Diplomarbeit

Quadratische Funktionale im Rahmen der Deformationsquantisierung

Achim Schneider

20.01.2010

Betreuer: Professor K. Fredenhagen, Professor E. Schrohe

Institut für Differentialgeometrie, Universität Hannover

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der Formalismus der Deformationsquantisierung hat sich als sehr effizient in der störungstheoretischen Behandlung der algebraischen Quantenfeldtheorie herausgestellt.
Im Rahmen dieses Formalismus wird ein nichtkommutatives Sternprodukt zwischen Funktionalen von Feldern mit Hilfe von Funktionalableitungen definiert. Während sich dieses Produkt immer mit Hilfe formaler Potenzreihen ausdrücken lässt, ist über deren Konvergenzverhalten bisher nur wenig bekannt.
Lediglich von der Menge der Exponentialfunktionen linearer Funktionale wissen wir bereits, dass diese eine unter dem Sternprodukt abgeschlossene Algebra definieren. Zur Beschreibung Wechselwirkender Theorien wäre es allerdings notwendig, auch das punktweise Produkt von Feldern in die Algebra einzubinden. Dies würde bedeuten, dass wir als Integralkerne der Funktionale unserer Algebra nicht länger nur Testfunktionen zulassen, sondern zu Distributionen übergehen. Es ist allerdings bekannt, dass bereits das Sternprodukt zwischen solchen punktweisen Produkten nur unter bestimmten Bedingungen an die Wellenfrontmenge der verwendeten Distributionen existiert [4], so dass sich hiermit vermutlich keine unter dem Sternprodukt abgeschlossene Algebra angeben lässt.

Wir verfolgen daher einen etwas anderen Ansatz zur Vergrößerung der durch die Exponentialfunktionen linearer Funktionale erzeugten Algebra, der Weylalgebra: Wir untersuchen, inwiefern es möglich ist, die Exponentiale quadratischer Funktionale in die bestehende Algebra einzubinden.
In einem ersten Schritt wenden wir uns dafür zunächst der bestehenden Weylalgebra zu, die wir im Rahmen der Deformationsquantisierung realisieren. Uns beschäftigt hier die Frage, ob es sich dabei um eine $C*$-Algebra handelt.
Wir diskutieren dann die GNS-Konstruktion dieser Algebra, die uns zur Fockraumdarstellung führt.
Die nachfolgenden Kapitel bilden den Hauptteil der Arbeit und behandeln die Konvergenzeigenschaften von Exponentialfunktionen quadratischer Funktionale sowie von deren Produkten.

Zum Abschluss diskutieren wir einen Ansatz, der es uns erlaubt im Rahmen einer verallgemeinerten GNS-Konstruktion ein Verständnis für die Wirkung der eingeführten Exponentiale quadratischer Operatoren auf dem Fockraum zu erhalten.
Wir diskutieren als mögliche Anwendung der aufgefundenen Strukturen noch kurz die von Summers in [11] behandelten quadratischen Transformationen.

Kapitel 1

Die C^*-Algebrastruktur der Weylalgebra

Es soll in diesem Abschnitt zunächst um die C^*-Algebrastruktur der Weylalgebra $\mathcal{W}$ gehen. Dass es sich bei der Weylalgebra um eine C^*-Algebra handelt ist wohlbekannt [1]. Unsere konkrete Realisierung der Weylalgebra, mit der wir uns im folgenden beschäftigen wollen, unterscheidet sich jedoch in einem nicht unwesentlichen Detail von der bekannten Struktur: in unserem Fall ist die verwendete symplektische Form entartet.

Der Fall einer Weylalgebra mit entarteter symplektischer Form wurde bereits von Manuceau [2] untersucht. Dieser verwendet dabei im wesentlichen ein Standardverfahren zur Konstruktion von $C*$-Normen aus [3]. Wir stellen in diesem Kapitel die Resultate dieser Veröffentlichung vor. Allerdings gehen wir dabei auf unseren Fall ein, in dem die Weylalgebra nicht abstrakt definiert wird, sondern konkret durch Funktionale realisiert ist. Daher erbringen wir einen eigenen Beweis der linearen Unabhängigkeit dieser Funktionale.

1.1 Mathematische Voraussetzungen

Als erstes definieren wir eine symplektische Gruppe (H, σ). Diese besteht aus einer abelschen Gruppe H, zusammen mit einer möglicherweise entarteten symplektischen Form σ.

Unter der Form σ verstehen wir die folgende Abbildung von $H \times H$ nach $\mathbb{R}$:

$$\sigma(x, y) = -\sigma(y, x), \quad \forall\, x, y \in H, \tag{1.1}$$

$$\sigma(x, y + z) = \sigma(x, y) + \sigma(x, z), \quad \forall\, x, y, z \in H \tag{1.2}$$

Aus (1.1) und (1.2) folgt:

$$2 \cdot \sigma(x, 0) = \sigma(x, 0) + \sigma(x, 0) = \sigma(x, 0 + 0) = \sigma(x, 0)$$

$$\Rightarrow\ \sigma(x, 0) = 0 \tag{1.3}$$

und

$$\sigma(x, y) + \sigma(x, -y) = \sigma(x, y - y) = \sigma(x, 0) = 0$$

$$\Rightarrow\ \sigma(x, -y) = -\sigma(x, y) \tag{1.4}$$

sowie

$$\sigma(x, -y) = -\sigma(x, y) = \sigma(y, x) = -\sigma(y, -x) = \sigma(-x, y) \tag{1.5}$$

Wir verwenden im weiteren für H die abelsche Gruppe der Testfunktionen $\mathcal{D}(M)$ mit der Addition als Gruppenoperation auf einer Mannigfaltigkeit M.
Weiterhin sei M im Folgenden die vierdimensionale Minkowskiraumzeit.

Wir betrachten ab sofort die folgende spezielle symplektische Form σ:

Sei

$$\Delta_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\,\mathbf{p}}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \, \mathrm{e}^{i(\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}\,x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \tag{1.6}$$

die Fundamentallösung positiver Energie der Klein-Gordon Gleichung.
Sei

$$\Delta(x) = \Delta_+(x) - \Delta_+(-x) \tag{1.7}$$

die zugehörige Kommutatorfunktion.

Dann definieren wir σ durch:

$$\sigma(f,g) = \int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y f(x)\,\Delta(x-y)\,g(y), \tag{1.8}$$

wobei jeweils über den vierdimensionalen Minkowskiraum integriert wird.

Bemerkung 1.1.1. *Der Testfunktionenraum $\mathcal{D}(M)$ besitzt neben der Addition auch eine Skalarmultiplikation, und unsere symplektische Form σ ist unter dieser Skalarmultiplikation in beiden Argumenten linear.*

Wir bezeichnen mit H_0 die Untergruppe von H, für die gilt:

$$H_0 = \{x \in H \,|\, \forall\, y \in H, \quad exp(2\,i\,\sigma(x,y)) = 1\} \tag{1.9}$$

Aufgrund von Bemerkung 1.1.1 sehen wir sofort, dass H_0 in unserem Fall gerade mit dem Entartungsraum der symplektischen Form übereinstimmt:

$$H_0 = \{x \in H \,|\, \forall\, y \in H \quad \sigma(x,y) = 0\} \tag{1.10}$$

Wir führen jetzt eine Algebra von Funktionalen ein, die durch die Elemente aus H erzeugt wird.

Wir definieren dafür für jedes Element $f \in H$ ein Funktional auf dem Raum der glatten Feldkonfigurationen auf unserer Minkowskiraumzeit durch:

$$W(f) = \mathrm{e}^{i\int \mathrm{d}x\,\varphi(x) f(x)}, \qquad \varphi \in \mathcal{C}^\infty(M) \tag{1.11}$$

Auf den endlichen Linearkombinationen dieser Form definieren wir mit Hilfe unserer symplektischen Form σ ein Algebraprodukt durch:

$$W(f) \star W(g) = \mathrm{e}^{-i\,\hbar\,\sigma(f,g)}\,W(f+g) \tag{1.12}$$

Wir erhalten eine involutive Algebra mit Einselement $W(0)$, wenn wir die Involution $*$ wie folgt definieren:

$$(W(f))^* = W(-f) \quad \forall f \in H \tag{1.13}$$

Die so definierte Algebra bezeichnen wir mit $\Delta(H,\sigma)$.

Wir sehen, dass die so definierten Elemente $W(f)$ unitär sind:

$$(W(f))^* \star (W(f)) = W(-f) \star W(f) = \mathrm{e}^{i\,\hbar\sigma(-f,f)}\,W(f-f) = W(0) \tag{1.14}$$

Wir benötigen im Folgenden die lineare Unabhängigkeit der Elemente $\{W(f) | f \in H\}$:

Proposition 1.1.2. *Die Elemente der Form $\{W(f) \mid f \in H\}$ sind linear unabhängig.*

Beweis: Sollte eine endliche Linearkombination sich zu Null addieren, so wäre dies äquivalent zum Verschwinden der Vandermonde Determinante folgender Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & e^{i\varphi(f_1)} & e^{i\varphi(f_2)} & \dots & e^{i\varphi(f_n)} \\ 1 & e^{2i\varphi(f_1)} & e^{2i\varphi(f_2)} & \dots & e^{2i\varphi(f_n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & e^{(n+1)i\varphi(f_1)} & e^{(n+1)i\varphi(f_2)} & \dots & e^{(n+1)i\varphi(f_n)} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Denn wenn die Linearkombination aus $e^{i\varphi(f_1)}, ..., e^{i\varphi(f_n)}$ verschwinden soll, so muss dieses für jedes φ gelten. Haben wir ein beliebiges φ ausgewählt, so muss die Gleichung also ebenfalls für $n \cdot \varphi$ erfüllt sein.

Der Wert der Determinante der Matrix M lautet nach der bekannten Vandermondschen Determinantenformel:

$$\det(M) = \prod_{1 \le i < j \le n} (e^{i\varphi(f_i)} - e^{i\varphi(f_j)}) \tag{1.16}$$

Wir sehen also, dass die lineare Unabhängigkeit der Elemente $\{e^{i\varphi(f_1)}, ..., e^{i\varphi(f_n)}\}$ äquivalent dazu ist, dass sich ein φ finden lässt, so dass die $e^{i\varphi(f_i)}$'s paarweise verschieden sind.

Um die Existenz eines solchen φ's nachzuweisen, beweisen wir die folgende Aussage durch Induktion über n: Seien $f_1, ..., f_n \in H$ gegeben, so dass $f_i \neq f_j$ gilt für $i \neq j$, dann existiert ein φ, so dass gilt: $\varphi(f_i) \neq \varphi(f_j)$ für $i \neq j$ sowie $-\pi < \varphi(f_i) < \pi \quad \forall\, i \in \{1, ..., n\}$.

Zum Beweis:

Zum Induktionsanfang:
Sei $f_1 \in H$ gegeben. Für $f_1 \equiv 0$ ist nichts zu zeigen. Seil also f_1 nicht konstant 0. Es existiert dann ein φ' so dass $\varphi'(f_1) \neq 0$. Gilt nun $\varphi'(f_1) \in (-\pi, \pi)$, so wählen wir $\varphi := \varphi'$. Ansonsten wählen wir $\varphi := \frac{1}{\varphi'(f_1)}\varphi'$.

Zur Induktionsvoraussetzung:
Wir nehmen an, dass für ein gebenes $n \in \mathbb{N}$ für alle Teilmengen $\{f_1, \cdots, f_{n-1}\} \subset H$ ein φ existiert, so dass die $\varphi(f_i)$ paarweise verschieden sind.

Zum Induktionsschritt:
Seien $f_1, \cdots, f_n \in H$ gegeben mit $f_i \neq f_j$ für $i \neq j$, dann existiert nach Induktionsvoraussetzung ein φ', so dass $\varphi'(f_i) \neq \varphi'(f_j)$ für $i \neq j$ und $i, j \le n-1$ gilt. Wir berechnen dann den Ausdruck $\varphi'(f_n)$. Wenn $\varphi'(f_n) \notin (-\pi, \pi)$ ist, so definieren wir $\varphi''(f_n) = \frac{1}{\varphi'(f_n)}\varphi'$, denn das gemeinsame reskalieren aller $\varphi'(f_i)$ ändert nichts daran dass diese sich paarweise unterscheiden. Außerdem liegen dann immer noch alle $\varphi''(f_i)$ im vorgegebenen Intervall, da der Betrag von $\varphi'(f_n)$ dann größer als eins ist und das Intervall $(-\pi, \pi)$ symmetrisch ist.
Damit erfüllt $\varphi''(f_n)$ schon einmal die Bedingung $\varphi''(f_n) \in (-\pi, \pi)$. Gilt nun $\varphi''(f_n) \neq \varphi''(f_i)\ \forall\, i \in \{1, .., n-1\}$ so wählen wir $\varphi \equiv \varphi''$ und sind fertig.
Ansonsten existiert ein $i_0 \in \{1, ..., n-1\}$ mit $\varphi''(f_n) = \varphi''(f_{i_0})$. Da aber $f_n \neq f_{i_0}$ ist, findet sich ein $\tilde{\varphi}$, so dass $\tilde{\varphi}(f_n) \neq \varphi(\tilde{f_{i_0}})$ ist.
Wir definieren dann:
$\delta_1 := \min\limits_{i,j \in \{1,...,n-1\},\, i \neq j} \{|\varphi''(f_i) - \varphi''(f_j)|\}$ und $\delta_2 = \max\limits_{i \in \{1,...,n\}} |\tilde{\varphi}(f_i)|$. Wir verkleinern gegebenenfalls noch δ_1 so weit, dass es kleiner ist als der minimale Abstand der Ränder des Intervalls $(-\pi, \pi)$ zu den $\varphi''(f_i)'s$. Schließlich definieren wir dann φ als:

$$\varphi := \varphi'' + \frac{1}{2}\frac{\delta_1}{\delta_2}\tilde{\varphi} \tag{1.17}$$

Dieses erfüllt beide geforderten Bedingungen. □

Die lineare Unabhängigkeit der Elemente der Form $\{W(f)|f \in H\}$ erlaubt es uns, eine eindeutige Norm $\|\cdot\|_1$ auf $\Delta(H,\sigma)$ einzuführen:

$$\|\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\, W(f_i)\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \tag{1.18}$$

Wir rechnen nach, dass es sich bei $\|\cdot\|_1$ um eine mit der Involution verträgliche Algebranorm handelt:

$$\|\mathbf{a}^*\|_1 = \|(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\, W(f_i))^*\|_1 = \|\sum_{i=1}^{N} \bar{\alpha_i}\, W(-f_i)\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| = \|\mathbf{a}\|_1 \tag{1.19}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{a} \star \mathbf{b}\|_1 &= \|(\sum_{i=1}^{M} \alpha_i\, W(f_i)) \star \sum_{j=1}^{N} \beta_j\, W(g_j)\| && (1.20)\\
&= \|\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \beta_j\, \mathrm{e}^{-i\hbar\sigma(f_i,g_j)}\, W(f_i+g_j)\|_1 && (1.21)\\
&\leq \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} |\alpha_i \beta_j| = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} |\alpha_i|\, |\beta_j| && (1.22)\\
&= \sum_{i=1}^{M} |\alpha_i| \sum_{j=1}^{N} |\beta_j| = \|\mathbf{a}\|_1 \cdot \|\mathbf{b}\|_1 && (1.23)
\end{aligned}$$

Wenn wir den Abschluss von $\Delta(H,\sigma)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ bilden, so erhalten wir eine abgeschlossene $*-$Banachalgebra mit Eins, die wir mit $\overline{\Delta(H,\sigma)}^1$ bezeichnen wollen.

Es ist zuerst jedoch nicht klar, ob die Elemente der Form $\{W(f_i)|f_i \in H\}$ eine Schauderbasis bilden, d.h. ob eine Darstellung eines Elementes aus $\overline{\Delta(H,\sigma)}^1$ mit einer abzählbar unendlichen Reihe von Koeffizienten $\neq 0$ eindeutig ist.
Äquivalent dazu ist offensichtlich die Frage, ob eine abzählbar unendliche Linearkombination gegen das Nullelement konvergieren kann.

Um diese Frage beantworten zu können, führen wir zunächst einen Zustand ω_0 auf $\Delta(H,\sigma)$ ein und zeigen, dass wir diesen auf $\overline{\Delta(H,\sigma)}^1$ fortsetzen können:

Definition 1.1.3. *Sei ω_0 der Zustand auf $\Delta(H,\sigma)$, der für $W(f), f \in H$ definiert ist durch:*

$$\omega_0(W(f)) = 0, \quad \textit{wenn } f \in H \textit{ und } f \neq 0 \tag{1.24}$$

Wir beweisen hierzu nun den folgenden Satz, der auch von unabhängigem Interesse ist:

Satz 1.1.4. *Jede positive Linearform auf $\Delta(H,\sigma)$ lässt sich zu einer positiven Linearform auf $\overline{\Delta(H,\sigma)}^1$ fortsetzen.*

Beweis: Sei ρ eine positive Linearform. Wir verwenden die Cauchy-Schwartz Ungleichung um $\rho(W(f)), \quad f \in H$ durch $\rho(W(0))$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned}
|\rho(W(f))|^2 &= |\rho(W(0+f))|^2 = |\rho(W(0) \star W(f))|^2 && (1.25)\\
&\leq \rho(W(0)^* \star W(0))\, \rho(W(f)^* \star W(f)) = \rho(W(0))^2 && (1.26)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |\rho(W(f))| \leq \rho(W(0))| \tag{1.27}$$

Damit ergibt sich dann aber für jede endliche Linearkombination der Form $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i W(f_i)$:

$$|\rho(\mathbf{a})| = |\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \rho(W(f_i))| \leq \rho(W(0)) \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| = \rho(W(0)) \|\mathbf{a}\|_1 \tag{1.28}$$

Dass ρ durch ein Vielfaches der Norm $\| \cdot \|_1$ dominiert wird zeigt, dass wir ρ stetig auf den Abschluss fortsetzen können und dass diese Fortsetzung eindeutig ist. $\square$

Wir sehen also, dass unser zuvor definierter Zustand ω_0 eine stetige Fortsetzung auf den Abschluss besitzt.

Für ein Element $\mathbf{a} \in \overline{\Delta(H,\sigma)}^1$ liefert $\omega_0(\mathbf{a}^* \star \mathbf{a})$ also gerade die L^2 Norm der Koeffizienten von $\mathbf{a}$. Dies zeigt, dass

$$\|\mathbf{a}\|_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = 0 \tag{1.29}$$

Ein Charakter der abelschen Gruppe H ist eine Abbildung $\chi : H \to \mathbb{C}$, so dass $|\chi(f)| = 1 \; \forall f \in H$ und $\chi(f)\chi(g) = \chi(f+g)$.

Für einen beliebigen Charakter der Gruppe H definieren wir jetzt einen *-Automorphismus τ_χ von $\Delta(H,\sigma)$ durch:

$$\tau_\chi(W(f)) = \chi(f)\, W(f) \tag{1.30}$$

Dann ist τ_χ offensichtlich isometrisch und besitzt damit eine stetige Fortsetzung auf den Abschluss $\overline{\Delta(H,\sigma)}^1$.

Wir können jetzt die Untergruppe von Charakteren der Form

$$\chi_g(f) = \exp(2\, i\, \sigma(g,f)), \quad \forall f \in H \tag{1.31}$$

betrachten. Wir bezeichnen die Menge $\{\chi_g | g \in H\}$ mit K, wir versehen die Gruppe H mit der diskreten Topologie und bezeichnen den Abschluss von K in dessen dualer Gruppe $\hat{H}$ mit $\overline{K}$.

Wir zeigen, dass für $\chi_g \in K$ der zugehörige $*$-Automorphismus ein innerer Automorphismus ist. Sei $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i W(f_i)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} W(g) \star \mathbf{a} \star W(-g) &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i W(g) \star W(f_i) \star W(-g) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, \mathrm{e}^{i\,\sigma(f_i,-g)}\, W(g) \star W(f_i - g) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, \mathrm{e}^{2\,i\,\sigma(g,f_i)}\, W(f_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, \chi_g(f_i)\, W(f_i) \\ &= \tau_{\chi_g}(\mathbf{a}) \quad \forall\, \mathbf{a} \in \overline{\Delta(H,\sigma)} \end{aligned} \tag{1.32}$$

Später werden wir die Menge aller Zustände benötigen, momentan spezialisieren wir uns aber auf eine spezielle Klasse von Zuständen, die sogenannten zentralen Zustände.

Dieses sind Zustände, für die gilt:

$$\omega(\mathbf{a} \star \mathbf{b}) = \omega(\mathbf{b} \star \mathbf{a})$$

Einen speziellen zentralen Zustand stellt der bereits eingeführte Zustand ω_0 dar.

Wir stellen jetzt noch eine andere Definition der zentralen Zustände und von ω_0 vor und zeigen, dass diese zu den gegebenen äquivalent sind:

Korollar 1.1.5. *Die zentralen Zustände sind genau die Zustände, die invariant unter den $*$-Automorphismen aus $\overline{K}$ sind.*

Beweis: Wir rechnen die Aussage für endliche Linearkombinationen von Elementen $W(f) \quad f \in H$ unter $*$-Automorphismen $\tau_\chi,\ \chi \in K$ nach. Wegen Satz 1.1.4 bleibt sie auf dem Abschluss erhalten.

“ $\Leftarrow$ “
Sei also ω invariant unter $\tau_\chi \quad \forall\, \chi \in K$.

$$\Leftrightarrow \omega(\tau_{\chi_g}(W(f))) = \omega(W(f)) \quad \forall\, y \in H$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \omega(W(f) \star W(g)) &= \omega(\tau_{\chi_g}(W(f) \star W(g))) \\ &= \omega(W(g) \star (W(f) \star W(g)) \star W(-g)) \\ &= \omega(W(g) \star W(f)) \end{aligned} \tag{1.33}$$

“ $\Rightarrow$ “
Sein nun $f \in H$ und es gelte $\omega(W(f) \star W(g)) = \omega(W(g) \star W(f)) \quad \forall g \in H$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \omega(\tau_{\chi_g}(W(f))) &= \omega(W(g) \star W(f) \star W(-g)) \\ &= \omega(W(g) \star W(-g) \star W(f)) \\ &= \omega(W(f)) \end{aligned} \tag{1.34}$$

□

Korollar 1.1.6. *Der Zustand ω_0 ist dadurch eindeutig festgelegt, dass er invariant unter allen $*$-Automorphismen τ_χ ist:*

Beweis:

$$\begin{aligned} & \omega(\tau_\chi(W(f))) = \omega(W(f)) \quad \forall f \in H,\ \forall \chi \\ \Leftrightarrow\ & \chi(f)\, \omega(W(f)) = \omega(W(f)) \\ \Leftrightarrow\ & \chi(f) = 1\ \forall\, \chi \quad \vee \quad \omega(W(f)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & f = 0 \quad \vee \quad \omega(W(f)) = 0 \end{aligned} \tag{1.35}$$

□

1.2 Die minimale reguläre Norm

Wir verwenden eine Standardprozedur aus [3], um auf der Banachalgebra $\overline{\Delta(H, \sigma)}$[1] eine C^*-Norm einzuführen. Hierzu zunächst ein paar allgemeine Sätze und Definitionen:

Definition 1.2.1. *Sei Ω eine beliebige Menge und sei $x \mapsto \pi^{(\omega)}(x)$ für $\omega \in \Omega$ eine Menge von Darstellungen von einer involutiven Banachalgebra in Räume $\mathcal{H}^{(\omega)}$. Wir müssen voraussetzen, dass gilt:*

$$\|\pi^{(\omega)}(x)\| \leq C_x \tag{1.36}$$

wobei C_x unabhängig von ω ist. Unter der direkten Summe der Räume $\mathcal{H}^{(\omega)}$ verstehen wir dann den Raum $\mathcal{H}$, der die Menge aller Elemente der Form $\xi = \{\xi_\omega | \omega \in \Omega\}$ enthält, so dass

$$\sum_{\omega \in \Omega} \|\xi_\omega\|^2 < \infty \tag{1.37}$$

Wir können dann auf $\mathcal{H}$ einen Operator definieren durch

$$\pi(x)\xi = \{\pi^{(\omega)}(x)\xi_\omega\} \tag{1.38}$$

Wegen (1.36) ist $\pi(x)$ ein beschränkter Operator auf $\mathcal{H}$ und die Abbildung $x \to \pi(x)$ ist eine Darstellung auf $\mathcal{H}$. Wir bezeichnen dann $x \to \pi(x)$ als die direkte Summe der Darstellungen $x \to \pi^{(\omega)}(x)$.

