, \cdot \rangle})$  ist damit die Fouriertransformierte und glatt in  $p$ , auf Grund eines Theorems bei Hörmander [?, S. 34, Th. 2.1.3], da Distributionen mit kompakten Träger auch auf Testfunktionen ohne kompakten Träger wohldefiniert sind. □

### C. Distributionen

Ist der singuläre Träger einer kompakt getragenen Distribution  $u$  nicht Null, so muss es  $p \in \mathbb{R}^n$  geben, sodass gilt

$$\tilde{u}(p) > \frac{C}{(1 + |p|)^N}$$

Daher nennt man die Menge aller dieser  $p \in \mathbb{R}^n$  gewöhnlich  $\Gamma(u)$ . Für das singuläre Verhalten von Distributionen ohne kompakten Träger ergibt sich daher die Menge  $\Gamma_x(u)$ .

$$\Gamma_x(u) := \bigcap_{x \in \text{supp } f} \Gamma(fu)$$

Diese Menge ist nicht leer, wenn  $x$  ein Element des singulären Trägers ist. Diese Informationen kann man bequem in der Wellenfrontenmenge zusammenfassen.

**Definition C.5.1** (Wellenfrontenmenge). Die Wellenfrontenmenge  $WF(u)$  einer Distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  sei

$$WF(u) := \{(x, p) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) \mid p \in \Gamma_x(u)\}$$

Die Wellenfrontenmenge hat einige handhabbare Eigenschaften.

**Satz C.5.2.** Sei  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  dann gelten die Relationen

- $WF(\varphi u) \subset WF(u)$
- $WF(\partial_\alpha u) \subset WF(u)$

Darüberhinaus kann über die Wellenfrontenmengen zweier Distributionen ein eindeutiges Kriterium angegeben werden, ob ihr Produkt wohldefiniert ist. Es wird nun das Theorem hierfür aus dem Buch von Hörmander zitiert [?, Th. 8.2.10]

**Theorem C.5.3.** Das Produkt zweier Distributionen  $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ist definiert über die Diagonale des Tensorproduktes  $u_1 \otimes u_2$ , wenn es kein Element  $(x, k) \in WF(u_1)$  gibt, für das gilt  $(x, -k) \in WF(u_2)$ .

# Danksagung

Mein Dank gilt zuerst Herrn Prof. Klaus Fredenhagen, nicht nur für die Möglichkeit eine Diplomarbeit in dem Gebiet der algebraischen Quantenfeldtheorie zu schreiben, sondern auch für seine Betreuung und Hilfe, während meiner gesamten Diplomarbeitszeit.

Ohne ausdauernde Gespräche, Hinweise und Hilfe von Jan Schlemmer und Thomas-Paul Hack hätte ich vermutlich noch zwei weitere Jahre mit meiner Diplomarbeit verbringen können.

Der gesamten AQFT Gruppe sei hier gedankt, für die Einblicke in einen Teil der mathematischen Physik, der einen ehrlichen und erhellenden Blick auf die theoretische Physik ermöglicht.

Dass es möglich war diese Arbeit zu schreiben, lag außerdem nicht nur an der gut funktionierenden  $\text{\LaTeX}$  Umgebung, sondern auch an Mathias Makedonski, welchem ich für seine beruhigende Wirkung auf mein angespanntes Gemüt danken möchte und Daniel Siemssen, der mich an das Dart spielen heranzuführte.

# **Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung**

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln verfasst zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Hamburg, den 22. März 2013

Sebastian Schubert