Definition 1.2.2. *Sei A eine involutive Algebra mit Identität e und Norm $\|\cdot\|$. Die Norm $\|\cdot\|$ auf A heißt regulär, wenn jede positive Linearform ρ auf A die Bedingung (1.28) erfüllt.*

Bemerkung 1.2.3. *Normalerweise heißt eine Norm auf einer Algebra regulär, wenn sich jede positive Linearform eindeutig auf den Abschluss der Algebra fortsetzen lässt. Man kann jedoch zeigen, dass diese Definition zu der obigen äquivalent ist.*

Proposition 1.2.4. *Jede Darstellung π einer involutiven Banachalgebra A mit Identität e und regulärer Norm ist stetig, und es gilt*

$$\pi(x) \leq \|x\|$$

Beweis: Sei π eine Darstellung auf $\mathcal{H}$, ξ_0 ein beliebiger Vektor aus $\mathcal{H}$. Dann definiert $\rho(x) = (\pi(x)\,\xi_0, \xi_0)$ ein positives Funktional auf der Banachalgebra. Damit ist ρ insbesondere ein Funktional und aus der Regularität der Norm auf der Banachalgebra folgt:

$$|(\pi(x)\,\xi_0, \xi_0)| = |\rho(x)| \leq \rho(e)\,\|x\| = \|x\|\,(\xi_0, \xi_0) \tag{1.39}$$

Wir ersetzen in (1.39) x durch $x^*\,x$ und erhalten

$$(\pi(x^*\,x)\,\xi_0, \xi_0) \leq \|x^*\,x\|\,(\xi_0, \xi_0) \leq \|x\|^2\,(\xi_0, \xi_0) \tag{1.40}$$

d.h.

$$|\pi(x)\,\xi_0|^2 \leq \|x\|^2\,|\xi_0|^2 \tag{1.41}$$

wobei $|\cdot|$ die Norm auf $\mathcal{H}$ bezeichnet.

Da $\xi_0 \in \mathcal{H}$ beliebig war, folgt aus der letzten Ungleichung, dass

$$\|\pi(x)\| \leq \|x\|, \tag{1.42}$$

wobei $\|\pi(x)\|$ die Operatornorm auf $B(\mathcal{H})$ bezeichnet. □

Bemerkung 1.2.5. *Auf einer involutiven Banachalgebra A mit 1 gilt allgemein für jedes positive Funktional auf A, dass $|\omega(x)| \leq \omega(e)\,\|x\|$. Um hier den Beweis dafür einzusparen, wurde für Propostition 1.2.4 die Regularität der Norm vorausgesetzt, da dies in unserem Fall gegeben ist.*

Definition 1.2.6. *Sei A eine Bachanachalgebra, sei Ω die Menge der Zustände auf A. A heißt reduziert, wenn aus $\omega(x^*\,x) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega$ folgt, dass $x = 0$.*

Wir kommen jetzt zu der Hauptaussage dieses Kapitels:

Satz 1.2.7. *Wenn eine reguläre Norm auf einer reduzierten Algebra A existiert, dann hat A eine minimale reguläre Norm. Die Vervollständigung von A unter der minimalen Norm ist eine C^*-Algebra.*

Beweis: Sei $\|\cdot\|_1$ eine reguläre Norm auf der Algebra A und sei A_1 die Vervollständigung von A unter dieser Norm. Die Regularität der Norm stellt sicher, dass jeder Zustand auf der Algebra A auch ein Zustand auf A_1 ist, ihm entspricht eine GNS Darstellung der Algebra A_1.

Wir bezeichnen diese Darstellung auf $\mathcal{H}^{(\omega)}$ mit $x \to \pi^{(\omega)}(x)$. Weiterhin sei $x \to \pi(x)$ die direkte Summe aller dieser Darstellungen. Proposition 1.2.4 sagt uns jetzt, dass

$$\|\pi(x)\| \leq \|x\|_1 \tag{1.43}$$

gilt, wobei $\|\pi(x)\|$ die Operatornorm auf $\mathcal{H}$ bezeichnet.

Wir zeigen, dass die Darstellung $x \to \pi(x)$ treu ist:
Angenommen es gilt $\pi(x) = 0$, dann gilt auch $\pi(x^* x) = \pi(x^*)\pi(x) = 0$. Also folgt, dass $\pi^{(\omega)}(x^* x) = 0 \quad \forall \omega$. Also gilt $(\pi^{(\omega)}\xi, \eta) = 0 \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}^{(\omega)}$. Wir wissen, dass wir in der GNS Konstruktion zu ω einen Vektor ξ_0 auf $\mathcal{H}^{(\omega)}$ haben, so dass gilt:

$$\omega(x) = (\pi(x)\xi_0, \xi_0) \tag{1.44}$$

Wir setzen also $\xi = \eta = \xi_0$. Wir erhalten dann $\omega(x^* x) = 0$ und da ω beliebig war folgt da A reduziert ist, folgt dass $x = 0$.

Damit ist $x \to \pi(x)$ ein Isomorphismus der Algebra A. Wir können jetzt auf A eine Norm einführen durch

$$\|x\| = \|\pi(x)\| \tag{1.45}$$

also durch die Operatornorm auf $B(\mathcal{H})$. Damit ist A mit der Norm $\|\cdot\|$ isometrisch isomorph zu einer Algebra beschränkter Operatoren eines Hilbertraums und damit ist A eine C^*-Algebra.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die so definierte Norm $\|\cdot\|$ auch regulär ist:
Sei ω ein Zustand auf A, dann gilt für ein beliebiges Element $x \in A$:

$$|\omega(x)| = |(\pi^{(\omega)})(x)\,\xi_0, \xi_0)| \leq \|\pi^{(\omega)}(x)\|\,|\xi_0|^2 = \|x\|\,\omega(e) = \|x\| \tag{1.46}$$

□

Wir beweisen jetzt einen Satz, der es uns erlaubt die abstrakt eingeführte minimale reguläre Norm konkret zu berechnen:

Satz 1.2.8. *Sei $\|\cdot\|$ die minimale reguläre Norm aus Satz 1.2.7 und Ω die Menge aller Zustände auf A, dann gilt:*

$$\|x\| = \sqrt{\sup_{\omega\in\Omega} \omega(x^*x)} \quad \forall x \in A \tag{1.47}$$

Beweis: Sei $x_0 \in A, \quad \omega \in \Omega$ und sei ξ ein Vektor aus dem Hilbertraum $\mathcal{H}^{(\omega)}$ der GNS-Darstellung zu ω. Dann gilt:

$$\|\pi^{(\omega)}(x_0)\|^2 = \sup_{\|\xi\|=1} \|\pi^{(\omega)}(x_0)\,\xi\|^2 = \sup_{\substack{x \in A: \\ \omega(x^* x) = 1}} \omega(x^* x_0^* x_0 x) \tag{1.48}$$

Wir setzen dann $\omega_x(y) = \omega(x^*yx)$, dann ist $\omega(x)$ offensichtlich ein positives Funktional auf A. Da $\omega_x(e) = \omega(x^*x) = 1$ gilt, definiert ω_x einen Zustand auf A. Also definiert die Menge $\Omega_0 = \{\omega_x | x \in A : \omega(x^*x) = 1\}$ eine Teilmenge aller Zustände Ω und es gilt:

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{x \in A: \\ \omega(x^* x) = 1}} \omega(x^* x_0^* x_0 x) &= \sup_{\substack{x \in A: \\ \omega(x^* x) = 1}} \omega_x(x_0^* x_0) \\
&= \sup_{\omega\in\Omega_0} \omega(x_0^* x_0) \\
&\leq \sup_{\omega\in\Omega} \omega(x_0^* x_0)
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Aus den Abschätzungen (1.48) und (1.49) folgt also, dass gilt:

$$\|\pi^{(\omega)}(x_0)\|^2 \leq \sup_{\omega\in\Omega} \omega(x_0^* x_0) \tag{1.50}$$

damit ergibt sich für die direkte Summe der Darstellungen:

$$\|x_0\|^2 = \|\pi(x_0)\|^2 = \sup_{\omega\in\Omega} \|\pi^{(\omega)}(x_0)\|^2 \leq \sup_{\omega\in\Omega} \omega(x_0^* x_0) \tag{1.51}$$

Nun sein ξ_0 der zyklische Vektor zur GNS Darstellung von ω, so dass gilt: $\omega(x) = (\pi(x)\xi_0, \xi_0)$. Dann gilt wegen $\omega(e) = 1$, dass $\|\xi_0\| = 1$ und es folgt:

$$\begin{aligned} \omega(x^*x) &= (\pi(x^*x)\xi_0, \xi_0) = (\pi(x)^*\pi(x)\xi_0, \xi_0) && (1.52)\\ &= \|\pi^{(\omega)}(x)\xi_0\|^2 \leq \|\pi^{(\omega)}(x)\|^2\,\|\xi_0\|^2 && (1.53)\\ &= \|\pi^{(\omega)}(x)\|^2 \leq \|\pi(x)\|^2 = \|x\|^2 && (1.54)\end{aligned}$$

Aus den Abschätzungen (1.51) und (1.54) ergibt sich dann

$$\sup_{\omega\in\Omega} \omega(x_0^* x_0) = \|x_0\|^2 \tag{1.55}$$

□

Korollar 1.2.9. *Wir wissen von* (1.29)*, dass* $\omega_0(\mathbf{a}^* \star \mathbf{a}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} = 0 \;\forall\, \mathbf{a} \in \overline{\Delta(H,\sigma)}^1$*, also ist* $\overline{\Delta(H,\sigma)}^1$ *reduziert.*

Wir wissen aus (1.28)*, dass die Norm* $\|\cdot\|_1$ *regulär ist.*

Also sagt uns Satz 1.2.7, dass wir auf $\overline{\Delta(H,\sigma)}^1$ *die minimale reguläre Norm einführen können, die nach Satz* 1.2.8 *durch*

$$\|\mathbf{a}\| = \sup_{\omega\in\Omega} \sqrt{\omega(\mathbf{a}^\star \star \mathbf{a})} \quad \forall \mathbf{a} \in \overline{\Delta(H,\sigma)}^1 \tag{1.56}$$

bestimmt ist. Wegen (1.43) *gilt dann*

$$\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{a}\|_1 \tag{1.57}$$

Wir bezeichnen mit $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ *den Abschluss von* $\Delta(H,\sigma)$ *oder wahlweise von* $\overline{\Delta(H,\sigma)}^1$ *unter* $\|\cdot\|$.

Gleichung (1.57) *stellt dann in Verbindung mit* (1.28) *sicher, dass sich die linearen positiven Funktionale von* $\Delta(H,\sigma)$ *eindeutig auf* $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ *fortsetzen lassen.*

Die nächste Proposition charakterisiert die Darstellungen von $\overline{\Delta(H,\sigma)}$. Dies wird benötigt um andere C^*-Normen auf $\Delta(H,\sigma)$ zu beschreiben.

Proposition 1.2.10. *Sei U ein Weyl-System, d.h. sei U eine unitäre Abbildung von H in die Gruppe von unitären Operatoren eines Hilbertraums* $\mathcal{H}$*, so dass:*

$$U(f)\,U(g) = \exp(-i\,\hbar\sigma(f,g))\,U(f+g) \tag{1.58}$$

dann gilt:

$$\pi\Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i W(f_i)\Big) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\, U(f_i) \tag{1.59}$$

setzt sich zu einer Darstellung von $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ *fort.*

Beweis: Sei $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N \alpha_i W(f_i) \in \Delta(H,\sigma)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \|\pi(\mathbf{a})\| &= \sup_{\substack{\Psi\in\mathcal{H}\\ \|\Psi\|=1}} \sqrt{(\Psi|\pi(\mathbf{a}^*\mathbf{a})\Psi)} \\ &\leq \sup_{\omega\in\Omega} \sqrt{\omega(\mathbf{a}^*\mathbf{a})} = \|\mathbf{a}\| && (1.60)\end{aligned}$$

□

Wir sind jetzt in der Lage zu beweisen, dass die Norm $\|\cdot\|$ maximal ist, oder präziser, dass gilt:

Korollar 1.2.11. *Sei $\|\cdot\|_0$ eine C^*-Norm auf $\Delta(H,\sigma)$, dann gilt für jedes Element $\mathbf{a} \in \overline{\Delta(H,\sigma)}$:*

$$\|\mathbf{a}\|_0 \leq \|\mathbf{a}\|.$$

Beweis: Sei $\overline{\Delta(H,\sigma)}^0$ der Abschluss von $\Delta(H,\sigma)$ unter $\|\cdot\|_0$. Da die Norm auf einer C^*-Algebra eindeutig bestimmt ist, wissen wir bereits dass $\|\cdot\|_0$ auf dem Abschluss nur eine Halbnorm sein kann. Sei $N = \{\mathbf{a} \in \overline{\Delta(H,\sigma)}^0 \mid \|\mathbf{a}\|_0 = 0\}$, dann ist N ein abgeschlossenes, beidseitiges Ideal in $\overline{\Delta(H,\sigma)}^0$. Der Quotient $\overline{\Delta(H,\sigma)}^0/N$ ist dann eine C^*-Algebra. Als C^*-Algebra besitzt $\overline{\Delta(H,\sigma)}^0/N$ eine isometrische Darstellung π von Operatoren auf einem Hilbertraum. Damit ist aber für $f \in H$ die Abbildung $f \to \pi(W(f))$ ein Weylsystem.

Wir erhalten:

$$\|\mathbf{a}\|_0 = \|\pi(\mathbf{a})\| \overset{(5.31)}{\leq} \|\mathbf{a}\|$$

□

Wir beweisen jetzt ein Lemma, das es uns erlaubt, die C^*-Normen auf $\Delta(H,\sigma)$ mit den Idealen in $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ in Verbindung zu bringen. Hierzu zuerst eine Definition:

Definition 1.2.12. *Sei A eine C^*-Algebra und $\mathcal{N}(A)$ die Menge aller Seminormen auf A. Mit $\mathcal{I}(A)$ bezeichnen wir die Menge der abgeschlossenen beidseitigen Ideal von A. Sei $I \in \mathcal{I}$ und $x \in A$, dann definieren wir $N_I(x)$ als die Norm des kanonischen Bildes von x in A/I.*

Lemma 1.2.13. *Für eine C^*-Algebra A ist die Abbildung $\phi : I \mapsto N_I$ eine bijektive Abbildung von $\mathcal{I}(A)$ nach $\mathcal{N}(A)$.*

Beweis:
(i) ϕ is injektiv:

Durch Widerspruch: Angenommen, es gilt $N_{I_1} = N_{I_2}$ für $I_1 \neq I_2$, dann existiert ein Element $x \in A$, das nur in einem der beiden Ideale enthalten ist. Sei also O.B.d.A. $x \in I_1$ und $x \notin I_2$, dann gilt aber $N_{I_1}(x) = 0$ und $N_{I_2}(x) \neq 0$.
Widerspruch!

(ii) ϕ is surjektiv:

Sei $N \in \mathcal{N}(A)$ eine Seminorm. Wir müssen ein geeignetes Ideal $I \in \mathcal{I}(A)$ finden, so dass $N_I = N$ gilt.
Dafür definieren wir $I = \{x \in A | N(x) = 0\}$ und wir bilden den Quotientenraum A/I. Auf diesem ist N eine C^*-Algebranorm, ebenso wie N_I. Damit müssen also beide Normen auf dem Quotienten übereinstimmen, da die Norm einer C^*-Algebra eindeutig bestimmt ist. Da wir aus A jedoch nur den Nullraum herausgeteilt haben, stimmt die Norm N auf A/I mit der Halbnorm auf A überein. Daraus folgt $N = N_I$, und wir haben das entsprechende Ideal aus $\mathcal{I}(A)$ gefunden. □

Damit ergibt sich jetzt:

Korollar 1.2.14. *Sei $\|\cdot\|_0$ eine C^*-Algebranorm auf $\Delta(H,\sigma)$, dann existiert ein Ideal I in $\overline{\Delta(H,\sigma)}$, so dass gilt:*

$$\overline{\Delta(H,\sigma)}^0 = \overline{\Delta(H,\sigma)}/I$$

Beweis: Der Beweis ergibt sich sofort aus Lemma (1.2.13), denn wenn $\|\cdot\|_0$ eine Norm auf $\Delta(H,\sigma)$ ist, so muss $\|\cdot\|_0$ entweder auf $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ eine Halbnorm sein, die auf einigen Elementen im Abschluss verschwindet, oder aber mit $\|\cdot\|$ übereinstimmen. Also existiert ein eindeutig bestimmtes Ideal I, so dass $\|\cdot\|_0$ mit der Quotientennorm auf $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ übereinstimmt. □

Das nächste Ergebnis wird später von Interesse sein:

Proposition 1.2.15. *Jeder $*$-Automorphismus von $\Delta(H,\sigma)$ setzt sich zu einem $*$-Automorphismus von $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ fort.*

Beweis: Sei ρ ein $*$-Automorphismus auf $\Delta(H,\sigma)$. Wir wissen, dass $\|W(f)\| = 1 \quad \forall f \in H$ gilt, da die Elemente der Form $W(f)$ unitär sind. Wir verwenden, dass $\|\cdot\|$ eine C^*-Norm ist:

$$\begin{aligned} \|\rho(W(f))\|^2 &= \|\rho(W(f))^* \star \rho(W(f))\| \\ &= \|\rho(W(f)^* \star W(f))\| \\ &= \|\rho(W(0))\| = 1 \end{aligned} \tag{1.61}$$

Also ist jeder $*$-Automorphismus ρ auf $\Delta(H,\sigma)$ eine Isometrie und setzt sich stetig auf den Abschluss fort. □

$\overline{\Delta(H,\sigma)}$ ist die C^* Algebra der Weylgruppe mit der diskreten Toplogie, es gibt keinen Zusammenhang zwischen der Topologie von $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ und der von H.
Darauf geht der folgende Satz ein:

Satz 1.2.16. *Sei H' eine echte Untergruppe von H, dann gilt:*

$$\overline{\Delta(H',\sigma)} \not\subseteq \overline{\Delta(H,\sigma)} \tag{1.62}$$

präziser gilt, dass:

$$\|W(f) - \mathbf{a}\| \geq 1, \qquad \forall\, \mathbf{a} \in \overline{\Delta(H',\sigma)} \tag{1.63}$$

wenn $f \in H, \quad f \notin H'$.

Beweis: Für alle $\mathbf{a} \in \Delta(H,\sigma)$ gilt:

$$\|\mathbf{a} - W(f)\|^2 \geq \omega_0((\mathbf{a} - W(f))^* \star (\mathbf{a} - W(f))) \tag{1.64}$$

wobei ω_0 der kanonische zentrale Zustand aus Definition 1.1.3 ist. Dann gilt $\omega_0(\mathbf{a}^* \star \mathbf{a}) \geq 0$. Da $f \notin H'$, gilt außerdem $\omega_0(\mathbf{a}^* \star W(f)) = \omega_0(W(-f) \star \mathbf{a}) = 0$. Damit gilt dann also $\|\mathbf{a} - W(f)\|^2 \geq 1$ und die Aussage folgt aus der Stetigkeit der Abbildung $\mathbf{a} \mapsto \|\mathbf{a} - W(f)\|$. □

Kapitel 2

Der Fockraum

Zunächst wenden wir uns der üblichen Fockraumkonstruktion zu. Diese ist mit Hilfe der GNS-Darstellung von $\mathcal{W}$ unter einem sogenannten quasifreien Zustand definiert.

In der Arbeit [10] findet sich eine mathematisch besonders präzise Einführung zur Fockraumkonstruktion, die wir hier wiedergeben.

In den vorherigen Kapiteln haben wir uns mit den Exponentialen quadratischer Operatoren und deren Produkt mit Elementen aus $\mathcal{W}$ beschäftigt. In diesem Kapitel führen wir nun quadratische Operatoren auf dem Fockraum $\mathcal{F}$ ein und untersuchen die Konvergenz- und Produkteigenschaften auf $\mathcal{F}$. Dazu verwenden wir eine Reihe von Abschätzungen für quadratische Operatoren auf dem Fockraum und deren Exponentialfunktionen, die wir aus [11] zitieren.

2.1 Darstellung von $\mathcal{W}$ auf dem Fockraum

Der folgende Satz beschreibt die Klasse der quasifreien Zustände:

Satz 2.1.1. *Sei (H, σ) ein symplektischer Raum und $\alpha : H \times H \to \mathbb{R}$ eine symmetrische positive Bilinearform, so dass gilt:*

$$\sigma(f,g)^2 \leq \alpha(f,f)\,\alpha(g,g) \quad f,g \in H \tag{2.1}$$

Dann existiert ein Zustand φ auf $\mathcal{W}$, so dass gilt:

$$\omega_\alpha(W(f)) = \exp(-\frac{1}{2}\,\alpha(f,f)) \quad f \in H \tag{2.2}$$

Beweis: Vorerst ohne Beweis □

Zustände der Form (2.2) bezeichnen wir als quasifreie Zustände. Wir bezeichnen den obigen Zustand mit ω_α, um zu verdeutlichen, dass er von der konkreten Wahl von α abhängt.

Wir führen nun eine mit unserer symplektischen Form (1.8) verträgliche Bilinearform ein, so dass die Ungleichung (2.1) erfüllt ist.

Definition 2.1.2. *Wir wählen als geeignete positive Bilinearform α für die folgenden Betrachtungen den symmetrisierten Anteil von Δ_+:*

$$\alpha(f,g) = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, f(x)(\Delta_+(x-y) + \Delta_+(y-x))g(y) \tag{2.3}$$

Wir verwenden jetzt den quasifreien Zustand der Form (2.2), der durch die konkrete Wahl (2.3) unserer Bilinearform α eindeutig festgelegt ist, um mit diesem eine GNS-Konstruktion von $\mathcal{W}$ durchzuführen und untersuchen die Struktur der erhalten Operatoralgebra.

Als ersten Schritt teilen wir $\mathcal{W}$ durch den Entartungsraum der schiefsymmetrischen Bilinearform (1.8). Hierdurch erhalten wir eine Algebra $\tilde{\mathcal{W}}$ über einem symplektischen Raum $\tilde{H}$, dessen symplektische Form σ nicht entartet ist.

Dies tun wir, indem wir folgende Äquivalenzrelation auf $\mathcal{W}$ einführen:

$$W(f) \sim W(g) :\Leftrightarrow \sigma(h, f-g) = 0 \; \forall \, h \in \mathcal{D}(M) \tag{2.4}$$

und schließlich $\tilde{W}$ als Quotientenalgebra definieren:

$$\tilde{\mathcal{W}} := \mathcal{W}/ \sim \tag{2.5}$$

Dies ist äquivalent dazu, die entsprechenden Funktionen auf dem symplektischen Raum (H, σ) zu identifizieren. Dadurch erhalte wir einen symplektischen Raum $(\tilde{H}, \sigma)$ mit einer nichtentarteten symplektischen Form σ. Wir erhalten dann $\tilde{\mathcal{W}}$, indem wir die Weylalgebra über $(\tilde{H}, \sigma)$ bilden.

Wir zitieren nun einen Satz aus [10], der uns erlaubt bei festgelegter symmetrischer Bilinearform α einen komplexen Hilbertraum zu konstruieren:

Proposition 2.1.3. *Sei H ein reeller Vektorraum, auf dem sowohl eine bilineare symplektische Form σ, als auch eine positive symmetrische Bilinearform α definiert sind. Dabei muss α so gewählt sein, dass die Ungleichung* (2.1) *erfüllt ist. Dann lässt sich ein komplexer Hilbertraum $\mathcal{H}$ zusammen mit einer reell-linearen Abbildung $K : H \to \mathcal{H}$ finden, so dass gilt:*

- *das komplexifizierte Bild von H unter K, also die Menge $KH + i\,KH$, ist dicht in $\mathcal{H}$*
- $\alpha(f, g) = Re\langle Kf, Kg\rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \, f, g \in H$
- $\sigma(f, g) = 2Im\langle Kf, Kg\rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \, f, g \in H$

Außerdem ist das Paar $(\mathcal{K}, H)$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt, wobei wir sagen, dass $(K', \mathcal{H}')$ zu $(K, \mathcal{H})$ äquivalent ist, wenn ein Isomorphismus $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ existiert, so dass $UK = K'$ ist.

Sei im Folgenden $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ der symmetrische Fockraum über $\mathcal{H}$ und $a^\dagger(f)$ sowie $a(g)$ die üblichen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf $\mathcal{H}$: $[a(f), a^\dagger(g)] =< f, g >_{\mathcal{H}}$ sowie $a(f)\Omega^{\mathcal{F}} = 0$, wobei $\Omega^{\mathcal{F}}$ das übliche Fockvakuum ist.

Wir definieren dann die folgende Darstellung von $\tilde{\mathcal{W}}$ auf $\mathcal{F}(\mathcal{H})$:

$$\rho_\mu[W(f)] = \exp\{-\overline{[a^\dagger(Kf) - a(Kf)]}\}, \tag{2.6}$$

wobei der Überstrich den Abschluss des obigen Operators bezeichnet. Wir rechnen dann nach:

$$< \Omega^{\mathcal{F}}, \rho_\mu(W(f))\Omega^{\mathcal{F}} >= \omega_\mu(W(f)) \tag{2.7}$$

Das folgende Lemma aus [10] erlaubt es uns nun, die GNS-Darstellung von $\tilde{\mathcal{W}}$ unter dem Zustand (2.2) mit der in Gleichung (2.6) definierten Darstellung auf dem Fockraum zu identifizieren:

Lemma 2.1.4. *Sei (H, σ) ein symplektischer Raum und $\tilde{\mathcal{W}}$ die Weylalgebra über $(\tilde{H}, \sigma)$. Sei ω_μ ein quasifreier Zustand über $\tilde{\mathcal{W}}$ und $(K, \mathcal{H})$ die nach Proposition 2.1.3 gegebene Hilbertraumstruktur. Schließlich sei noch ρ_μ die Darstellung von $\tilde{\mathcal{W}}$ auf dem Fockraum $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, die durch* (2.6) *gegeben ist.*

Dann gilt:

- *$\rho_\mu(\mathcal{W})\Omega^{\mathcal{F}}$ ist dicht in $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ (d.h. $\Omega(\mathcal{F})$ ist zyklisch)*
- *ρ_μ ist genau dann irreduzibel, wenn KH dicht in $\mathcal{H}$ ist.*

Kapitel 3

Das Sternprodukt

Bisher haben wir das Produkt zwischen Elementen der Weylalgebra der Form (1.11) nur abstrakt durch die Formel (1.12) definiert. Wir stellen im Folgenden ein nichtkommutatives Sternprodukt zwischen Funktionalen vor, das zum Beispiel in [4] erwähnt wird.

Das Produkt wird zunächst ganz allgemein für Funktionale mit Hilfe von Funktionalableitungen definiert. Wir rechnen dann nach, dass es im Falle von Exponentialfunktionen linearer Funktionale die Weylrelationen reproduziert, so dass es einen geeigneten Rahmen zur Vergrößerung der Weylalgebra bildet.

3.1 Definition des Sternprodukts

Sei M die vierdimensionale Minkowskiraumzeit. Wir betrachten Funktionale von Feldern $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ der Form

$$\mathrm{F} = \int ... \int \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n \sum_n f_n(x_1, ..., x_n) \cdot \varphi(x_1) \cdot ... \cdot \varphi(x_n), \tag{3.1}$$

wobei $f_n(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D}(\underbrace{M \times ... \times M}_{n-mal})$ gilt.

Wir betrachten erneut die in (1.7) angegebene Kommutatorfunktion und verwenden diese, um ein Produkt zwischen Exponentialen der Form (1.11) zu definieren.

Wir definieren dann ein Sternprodukt von Funktionalen durch:

$$\mathrm{F} \star \mathrm{G} = \sum_n (\frac{i\hbar}{2})^n \frac{1}{n!} \int \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \frac{\delta^n \mathrm{F}}{\delta \varphi^n}(x) \frac{\delta^n \mathrm{G}}{\delta \varphi^n}(y) \prod_{i=1}^{n} \Delta(x_i - y_i) \tag{3.2}$$

Wir machen dann zunächst folgende Beobachtungen:
Sei nun F_1 ein lineares Funktional mit Integralkern in $\mathcal{D}(M)$, das heißt F_1 hat die Form:

$$\mathrm{F}_1 = \int \mathrm{d}x \, f(x) \varphi(x) \tag{3.3}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_1 \star \mathrm{F}_1 &= \int \mathrm{d}x \, f(x)\varphi(x) \star \int \mathrm{d}y \, f(y)\varphi(y) \\ &= \mathrm{F}_1 \cdot \mathrm{F}_1 + \frac{i\hbar}{2} \underbrace{\int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, f(x)\Delta(x-y)f(y)}_{=0,\, da\, \Delta(-x) = -\Delta(x)} \\ &= \mathrm{F}_1 \cdot \mathrm{F}_1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Das Sternprodukt und das punktweise Produkt stimmen also für das Produkt zweier linearer Funktionale überein. Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich nun induktiv, dass auch höhere Potenzen des Sternprodeuktes mit dem punktweisen Produkt übereinstimmen:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{F}_1)^n\mathrm{F}_1 - (\mathrm{F}_1)^n \star \mathrm{F}_1 &= -\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y \frac{\delta(\mathrm{F}_1)^n}{\delta\varphi}(x)\Delta(x-y)f(y) \\
&= -n(\mathrm{F}_1)^{n-1} \underbrace{\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, f(x)\Delta(x-y)f(y)}_{=0} \\
&= 0 \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber auch direkt die Existenz des Sternexponentials linearer Funktionale und wir haben: $\exp_\star(i\,F(\varphi)) = \exp(i\,F(\varphi))$.

3.2 Die Weylrelationen

Wir wollen nun das Sternprodukt von Elementen der Weylalgebra $\mathcal{W}$ berechnen, also das Sternprodukt von den (Stern-)Exponentialen linearer Funktionale. Seien also $F \equiv F(\varphi)$ und $G \equiv G(\varphi)$ zwei lineare Funktionale mit Integralkernen in $\mathcal{D}(M)$. Um das Sternprodukt zu bestimmen berechnen wir zunächst die n-te Funktionalableitung von $\exp(iF)$. Mit der Kettenregel erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \ \exp(iF)}{\delta\varphi}(x) &= i\exp(iF)\,\frac{\delta F}{\delta\varphi}(x) \\
&= i\ \exp(iF)\,f(x) \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Und damit für die n-te Funktionalableitung:

$$\frac{\delta^n\ \exp(iF)}{\delta\varphi^n}(x_1,...,x_n) = i^n\ f(x_1)...f(x_n)\ \exp(iF) \qquad (3.7)$$

Und damit erhalten wir dann für das Sternprodukt von zwei Exponentialen $\exp(iF)$ und $\exp(iG)$:

$$\begin{aligned}
\exp(iF)\star\exp(iG) &= \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{i\hbar}{2})^n\frac{1}{n!}\int\prod_{i=1}^{n} i^{2n}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i f(x_i)g(y_i)\Delta(x_i-y_i)\exp(iF)\cdot\exp(iG) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{i\hbar}{2})^n\frac{1}{n!}(-i\underbrace{\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, f(x)\Delta(x-y)g(y))}_{=\sigma(f,g)}{}^n\exp\left(i(F+G)\right) \\
&= \exp(-\frac{i\hbar}{2}\,\sigma(f,g))\ \exp(i(F+G)) \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Kapitel 4

Das Sternexponential quadratischer Funktionale

Wie wir gesehen haben, wird die Weylalgebra von den Exponentialen linearer Funktionale erzeugt.

Die Motivation für die Rechnungen der nachfolgenden Kapitel liegt in dem Versuch begründet die Weyl-Algebra durch das Hinzufügen neuer Elemente zu vergößern. Da sich die Weylalgebra mit Hilfe von Exponentialfunktionen linearer Funktionale realisieren lässt, sind die naheliegenden Kandidaten dafür die Exponentiale quadratischer Funktionale. Wie wir in (3.4) gezeigt haben, stimmt das punktweise Exponential linearer Funktionale mit dem des Sternexponentials überein. Bei quadratischen Funktionalen ist dies jedoch nicht mehr der Fall. Präzise:
Sei $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{F}_2$, dann verstehen wir unter dem Sternexponential von F_2 den Ausdruck:

$$\exp_\star(i\,\mathrm{F}_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \underbrace{\mathrm{F}_2 \star \mathrm{F}_2 \star ... \star \mathrm{F}_2}_{\textbf{k-mal}} \tag{4.1}$$

Dieses unterscheidet sich zwar von dem punktweisen Exponential, wir entwickeln aber in diesem Kapitel Formeln, die es uns ermöglichen, das Sternexponential in das punktweise Exponential umzurechnen und gleichzeitig Konvergenzaussagen für das Sternexponential zu treffen.

Das Sternexponential ist in unseren Betrachtungen von besonderem Interesse, da wir in den nachfolgenden Kapiteln Produkte zwischen den Exponentialen quadratischer Funktionale mit Elementen der Weylalgebra $\mathcal{W}$, sowie auch Produkte zwischen den quadratischen Exponentialen untereinander bilden wollen. Dabei können wir im Fall des Sternexponentials auf die Baker-Campbell-Hausdorff Formel zurückgreifen.

Ähnliche Berechnungen des Sternexponentials existieren bereits für den quantenmechanischen Fall. Diese wurden bereits 1982 von Bayen und Maillard in [5] publiziert. Allerdings stellt unsere Berechnung eine Verallgemeinerung für den feldtheoretischen Kontext dar.

Wir definieren zunächst:

Definition 4.0.1. *Wir betrachten eine C^∞ Funktion auf $M \times M$ mit kompaktem Träger: $f(x,y) \in \mathcal{D}(M \times M)$. Diese verwenden wir, um zu definieren was wir unter einem quadratischen Funktional F_2 verstehen:*

$$\begin{aligned} F_2 : C^\infty(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, f(x,y)\varphi(x)\varphi(y) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Menge aller quadratischen Funktionale bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_2$.

Klar ist zunächst, dass sich das Sternexponential als formale Potenzreihe angeben lässt. Im folgenden werden wir zunächst das Sternexponential $\exp_\star(i\mathrm{F}_2)$ auf Konvergenz untersuchen. Wir werden auch eine Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{F}_2 &\rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathcal{F}_2 \\ \alpha(f) &\mapsto (\alpha_1(f), \alpha_2(f)) \qquad \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathcal{F}_2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

angeben, die es uns erlaubt, dem Integralkern f des quadratischen Funktionals F_2 eine Funktion aus $\mathcal{F}_2$ und eine reelle Konstante zuzuordnen, so dass gilt:

$$\exp_\star(i\mathrm{F}_2) = \exp(\alpha_1(f)) \cdot \exp(\alpha_2(f)) \tag{4.4}$$

.

Einige weitere Definitionen werden zum Verständnis der zentralen Aussage dieses Abschnitts benötigt:

Definition 4.0.2. *Wir definieren Funktionen* P_f^n *für* $n \in \mathbb{N}$ *durch:*

$$\mathrm{P}_f = f(x,y) \quad \textit{für}\, n = 1 \tag{4.5}$$

sowie

$$(\mathrm{P}_f)^n = \int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}y_{n-1}\, f(x,x_1)\Delta(x_1-y_1)\cdots f(y_{n-2},x_{n-1})\Delta(x_{n-1}-y_{n-1})f(y_{n-1},y) \tag{4.6}$$

Wir können $(\mathrm{P}_f)^n \in \mathcal{D}(M \times M)$ *als Integralkern eines quadratischen Funktionals auffassen. Das zugehörige quadratische Funktional schreiben wir dann kurz als:*

$$\varphi(\mathrm{P}_f)^n\varphi \in \mathcal{F}_2 \tag{4.7}$$

Darüberhinaus werden wir noch die folgende Abbildung benötigen:

Definition 4.0.3. *Wir definieren* Tr_Δ *durch:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_\Delta \quad : \quad & \mathcal{D}(\mathrm{M} \times \mathrm{M}) \rightarrow \mathbb{R} \\ & f(x,y) \mapsto \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, \Delta(x-y) f(x,y) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Wir beweisen dann im Folgenden:

Satz 4.0.4. *Das Sternexponential* $\exp_\star(i\,F_2)$ *eines quadratischen Funktionals hat die Form:*

$$\exp_\star(i\,F_2) = \exp(c) \cdot \exp(i\,\mathrm{M}_2) \tag{4.9}$$

mit

$$\mathrm{M}_2 = \hbar^{-1}\, \tanh(\hbar\,\mathrm{P}_f) \tag{4.10}$$

sowie

$$c(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_\Delta(\ln(\cosh(t\,\hbar\mathrm{P}_f))) \tag{4.11}$$

Dabei wird der Tangens von P_f *durch das Einsetzen von* P_f *in die Potenzreihenentwicklung des Tangens gebildet.*

4.1 Zur Berechnung des Sternexponentials

Die direkte Berechnung des k-fachen Produktes hat sich als kompliziert herausgestellt. Einfacher ist es, eine Differentialgleichung für den Ausdruck $\exp_\star(i\,t \cdot \mathrm{F}_2)$ aufzustellen, diese zu lösen und dann die Lösung an der Stelle t=1 auszuwerten.

Wir machen dafür den Ansatz:

$$\exp_\star(i\,t \cdot \mathrm{F}_2) = \exp(i\,\Lambda_2(t)) \tag{4.12}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\partial_t\ \exp_\star(t \cdot i\,\mathrm{F}_2) &= i\,\mathrm{F}_2 \star \exp_\star(t \cdot i\,\mathrm{F}_2)\\ &= i\,\mathrm{F}_2 \star \exp(i\,\Lambda_2(t))\end{aligned} \tag{4.13}$$

Wir bezeichnen für Funktionale M mit $\mathrm{M}^{(n)}$ die n-te Funktionalableitung von M:

$$\mathrm{M}^{(n)} = \frac{\delta^n\,\mathrm{M}}{\delta^n\,\varphi}(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{4.14}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}&i\,\mathrm{F}_2 \star \exp(i\,\Lambda_2(t))\\ =\ & i\,[(\mathrm{F}_2 \cdot \exp(\Lambda_2(t)) + (\frac{i\,\hbar}{2})\ < \mathrm{F}_2^{(1)}, \Delta\,(i\,\Lambda_2^{(1)}) > \cdot \exp(i\Lambda_2(t))\\ &+(\frac{i\,\hbar}{2})^2\,\frac{1}{2}\ < \mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes\,2}(i\,\Lambda^{(2)} + i\,\Lambda^{(1)} \otimes i\,\Lambda^{(1)}) > \cdot \exp(i\Lambda_2(t))] \qquad (4.15)\\ \stackrel{!}{=}\ & i\,\partial_t(\Lambda_2)(t) \cdot \exp(i\Lambda_2(t)) \qquad (4.16)\end{aligned}$$

Also erhalten wir die Differentialgleichung:

$$\partial_t(\Lambda_2(t)) = \mathrm{F}_2 - \frac{\hbar}{2}\,\langle \mathrm{F}_2^{(1)}, \Delta\,\Lambda_2^{(1)}\rangle - \frac{\hbar^2}{8}\,\langle \mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes\,2}(i\,\Lambda^{(2)} + i\,\Lambda^{(1)} \otimes i\,\Lambda^{(1)})\rangle \tag{4.17}$$

Bilden wir das Sternprodukt zwischen zwei quadratischen Funktionalen, so erhalten wir erneut ein quadratisches Funktional sowie eine zusätzliche Konstante. Das Sternprodukt einer Konstanten mit einem quadratischen Funktional stimmt mit dem punktweisen Produkt überein, ergibt also erneut ein quadratisches Funktional. Es liegt daher nahe zu vermuten, dass es sich bei $\Lambda_2(t)$ um ein quadratisches Funktional und eine zusätzliche additive Konstante handeln wird.

Wir machen daher den Ansatz:

$$\Lambda_2(t) = -i\,c(t) + \mathrm{M}_2(t) \tag{4.18}$$

Einsetzen des Ansatzes in (4.17) ergibt:

$$\begin{aligned}&\partial_t(-i\,c(t) + \mathrm{M}_2(t))\\ =\ & \mathrm{F}_2 - \frac{\hbar}{2}\,\langle \mathrm{F}_2^{(1)}, \Delta(\mathrm{M}_2(t)^{(1)})\rangle - \frac{\hbar^2}{8}\,\langle \mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes\,2}(i\mathrm{M}_2(t)^{(2)} - \mathrm{M}_2(t)^{(1)} \otimes \mathrm{M}_2(t)^{(1)})\rangle\end{aligned} \tag{4.19}$$

Wir können nun (4.19) umsortieren in Ausdrücke die Konstanten ergeben sowie in solche, durch die wir erneut ein quadratisches Funktional bekommen.

Wir erhalten dadurch zwei getrennte Differentialgleichungen für $c(t)$ und $\mathrm{M}_2(t)$:

Für $\mathrm{M}_2(t)$ erhalten wir die DGL:

$$\partial_t(\mathrm{M}_2(t)) = \mathrm{F}_2 - \frac{\hbar}{2}\,\langle \mathrm{F}^{(1)}, \Delta\,(\mathrm{M}_2(t)^{(1)})\rangle + \frac{\hbar^2}{8}\,\langle \mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes\,2}(\mathrm{M}_2(t)^{(1)} \otimes \mathrm{M}_2(t)^{(1)})\rangle \tag{4.20}$$

und für $c(t)$:

$$\partial_t(c(t)) = -\frac{\hbar^2}{8}\,\langle \mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes\,2}(\mathrm{M}_2(t)^{(2)})\rangle \tag{4.21}$$

4.1.1 Die Berechnung von M_2

Da es sich hierbei um eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in t handelt, können wir einen Potenzreihenansatz machen und die Koeffizienten mit Hilfe von (4.20) rekursiv bestimmen.

Wir bezeichnen die n-te Ableitung von $\mathrm{M}_2(t)$ in t mit $\overset{[n]}{\mathrm{M}_2}(t)$.

Wir berechnen die ersten Koeffizienten der Potenzreihe. Zunächst gilt $\Lambda_2(0) = 0$. Wir erhalten also aus (4.20):

$$\overset{[1]}{\mathrm{M}_2}(0) = \mathrm{F}_2 = \mathrm{P}_f \tag{4.22}$$

Differenzieren beider Seiten von (4.20) ergibt die zweite Zeitableitung in t. Der Term $\langle \mathrm{F}_2^{(1)}, \Delta\,(\overset{[1]}{\mathrm{M}_\varphi}(0)^{(1)})\rangle = \langle \mathrm{F}_2^{(1)}, \Delta\,\mathrm{F}_2^{(1)}\rangle$ verschwindet aufgrund der Antisymmetrie des Δ, ebenso verschwindet der Ausdruck $\partial_t(\langle \mathrm{F}^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}(\mathrm{M}_2(t)^{(1)} \otimes \mathrm{M}_2(t)^{(1)})\rangle)|_{t=0}$, hier aufgrund der Produktregel.

Analog werden die nächsthöheren Terme berechnet und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\overset{[2]}{\mathrm{M}_2}(0) &= 0\\
\overset{[3]}{\mathrm{M}_2}(0) &= -2\,\hbar^2(\mathrm{P}_f)^3\\
\overset{[4]}{\mathrm{M}_2}(0) &= 0\\
\overset{[5]}{\mathrm{M}_2}(0) &= 16\,\hbar^4(\mathrm{P}_f)^5\\
\overset{[6]}{\mathrm{M}_2}(0) &= 0
\end{aligned}$$

Setzen wir diese Resultate in die Potenzreihenentwicklung von $\mathrm{M}_2(t)$ ein, so erhalten wir:

$$\mathrm{M}_2(t) = t\,\mathrm{P}_f - \frac{1}{3}\,t^2\,\hbar^2\,(\mathrm{P}_f)^3 + \frac{2}{15}\,t^5\,\hbar^4\,(\mathrm{P}_f)^5 + o(t^7) \tag{4.23}$$

Der Anfang der Potenzreihenentwicklung von M_2 stimmt also mit der des Tangens Hyperbolicus überein. Daher liegt es nahe, als Lösungsansatz die entsprechende Potenzreihenentwicklung des Tangens Hyperbolicus zu verwenden.

Wir wenden uns daher als nächstes dem Beweis von Aussage 4.0.4 zu:

Beweis: Wir nehmen also an, dass

$$\mathrm{M}_2(t) = \hbar^{-1}\,\tanh(t\,\hbar\,\mathrm{P}_f) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n\,t^{2n-1}\hbar^{2n-2}\,(\mathrm{P}_f)^{2n-1} \tag{4.24}$$

gilt und zeigen, dass dieses die Gleichung (4.20) löst.

Wir beginnen damit, die auf der rechten Seite von Gleichung (4.20) auftretenden Ausdrücke zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{F}^{(1)}, \Delta\,(\mathrm{M}_2(t)^{(1)})\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,t^{2n-1}\hbar^{2n-2}\qquad \underbrace{(\mathrm{P}_f)^{2n}}_{=0,\text{ da }\Delta(-x)=-\Delta(x)}\\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Wir wenden uns dem nächsten Ausdruck zu:

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathrm{F}^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}(\mathrm{M}_2(t)^{(1)} \otimes \mathrm{M}_2(t)^{(1)})\rangle \\
=\ &\langle \mathrm{P}_f, \Delta^{\otimes 2}((\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\alpha_m\,\hbar^{2m-2}\,\varphi(\mathrm{P}_f)^{2m-1}\varphi)^{(1)} \otimes (\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n\,\hbar^{2n-2}\,(\mathrm{P}_f)^{2n-1})^{(1)})\rangle \\
=\ &4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\alpha_m\,\hbar^{2m-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n\,\hbar^{2n-2}\,\langle \mathrm{P}_f, \Delta^{\otimes 2}((\mathrm{P}_f)^{2m-1}\varphi) \otimes ((\mathrm{P}_f)^{2n-1}\varphi)\rangle \\
=\ &-4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\alpha_m\,\hbar^{2m-2}\,\mathrm{P}_f^{2m}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n\,\hbar^{2n-2}\,\varphi\mathrm{P}_f^{2n-1}\varphi
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

An dieser Stelle verwenden wir die folgende Cauchy-Produktformel zum Umsortieren der Reihen:

$$
(\sum_{m=1}^{\infty} a_m)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{mit } c_n = \sum_{m=1}^{n} a_{n-m+1}b_m \tag{4.27}
$$

Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{F}^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}(\mathrm{M}_2(t)^{(1)} \otimes \mathrm{M}_2(t)^{(1)})\rangle &= -4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\alpha_{n-m+1}\,\hbar^{2n-2m}\,\mathrm{P}_f^{2n-2m+2}\alpha_m\,\hbar^{2m-2}\,\mathrm{P}_f^{2m-1} \\
&= -4\sum_{n=1}^{\infty}\hbar^{2n-2}\,\mathrm{P}_f^{2n+1}\sum_{m=1}^{n}\alpha_{n-m+1}\,\alpha_m \\
&= -4\sum_{n=2}^{\infty}\hbar^{2n-4}\,\mathrm{P}_f^{2n-1}\sum_{m=1}^{n-1}\alpha_{n-m}\,\alpha_m
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

An dieser Stelle verwenden wir die Identität

$$
\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_{n-k}\alpha_k = (2n-1)\alpha_n \tag{4.29}
$$

und erhalten damit den Ausdruck:

$$
\langle \mathrm{F}^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}(\mathrm{M}_2(t)^{(1)} \otimes \mathrm{M}_2(t)^{(1)})\rangle = -4\sum_{n=2}^{\infty}(2n-1)\alpha_n\hbar^{2n-4}\,\mathrm{P}_f^{2n-1} \tag{4.30}
$$

Verwenden wir nun den für $\langle \mathrm{F}^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}(\mathrm{M}_2(t)^{(1)} \otimes \mathrm{M}_2(t)^{(1)})\rangle$ berechneten Ausdruck, so lautet die rechte Seite von (4.20):

$$
(2n-1)\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,t^{2n-2}\hbar^{2n-2}\,\mathrm{P}_f^{2n-1} \tag{4.31}
$$

Dies entspricht tatsächlich gerade der Zeitableitung des Ausdruckes (4.24), womit gezeigt ist dass dieser die Differentialgleichung (4.20) löst. □

4.1.2 Die Berechnung von c

Die Lösung der Gleichung (4.21) gestaltet sich einfach. Die rechte Seite der Gleichung stellt eine Funktion in t dar. Da diese Seite der Gleichung kein $c(t)$ oder dessen Ableitungen enthält, handelt es sich bei der Lösung um die Stammfunktion dieser Funktion. Wir berechnen also zunächst die rechte Seite von (4.21):

$$\begin{aligned}
\partial_t(c(t)) &= -\frac{\hbar^2}{8}\,\langle \mathrm{F}^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}(\mathrm{M}_2(t))^{(2)}\rangle \\
&= -\frac{\hbar^2}{8}\,\langle \mathrm{F}^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}((\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n\, t^{2n-1}\hbar^{2n-2}\,(\varphi \mathrm{P}_f\varphi)^{2n-1})^{(2)})\rangle \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n\, t^{2n+1}\hbar^{2n-2}\,\frac{1}{2}\,\langle \mathrm{P}_f, \Delta^{\otimes 2}(\mathrm{P}_f)^{2n-1}\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n\, t^{2n-1}\hbar^{2n}\,\mathrm{Tr}_\Delta((P_f)^{2n}) \qquad (4.32)
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung $c(0) = 0$ erhalten wir damit als Potenzreihe für $c(t)$ den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
c(t) &= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\,(-1)^{n-1}\alpha_n\, t^{2n}\hbar^{2n}\,\mathrm{Tr}_\Delta((P_f)^{2n}) \\
&= -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}_\Delta(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\,(-1)^{n-1}\alpha_n\, t^{2n}\hbar^{2n}\,(P_f)^{2n}) \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

Bei der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\,(-1)^{n-1}\alpha_n\, t^{2n}$ handelt es sich um die Reihenentwicklung der Stammfunktion von $\tanh(t)$, also um die Potenzreihenentwicklung der Funktion $\ln(\cosh(t))$.

Damit erhalten wir als Lösung von $c(t)$:

$$c(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_\Delta(\ln(\cosh(t\,\hbar \mathrm{P}_f))) \qquad (4.34)$$

Schließlich definieren wir dann $c := c(1)$.

4.2 Konvergenz des Sternexponentials quadratischer Funktionale

4.2.1 Zur Konvergenzuntersuchung von M_2

Wir wollen untersuchen, unter welcher Bedingung $\mathrm{M}_2 := \mathrm{M}_2(1)$ bezüglich der sup-Norm konvergiert. Wir betrachte dazu $(\mathrm{P}_f)^{2n+1}$. Es handelt sich dabei um den Integralkern eines quadratischen Funktionals, also um eine Funktion aus $\mathcal{D}(M \times M)$.

Wir beweisen nun zunächst eine Abschätzung für dessen sup-Norm:

Korollar 4.2.1. *Für eine geignet gewählte Konstante C_f, die von der Wahl von f abhängt, gilt:*

$$||\mathrm{P}_f^{2n+1}||_\infty \leq (\mathrm{C}_f)^{2n}\cdot ||f||_\infty \qquad (4.35)$$

Beweis:
Wir wissen, dass $f \in \mathcal{D}(M \times M)$ und $\Delta \in \mathcal{D}'(M)$ gilt. Das Faltungsintegral

$$(f(x,\cdot) \star \Delta)(y) = \int \mathrm{d}x_1\, f(x, x_1)\,\Delta(x_1 - y) \qquad (4.36)$$

ist also wohldefiniert und es gilt $(f(x,\cdot) \star \Delta)(y) \in \mathcal{C}^\infty(M \times M)$. Wir wählen K_f als kompakte Menge, so dass gilt: $\mathrm{supp} f \subseteq \mathrm{K}_f \times \mathrm{K}_f$.

Es ist nicht klar, dass (4.36) weiterhin einen kompakten Träger hat. Jedoch macht es in der Definition von P_f^n keinen Unterschied, ob wir jeweils über den gesamten Minkowskiraum integrieren oder nur über den Bereich K_f. Wir wählen daher eine Abschneidefunktion $\lambda_{\mathrm{K}_f} \in \mathcal{D}(M)$, für die $\lambda(x) = 1$ gilt für $x \in \mathrm{K}_f$ und die außerhalb von K_f schnell gegen Null strebt.

Wir definieren dann $\tilde{f}$ durch:

$$\tilde{f} = \lambda_{\mathrm{K}_f}(y) \cdot (f(x,\cdot) \star \Delta)(y) \tag{4.37}$$

Es ist klar, dass dann $\tilde{f} \in \mathcal{D}(M \times M)$ gilt und damit auch die sup-Norm von $\tilde{f}$ endlich ist.
Sei $\mu(\mathrm{K}_f)$ das Maß von K_f.

Wir defnieren jetzt C_f als:

$$\mathrm{C}_f = \mu(\mathrm{K}_f) \cdot ||\tilde{f}||_\infty, \tag{4.38}$$

dann gilt für P_f^{2n+1}:

$$\begin{aligned}
||\mathrm{P}_f^{2n+1}||_\infty &= ||\int ... \int \mathrm{d}x_1 \cdot ... \cdot \mathrm{d}x_{2n}\, \mathrm{d}y_1 \cdot ... \cdot \mathrm{d}y_{2n}\, f(x,x_1)\Delta(x_1-y_1)f(y_1,x_2)\cdot \\
&\quad \cdot\Delta(x_2-y_2)f(y_2,x_3)... \cdot \Delta(x_{2n}-y_{2n})f(y_{2n},y)||_\infty \\
&= ||\int ... \int \mathrm{d}y_1 \cdot ... \cdot \mathrm{d}y_{2n}\, \tilde{f}(x,y_1)\tilde{f}(y_1,y_2)\cdot \\
&\quad \cdot\tilde{f}(y_2,y_3)... \cdot \tilde{f}(y_{2n-1},y_{2n})\, f(y_{2n},y)||_\infty \\
&\leq \int_{\mathrm{K_f}} ... \int_{\mathrm{K}_f} \mathrm{d}y_1 \cdot ... \cdot \mathrm{d}y_n\, \underbrace{||\tilde{f}||_\infty||\tilde{f}||_\infty||\tilde{f}||_\infty \cdot ... \cdot ||\tilde{f}||_\infty}_{\text{2n mal}}\, ||f||_\infty \\
&= (\mu(\mathrm{K}_f))^{2n} \cdot (||\tilde{f}||_\infty)^{2n} \cdot ||f||_\infty = (\mathrm{C}_f)^{2n} \cdot ||f||_\infty
\end{aligned} \tag{4.39}$$

□

Damit wäre dann aber auch die Frage der Konvergenz von M_2 geklärt, denn nach Satz 6.6 gilt:

Satz 4.2.2. *Sei $f \in \mathcal{D}(M \times M)$ und C_f definiert wie in (4.38), dann konvergiert M_2 bezüglich der sup-Norm gegen ein quadratisches Funktional, wenn für C_f gilt:*

$$\mathrm{C}_f < \frac{\pi}{2 \cdot \hbar} \tag{4.40}$$

Beweis:
Zunächst einmal wissen wir, dass M_2 die folgende Form hat:

$$\mathrm{M}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, \hbar^{2n-2}\, \varphi(\mathrm{P}_f)^{2n-1}\varphi$$

Wir bezeichnen nun den Integralkern des quadratischen Funktionals M_2 mit $m(x,y)$, dann gilt:

$$m(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\alpha_n\, \hbar^{2n-2}\, \mathrm{P}_f^{2n-1}(x,y), \tag{4.41}$$

und wir können mit Hilfe von Korollar 4.2.1 eine Abschätzung für die sup-Norm von m_φ gewinnen:

$$\begin{aligned}
||m||_\infty &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, \hbar^{2n-2}\, ||\mathrm{P}_f^{2n-1}||_\infty \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, \hbar^{2n-2}\, (\mathrm{C}_f)^{2n-2} \cdot ||f||_\infty \\
&= \frac{1}{\hbar \cdot \mathrm{C}_f} \cdot ||f||_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, \hbar^{2n-1}\, (\mathrm{C}_f)^{2n-1} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\hbar\cdot\mathrm{C}_f}\, \tan(\hbar \cdot \mathrm{C}_f) < \infty & \text{für } \hbar \cdot \mathrm{C}_f < \frac{\pi}{2} \\ \infty & \text{für } \hbar \cdot \mathrm{C}_f \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

□

4.2.2 Zur Konvergenz von c

Wir haben in Abschnitt 4.1.2 die Funktion $c(t)$ berechnet und daraus $c = c(1)$ definiert. Diese bildet sich durch Aufsummation der Konstanten $\mathrm{Tr}_\Delta((\mathrm{P}_f)^{2n})$.

Wir verwenden die Definition von $\tilde{f}$ aus Abschnitt 4.2.1:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_\Delta((\mathrm{P}_f)^{2n}) &= \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}y_n\, \Delta(x-y) f(x,x_1)\Delta(x_1-y_1)\cdots f(y_{2n-1},y) \\
&= -\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}y_n\, (f(x,\cdot)*\Delta)(y_1)(f(y_1,\cdot)*\Delta)(y_2)\cdots(f(y_{2n-1},\cdot)*\Delta)(x) \\
&= -\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}y_n\, \tilde{f}(x,y_1)\tilde{f}(y_1,y_2)\cdots\tilde{f}(y_{n-1},y)) \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

Daher können wir analog zu obigen Betrachtungen eine Abschätzung für $|\mathrm{Tr}_\Delta((\mathrm{P}_f)^{2n})|$ gewinnen:

$$|\mathrm{Tr}_\Delta((\mathrm{P}_f)^{2n})| \leq (\mathrm{C}_f)^{2n} \qquad (4.44)$$

Daher erhalten wir als Konvergenzbedingung für die Reihenentwicklung von c erneut:

$$\mathrm{C}_f < \frac{\pi}{2\cdot\hbar} \qquad (4.45)$$

4.3 Verallgemeinertes Sternexponential

Bisher haben wir das Sternexponential quadratischer Funktionale explizit berechnet. Nun wenden wir uns dem allgemeineren Problem zu, Sternexponentiale der folgenden Form zu berechnen:

$$\exp_\star(i(\mathrm{F}_2+\mathrm{J}_1)) \qquad (4.46)$$

Dabei ist $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{F}_2$ und J_1 ein lineares Funktional in $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$.
Wir machen dazu einen Ansatz bei dem wir das bereits berechnete $\Lambda_2(t)$ verwenden, welches die Gleichung $\exp_\star(i\,t\cdot\mathrm{F}_2) = \exp(i\,\Lambda_2(t))$ löst:

$$\exp_\star(i\,t\,(\mathrm{F}_2+\mathrm{J}_1)) = \exp(i\,(\Lambda_2(t)+\kappa_1(t)+\tilde{c}(t))), \qquad (4.47)$$

wobei $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ und $\kappa_1 \in \mathcal{W}$ ist.

Im Folgenden schreiben wir die Zeitabhängigkeit von Λ_2, $\kappa_1, \tilde{c}$ in der Variablen t nicht mehr immer explizit aus, um das Formelbild zu vereinfachen.

Durch das Differenzieren beider Seiten der DGL (4.47) erhalten wir daher die Gleichung:

$$(\mathrm{F}_2+\mathrm{J}_1)\star\exp(i\,(\Lambda_2+\kappa_1+\tilde{c})) = \partial_t(\Lambda_2+\kappa_1+\tilde{c})\exp(i\,(\Lambda_2+\kappa_1+\tilde{c})) \qquad (4.48)$$

Zunächst berechnen wir den Ausdruck $(\mathrm{F}_2+\mathrm{J}_1)\star\exp(i\,(\Lambda_2+\kappa_1))$, wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{F}_2+\mathrm{J}_1)\cdot\exp(i\,(\Lambda_2+\kappa_1+\tilde{c})) + (\frac{i\hbar}{2})\langle(\mathrm{F}_2+\mathrm{J}_1)^{(1)},\Delta\, i\,(\Lambda_2+\kappa_1)^{(1)}\rangle\exp(i(\Lambda_2+\kappa_1+\tilde{c})) + \\
&+(\frac{i\hbar}{2})^2\frac{1}{2}\langle(\mathrm{F}_2+\mathrm{J}_1)^{(2)},\Delta^{\otimes 2} i\,(\Lambda_2+\kappa_1(t))^{(2)}\rangle\cdot\exp(i(\lambda_\varphi+\kappa_1+\tilde{c})) + \\
&+(\frac{i\hbar}{2})^2\frac{1}{2}\langle(\mathrm{F}_2+\mathrm{J}_1)^{(2)},\Delta^{\otimes 2} i\,(\Lambda_2+\kappa_1)^{(1)}\otimes i\,(\Lambda_2+\kappa_1)^{(1)}\rangle\exp(i(\Lambda_2+\kappa_1+\tilde{c})) \qquad (4.49)
\end{aligned}$$

Wir teilen jetzt zunächst beide Seiten der Gleichung (4.48) durch $\exp(i(\Lambda_2+\kappa_1+\tilde{c}))$ und berücksichtigen, dass die zweiten Funktionalableitungen linearer Funktionale verschwinden.

Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\partial_t\Lambda_2 + \partial_t\kappa_1 + \partial_t(\tilde{c}) \\
= \;& \mathrm{J}_1 - \frac{\hbar}{2}(\langle(\mathrm{F}_2^{(1)}, \Delta\kappa_1^{(1)}\rangle + \langle(\mathrm{J}_1)^{(1)}, \Delta(\Lambda_2+\kappa_1)^{(1)}\rangle) \\
&+\frac{\hbar^2}{8}\langle\mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}(\Lambda_2+\kappa_1)^{(1)}\otimes(\Lambda_2+\kappa_1)^{(1)}\rangle + \\
&+\underbrace{\mathrm{F}_2 - \frac{\hbar}{2}\langle(\mathrm{F}_2)^{(1)}, \Delta\Lambda_2^{(1)}\rangle + \frac{\hbar^2}{8}(-i\,\langle\mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}\Lambda_2^{(2)}\rangle + \langle\mathrm{F}_2^{(2)}\Delta^{\otimes 2}\Lambda_2^{(1)}\otimes\Lambda_2^{(1)}\rangle}_{=\partial_t\Lambda_2 \text{ nach } (4.17)}
\end{aligned}$$

Subtrahieren der nach (4.17) identischen Terme auf beiden Seiten liefert folgende DGL:

$$\begin{aligned}
\partial_t(\kappa_1) + \partial_t(\tilde{c}) \;=\;& \mathrm{J}_1 - \frac{\hbar}{2}\langle(\mathrm{F}_2, \Delta\kappa_1^{(1)}\rangle - \frac{\hbar}{2}\langle(\mathrm{J}_1)^{(1)}, \Delta(\Lambda_2+\kappa_1)^{(1)}\rangle \\
&+(\frac{\hbar^2}{8})\langle\mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}(\Lambda_2+\kappa_1)^{(1)}\otimes(\Lambda_2+\kappa_1)^{(1)}\rangle
\end{aligned}$$

Bilden wir die Kontraktion zweier Funktionalableitungen linearer Funktionale mit Δ, so erhalten wir eine Konstante. Die Kontraktion eines linearen Funktionals mit einem quadratischen ergibt erneut ein lineares Funktional. Wir berücksichtigen dies, um getrennte Differentialgleichungen für $\kappa_1(t)$ und $\tilde{c}(t)$ aufstellen zu können.

Als DGL für $\kappa_1(t)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\partial_t\kappa_1 \;=\;& \mathrm{J}_1 - \frac{\hbar}{2}\langle\mathrm{F}_2^{(1)}, \Delta\kappa_1^{(1)}\rangle - \frac{\hbar}{2}\langle(\mathrm{J}_1)^{(1)}, \Delta\Lambda_2^{(1)}\rangle + (\frac{\hbar^2}{8})\langle\mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}\Lambda_2^{(1)}\otimes\kappa_1^{(1)}\rangle + \\
&+(\frac{\hbar^2}{8})\langle\mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}\kappa_1^{(1)}\otimes\Lambda_2^{(1)}\rangle
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Die letzten beiden Terme in der obigen DGL stimmen überein, da die zweite Funktionalableitung von F_2 symmetrisch in beiden Variablen ist. Damit erhalten wir:

$$\partial_t\kappa_1 = \mathrm{J}_1 - \frac{\hbar}{2}\langle(\mathrm{F}_2^{(1)}, \Delta\kappa_1^{(1)}\rangle - \frac{\hbar}{2}\langle(\mathrm{J}_1)^{(1)}, \Delta\Lambda_2^{(1)}\rangle + (\frac{\hbar^2}{4})\langle\mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}\kappa_1^{(1)}\otimes\Lambda_2^{(1)}\rangle \tag{4.51}$$

Schließlich erhalten wir noch als DGL für $\tilde{c}(t)$:

$$\partial_t(\tilde{c}) \;=\; -\frac{\hbar}{2}\langle(\mathrm{J}_1)^{(1)}, \Delta\kappa_1^{(1)}\rangle + \frac{\hbar^2}{8}\langle\mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}\kappa_1^{(1)}\otimes\kappa_1^{(1)}\rangle \tag{4.52}$$

4.3.1 Form und Konvergenz von κ_1

Wir wenden uns nun der Lösung der Gleichung (4.51) zu. Da $\exp(0) = \exp_\star(0) = 1$ ist, gilt $\kappa_1(0) = 0$. Wir können aus (4.51) direkt $\partial_t\kappa_1(0)$ ablesen. Wenn wir berücksichtigen dass $\kappa_1(0) = 0$ und $\Lambda_2(0) = 0$ gilt, und dass damit auch deren Funktionalableitungen verschwinden, so erhalten wir:

$$\partial_t\kappa_1(0) = \mathrm{J}_1 \tag{4.53}$$

Wir bestimmen zunächst noch die zweite Zeitableitung in t. Der Term $\langle\mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}\kappa_1^{(1)}\otimes\Lambda_2^{(1)}\rangle$ wird nach der Produktregel berechnet und liefert ebenfalls keinen Beitrag, J_1 entfällt, da es konstant ist.

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\overset{[2]}{\kappa_1}(0) \;&=\; -\frac{\hbar}{2}\langle(\mathrm{F}_2^{(1)}, \Delta\,\overset{[1]}{\kappa_1}{}^{(1)}(0)\rangle - \frac{\hbar}{2}\langle(\mathrm{J}_1)^{(1)}, \Delta\partial[1]\Lambda_2{}^{(1)}(0)\rangle \\
&=\; -\frac{\hbar}{2}\,(\langle(\mathrm{F}_2^{(1)}, \Delta(\mathrm{J}_1)^{(1)}(0)\rangle + \langle(\mathrm{J}_1)^{(1)}, \Delta\mathrm{F}_2^{(1)}\rangle)
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Wir erinnern uns an die Antisymmetrie von Δ. Diese führt dazu, dass sich die beiden obigen Terme gegenseitig wegheben.

Es gilt also:

$$\overset{[2]}{\kappa_1}(0) = 0 \tag{4.55}$$

In den Sternprodukten die hier betrachtet werden treten nun auch Kontraktionen quadratischer Funktionale mit linearen Funktionalen auf. Um dies in unserem Formalismus berücksichtigen zu können, führen wir die folgenden zusätzlichen Definitionen ein:

Definition 4.3.1. *Sei $j \in \mathcal{D}(M)$, $f \in \mathcal{D}(M \times M)$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(\mathrm{P}_f)^n$ definiert wie in 4.0.2. Wir definieren $\mathrm{R}_j(\mathrm{P}_f)^n \in \mathcal{D}(M)$ durch:*

$$\mathrm{R}_j(\mathrm{P}_f)^n(x) = \int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1\, j(x_1)\Delta(x_1 - y_1)(\mathrm{P}_f)^n(y_1, x) \tag{4.56}$$

Desweiteren definieren wir noch $\mathrm{R}_j(\mathrm{P}_f)^n\mathrm{R}_j \in \mathbb{R}$ durch:

$$\mathrm{R}_j(\mathrm{P}_f)^n\mathrm{R}_j = \int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2\, j(x_1)\Delta(x_1 - y_1)(\mathrm{P}_f)^n(y_1, x_2)\Delta(x_2 - y_2)j(y_2) \tag{4.57}$$

Die iterative Berechnung weiterer Terme ergibt erneut die Koeffizienten des Tangens in der Reihenentwicklung und lässt uns den folgenden Ansatz für κ_1 machen:

$$\kappa_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathrm{d}x\, (-1)^{n-1}\alpha_n\, t^{2n-1}\hbar^{2n-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2n-2}(x)\, \varphi(x) \tag{4.58}$$

Wir wollen nachrechnen, dass das obige κ_1 tatsächlich die DGL (4.51) löst.

Dazu berechnen wir zunächst den folgendenden Ausdruck aus (4.51):

$$\begin{aligned} \langle (\mathrm{F}_2)^{(1)}, \Delta\kappa_1^{(1)}\rangle &= \int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1\, 2\, f(x, x_1)\Delta(x_1 - y_1) \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n\, t^{2n-1}\hbar^{2n-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2n-2}(y_1) \\ &= -2\sum_{n=1}^{\infty} \int \mathrm{d}x\, (-1)^{n-1}\alpha_n\, t^{2n-1}\hbar^{2n-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2n-1}(x)\, \varphi(x) \end{aligned} \tag{4.59}$$

Wir wenden uns dem nächsten Ausdruck aus (4.51) zu:

$$\begin{aligned} \langle (\mathrm{J}_1)^{(1)}, \Delta\Lambda_2^{(1)}\rangle &= \int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1\, j(x_1)\Delta(x_1 - y_1)\, 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n t^{2n-1}\hbar^{2n-2}(\mathrm{P}_f)^{2n-1}(y_1, x)\, \varphi(x) \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \int \mathrm{d}x\, (-1)^{n-1}\alpha_n t^{2n-1}\hbar^{2n-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2n-1}(x)\, \varphi(x) \end{aligned} \tag{4.60}$$

Wir sehen also, dass (4.59)=-(4.60) ist, womit sich die beiden Ausdrücke in (4.51) wegheben.

Damit müssen wir nur noch nachrechnen, inwiefern unser κ_1 aus (4.58) die folgende Differentialgleichung löst:

$$\partial_t\kappa_1 = \mathrm{J}_1 + (\frac{\hbar^2}{4})\langle \mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}\kappa_1^{(1)} \otimes \Lambda_2^{(1)}\rangle \tag{4.61}$$

Um dies zu zeigen, berechnen wir zunächst den Ausdruck $\frac{\hbar^2}{4}\langle \mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}\kappa_1^{(1)} \otimes \Lambda_2^{(1)}\rangle$:

$$
\begin{aligned}
&(\frac{\hbar^2}{4})\langle \mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}(\kappa_\varphi^{(1)} \otimes \Lambda_2^{(1)})\rangle \\
= \; & +\hbar^2 \langle \mathrm{P}_f, \Delta^{\otimes 2}(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, t^{2n-1}\hbar^{2n-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2n-2}) \otimes (\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, t^{2k-1}\hbar^{2k-2}(\mathrm{P}_f)^{2k-1}\varphi))\rangle \\
= \; & +\hbar^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t^{2n-1}\hbar^{2n-2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^{2k-1}\hbar^{2k-2}\langle \mathrm{P}_f, \Delta^{\otimes 2}\mathrm{R}_j\mathrm{P}_f^{2n-2} \otimes (\mathrm{P}_f^{2k-1}\varphi)\rangle \\
= \; & -\hbar^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, t^{2n-1}\hbar^{2n-2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^{2k-2}\mathrm{R}_j\mathrm{P}_2^{2n+2k-2}\varphi \\
= \; & -\hbar^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t^{2n-1}\hbar^{2n-2}\mathrm{R}_j\mathrm{P}_f^{2n-2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^{2k-1}\hbar^{2k-2} P_f^{2k}\varphi
\end{aligned}
$$

Wir verwenden die Cauchy-Produktformel (4.27), um die obige Reihe umzusortieren.

Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\hbar^2}{4}\langle \mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}\kappa_1^{(1)} \otimes \Lambda_2^{(1)}\rangle \\
= \; & \hbar^2 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{n-k+1} t^{2n-2k+1}\hbar^{2n-2k}\mathrm{R}_j\mathrm{P}_f^{2n-2k}\alpha_k t^{2k-1}\hbar^{2k-2}\mathrm{P}_f^{2k}\varphi \\
= \; & \hbar^2 \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n}\hbar^{2n}\, \mathrm{R}_j\mathrm{P}_f^{2n}\varphi \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n-k+1}\alpha_k \\
= \; & \hbar^2 \sum_{n=2}^{\infty} t^{2n-2}\hbar^{2n-2}\, \mathrm{R}_j\mathrm{P}_f^{2n-2}\varphi \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n-k}\alpha_k
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

In der obigen Reihe würde der $n = 0$ Term gerade den Beitrag J_1 ergeben, somit erhalten wir für die Rechte Seite von (4.61) gerade den Ausdruck:

$$
\hbar^2 \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-2}\hbar^{2n-2}\, \mathrm{R}_j\mathrm{P}_f^{2n-2}\varphi \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n-k}\alpha_k \tag{4.63}
$$

Wir verwenden nun die Identität (4.29), und damit lautet die DGL (4.61):

$$
\partial_t \kappa_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \int \mathrm{d}x\, \alpha_n\, t^{2n-2}\hbar^{2n-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2n-2}(x)\,\varphi(x) \tag{4.64}
$$

Diese entspricht in der Tat gerade der Ableitung von (4.58) nach t, womit wir sehen dass (4.58) die korrekte Lösung der DGL (4.51) ist.

4.3.2 Form und Konvergenz von $\tilde{c}$

Wir wenden uns jetzt der Lösung der Gleichung (4.65) zu. Aus der Antisymmetrie des Δ und der Struktur der Lösung (4.58) für κ_1 folgt direkt das Verschwinden des Terms $\frac{i\hbar}{2}\langle (\mathrm{J}_1)^{(1)}, \Delta\, \kappa_1^{(1)}\rangle$.

Damit lautet unsere DGL für $\tilde{c}$ also:

$$
\partial_t\, \tilde{c} = -\frac{\hbar^2}{8}\,\langle \mathrm{F}^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}\, \kappa_1^{(1)} \otimes \kappa_1^{(1)}\rangle \tag{4.65}
$$

Analog zur Gleichung (4.21) taucht auf der rechten Seite kein $\tilde{c}$ auf, daher handelt es sich bei der Lösung erneut einfach um die Stammfunktion in t.

Bemerkung 4.3.2. *Der wesentliche Unterschied zu Gleichung* (4.21) *ist sicherlich der, dass* (4.65) *reell ist. Daher handelt es sich bei dem Beitrag von* $\exp(i\,\tilde{c})$ *lediglich um eine komplexe Phase vom Betrag 1. Dies wird in Kapitel 7 noch von Bedeutung sein.*

Wir berechnen also die rechte Seite von (4.65):

$$\begin{aligned}
&\partial_t\,\tilde{c}\\
=\;& -\frac{\hbar^2}{8}\,\langle \mathrm{F}_2^{(2)}, \Delta^{\otimes 2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\alpha_m\,t^{2m-1}\hbar^{2m-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2m-2}\otimes\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n\,t^{2n-1}\hbar^{2n-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2n-2}\rangle\\
=\;& -\frac{\hbar^2}{8}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\alpha_m\,t^{2m-1}\hbar^{2m-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n\,t^{2n-1}\hbar^{2n-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2m+2n-3}(\mathrm{R}_j)
\end{aligned}\tag{4.66}$$

Mit Hilfe von (4.27) folgt nun:

$$\begin{aligned}
&\partial_t\,\tilde{c}\\
=\;& -\frac{\hbar^2}{8}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\alpha_m\,t^{2m-1}\hbar^{2m-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2m-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n\,t^{2n-1}\hbar^{2n-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2n-1}(\mathrm{R}_j)\\
=\;& -\frac{\hbar^2}{8}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}((-1)^{m-n}\alpha_{m-n+1}\,t^{2m-2n+1}\hbar^{2m-2n}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2m-2n})\,\cdot\\
&\cdot((-1)^{n-1}\alpha_n\,t^{2n-1}\hbar^{2n-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2n-1}(\mathrm{R}_j))\\
=\;& -\frac{\hbar^2}{8}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}t^{2m}\hbar^{2m-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2m-1})(\mathrm{R}_j)\sum_{n=1}^{m}\alpha_{m-n+1}\alpha_n\\
=\;& \frac{1}{8}\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m-1}t^{2m-2}\hbar^{2m-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2m-3})(\mathrm{R}_j)\underbrace{\sum_{n=1}^{m-1}\alpha_{m-n}\alpha_n}_{=(2m-1)\alpha_m}
\end{aligned}\tag{4.67}$$

und wir erhalten zusammen mit der Anfangsbedingung $\tilde{c}(0)=0$ als Lösung für (4.65):

$$\tilde{c}(t)=\frac{1}{8}\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m-1}\alpha_m t^{2m-1}\hbar^{2m-2}(\mathrm{R}_j)(\mathrm{P}_f)^{2m-3})(\mathrm{R}_j)\tag{4.68}$$

Definition 4.3.3. *Wie wir gesehen haben, hängt die Konvergenz des Sternexponentials quadratischer Funktional von der Größe der in* (4.38) *definierten Konstanten* C_f *ab. Wir definieren daher die Umgebung* $\mathcal{U}_c$ *durch:*

$$\mathcal{U}_c=\{\mathrm{F}_2\in\mathcal{F}_2|\,\mathrm{C}_f<c\}\tag{4.69}$$

Dann konvergiert also das Sternexponential für alle $\mathrm{F}_2\in\mathcal{U}_{\frac{\pi}{2\cdot\hbar}}\subset\mathcal{F}_2$.

4.4 Zur Konvergenz des Sternexponentials in $\mathcal{D}(M)$

Wie wir im obigen Abschnitt gezeigt haben gibt es einen geschlossenen Ausdruck für das Sternexponential eines quadratischen Funktionals. Der Integralkern dieses Ausdrucks wird durch eine Funktion dargestellt, die sich aus einer Aufsummation von Testfunktionen ergibt. Es wurde die Konvergenz dieser Reihe bezüglich der sup-Norm gezeigt. Zu klären ist dann noch die Frage, ob die Reihe auch bezüglich der Topologie von $\mathcal{D}(M)$ konvergiert.

Wir gehen daher zunächst auf die Eigenschaften der Topologie von $\mathcal{D}(M)$ ein:

Wir versehen die Testfunktionen $\mathcal{D}(M)$ mit der induktiven Limestopologie τ (Zur Def. siehe z.B. [7], S.152, 6.3). Wir müssen die Konvergenz der Partialsummenfolge bezüglich dieser Topologie überprüfen.

Wir haben die folgende Proposition über die Konvergenz von Folgen in $\mathcal{D}(M)$:

Proposition 4.4.1. *Sei $\{\varphi_i\}$ eine Folge in $\mathcal{D}(M)$ und es gebe ein $K \subset M$, so dass* $supp\,\varphi_i \subset K \quad \forall\, i$. *Dann konvergiert $\{\varphi_i\}$ in $\mathcal{D}(M)$, wenn $\{\varphi_i\}$ bezüglich der Supremumsnorm auf K in allen Ableitungen konvergiert.*

Beweis: Der Raum $\mathcal{C}^\infty(M)$ ist ein Fréchetraum. Die Einschränkung auf den Raum $\mathcal{D}_K$ von Funktionen mit Träger in K ist ein abgeschlossener Unteraum und damit ebenfalls ein Fréchetraum [7], S.34, 1.46. Die Konvergenz von $\{\varphi_i\}$ in allen Ableitungen bedeutet gerade die Konvergenz bezüglich aller Halbnormen p_N auf $\mathcal{D}_K$. Dies führt zur Konvergenz bezüglich der durch die Halbnormen definierten Metrik [7], S.28, 1.38. Die Topologie auf $\mathcal{D}_K$ wird durch diese Metrik erzeugt. Also konvergiert $\{\varphi_i\}$ bezüglich der Topologie von $\mathcal{D}_K$.

Sei nun τ die Topologie von $\mathcal{D}(M)$, dann stimmt die Topologie τ_K von $\mathcal{D}_K$ mit der von $\mathcal{D}(M)$ auf $\mathcal{D}_K$ induzierten Relativtopologie überein [7], S.153, 6.5.
Hieraus folgt die Konvergenz von $\{\varphi_i\}$ bezüglich der Topologie von $\mathcal{D}(M)$. □

Wir werden also zeigen müssen, dass die Träger aller Elemente der zur Reihe (6.6) gehörenden Partialsummenfolgen in einem Kompaktum K enthalten sind, und dass die Partialsummenfolge bezüglich der Supremumsnorm auf K in allen Ableitungen konvergiert. Wir wollen hier gleich ein etwas allgemeineres Resultat beweisen, da wir es in dieser Form noch für weitere Konvergenzbetrachtungen benötigen werden.

Proposition 4.4.2. *Seien $\{f_{i_1}^{(n)}, ..., f_{i_n}^{(n)}\}_{(n)} \in \mathbb{N}$ eine Familie von Testfunktionen mit $f_{i_j} \in \mathcal{D}(M \times M)$ und $supp(f_{i_j}) \subset K$ für ein Kompaktum K.*
Wir betrachten dann die Reihe

$$h(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(x,y), \tag{4.70}$$

wobei die Funktionen $m_n(x,y) \in \mathcal{D}(M \times M)$ die folgende Form haben:

$$m_n(x,y) = \alpha_n \int \cdots \int \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}y_n \, f_{i_1}^{(n)}(x,x_1)\Delta(x_1 - y_1) \cdot \cdots \cdots \Delta(x_n - y_n) f_{i_n}^{(n)}(y_n, y) \tag{4.71}$$

Wir müssen jedoch zusätzlich noch fordern, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f_{i_1}^{(n)} = f_{i_1}^{(n+1)}$ und $f_{i_n}^{(n)} = f_{i_{n+1}}^{(n+1)}$ gilt für alle $n \geq n_0$.

Die wesentliche Verallgemeinerung liegt hier in der Tatsache, dass sich die Testfunktionen voneinander unterscheiden können. Wir definieren eine auf diesen Fall verallgemeinerte Konstante $\hat{\mathrm{C}}_{f_i^{(n)}}$ durch:

$$\hat{\mathrm{C}}_{f_i^{(n)}} = ||(f_i^{(n)}(x,\cdot) * \Delta)(y)|_{\mathrm{K}_{f_i^{(n)}} \times \mathrm{K}_{f_{i+1}^{(n)}}}||_\infty \cdot \mu(\mathrm{K}_{f_{i+1}^{(n)}}) \tag{4.72}$$

Dabei bezeichnet "$*$" hier die Faltung zwischen der Testfunktion f und der Distribution Δ.
Diese Definition stimmt für den Fall dass $f_i^{(n)} = f_{i+1}^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, offensichtlich mit der Definition aus (4.38) überein. Im allgemeinen Fall hängt diese jedoch zusätzlich noch von $\hat{\mathrm{C}}_{f_{i+1}^{(n)}}$ ab.

Wir können damit also m_n durch $\alpha_n = \mathrm{C}_{f_{i_1}^{(n)}} \cdot ... \cdot \mathrm{C}_{f_{i_{n-1}}^{(n)}} \cdot ||f_{i_n}^{(n)}||_\infty$ abschätzen. Wir setzen dann die Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n$ nach dem Quotientenkriterium voraus.
In diesem Fall konvergiert $h(x,y)$ auch in allen Ableitungen bezüglich der sup-Norm, und damit ist die Konvergenz in $\mathcal{D}'(M \times M)$ gegeben.

Beweis: Die Ableitungen in x und y wirken in jedem Term m_n der Reihe h jeweils nur auf die Funktionen $f_{i_1}^{(n)}$ und $f_{i_n}^{(n)}$. Damit bleiben alle Konstanten des Produktes in α_n bis auf die erste und die letzte unverändert. Im Grenzwert $n \to \infty$ des Quotienten $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ kürzen sich diese beiden Konstanten aber heraus, da die entsprechenden Funktionen in α_n und α_{n+1} für $n \geq n_0$ übereinstimmen. □

4.5 Weitere Konvergenzüberlegungen

Mit Hilfe der in (1.8) definierten symplektischen Form σ lassen sich noch weitere Konvergenzüberlegungen anstellen. Wir betrachten dazu zunächst eine symmetrische Funktion aus $\mathcal{D}(M)\otimes\mathcal{D}(M)$ der Form:

$$f(x,y) = f_1(x)\otimes f_2(y) + f_2(x)\otimes f_1(y) \tag{4.73}$$

Dann gilt auch $f(x,y)\in\mathcal{D}(M\times M)$.

Wir wollen nun den Ausdruck P_f^3, der nach (4.6) definiert ist, für ein f der Form (4.73) berechnen, dabei kürzen wir Ausdrücke der Form $\int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\, f(x,x_1)\Delta(x_1-y_1)g(y_1,y)$ mit $f\Delta g$ ab:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_f^3 &= f\Delta f\Delta f \\
&= (f_1\otimes f_2 + f_2\otimes f_1)\Delta(f_1\otimes f_2 + f_2\otimes f_1)\Delta(f_1\otimes f_2 + f_2\otimes f_1) \\
&= [(f_1\otimes f_2)\sigma(f_2,f_1) + (f_1\otimes f_1)\underbrace{\sigma(f_2,f_2)}_{=0} + (f_2\otimes f_2)\underbrace{\sigma(f_1,f_1)}_{=0} + (f_2\otimes f_1)\sigma(f_1,f_2)]\Delta(f_1\otimes f_2 + f_2\otimes f_1) \\
&= \sigma(f_2,f_1)(f_1\otimes f_2 - f_2\otimes f_1)\Delta(f_1\otimes f_2 + f_2\otimes f_1) \\
&= \sigma(f_2,f_1)(f_1\otimes f_2\,\sigma(f_2,f_1) - f_2\otimes f_1\,\sigma(f_1,f_2)) \\
&= \sigma(f_1,f_2)^2\, f_1\otimes f_2 = \sigma(f_1,f_2)^2\, f
\end{aligned} \tag{4.74}$$

und damit erhalten wir:

$$\mathrm{P}_f^{2n+1} = \sigma(f_1,f_2)^{2n}\, f \tag{4.75}$$

Wir können dies verwenden, um die entsprechende Reihe (4.24) umzuformulieren:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_2(t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n\, t^{2n-1}\hbar^{2n-2}\,(\mathrm{P}_f)^{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n\, t^{2n-1}\hbar^{2n-2}\,(\sigma(f_1,f_2))^{2n-2}\, f \\
&= (\hbar\sigma(f_1,f_2))^{-1}\tanh(t\hbar\sigma(f_1,f_2))\cdot f
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Damit lautet eine entsprechende Konvergenzbedingung für $M_2(1)$:

$$\sigma(f_1,f_2) \overset{!}{<} \frac{\pi}{2\hbar} \tag{4.77}$$

Die entsprechenden Überlegungen für $c(t)$ funktionieren analog.

4.6 Quadratische Operatoren auf dem Fockraum

Wir gehen nun zur Betrachtung der Situation auf dem Fockraum über und übernehmen dazu einige Überlegungen von Summers et. al., die diese in der Arbeit [11] zur Diskussion der sogenannten quadratischen kanonischen Transformaitonen entwickelt haben. Wir definieren dazu Zweiteilchenoperatoren auf dem Fockraum. Unter dem Raum $H\odot H$ verstehen wir den Raum der endlichen Linearkombinationen von Elementen $f_i\otimes g_j$ mit $f_i, g_j\in H$. Mit $H\otimes H$ bezeichnen wir dann den Abschluss von $H\odot H$. Sei $F\in H\odot H$ von der Form $F=\sum_{i=1}^n \alpha_i(f_i\otimes g_i)$ mit $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $f_i, g_i\in H$ und $n\in\mathbb{N}$. Wir definieren einen Operator $\Psi(F)$ der auf dem Definitionsbereich $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ wirkt, durch:

$$\Psi(F)\psi = \Psi(\sum_{i=1}^n \alpha_i(f_i\otimes g_i))\psi \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i\ :\phi(f_i)\phi(g_i):\psi, \quad \psi\in\mathcal{F}_0, \tag{4.78}$$

wobei die Wickordnung unter Berücksichtigung des Fockvakuums Ω_0 genommen wird, d.h.:

$$: \phi(f)\phi(g) := \phi_S(\tilde{f})\phi_S(\tilde{g}) - \frac{1}{2} < \tilde{f}, \tilde{g} >_{\mathcal{H}} \mathbb{1} = \phi(f)\phi(g) - \frac{1}{2} < f, g > \mathbb{1} - \frac{i}{2}\sigma(f,g)\mathbb{1}. \tag{4.79}$$

Wie man leicht zeigen kann ist die Definition unabhängig von der speziellen Wahl der linearen Darstellung für F.

Lemma 4.6.1. *Für jedes $\psi \in \mathcal{F}_0$ ist die Abbildung $F \mapsto \Psi(F)\Psi$ von $H \odot H$ nach $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ beschränkt mit*

$$||\Psi(F)\psi|| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{(n_\psi + 2)(n_\psi + 1)}||F|| \, ||\psi||, \tag{4.80}$$

für jedes $\psi \in \mathcal{F}_0$. Wir können die Abbildung also eindeutig fortsetzen zu einer stetigen linearen Abbildung von $H \otimes H (\equiv H^2)$ nach $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$. Folglich existiert für jedes $F \in H^2$ ein linearer Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{F}_0$, welchen wir ebenfalls mit $\Psi(F)$ bezeichnen und welcher dieselbe Normabschätzung erfüllt.

Eine offensichtliche Konsequenz dieses Lemmas ist es, dass wenn $\{F_n\} \subset H^2$ gegen $F \in H^2$ konvergiert, der Operator $\Psi(F_n)$ stark gegen $\Psi(F)$ auf $\mathcal{F}_0$ konvergiert. Dieses wäre nicht gegeben, wenn in der Definition des Zweiteilchenoperators keine Normalordnung verwendet worden wäre.

Es gibt ein anderes wichtiges technisches Detail, das durch das obige Lemma impliziert wird:

Korollar 4.6.2. *Für jedes $F \in H^2$ ist $\Psi(F)$ ein symmetrischer Operator, der die Gleichung $\Psi(F) = \Psi(P_+F) + \Psi(P_-F) = \Psi(P_+F)$ erfüllt.*

Satz 4.6.3. *Für jedes* F $\in H^2$ *ist der Operator $\Psi(F)$ auf $\mathcal{F}_0$ wesentlich selbstadjungiert. Desweiteren ist jedes $\phi \in \mathcal{F}_0$ ein analytischer Vektor für $\Psi(F)$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\phi \in \mathcal{F}_0$ ein analytischer Vektor für $\Psi(F)$ ist. Sei dazu ϕ ein Vektor endlicher Teilchenzahl, d.h. $\Psi = (\Psi^{(n)})_{n=0}^{\infty}$, $\psi^{(n)} \in P_+\mathcal{H}^n$ und $\psi^{(n)} = 0$ für alle $n > n_\psi$.

Wir wissen dass $\Psi(F)$ jeden Vektor endlicher Teilchenzahl erneut nach $\mathcal{F}_0$ abbildet, daher gilt:

$$\psi \in C^\infty(\Psi(F)) \equiv \cap_{k=1}^{\infty} D(\Psi(F)^k) \tag{4.81}$$

Darüberhinaus gilt nach Lemma 4.6.1:

$$||\Psi(F)\psi|| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{(n_\psi + 2)(n_\psi + 1)}||F|| \, ||\psi|| \tag{4.82}$$

Nun kann ein quadratischer Operator auf dem Fockraum die Teilchenzahl maximal um zwei erhöhen, damit folgt aus (4.82):

$$\begin{aligned} ||\Psi(F)^n\psi|| &\leq \sqrt{2}\,2\,||F||\,[(n_\psi + 2(n-1)+1)(n_\psi + 2(n-1)+2)]^{1/2}\,||\Psi(F)^{n-1}\psi|| \\ &\leq 2^{n/2}\,(2\,||F||)^n\,[(n_\psi+1)(n_\psi+2)...(n_\psi+2n)]^{1/2}\,||\psi|| \\ &\leq 2^{n/2}\,(2\,||F||)^n\,\sqrt{(n_\psi+2n)!}\,||\psi|| \end{aligned} \tag{4.83}$$

Wir können nun das Quotientenkriterium verwenden, um die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,||\Psi(F)^n\psi||\,t^n$ zu überprüfen, denn nach Gleichung (4.83) wird die Reihe durch $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2^{n/2}(2\,||F||)^n\,t^n \sqrt{(n_\psi + 2n)!}||\psi||$ dominiert.

Das Quotientenkriterium liefert als Konvergenzbedingung:

$$\begin{aligned} &\frac{(2^{n/2}/n!)(2||F||)^n\,t^n\,\sqrt{(n_\psi+2n)!}}{(2^{(n-1)/2}/(n-1)!)(2\,||F||)^{(n-1)}\,t^{(n-1)}\,\sqrt{(n_\psi+2(n-1))!}} \\ = &\ \frac{\sqrt{2}}{n}\,||F||\,t\,\sqrt{(n_\psi+2n-1)(n_\psi+2n)} \\ \leq &\ \frac{\sqrt{2}}{n}\,||F||\,t\,(n_\psi+2n)\ n \xrightarrow{} \infty\ 2\sqrt{2}\,||F||\,t \overset{!}{<} 1 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Damit haben wir die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}||\Psi(F)^n\psi||t^n$ für $t < \frac{1}{2\sqrt{2}\,||F||}$ bewiesen, also ist ψ ein analytischer Vektor für $\Psi(F)$.

Nun sind also alle $\psi \in \mathcal{F}_0$ analytische Vektoren für $\Psi(F)$. Da $\mathcal{F}_0$ dicht im Fockraum ist und von $\Psi(F)$ invariant gelassen wird, folgt die wesentliche Selbstadjungiertheit von $\Psi(F)$ aus dem Satz von Nelson, da $\Psi(F)$ außerdem symmetrisch ist.

□

Bemerkung 4.6.4.

- *Der Beweis kann nicht für N-Teilchenoperatoren $\Psi^{(N)}(F)$ mit $F \in H^N$ und $N > 2$ geführt werden.*
- *Aufgrund der wesentlich Selbstadjungiertheit von $\Psi(F)$ und der bewiesenen Stetigkeit können wir aus Standardsätzen schließen, dass wenn $\{F_n\} \subset H^2$ gegen $F \in H^2$ konvergiert, die Operatoren $\overline{\Psi(F_n)}$ im Sinne starker Resolventen gegen $\overline{\Psi(F)}$ konvergieren, und dass $\overline{\Psi(F)}$ der starke Graphengrenzwert von $\overline{\{\Psi(F_n)\}}$ ist.*

Es gilt:

Satz 4.6.5. *Sei $F \in H^2$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Psi(F)^n\,\psi$ konvergiert als Vektor im Fockraum für $||F|| < \frac{1}{4\cdot\sqrt{2}}$ und für alle $\psi \in \mathcal{F}_0$.*

Beweis: Der Beweis folgt direkt aus dem Beweis zu Satz 4.6.3. □

Bemerkung 4.6.6. *Während der Operator $\Psi(F)$ den Raum endlicher Teilchenzahl $\mathcal{F}_0$ auf sich selbst abbildet ist dies für $\exp(i\,t\,\Psi(F))$ nicht mehr garantiert, da die Anzahl der Erzeugungsoperatoren in der Exponentialreihe nicht beschränkt ist.*

4.7 Vergleich der Resultate

Wirklich zum Fockraum vegleichbare Konvergenzresultate erhalten wir im Sternexponentialformalismus nur für quadratische Funktionale $f \in \mathcal{D}(M \times M)$ der Form $f = f_1 \otimes f_2$. Hier konnten wir in Abschnitt 4.5 die Konvergenz für den Fall $|\sigma(f_1, f_2)| < \frac{\pi}{2\hbar}$ zeigen.

Nach (2.1) gilt: $\sigma(f,g)^2 \leq \alpha(f,f)\,\alpha(g,g)$. Nun stimmt $\alpha(f,f)\,\alpha(g,g)$ aber nach 2.1.3 gerade mit der Norm $\|$F$\|$ von F $= K\,f_1 \otimes K\,f_2$ überein, wobei K die in 2.1.3 definierte lineare Abbbildung bezeichnet.

Die Konvergenzresultate für das Sternexponential sind für den einfachen Fall eines quadratischen Funktionals mit einem Integralkern, der sich als Produkt zweier Testfunktionen schreiben lässt, also durchaus vergleichbar mit denen auf dem Fockraum. Wir erhalten im Fall des Sternexponentials sogar etwas großzügigere Konvergenzbedingungen.

Kapitel 5

Die Multiplikation von Sternexponentialen

Wir haben im letzten Abschnitt eine Bedingung für den Integralkern quadratischer Funktionale gefunden, welche die Konvergenz von dessen Sternexponentialen garantiert. Sei nun $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{F}_2$ ein Funktional das diese Bedingung erfüllt, das also in der in Definition 4.3.3 eingeführten Menge $\mathcal{U}_{\frac{\pi}{2\cdot\hbar}}$ liegt..

In diesem Abschnitt wollen wir uns nun mit der Frage beschäftigen, ob und unter welchen Bedingungen es möglich ist, Sternprodukte zwischen den Exponentialen linearer und quadratischer Funktionale, sowie auch zwischen den Exponentialen zweier quadratischer Funktionale zu bilden.

Für den Fall, dass wir Sternexponentiale miteinander sternmultiplizieren bietet sich die Verwendung der Baker-Campbell-Hausdorff Formel an.
Diese erlaubt es, das Produkt zweier Exponentialfunktionen $\exp(i\mathrm{F})$, $\exp(i\mathrm{G})$ erneut in Form einer Exponentialfunktion $\exp(i\mathrm{H})$ darzustellen, wobei der Ausdruck für H wie folgt lautet:

$$\mathrm{H} = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i+s_i>0 \\ 1\leq i\leq n}} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(r_i+s_i)\right)^{-1}}{r_1!\cdot s_1!\cdots r_n!\cdot s_n!} i^{\sum_{i=1}^{n}(r_i+s_i)} [i\mathrm{F}^{r_1} i\mathrm{G}^{s_1} i\mathrm{F}^{r_2} i\mathrm{G}^{s_2} ... i\mathrm{F}^{r_n} i\mathrm{G}^{s_n}]_\star \tag{5.1}$$

Wir verwenden dabei die Notation:

$$[i\mathrm{F}^{r_1} i\mathrm{G}^{s_1} i\mathrm{F}^{r_2} i\mathrm{G}^{s_2} ... i\mathrm{F}^{r_n} i\mathrm{G}^{s_n}]_\star = \underbrace{[i\mathrm{F},[i\mathrm{F},...[i\mathrm{F},}_{r_1}\underbrace{[i\mathrm{G},[i\mathrm{G},...[i\mathrm{G},}_{s_1}...\underbrace{[i\mathrm{F},[i\mathrm{F},...[i\mathrm{F},}_{r_n}\underbrace{[i\mathrm{G},[i\mathrm{G},...i\mathrm{G}]}_{s_n}]...]]_\star \tag{5.2}$$

Zuerst untersuchen wir die Frage, unter welchen Bedingungen das Sternprodukt $\exp_\star(i\,\mathrm{F}_2)$ mit Elementen der Weylalgebra $\exp_\star(i\,\mathrm{G}_1) \in \mathcal{W}$ existiert.

5.1 Das Produkt von linearen Funktionalen mit quadratischen

5.1.1 Berechnung des Sternproduktes

Zunächst verwenden wir die Baker-Campbell-Hausdorf Formel, um einen Ausdruck für das Sternprodukt zu gewinnen. Im nächsten Abschnitt gehen wir dann auf die Konvergenzeigenschaften dieses Ausdruckes ein.

Wir beweisen in diesem Abschnitt die folgende Aussage:

Satz 5.1.1. *Wenn wir das Produkt des Sternexponentials eines quadratischen Funktionals mit dem Exponential eines linearen Funktionals bilden, so erhalten wir ein Ergebnis folgender Form:*

$$\exp_\star(i\,\mathrm{F}_2) \star \exp(i\,\mathrm{G}_1) = \exp_\star(i\,\mathrm{H}) \tag{5.3}$$

wobei $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{F}_2$ *ist,* $\exp(i\,\mathrm{G}_1) \in \mathcal{W}$ *und für* H *gilt:*

$$\mathrm{H} = \mathrm{F}_2 + \mathrm{G}_1 + \mathrm{J}_1 + c \tag{5.4}$$

mit einem linearen Funktional J_1*, dessen Integralkern einen kompakten Träger hat, sowie einer reellen Konstante* c*.*

Beweis:

Sei $\mathrm{F}_2 = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, f(x,y)\varphi(x)\varphi(y)$ mit $f \in \mathcal{D}(M \times M)$ ein quadratisches Funktional und $G(\varphi) = \int \mathrm{d}x g(x)\varphi(x)$ ein lineares Funktional. Dann lautet das Sternprodukt beider Funktionale nach (3.2):

$$i\mathrm{F}_2 \star i\mathrm{G}_1 = -\mathrm{F}_2 \cdot \mathrm{G}_1 - \frac{i\hbar}{2}2 \int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1\, f(x,x_1)\Delta(x_1 - y_1)g(y_1)\varphi(x) \tag{5.5}$$

Damit erhalten wir dann für den Sternkommutator beider Funktionale den Ausdruck:

$$[i\mathrm{F}_2, i\mathrm{G}_1]_\star = -2i\hbar \int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1\, f(x,x_1)\Delta(x_1 - y_1)g(y_1)\varphi(x), \tag{5.6}$$

oder mit $m(x) := \int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1\, f(x,x_1)\Delta(x_1 - y_1)g(y_1)$:

$$[i\mathrm{F}_2, i\mathrm{G}_1]_\star = -2i\hbar \int \mathrm{d}x\, m(x)\varphi(x) \tag{5.7}$$

und es gilt $m \in \mathcal{D}(M)$. Wir erhalten also für den Sternkommutator zwischen einem quadratischen und einem linearen Funktional als Ergebnis ein lineares Funktional mit Integralkern in $\mathcal{D}(M)$.

Auf dem Weg für einen Ansatz zur Berechnung des Sternexponentials machen wir zunächst die folgenden Beobachtungen:

Der Sternkommutator eines quadratischen Funktionals mit einem linearen Funktional ergibt ein lineares Funktional. Der Sternkommutator zweier linearer Funktionale erzeugt eine Konstante. Konstanten kommutieren mit allen Funktionalen. Also enthalten die Kommutatorterme der BCH-Formel lediglich lineare Funktionale und Konstanten.

Seien nun $r_i, s_i \in \mathbb{Z}^+$, für $i = 1...n$.
Für den Fall, dass es sich bei einem Kommutatorterm um ein lineares Funktional handelt, bezeichnen wir den Integralkern des Kommutatorterms $[\mathrm{F}_2^{r_1}\mathrm{G}_1^{s_1}\mathrm{F}_2^{r_2}\mathrm{G}_1^{s_2}\cdots\mathrm{F}_2^{r_n}\mathrm{G}_1^{s_n}]_\star$ mit $h_{r_1 s_1 r_2 s_2 \cdots r_n s_n}$.

Handelt es sich beim obigen Ausdruck um eine Konstante, so bezeichnen wir diese mit $c_{r_1 s_1 r_2 s_2 \cdots r_n s_n}$.

Aus den obigen Überlegungen folgt zunächst, dass die Kommutatorterme verschwinden, sobald sie mehr als zwei lineare Funktionale beinhalten:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i > 2 \Rightarrow [\mathrm{F}_2^{r_1}\mathrm{G}_1^{s_1}\mathrm{F}_2^{r_2}\mathrm{G}_1^{s_2}\cdots\mathrm{F}_2^{r_n}\mathrm{G}_1^{s_n}]_\star = 0 \tag{5.8}$$

Aus der Antisymmetrie des Kommutators folgt dass $[\mathrm{F}_2^{r_1}\mathrm{G}_1^{s_1}\mathrm{F}_2^{r_2}\mathrm{G}_1^{s_2}\cdots\mathrm{F}_2^{r_n}\mathrm{G}_1^{s_n}]_\star = 0$ für $s_n = 0, r_n > 1$ gilt. In der BCH-Reihe sind also lediglich Terme der folgenden Form ungleich null:

$$h_{r_1 0 r_2 0 r_3 0 \cdots r_n 1}, \quad c_{0 1 r_2 0 \cdots r_{n-1} 0 r_n 1} \quad \mathrm{G}_1, \quad \text{und } \mathrm{F}_2 \tag{5.9}$$

Wir bekommen als Sternprodukt also einen Ausdruck $\exp_\star(i\,\mathrm{H})$. Dabei gilt

$$\mathrm{H} = \mathrm{F}_2 + \mathrm{G}_1 + \mathrm{J}_1 + c. \tag{5.10}$$

□

5.1.2 Konvergenzuntersuchung des Sternprodukts

Satz 5.1.2. *Sei $\tilde{f}$ definiert wie im Beweis von Korollar 4.2.1. Dann konvergiert das Sternprodukt*

$$\exp_\star(i\,\mathrm{F}_2) \star w \tag{5.11}$$

für alle Elemente $w \in \mathcal{W}$, so lange $\tilde{f}$ die folgende Bedingung erfüllt:

$$\mathrm{C}_f \overset{!}{<} \frac{\ln(2)}{2 \cdot \hbar} \tag{5.12}$$

Beweis:
Wir verwenden die in Kapitel 4 eingeführten Definitionen für $\tilde{f}$, C_f, $(\mathrm{P}_f)^n$, $\mathrm{R}_j(\mathrm{P}_f)^n$ und $\mathrm{R}_j(\mathrm{P}_f)^n\mathrm{R}_j$.

Offensichtlich gilt für $m(x)$ nach (5.7):

$$[i\mathrm{F}_2, i\mathrm{G}_1]_\star = -2i\hbar\, m(x) = i\hbar\,\mathrm{R}_g\mathrm{P}_f \tag{5.13}$$

Berechnen wir höhere Kommutatorterme welche Beiträge zum linearen Funktional liefern, so erhalten wir:

$$h_{r_1 0 r_2 0 r_3 0 \cdots r_n 1} = -i\,(-\hbar)^{\sum_{i=1}^n r_i}\,\mathrm{R}_g(\mathrm{P}_f)^{\sum_{i=1}^n r_i} \tag{5.14}$$

Analog dazu erhalten wir Kommutatorterme für $c_{01r_2 0\cdots r_{n-1}0r_n 1}$:

$$c_{01r_2 0\cdots r_{n-1}0r_n 1} = i\,(\hbar)^{\sum_{i=1}^n r_i}\,\mathrm{R}_g(\mathrm{P}_f)^{\sum_{i=1}^n r_i} \tag{5.15}$$

Vernachlässigen wir nun also alle verschwindenden Terme in der BCH-Reihe, so erhalten wir als Beiträge zum Integralkern von J_1:

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_1 &= \int \mathrm{d}x \sum_{n>0} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n} \sum_{\substack{r_i>0\\ 1\le i\le n}} \frac{(\sum_{i=1}^n (r_i+2))^{-1}}{r_1!\cdot\cdots\cdot r_n!} h_{r_1 0 r_2 0\cdots r_{n-1}0r_n 1}(x)\varphi(x) \\
&= \int \mathrm{d}x \sum_{n>0} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n} \sum_{\substack{r_i>0\\ 1\le i\le n}} \frac{(\sum_{i=1}^n (r_i+2))^{-1}}{r_1!\cdot\cdots\cdot r_n!}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

sowie folgende Beiträge zur Konstanten c:

$$c = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n} \sum_{\substack{r_i>0\\ 1\le i\le n}} \frac{(\sum_{i=1}^n (r_i+2))^{-1}}{r_1!\cdot\cdots\cdot r_n!} c_{01r_2 0\cdots r_{n-1}0r_n 1} \tag{5.17}$$

$$= i\sum_{n>0} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n} \sum_{\substack{r_i>0\\ 1\le i\le n}} \frac{(\sum_{i=1}^n (r_i+2))^{-1}}{r_1!\cdot\cdots\cdot r_n!} (\hbar)^{\sum_{i=1}^n r_i}\,\mathrm{R}_g(\mathrm{P}_f)^{\sum_{i=1}^n r_i} \tag{5.18}$$

Wir untersuchen zunächst die Konvergenz von c. Wir verwenden hierbei die zuvor gefundenen Abschätzungen für $\varphi\mathrm{R}_g(\mathrm{P}_f)^n\mathrm{R}_g\varphi$:

$$\begin{aligned}
c &\le \sum_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{\substack{r_i>0\\ 1\le i\le n}} \frac{(\sum_{i=1}^n (r_i+2))^{-1}}{r_1!\cdot\cdots\cdot r_n!} (\hbar)^{\sum_{i=1}^n r_i}\,|\varphi\mathrm{R}_g(\mathrm{P}_f)^{\sum_{i=1}^n r_i}\mathrm{R}_g\varphi| \\
&\le \sum_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{\substack{r_i>0\\ 1\le i\le n}} \frac{(\sum_{i=1}^n (r_i+2))^{-1}}{r_1!\cdot r_2!\cdots r_n!} \hbar^{\sum_{i=1}^n r_i}(\tilde{\mathrm{C}}_g)^2\cdot(\mathrm{C}_f)^{(\sum_{i=1}^n r_i)-1}
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
|c| &\leq (\mathrm{C}_f)^{-1}(\tilde{\mathrm{C}}_g)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{r_1=1}^{\infty} (\hbar \mathrm{C}_f)^{r_1} \sum_{r_2=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{C}_f)^{r_2}}{r_2!} \cdots \sum_{r_n=1}^{\infty} (\mathrm{C}_f)_{\infty}^{r_n} \frac{(\sum_{i=1}^{n}(r_i+2))^{-1}}{r_1! \cdot r_2! \cdots r_n!} \\
&\leq (\mathrm{C}_f)^{-1}(\tilde{\mathrm{C}}_g)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{(\hbar \mathrm{C}_f)^{r_1}}{r_1!} \sum_{r_2=1}^{\infty} \frac{(\hbar \mathrm{C_f})^{r_2}}{r_2!} \cdots \sum_{r_n=1}^{\infty} \frac{(\hbar \mathrm{C}_f)^{r_n}}{r_n!} \\
&= (\mathrm{C}_f)^{-1}(\mathrm{C}_g)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\exp(\hbar \mathrm{C}_f)-1)^n}{n^2} \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

Als Konvergenzbedingung liefert das Quotientenkriterium dann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\exp(\hbar \mathrm{C}_f)-1)^{(n+1)}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{(\exp(\hbar \mathrm{C}_f)-1)^n} = \exp(\hbar \mathrm{C}_f) - 1 \overset{!}{<} 1 \qquad (5.21)$$

Wir erhalten also als Bedingung an C_f:

$$\mathrm{C}_f \overset{!}{<} \frac{\ln(2)}{2 \cdot \hbar} \qquad (5.22)$$

Als nächstes untersuchen wir das lineare Funktional auf Konvergenz, welches sich durch Aufsummation von Testfunktionen der Form $h_{r_1 0 r_2 0 \cdots r_{n-1} 0 r_n 1}(x)$ ergibt. Wir machen hierfür Abschätzungen, die uns Aussagen über das Konvergenzverhalten unter der sup-Norm liefern:

$$\begin{aligned}
||h_{r_1 0 r_2 0 \cdots r_{n-1} 0 r_n 1}(x)||_\infty &\leq ||-i\,(-\hbar)^{\sum_{i=1}^n r_i}\,\mathrm{R}_g(\mathrm{P}_f)^{\sum_{i=1}^n r_i}(x)||_\infty \\
&\leq \mathrm{C}_g \cdot (\mathrm{C}_f)^{\sum_{i=1}^n r_i} \qquad (5.23)
\end{aligned}$$

Analog zur obigen Rechnung erhalten wir die folgende Abschätzung für die sup-Norm des Integralkerns $j(x)$ des linearen Funktionals F_1:

$$||j(x)||_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\exp(\hbar \mathrm{C}_f)-1)^n}{n^2}, \qquad (5.24)$$

und damit erneut als Konvergenzbedingung an f:

$$\mathrm{C}_f \overset{!}{<} \frac{\ln(2)}{2 \cdot \hbar} \qquad (5.25)$$

Definition 5.1.3. *Offensichtlich gilt für die in Definition 4.3.3 eingeführten Mengen $\mathcal{U}_c$, dass $\mathcal{U}_{\frac{\ln(2)}{2\cdot\hbar}} \subset \mathcal{U}_{\frac{\pi}{2\cdot\hbar}} \subset \mathcal{F}_2$, da $\frac{\ln(2)}{2\cdot\hbar} < \frac{\pi}{2\cdot\hbar}$ ist. Wir definieren daher als Umgebung, auf der die Sternexponentiale ebenso wie das Produkt aus Sternxponential und Weylalgebra definiert sind und konvergieren:*

$$\tilde{\mathcal{U}} := \mathcal{U}_{\frac{\ln(2)}{2\cdot\hbar}} \qquad (5.26)$$

5.2 Multiplikation quadratischer Funktionale

5.2.1 Berechnung des Produktes

Wir wollen nun zwei Sternexponentiale $\exp_\star(i\,\mathrm{F}_2)$ und $\exp_\star(i\,\mathrm{G}_2)$ unter Verwendung des Sternproduktes miteinander multiplizieren (Im folgenden schreiben wir der Einfachheit halber oft F und G, lassen also den Index 2 weg, wenn klar ist dass es sich um quadratische Funktionale handelt). Unser Ziel ist es, erneut einen Ausdruck der Form $\exp_\star(i\,\mathrm{H})$ mit einem quadratischen Funktional H zu gewinnen und verwenden dazu die BCH-Formel (5.1).

Zunächst einmal verschwinden offensichtlich alle Kommutatorterme in (5.1) mit $s_n > 1$ oder $s_n = 0$ und $r_n > 1$.

Für zwei quadratische Funktionale $i\mathrm{F}$ und $i\mathrm{G}$ mit Integralkernen $f, g \in \mathcal{D}(M \times M)$ lautet deren Sternprodukt:

$$\begin{aligned} i\mathrm{F} \star i\mathrm{G} &= -\mathrm{F} \cdot \mathrm{G} - (\frac{i\,\hbar}{2})\,\langle \mathrm{F}^{(1)}, \Delta\, \mathrm{G}^{(1)} \rangle - \frac{1}{2}\,(\frac{i\,\hbar}{2})^2\,\langle \mathrm{F}^{(2)}, \Delta^{\otimes\, 2}\mathrm{G}^{(2)} \rangle \\ &= -\varphi \mathrm{P}_f \varphi \cdot \varphi \mathrm{R}_g \varphi - (\frac{i\hbar}{2}) \varphi \mathrm{P}_f \mathrm{R}_g \varphi + (\frac{\hbar^2}{8}) \mathrm{Tr}_\Delta (\mathrm{P}_f \mathrm{P}_g) \end{aligned} \tag{5.27}$$

Hierbei ist das punktweise Produkt symmetrisch unter Vertauschung von F und G. Aus der Antisymmetrie von Δ folgt, dass $\langle \mathrm{F}^{(1)}, \Delta\, \mathrm{G}^{(1)} \rangle$ antisymmetrisch unter Vertauschung ist, $\langle \mathrm{F}^{(2)}, \Delta^{\otimes\, 2}\mathrm{G}^{(2)} \rangle$ dann wiederum symmetrisch. Für den Sternkommutator folgt damit:

$$[\mathrm{F}, \mathrm{G}]_\star = -i\,\hbar\,\langle \mathrm{F}^{(1)}, \Delta\, \mathrm{G}^{(1)} \rangle \tag{5.28}$$

$$= -4\,i\,\hbar\, \varphi \mathrm{P}_f \mathrm{P}_g \varphi \tag{5.29}$$

Der Sternkommutator ergibt also erneut ein quadratisches Funktional. Also ist auch der Ausdruck (5.2) ein quadratisches Funktional.

5.2.2 Eine Konvergenzbedingung

Seien nun $f, g \in \mathcal{D}(M \times M)$ die Integralkerne der quadratischen Funktionale F und G.

Wir wollen die sup-Norm des Integralkerns $4i\hbar\, \mathrm{P}_f \mathrm{R}_g$ des Kommutators $[\mathrm{F}, \mathrm{G}]$ abschätzen. Wir definieren dazu zusätzlich zu der in Kapitel 4 eingeführten Konstanten C_f noch $\hat{\mathrm{C}}_\mathrm{f}$ wie folgt:

$$\hat{\mathrm{C}}_f = \mu(\mathrm{K}_g)\, ||(f(x, \cdot) * \Delta)(y)|_{\mathrm{K}_f \times \mathrm{K}_g}||_\infty \tag{5.30}$$

Dann folgt zunächst aus ähnlichen Überlegungen wie im Beweis von Korollar 4.6.1:

$$||4i\hbar\, \mathrm{P}_f \mathrm{P}_g||_\infty \leq 4\hbar \hat{\mathrm{C}}_f\, ||g||_\infty \tag{5.31}$$

Außliegt der Träger von $\mathrm{P}_f \mathrm{P}_g$ in $\mathrm{K}_f \times \mathrm{K}_g$.

Wir bezeichnen im Folgenden den Integralkern des quadratischen Funktionals $[\mathrm{F}^{r_1} \mathrm{G}^{s_1} \mathrm{F}^{r_2} \mathrm{G}^{s_2} ... \mathrm{F}^{r_n} \mathrm{G}^{s_n}]_\star$ mit $f_{r_1, s_1, ..., r_n, s_n}$.
Wir erhalten dann iterativ für diesen Integralkern den Ausdruck:

$$f_{r_1, s_1, ..., r_n, s_n} = 2\,(-2\,\hbar)^{\sum_{i=1}^n (r_i + s_i) - 1}\, \mathrm{P}_f^{r_1} \mathrm{P}_g^{s_1} \mathrm{P}_f^{r_2} \mathrm{P}_g^{s_2} ... \mathrm{P}_f^{r_n} \mathrm{P}_g^{s_n} \tag{5.32}$$

Dann folgt aus (5.31) falls $r_1 > 1$:

$$||f_{r_1, s_1, ..., r_n, s_n}||_\infty \leq \hbar\, \mathrm{C}_f \cdot ||f_{r_1 - 1, s_1, ..., r_n, s_n}||_\infty \tag{5.33}$$

bzw., falls $r_1 = 1$:

$$||f_{1, s_1, ..., r_n, s_n}||_\infty \leq \hbar \hat{\mathrm{C}}_f \cdot ||f_{0, s_1 - 1, ..., r_n, s_n}||_\infty \tag{5.34}$$

und falls $r_1 = 0$:

$$||f_{0, s_1, ..., r_n, s_n}||_\infty \leq \hbar \mathrm{C}_g \cdot ||f_{0, s_1 - 1, ..., r_n, s_n}||_\infty \tag{5.35}$$

Desweiteren definieren wir $\epsilon_r, \epsilon_s \in \mathbb{N}$ als die jeweilige Anzahl von Elementen der Indexmengen $\{r_i\}$, $\{s_i\}$ die ungleich Null sind.

Indem wir nun die obigen Abschätzungen iterativ anwenden erhalten wir:

$$||f_{r_1, s_1, ..., r_n, s_n}||_\infty \leq (2\hbar \mathrm{C}_f)^{\sum_{i=1}^n (r_i) - \epsilon_r}\, (2\hbar \hat{\mathrm{C}}_f)^{\epsilon_r}\, (2\hbar \mathrm{C}_g)^{\sum_{i=1}^n (s_i) - \epsilon_s}\, (2\hbar \hat{\mathrm{C}}_g)^{\epsilon_s - 1}\, ||g||_\infty \tag{5.36}$$

falls $s_n > 0$, bzw.

$$||f_{r_1,s_1,\dots,r_n,0}||_\infty \leq (2\hbar\mathrm{C}_f)^{\sum_{i=1}^n(r_i)-\epsilon_r}\,(2\hbar\hat{\mathrm{C}}_f)^{\epsilon_r-1}\,(2\hbar\mathrm{C}_g)^{\sum_{i=1}^n(s_i)-\epsilon_s}\,(2\hbar\hat{\mathrm{C}}_g)^{\epsilon_s}\,||f||_\infty \tag{5.37}$$

falls $s_n = 0$.

Wir definieren daher noch $\kappa_{f,g}(s)$ durch:

$$\kappa_{f,g}(s) := \delta_{s0}\hat{\mathrm{C}}_f^{-1}||f||_\infty + (1-\delta_{s0})\hat{\mathrm{C}}_g^{-1}||g||_\infty \tag{5.38}$$

Wir können damit dann (5.36) und (5.37) zusammenfassen:

$$||f_{r_1,s_1,\dots,r_n,s_n}||_\infty \leq (2\hbar\mathrm{C}_f)^{\sum_{i=1}^n(r_i)-\epsilon_r}\,(2\hbar\hat{\mathrm{C}}_f)^{\epsilon_r}\,(2\hbar\mathrm{C}_g)^{\sum_{i=1}^n(s_i)-\epsilon_s}\,(2\hbar\hat{\mathrm{C}}_g)^{\epsilon_s}\,\kappa_{f,g}(l_n-m_n) \tag{5.39}$$

Wir können jetzt die sup-Norm des quadratischen Funktionals abschätzen, das sich aus der Summe (5.1) ergibt.
Sei dazu im Folgenden h der zu H gehörende Integralkern, dann gilt:

$$\begin{aligned}
||h||_\infty \leq\ & \sum_{n>0}\frac{1}{n}\sum_{\substack{r_i+s_i>0\\1\leq i\leq n}}\frac{(\sum_{i=1}^n(r_i+s_i))^{-1}}{r_1!\cdot s_1!\cdots r_n!\cdot s_n!}\,||f_{r_1,s_1,\dots,r_n,s_n}||_\infty \\
\leq\ & \frac{1}{\hbar}\sum_{n>0}\frac{1}{n}\sum_{\substack{r_i+s_i>0\\1\leq i\leq n}}\frac{(\sum_{i=1}^n(r_i+s_i))^{-1}}{r_1!\cdot s_1!\cdots r_n!\cdot s_n!}\,(2\hbar\mathrm{C}_f)^{\sum_{i=1}^n(r_i)-\epsilon_r}\,(2\hbar\hat{\mathrm{C}}_f)^{\epsilon_r}\,\cdot \\
& \cdot(2\hbar\mathrm{C}_g)^{\sum_{i=1}^n(s_i)-\epsilon_s}\,(2\hbar\hat{\mathrm{C}}_g)^{\epsilon_s}\cdot\kappa_{f,g}(s_n) \\
=\ & \frac{1}{\hbar}\cdot\sum_{n>0}\frac{1}{n}\sum_{s_1+r_1=1}^{\infty}\dots\sum_{s_{n-1}+r_{n-1}=1}^{\infty}\frac{1}{r_1!\cdot s_1!\cdot\ldots\cdot r_{n-1}!\cdot s_{n-1}!}\cdot(2\hbar\mathrm{C}_f)^{\sum_{i=1}^{n-1}r_i}\,(2\hbar\mathrm{C}_g)^{\sum_{i=1}^{n-1}s_i} \\
& \prod_{j=1}^{n-1}((\frac{\hat{\mathrm{C}}_f}{\mathrm{C}_f})^{1-\delta_{r_j,0}}\,(\frac{\hat{\mathrm{C}}_g}{\mathrm{C}_g})^{1-\delta_{s_j,0}})\cdot\sum_{l_n=1}^{\infty}\sum_{m_n=0}^{k_n}\frac{(\sum_{i=1}^{n-1}(r_i+s_i)+(l_n))^{-1}}{m_n!\cdot(l_n-m_n)!}\,(2\hbar\mathrm{C}_f^{m_n})\,(2\hbar\mathrm{C}_g)^{l_n-m_n}\ \cdot \\
& \cdot(\frac{\hat{\mathrm{C}}_f}{\mathrm{C}_f})^{1-\delta_{m_n,0}}\,(\frac{\hat{\mathrm{C}}_g}{\mathrm{C}_f})^{1-\delta_{l_n-m_n,0}}\kappa_{f,g}(l_n-m_n)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle definieren wir der Einfachheit halber μ_f und μ_g durch:

$$\mu_f := \frac{\hat{\mathrm{C}}_f}{\mathrm{C}_f},\quad \mu_g := \frac{\hat{\mathrm{C}}_g}{\mathrm{C}_g},\quad \lambda_{f,g} = \frac{\hat{\mathrm{C}}_g||f||_\infty}{\hat{\mathrm{C}}_f||g||_\infty} \tag{5.40}$$

Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned}
||h||_\infty \leq\ & \frac{||g||_\infty}{\hbar\,\hat{\mathrm{C}}_g}\cdot\sum_{n>0}\frac{1}{n}\sum_{s_1+r_1=1}^{\infty}\dots\sum_{s_{n-1}+r_{n-1}=1}^{\infty}\frac{1}{r_1!\cdot s_1!\cdot\ldots\cdot r_{n-1}!\cdot s_{n-1}!}\cdot\cdot(2\hbar\mathrm{C}_f)^{\sum_{i=1}^{n-1}r_i}\,(2\hbar\mathrm{C}_g)^{\sum_{i=1}^{n-1}s_i}\ \cdot \\
& \cdot\sum_{l_n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n-1}(r_i+s_i)+l_n)}\frac{1}{l_n!}\cdot(2\hbar)^{l_n}\cdot\prod_{j=1}^{n-1}((\frac{\hat{\mathrm{C}}_f}{\mathrm{C}_f})^{1-\delta_{r_j,0}}(\frac{\hat{\mathrm{C}}_g}{\mathrm{C}_g})^{1-\delta_{s_j,0}})\ \cdot \\
& \cdot[\mu_f\cdot\mu_g\underbrace{\sum_{m_n=0}^{l_n}(\binom{l_n}{m_n}\mathrm{C}_f^{m_n}\mathrm{C}_g^{l_n-m_n})}_{=(\mathrm{C}_f+\mathrm{C}_g)^{l_n}}-\mu_f\cdot\mu_g(\mathrm{C}_f^{l_n}+\mathrm{C}_g^{l_n})+(\lambda_{f,g}\mu_f\mathrm{C}_f^{l_n}+\mu_g\mathrm{C}_g^{l_n})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq\quad & \frac{||g||_\infty}{\hbar\,\hat{\mathrm{C}}_g}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu_f\cdot\mu_g)^n}{n}\sum_{l_1=1}^{\infty}(2\hbar)^{l_1}\frac{(\mathrm{C}_f+\mathrm{C}_g)^{l_1}-(\mathrm{C}_f^{l_1}+\mathrm{C}_g^{l_1})+\mu_g^{-1}\mathrm{C}_f^{l_1}+\mu_f^{-1}\mathrm{C}_g^{l_1}}{l_1!}\cdot\ldots\cdot\\
&\cdot\sum_{l_n=1}^{\infty}(2\hbar)^{l_n}\frac{(\mathrm{C}_f^{l_n}+\mathrm{C}_g)^{l_n}-(\mathrm{C}_f^{l_n}+\mathrm{C}_g^{l_n})+\lambda_{f,g}\mu_g^{-1}\mathrm{C}_f^{l_n}+\mu_f^{-1}\mathrm{C}_g^{l_n}}{l_n!}\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(l_i)}\\
<\quad & \frac{||g||_\infty}{\hbar\,\hat{\mathrm{C}}_\infty}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu_f\cdot\mu_g)^n}{n^2}\sum_{l_1=1}^{\infty}(2\hbar)^{l_1}\frac{(\mathrm{C}_f+\mathrm{C}_g)^{l_1}-(\mathrm{C}_f^{l_1}+\mathrm{C}_g^{l_1})+\mu_g^{-1}\mathrm{C}_f^{l_1}+\mu_f^{-1}\mathrm{C}_g^{l_1}}{l_1!}\cdot\ldots\cdot\\
&\cdot\sum_{l_n=1}^{\infty}(2\hbar)^{l_n}\frac{(\mathrm{C}_f+\mathrm{C}_g)^{l_n}-(\mathrm{C}_f^{l_n}+\mathrm{C}_g^{l_n})+\lambda_{f,g}\mu_g^{-1}\mathrm{C}_f^{l_n}+\mu_f^{-1}\mathrm{C}_g^{l_n}}{l_n!}\\
=\quad & \frac{||g||_\infty}{\hbar\,\hat{\mathrm{C}}_g}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu_f\cdot\mu_g)^n}{n^2}[(\mathrm{e}^{2\hbar(\mathrm{C}_f+\mathrm{C}_g)}-\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_f}-\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_g}+1+\mu_g^{-1}(\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_f}-1)+\mu_f^{-1}(\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_g}-1)]^{(n-1)}\cdot\\
&\cdot[\mathrm{e}^{2\hbar(\mathrm{C}_f+\mathrm{C}_g)}-\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_f}-\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_g}+1+\lambda_{f,g}\mu_g^{-1}(\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_f}-1)+\mu_f^{-1}(\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_g}-1)] \qquad (5.41)
\end{aligned}$$

Wir verwenden an dieser Stelle das Quotientenkriterium, um eine Konvergenzbedingung an die Reihe (5.41) stellen zu können. Der Grenzwert des Quotienten der obigen Reihe lautet:

$$\mu_f\cdot\mu_g[\mathrm{e}^{2\hbar(\mathrm{C}_f+\mathrm{C}_g)}-\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_f}-\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_g}+1+\mu_g^{-1}(\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_f}-1)+\mu_f^{-1}(\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_g}-1)]\overset{!}{<}1 \qquad (5.42)$$

Bei dem obigen Ausdruck, der kleiner 1 werden soll, handelt es sich um eine streng monoton wachsende Funktion in den Variablen $\mathrm{C}_f,\mathrm{C}_g,\hat{\mathrm{C}}_f,\hat{\mathrm{C}}_g$. Wir entwickeln für kleine $\mathrm{C}_f,\mathrm{C}_g$:

$$\begin{aligned}
& \mu_f\cdot\mu_g[\mathrm{e}^{2\hbar(\mathrm{C}_f+\mathrm{C}_g)}-\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_f}-\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_g}+1+\mu_g^{-1}(\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_f}-1)+\mu_f^{-1}(\mathrm{e}^{2\hbar\mathrm{C}_g}-1)]\\
=\quad & 2\hbar^2\hat{\mathrm{C}}_f\hat{\mathrm{C}}_g+2\hbar\hat{\mathrm{C}}_f+\hbar^2\hat{\mathrm{C}}_f\mathrm{C}_f+2\hbar\hat{\mathrm{C}}_g+\hbar^2\hat{\mathrm{C}}_g\mathrm{C}_g+\mathcal{O}(\mathrm{C}_f^2,\mathrm{C}_g^2)
\end{aligned}$$

Ganz offensichtlich geht der obige Ausdruck (5.43) gegen Null, wenn $\hat{\mathrm{C}}_f$ und $\hat{\mathrm{C}}_g$ gegen Null gehen.

Wollen wir etwas überschaubarere Konvergenzbedingungen erhalten, so müssen wir noch weiter abschätzen: Der Ausdruck auf der linken Seite der Ungleichung (5.42) ist monoton wachsend in C_g, C_f, $\hat{\mathrm{C}}_g$ und $\hat{\mathrm{C}}_f$. Wir definieren daher $\tilde{\mathrm{C}_f}:=\max\{\mathrm{C}_f,\hat{\mathrm{C}}_f\}$ und $\tilde{\mathrm{C}}_g:=\max\{\mathrm{C}_g,\hat{\mathrm{C}}_g\}$. Damit sind dann aber die Konstanten μ_f und μ_g in (5.42) gleich 1 und wir erhalten als Konvergezbedingung:

$$\mathrm{e}^{2\hbar(\mathrm{C}_f+\mathrm{C}_g)}\overset{!}{<}1 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{C}_f+\mathrm{C}_g<\frac{\ln(2)}{2\hbar} \qquad (5.43)$$

□

5.3 Produkte quadratischer Operatoren auf dem Fockraum

Wir gehen nun wieder zur Betrachtung der Situation auf dem Fockraum über und orientieren uns dabei erneut an den Rechnungen aus [11].

Wir führe dazu nun eine symplektische Form auf H^2 ein:

Definition 5.3.1. *Für $F,G\in H^2$ sei $\sigma(F,G)\equiv<(J\otimes\mathbb{1})F,G>$*

Die Abbildung $\sigma: H^2\times H^2\mapsto\mathbb{R}$ ist bilinear und alternierend, da $J\otimes\mathbb{1}$ unitär ist, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\sigma(F,G) &= <(J\otimes\mathbb{1})(J\otimes\mathbb{1})F,(J\otimes\mathbb{1})G>\\
&= <(-\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})F,(J\otimes\mathbb{1})G>=-<(J\otimes\mathbb{1})G,F>=-\sigma(G,F) \qquad (5.44)
\end{aligned}$$

Zusätzlich ist diese Form auch nicht entartet, da für $\sigma(F,G)=0$ für alle $F\in H^2$ folgt, dass:

$$0=\sigma(-(J\otimes\mathbb{1})G,G)=-<(J\otimes\mathbb{1})^2G,G>=<G,G>=||G||^2, \qquad (5.45)$$

was besagt dass $G = 0$ ist. Wir bemerken, dass für einfache Tensorprodukte $f_1 \otimes f_2, g_1 \otimes g_2 \in H^2$ folgt, dass:

$$\sigma(f_1 \otimes f_2, g_1 \otimes g_2) =< (Jf_1) \otimes f_2, g_1 \otimes g_2 >=< Jf_1, g_1 >< f_2, g_2 >= \sigma(f_1, g_1) < f_2, g_2 >, \tag{5.46}$$

wobei das endgültige σ natürlicherweise eine symplektische Form auf H ist.

Wir wollen nun das Produkt der Exponentiale zweier quadratischer Fockraumoperatoren bilden, d.h. für $F, G \in H^2$ den Ausdruck $\exp(i\,\Psi(F))\exp(i\,\Psi(G))\varphi$. Wir wissen von Satz 4.6.5, dass $\varphi \in \mathcal{F}_0$ ein analytischer Vektor für $\exp(i\,\Psi(G))$ ist solange $||F|| < \frac{1}{4\cdot\sqrt{2}}$ gilt, und dass die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\Psi(G)^n\varphi$ dann absolut konvergiert. Allerdings müssen wir aufgrund der Bemerkung 4.6.6 zunächst noch überprüfen, inwiefern $\exp(i\,\Psi(G))\varphi$ ein analytischer Vektor für $\exp(i\,\Psi(F))$ ist.

Satz 5.3.2. *Der Vektor* $\exp(i\,\Psi(G))\varphi$ *ist für den Operator* $\exp(i\,\Psi(F))$.

Desweiteren existiert das Produkt der Operatoren $\exp(i\,\Psi(F))$ *und* $\exp(i\,\Psi(G))$*, wenn für* F, G *gilt, dass:*

$$\|F\|, \|G\| < \frac{1}{8\sqrt{2}} \tag{5.47}$$

Beweis: Zunächst einmal sei

$$||F|| < \frac{1}{4\cdot\sqrt{2}}$$

Nach Satz 4.6.5 gilt dann die Darstellung:

$$\exp(i\,\Psi(F))\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!}\,\Psi(F)^m\varphi \tag{5.48}$$

Aus (4.83) wissen wir bereits, dass gilt:

$$||\Psi(F)^n\varphi|| \leq 2^{n/2}\,(2\cdot||F||)^n\,[(n_\varphi+1)(n_\varphi+2)...(n_\varphi+2n))]^{1/2}\,||\varphi|| \tag{5.49}$$

Damit folgt dann für $||\Psi(F)^n\,\Psi(G)^m\varphi||$:

$$\begin{aligned} & ||\Psi(F)^n\,\Psi(G)^m\varphi|| \leq 2^{n/2}\,(2\cdot||F||)^n\,[(n_\varphi+2m+1)...(n_\varphi+2m+2n)]^{1/2}\,||\Psi(G)^m\varphi|| \\ \leq\; & 2^{n/2}\,(2\cdot||F||)^n 2^{m/2}\,(2\cdot||G||)^m\,[(n_\varphi+1)...(n_\varphi+2m)\cdot \\ & \cdot(n_\varphi+2m+1)...(n_\varphi+2m+2n)]^{1/2}\,||\varphi|| \\ \leq\; & 2^{(n+m)/2}\,(2\cdot||F||)^n\,(2\cdot||G||)^m\,\sqrt{(n_\varphi+2m+2n)!}\,||\varphi|| \\ \leq\; & 2(n+m)/2)\,(2\cdot||F||)^n\,(2\cdot||G||)^m\,(n_\varphi+4n)!^{1/4}(n_\varphi+4m)!^{1/4}\,||\varphi|| \end{aligned} \tag{5.50}$$

Wobei die letzte Ungleichung aus der Abschätzung $(n+m)! \leq \sqrt{(2n)!(2m!)}$ folgt. Wir können die Reihe $\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,m!}\,||\Psi(F)^n\Psi(G)^m\varphi||$ also nach oben durch

$$(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!}\,(2\cdot||F||)^n(n_\varphi+4n)!^{1/4})(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{m/2}}{m!}\,(2\cdot||G||)^m(n_\varphi+4m)!^{1/4})||\varphi|| \tag{5.51}$$

Wir können nun das Quotientenkriterium verwenden, um die Konvergenz der obigen Reihen zu überprüfen. Für die rechte Reihe erhalten wir als Konvergenzbedingung:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{2^{m/2}}{m!}\,(2\cdot||G||)^m(n_\varphi+4m)!^{1/4}}{\frac{2^{(m-1)/2}}{(m-1)!}\,(2\cdot||G||)^{(m-1)}(n_\varphi+4m-4)!^{1/4}} \\ =\; & \sqrt{2}2\cdot||G||\frac{1}{m}[(n_\varphi+4m-3)...(n_\varphi+4m)]^{1/4} \\ \leq\; & \sqrt{2}2\cdot||G||\frac{1}{m}(n_\varphi+4m)\; m \overset{\rightarrow}{\rightarrow} \infty\; 4\sqrt{2}2\cdot||G|| \overset{!}{<} 1 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Wir benötigen also für die Konvergenz der Reihen in (5.51), dass

$$||F||, ||G|| < \frac{1}{8\sqrt{2}} \tag{5.53}$$

gilt. Damit haben wir dann die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{i^{n+m}}{n!m!} \Psi(F)^n \Psi(G)^m \varphi \tag{5.54}$$

bewiesen, sofern die obige Bedingung an die Normen von $F, G \in H^2$ erfüllt sind. Damit haben wir die Existenz des Produktes der Operatoren $\exp i\Psi(F)$ und $\exp i\Psi(G)$ bewiesen, sowie dass φ ein analytischer Vektor für das Produkt ist für alle $\varphi \in \mathcal{F}_0$. □

In Satz 6.2 wurde die absolute Konvergenz der Exponentialreihen des Produktes $\exp i\Psi(F) \exp i\Psi G$ auf $\mathcal{F}_0$ bewiesen. Da die Reihen absolut konvergieren können wir die Baker-Campbell-Hausdorff Formel verwenden, um die Reihen umzusortieren und so einen geschlossenen Ausdruck für das Produkt in Form eines Exponentials zu erhalten. Dafür benötigen wir zunächst die auftretenden Kommutatorrelationen.

Hierfür definieren wir zunächst zwei Abbildungen $b : H \times H^2 \mapsto H$ sowie $B : H^2 \times H^2 \mapsto H^2$, die bei der Berechnung der in der BCH-Formel auftretenden Kommutatorrelationen eine Rolle spielen werden.

Definition 5.3.3. *Für jedes $f \in H$ and $F \in H^2$ sei $b(f, F)$ das Element von H so dass:*

$$< b(f, F), g >= \sigma(f \otimes g, F) \tag{5.55}$$

gilt für alle $g \in H$

Lemma 5.3.4. *b ist eine wohldefinierte Abbildung von $H \times H^2$ nach H*
Für die Norm von $b(f, F)$ gilt die Abschätzung

$$||b(f, F)|| \leq ||f|| \, ||F|| \tag{5.56}$$

Für $F = f_1 \otimes f_2$ gilt:

$$b(f, f_1 \otimes f_2) = \sigma(f, f_1) f_2 \tag{5.57}$$

Definition 5.3.5. *Für $F, G \in H^2$ sei $B(F, G)$ das Element von H^2, für das $b(h, B(F, G)) = b(b(h, F), G)$ für alle $h \in H$ gilt.*

Lemma 5.3.6. *B ist eine wohldefinierte beschränkte Abbildung von $H^2 \times H^2$ nach H^2*
Die Norm von $B(F, G)$ erfüllt die Abschätzung:

$$||B(F, G)|| \leq ||F|| \, ||G|| \tag{5.58}$$

Wir benötigen nun die Kommutatorrelationen zwischen zwei quadratischen Operatoren sowie die zwischen einem linearen und einem quadratischen Operator:

Lemma 5.3.7. *Für alle $f \in H$, $F, G \in P_+ H^2$ und $\varphi \in \mathcal{F}_0$ gilt:*

$$[\psi(f), \Psi(G)]\varphi = 2i\psi(b(f, G))\varphi \tag{5.59}$$

$$[\Psi(F), \Psi(G)]\varphi = 4i\Psi(P_+ B(F, G))\varphi + 2i\sigma(F, G)\varphi \tag{5.60}$$

Seien nun $F, G \in H^2$ so gewählt, dass die Konvergenzbedingung (5.53) erfüllt ist. Aufgrund der absoluten Konvergenz der im Produkt der Exponentiale auftretenden Reihen können wir dann für $\varphi \in \mathcal{F}_0$ die in den Reihen auftretenden Potenzen umsortieren und erhalten nach der Baker-Campbell-Hausdorff Formel den Ausdruck:

$$\mathrm{e}^{i\Psi(F)}\mathrm{e}^{i\Psi(G)}\varphi = \mathrm{e}^{i\mathcal{P}(F,G)}\varphi, \tag{5.61}$$

wobei $\mathcal{P}(F,G)$ einen Operator auf dem Fockraum bezeichnet, für den gilt:

$$\mathcal{P}(F,G) = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i + s_i > 0 \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(r_i + s_i)\right)^{-1}}{r_1! s_1! \ldots r_n! s_n!} [F^{r_1}G^{s_1}F^{r_2}G^{r_2}\ldots F^{r_n}G^{s_n}], \tag{5.62}$$

unter Verwendung der Notation:

$$\begin{aligned}
[F^{r_1}G^{s_1}\ldots F^{r_n}G^{s_n}] \quad := \quad & \underbrace{[i\Psi(F),[i\Psi(F),\ldots[i\Psi(F)}_{r_1}[,\underbrace{[i\Psi(G),[i\Psi(G)\ldots[i\Psi(G)}_{s_1}, \\
& \ldots\underbrace{[i\Psi(F),[i\Psi(F),\ldots[i\Psi(F)}_{r_n},\underbrace{[i\Psi(G),[i\Psi(G),\ldots i\Psi(G)]}_{s_n}]\ldots] \qquad (5.63)
\end{aligned}$$

Satz 5.3.8. *Für den Operator $\mathcal{P}(F,G)$ aus Formel* (5.61) *gilt:*

$$\mathcal{P}(F,G) = \Lambda(F,G) + \alpha(F,G), \tag{5.64}$$

wobei es sich bei $\Lambda(F,G)$ um einen quadratischen Operator auf dem Fockraum handelt und bei $\alpha(F,G)$ um eine Konstante.

Beweis: Wir wissen aus (5.60), dass der Kommutator zweier quadratischer Fockraumoperatoren mit Definitionsbereich $\mathcal{F}_0$ erneut einen quadratischen Operator mit demselben Definitionsbereich sowie eine zusätzliche additive Konstante ergibt:

$$[i\Psi(F), i\Psi(G)] = i(-4\Psi(P_+B(F,G)) - 2\sigma(F,G)\mathbb{1}) \tag{5.65}$$

Wir wenden diese Formel iterativ auf den Kommutator

$$[F^{r_1}G^{s_1}\ldots F^{r_n}G^{s_n}]$$

aus (5.63) an. Die Konstante des innersten Kommutatorterms entfällt im nächsthöheren Kommutator. Wir erhalten also als Ausdruck für den obigen Kommutatorterm einen quadratischen Operator, sowie eine zusätzliche Kostante. Aufsummation aller dieser in der Baker-Campbell-Hausdorff Formel auftretenden Kommutatortermerme ergibt die Behauptung. □

Kapitel 6

Automorphismen der Weylalgebra

In diesem Kapitel stellen wir kurz eine Beobachtung vor, die für den restlichen Teil der Arbeit nicht relevant, dafür aber von eigenständigem Interesse ist.

Wir zeigen, dass sich mit Hilfe eines quadratischen Funktionals F_2 ein Automorphismus α_{F_2} der Weylalgebra definieren lässt.

Wir erhalten also eine Abbildung:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_2 & \rightarrow & \mathrm{aut}(\mathcal{W}) \\ \mathrm{F}_2 & \mapsto & \alpha_{\mathrm{F}_2} \end{array} \tag{6.1}$$

Wir betrachten dazu ein quadratisches Funktional $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{F}_2$ sowie ein lineares Funktional $\mathrm{G}_1 \in \mathcal{W}$ auf Feldern $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Wir wollen zunächst das folgende Produkt zwischen diesen Funktionalen berechnen:

$$\exp_\star(i\,\mathrm{F}_2) \star \mathrm{G}_1 \star \exp_\star(-i\,\mathrm{F}_2) \tag{6.2}$$

Wenn das obige Produkt existiert, so ist es durch

$$\mathrm{e}^{i\,\mathrm{F}_2(\varphi)} \star \mathrm{G}_1 \star \mathrm{e}^{-i\,\mathrm{F}_2(\varphi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\mathrm{F}_2, \ldots, [\mathrm{F}_2, \mathrm{G}_1] \ldots]_\star}_{\text{n-facher Kommutator}} \tag{6.3}$$

bestimmt.

Wir verwenden für das lineare Funktional G_1 in (1.2) zunächst den Ausdruck $\varphi(f) = \int \mathrm{d}x\, f(x)\varphi(x)$, denn der einfache Kommutator zwischen dem quadratischen Funktional F_2 und dem linearen Funktional G_1 ergibt erneut ein lineares Funktional, dem wir eine entsprechende Testfunktion zuordnen können, und wir erhalten den Ausdruck:

$$[\mathrm{F}_2, \varphi(f)] = \varphi(\mathrm{A}\, f) \tag{6.4}$$

Es ergibt sich nach Gleichung (6.3) als Ausdruck für das Produkt:

$$\mathrm{e}^{i\,\mathrm{F}_2(\varphi)} \star \mathrm{G}_1(\varphi) \star \mathrm{e}^{-i\,\mathrm{F}_2(\varphi)} = \varphi(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \mathrm{A}^n\, f) \tag{6.5}$$

Um die Existenz des Produkts (6.2) nachzuprüfen, reicht es also aus, die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \mathrm{A}^n\, f \tag{6.6}$$

in $\mathcal{D}(M)$ zu zeigen.

Zuerst wollen wir dazu A berechnen:
Für den Kommutator benötigen wir die Funktionalableitungen:

$$\frac{\delta\,\mathrm{F}_2}{\delta\,\varphi}(x) = 2\int \mathrm{d}y\, f(x,y)\varphi(y) \tag{6.7}$$

$$\frac{\delta\,\mathrm{G}_1}{\delta\,\varphi}(x) = g(x) \tag{6.8}$$

Wir verwenden dies, um die Sternprodukte zu berechnen:

$$\mathrm{F}_2 \star \mathrm{G}_1 = \mathrm{F}_2\,\mathrm{G}_1 + \frac{i\hbar}{2}2\int\int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\, f(x,y)\,\varphi(x)\,\Delta(y-z)\,g(z) \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_1 \star \mathrm{F}_2 &= \mathrm{G}_1\,\mathrm{F}_2 + \frac{i\hbar}{2}2\int\int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\, g(x)\,\Delta(x-y)\,f(z,y)\,\varphi(z) \\ &= \mathrm{G}_1\,\mathrm{F}_2 + \frac{i\hbar}{2}2\int\int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\, f(x,y)\,\varphi(x)\Delta(z-y)\,g(z)\end{aligned} \tag{6.10}$$

Wir erhalten für den Kommutator:

$$[\mathrm{F}_2, \mathrm{G}_1] = 2\,i\hbar\int\int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z f(x,z)\,\Delta(z-y)\,g(y) \tag{6.11}$$

und wir haben damit A bestimmt:

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}\,g)(x) &= 2\,i\hbar\int\int \mathrm{d}y\mathrm{d}z\, f(x,z)\,\Delta(z-y)\,g(y) \\ &= -2\,i\,\hbar\int\int \mathrm{d}y\mathrm{d}z\, f(x,z)\,\Delta(y-z)\,g(y) \qquad (6.12) \\ &= -2\,i\hbar\int \mathrm{d}y\,(f(x,\cdot)*\Delta)(y)\,g(y) \qquad (6.13)\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $(f(x,\cdot)*\Delta)(y)$ die Faltung von $f \in \mathcal{D}(M)$ mit $\Delta \in \mathcal{D}'(M)$. Wir definieren $a(x,y)$ durch:

$$a(x,y) = -2\,i\,\hbar\,(f(x,\cdot)*\Delta)(y) \tag{6.14}$$

Und können damit A durch einen Integralkern ausdrücken:

$$(\mathrm{A}\,g)(x) = \int \mathrm{d}y\, a(x,y)\,g(y) \tag{6.15}$$

Es gilt dann, dass $(f(x,\cdot)*\Delta)(y)$ als Funktion in y eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion ist [6], S.20,(0.33).
Es ist $a(x,y)$ offensichtlich auch $\mathcal{C}^\infty$ in x und es folgt:

$$a(\cdot,\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(M\times M) \tag{6.16}$$

Nun hat $f(x,y)$ einen kompakten Träger in $M\times M$, also $\operatorname{supp} f \subseteq K\times K$ für K kompakt. Damit gilt dann aber auch $\operatorname{supp} a \subseteq K\times M$.

Da $g \in \mathcal{D}(M)$, hat g kompakten Träger: $\operatorname{supp} g \subseteq K_g$. Wir können also den Träger von $a(x,y)$ in y auf den Träger von g einschränken, ohne den Wert des Integrals (6.15) zu verändern.

$$\Rightarrow \operatorname{supp} a \subseteq K\times K_g \tag{6.17}$$

Wenn nun aber $a(x,y)$ kompakten Träger hat, so können wir die Supremumsnorm bilden, die aber über den Träger von unserer konkreten Wahl von g abhängt:

$$\|a(\cdot,\cdot)\|_\infty = C_g < \infty \tag{6.18}$$

Wir können jetzt die sup-Norm von Ag durch die von g abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{A}\, g\|_\infty &= \| \int_{K_g} \mathrm{d}y\, a(x,y)\, g(y)\|_{\infty,x} \\
&\leq \| \int \mathrm{d}y\, \|a(x,y)\, g(y)\|_{\infty,y}\, \|_{\infty,x} \\
&= \| \, \mu(K_g)\, \|a(x,y)\, g(y)\|_{\infty,y}\, \|_{\infty,x} \\
&\leq \underbrace{\mu(K_g)\, \|a(\cdot,\cdot)\|_\infty}_{=\mu(K_g)\, C_g =: C_g'} \|g(y)\|_\infty = C_g' \, \|g\|_\infty,
\end{aligned} \tag{6.19}$$

wobei allerdings C_g' vom Träger von g abhängt.

Ist nun jedoch $h \in \mathcal{D}(M)$, so sehen wir aus Gleichung (6.15) sofort, dass der Träger von $(\mathrm{A}\, h)(x)$ nicht mehr von h abhängt, denn wenn erneut supp $f \subseteq K \times K$, so folgt:

$$\mathrm{suppA}\, h \subseteq K \tag{6.20}$$

Sei also C die sup-Norm von $a(\cdot,\cdot)$ auf $K \times K$, $C' = \mu(K)\, C$, so folgt aus den obigen Überlegungen:

$$\|\mathrm{A}^n\, g\|_\infty \leq C_g' \cdot (C')^{n-1}\, \|g\|_\infty, \tag{6.21}$$

und damit die Konvergenz der Reihe (6.6) bezüglich der Supremumsnorm.

Die Konvergenz der Ableitungen bezüglich der Supremumsnorm folgt dann direkt aus (6.15) durch Differenzieren unter dem Integral und der Tatsache, dass $g(x)$ und $a(x,y)$ $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen sind.

Damit ist die Konvergenz der Reihe (6.6) und damit auch die Existenz des Produktes (6.2) bewiesen.

Bemerkung 6.0.9. *Es ist Bemerkenswert, dass die Konvergenzresultate dieses Kapitels nicht von der Größe des Integralkerns von* F_2 *abhängen, dass also die Reihe* (6.3) *für alle quadratischen Funktionale mit Integralkern in* $\mathcal{D}(M \times M)$ *existiert.*

Kapitel 7

GNS Darstellung von Quasi $*$-Algebren

7.1 Quasi $*$-Algebren

Sicherlich lässt sich eine Menge angeben, die durch $\mathrm{C}_f, \mathrm{C}_g, \hat{\mathrm{C}}_f, \hat{\mathrm{C}}_g$ charakterisiert wird, und auf der die Reihe (5.41), die aus dem Produkt zweier Exponentiale gebildet wird, immer konvergiert. Wir müssen jedoch auch noch berücksichtigen, dass die Abschätzung der sup-Norm von h ebenfalls explizit von $||g||_\infty$ und $||f||_\infty$ abhängt. Damit ist zu erwarten, dass diese auch zur Konstanten C_h beitragen, die für die Konvergenz des Sternexponentials des sich aus (5.41) ergebenden Integralkerns verantwortlich ist.

Ein einfaches Argument zeigt bereits, dass es nicht möglich ist, eine unter mehrfacher Sternmultiplikation abgeschlossene Nullumgebung zu finden: Wäre die Algebra nun unter Sternmultiplikation abgeschlossen, so könnte F beliebig oft mit sich selbst multipliziert werden. Da der Sternkommutator von F mit sich selbst verschwindet erhalten wir nach der BCH-Regel:

$$\underbrace{\exp_\star(\mathrm{F}) \star \exp_\star(\mathrm{F}) \star ... \star \exp_\star(\mathrm{F})}_{\text{n mal}} = \exp_\star(n \cdot \mathrm{F}) \tag{7.1}$$

und wir erhalten als Integralkern des n-fachen Sternproduktes $n \cdot f$. Damit gilt aber für die zugehörige Konstante:

$$\mathrm{C}_{n \cdot f} = n \cdot \mathrm{C}_f \tag{7.2}$$

und die Konvergenzbedingung wäre für hinreichend großes n verletzt.

Wir verfolgen daher hier einen etwas anderen Ansatz, und zwar verwenden wir die in Definition 5.1.3 eingeführte Menge $\tilde{\mathcal{U}}$.
Wir verwenden die Tatsache dass sich Elemente aus $\tilde{\mathcal{U}}$ mit Elementen aus $\mathcal{W}$ multiplizieren lassen, und dass deren Sternprodukt in Form eines Sternexponentials der Form $\exp_\star(i(\mathrm{F}_2 + \mathrm{J}_1 + c))$ existiert. Wir definieren dann $\mathcal{A}$ wie folgt:

$$\mathcal{A} = \{\exp_\star(i(\mathrm{F}_2 + \mathrm{J}_1 + c)) | \mathrm{F}_2 \in \tilde{\mathcal{U}},\ \mathrm{J}_1 \text{ hat Integralkern mit Träger in } \mathcal{D}(M),\ c \in \mathbb{R}\} \tag{7.3}$$

Dann definiert $\mathcal{A}$ zunächst ein Bimodul über $\mathcal{W}$ (Dies wird im folgenden Kapitel durch den Begriff der Quasi $*$-Algebren noch weiter präzisiert werden).

Wenn wir nun zwei Elemente x_1, x_2 aus $\mathcal{A}$ von der Form $x_1 = \exp_\star(i(\mathrm{F}_2 + \mathrm{J}_1 + c))$ und $x_2 = \exp_\star(i(\mathrm{G}_2 + \mathrm{J}_1 + d))$ betrachten, so ist die Frage ob deren Sternprodukt existiert äquivalent dazu, ob die zu F_2 und G_2 gehörige Reihe (5.41) konvergiert. Um die entsprechenden Produkte berücksichtigen zu können weisen wir jedem $x \in \tilde{\mathcal{U}}$ mit $x = \exp_\star(i(\mathrm{F}_2 + \mathrm{J}_1 + c))$ die folgende Menge $M(x)$

zu:

$$M(x) := \{\exp_\star(i(\mathrm{G}_2{+}\mathrm{J}_1{+}d))|\mathrm{G}_2 \in \tilde{\mathcal{U}} : ||g||_\infty, \mathrm{C}_g, \hat{\mathrm{C}}_g \text{ sind klein genug, so dass (5.41) konvergiert}\} \tag{7.4}$$

Desweiteren definieren wir für eine Teilmenge $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ die Menge $M(\mathcal{C})$ wie folgt:

$$M(\mathcal{C}) = \cap_{x\in\mathcal{C}} M(x) \tag{7.5}$$

Bemerkung 7.1.1. *Offensichtlich gilt* $M(\mathcal{A}) = \mathcal{W}$

Wir betrachten zunächst nur das Produkt zwischen den Sternexponentialen der Funktionale aus $\tilde{\mathcal{U}}$ mit Elementen der Weylalgebra $\mathcal{W}$.

Wir haben in 5.1.2 gesehen, dass die Frage der Konvergenz von Sternexponentialen der Form $\exp_\star(i(\mathrm{F}_f + \mathrm{J}_1))$ nicht von J_1 abhängt. Daher ist es naheliegend, den Raum $\mathcal{A}$ zu betrachten, der von Elementen der Form $\exp_\star(i(\mathrm{F}_2 + \mathrm{J}_1 + c))$ erzeugt wird, wobei $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{F}_2$ liegt, J_1 ein lineares Funktinal mit Integralkern in $\mathcal{D}(M)$ ist und $c \in \mathbb{R}$ gilt.

Wir führen dazu jetzt den Begriff der Quasi ∗-Algebra ein und folgen dabei [9]:

7.2 Die Quasi ∗-Algebra

Sei $\mathcal{A}$ ein komplexer Vektorraum und sei $\mathcal{A}_0$ eine ∗-Algebra die in $\mathcal{A}$ enthalten ist. Zur Definition der Quasi ∗-Algebra:

Definition 7.2.1. *Wir sagen dass $\mathcal{A}$ eine Quasi ∗-Algebra über $\mathcal{A}_0$ ist, wenn gilt:*

- *die Linksmultiplikation ax und die Rechtsmultiplikation xa zwischen einem Element a von $\mathcal{A}$ und einem Element x von $\mathcal{A}_0$ setzen die Multiplikation von $\mathcal{A}_0$ fort und sind immer definiert und bilinear.*
- *es gilt $x_1(x_2a) = (x_1x_2)a$ und $x_1(ax_2) = (x_1a)x_2$ für alle $x_1, x_2 \in \mathcal{A}_0$ und $a \in \mathcal{A}$*
- *es gibt eine Involution ∗ auf $\mathcal{A}$, die die Involution von $\mathcal{A}_0$ fortsetzt mit der Eigenschaft, dass $(ax)^* = x^*a^*$ und $(xa)^* = a^*x^*$ für alle $x \in \mathcal{A}_0$ und $a \in \mathcal{A}$.*

Wir bezeichnen dann die Quasi ∗-Algebra üblicherweise mit $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_0)$

Wir wählen $\mathcal{A}_0 = \mathcal{W}$ und verwenden die Definition von $\mathcal{A}$ wie in (7.3). Damit bildet $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_0)$ zusammen mit der Sternmultiplikation und der üblichen Involution eine Quasi ∗-Algebra.

7.3 Zum Begriff der partiellen Algebra

Wie wir im vorigen Kapitel gezeigt haben, können wir unter geeigneten Bedingungen nicht nur Elemente aus der obigen Algebra $\mathcal{A}$ mit Elementen aus $\mathcal{A}_0 = \mathcal{W}$ sternmultiplizieren, sondern auch zwei Elemente aus $\mathcal{A} \in \mathcal{W}$ untereinander. In diesem Fall hängt es jedoch vom jeweiligen Element aus $\mathcal{A} \in \mathcal{W}$ ab, mit welchen anderen Elementen aus $\mathcal{A} \in \mathcal{W}$ sich dieses multiplizieren lässt.

Dies führt uns zum Konzept der partiellen Algebra, die eine Verallgemeinerung der *Quasi* ∗-Algebren darstellt:

Definition 7.3.1. *Eine partielle Algebra ist ein Tripel $(\mathcal{A}, \Gamma, \circ)$ bestehend aus einem komplexen linearen Vektorraum $\mathcal{A}$, einer Relation $\Gamma \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}$ und einer partiellen Multiplikation ∘, so dass gilt:*

- $(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow x \circ y \in \mathcal{A}$

- $(x, z) \in \Gamma$ *und* $(y, z) \in \Gamma$ *impliziert* $(\alpha x + \beta y, z) \in \Gamma$ *und* $(\alpha x + \beta y) \circ z = \alpha(x \circ z) + \beta(y \circ z)$ *für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Wir wählen hier erneut als Multiplikation die Sternmultiplikation: $\circ = \star$. Den komplexen Vektorraum $\mathcal{A}$ wählen wir erneut entsprechend der Definition (7.3). Γ setzt sich dann zusammen gemäß:

$$\Gamma = \cup_{x \in \mathcal{A}}(\{x\} \times M(x)) \tag{7.6}$$

7.4 Darstellungstheorie von Quasi ∗-Algebren

Sei $\mathcal{D}$ ein dichter Unterraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}, \mathcal{H})$ die Menge aller (abschließbaren) linearen Operatoren auf X für die $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}$, $\mathcal{D}(X^*) \supseteq \mathcal{D}$

Die Menge $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}, \mathcal{H})$ ist dann eine partielle ∗-Algebra unter den folgenden Operationen: der üblichen Summe $X_1 + X_2$, der Skalarmultiplikation λX, der Involution $X \mapsto X^\dagger = X^*|_\mathcal{D}$ und der (schwachen) partiellen Multiplikation $X_1 \Box X_2 = (X_1^\dagger)^* X_2$, die immer dann definiert ist, wenn X_2 ein schwacher Rechtsmultiplikator von X_1 ist (wir schreiben $X_2 \in R^W(X_1)$ oder $X_1 \in L^W(X_2)$). Dies ist gegeben wenn $X_2\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(X_1^{\dagger *})$ und $X_1^*\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(X_2^*)$.

Sei nun $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})$ der Unterraum von $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}, \mathcal{H})$ der aus allen Elementen besteht, die zusammen mit ihrer jeweiligen Adjungierten den Unterraum $\mathcal{D}$ invariant lassen. Dann ist $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})$ in Bezug auf die üblichen Operationen eine ∗-Algebra.

Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_0)$ eine Quasi ∗-Algebra mit Identität e und $\mathcal{D}_\pi$ ein dichter Definitionsbereich in einem geeigneten Hilbertraum $\mathcal{H}_\pi$. Ferner sei π eine lineare Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}_\pi, \mathcal{H}_\pi)$ für die gilt:

- $\pi(a^*) = \pi(a)^\dagger$
- wenn $a \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{A}_0$, dann ist $\pi(a)(x)$ wohldefiniert und $\pi(ax) = \pi(a)(x)$
  so nennen wir π eine ∗-Darstellung von $\mathcal{A}$. Wenn darüberhinaus noch gilt, dass:
- $\pi(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}_\pi)$,
  so nennen wir π eine ∗-Darstellung der Quasi ∗−Algebra $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_0)$.

Wenn π eine ∗-Darstellung von $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_0)$ ist, so definieren wir den Abschluss $\tilde{\pi}$ von π für jedes $x \in \mathcal{A}$ als die Einschränkung von $\overline{\pi(x)}$ auf den Bereich $\tilde{\mathcal{D}_\pi}$, der die Vervollständigung von $\mathcal{D}_\pi$ unter der Graphentopologie bezeichnet, die durch die Seminormen $\zeta \in \mathcal{D}_\pi \to ||\pi(a)\zeta||$, $a \in \mathcal{A}$ definiert ist. Wenn $\pi = \tilde{\pi}$ ist, so bezeichnen wir die Darstellung als abgeschlossen.

Die Adjungierte einer ∗-Darstellung π von einer Quasi ∗-Algebra $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_0)$ ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{D}_{\pi^*} := \cap_{x \in \mathcal{A}} \mathcal{D}(\pi(x)^*) \text{ und } \pi^*(x) = \pi(x^*)^*|_{\mathcal{D}_{\pi^*}}, \quad x \in \mathcal{A} \tag{7.7}$$

Die Darstellung π nennen wir selbstadjungiert, wenn $\pi = \pi^*$.
Die Darstellung π nennen wir ultrazyklisch, wenn ein $\zeta_0 \in \mathcal{D}_\pi$ exisitiert, so dass $\mathcal{D}_\pi = \pi(\mathcal{A}_0)\zeta_0$, während wir sie als zyklisch bezeichnen, wenn ein $\zeta_0 \in \mathcal{D}_\pi$ existiert, für das $\pi(\mathcal{A}_0)\zeta_0$ dicht in $\mathcal{D}_\pi$ ist in Bezug auf t_π.

Definition 7.4.1. *Sei π eine ∗-Darstellung von $\mathcal{A}$. Ein Unterraum $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}_\pi$ heißt Quasiinvariant für π wenn $\pi(\mathcal{A}_0)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ und $\pi(\mathcal{A})\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$, wobei $\overline{\mathcal{M}}$ den Abschluss von $\mathcal{M}$ in der Hilbertraumnorm von $\mathcal{H}_\pi$ bezeichnet.*
Wenn darüberhinaus für den Quasiinvarianten Unterraum $\mathcal{M}$ noch ein $\zeta_0 \in \mathcal{M}$ existiert so dass $\mathcal{M} = \pi(\mathcal{A}_0)\zeta_0$ gilt, so nennen wir $\mathcal{M}$ ultrazyklisch. Wir nennen $\mathcal{M}$ zyklisch, wenn ein $\zeta_0 \in \mathcal{M}$ existiert, so dass $\pi(\mathcal{A}_0)\zeta_0$ dicht in $\mathcal{M}$ in Bezug auf t_π ist.

Wir zitieren das folgende Resultat aus [9], das den Rahmen für eine Art von GNS-Konstruktion unserer Quasi ∗-Algebra liefert:

Proposition 7.4.2. *Sei ω ein lineares Funktional auf $\mathcal{A}$ das die folgenden Bedingung efüllt:*

1. $\omega(a^*a) \geq 0$ *für alle* $a \in \mathcal{A}_0$;
2. $\omega(b^*x^*a) = \overline{\omega(a^*xb)}, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}_0,\ x \in \mathcal{A}$;
3. $\forall x \in \mathcal{A}$ *existiert ein* $\gamma_x > 0$, *so dass:* $|\omega(x^*a)| \leq \gamma_x\, \omega(a^*a)^{1/2}$

Dann existiert ein Tripel $\pi_\omega, \lambda_\omega, \mathcal{H}_\omega$, *so dass gilt:*

- π_ω *ist eine ultra-zyklische $*$-Darstellung von* $\mathcal{A}$ *mit ultrazyklischem Vektor* ζ_ω;
- λ_ω *ist eine lineare Abbildung von* $\mathcal{A}$ *nach* $\mathcal{H}_\omega$ *mit* $\lambda_\omega(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}_{\pi_\omega}$, $\zeta_\omega = \lambda_\omega(e)$ *und* $\pi_\omega(x)\lambda_\omega(a) = \lambda_\omega(xa)$, *für jedes* $x \in \mathcal{A}$, $a \in \mathcal{A}_0$;
- $\omega(x) = \langle \pi_\omega(x)\zeta_\omega | \zeta_\omega \rangle$, *für jedes* $x \in \mathcal{A}$.

Beweis: Wir definieren $N_\omega = \{a \in \mathcal{A}_0 : \omega(a^*a) = 0\}$, dann ist N_ω ein Linksideal von $\mathcal{A}_0$ und der Quotient $\mathcal{A}_0/N_\omega$ ist ein Prä-Hilbertraum mit dem inneren Produkt:

$$\langle \lambda_\omega(a), \lambda_\omega(b) \rangle := \omega(b^*a), \quad a, b \in \mathcal{A}_0 \tag{7.8}$$

Hier bezeichnet $\lambda_\omega(a)$, für $a \in \mathcal{A}_0$ die Nebenklasse, die a enthält. Sei dann $\mathcal{H}_\omega$ die Vervollständigung von $\lambda_\omega(\mathcal{A}_0)$.
Wenn $x \in \mathcal{A}$ ist, so stzen wir:

$$x^\omega(\lambda_\omega(a)) = \omega(x^*a) \tag{7.9}$$

Dann gilt nach Voraussetzung 3., dass x^ω ein wohldefiniertes lineares Funktional auf $\lambda_\omega(\mathcal{A}_0)$ ist, und dass:

$$|x^\omega(\lambda_\omega(a))| = |\omega(x^*a)| \leq \gamma_x\, \omega(a^*a)^{1/2} = \gamma_x\, ||\lambda_\omega(a)||, \quad \forall a \in \mathcal{A}_0 \tag{7.10}$$

Damit ist x^ω aber beschränkt und es existiert nach dem Lemma von Riesz ein eindeutig bestimmter Vektor $\chi_\omega(x) \in \mathcal{H}_\omega$, so dass:

$$x^\omega(\lambda_\omega(a)) = \langle \lambda_\omega(a) | \chi_\omega(x) \rangle, \quad \forall a \in \mathcal{A}_0. \tag{7.11}$$

Nun definieren wir:

$$\pi_\omega(x)\lambda_\omega(a) = \chi_\omega(xa), \quad a \in \mathcal{A}_0 \tag{7.12}$$

Da

$$\begin{aligned} \langle \lambda_\omega(b), \pi_\omega(x)\lambda_\omega(a) \rangle &= \langle \lambda_\omega(b), \chi_\omega(xa) \rangle = (xa)^\omega(\lambda_\omega(b)) &(7.13)\\ &= \omega(a^*x^*b) = \overline{\omega(b^*xa)}, \quad \forall b \in \mathcal{A}_0, &(7.14) \end{aligned}$$

gilt folgt aus Voraussetzung 3., dass $\pi_\omega(x)$ wohldefiniert ist und die Menge $\lambda_\omega(\mathcal{A}_0)$ nach $\mathcal{H}_\omega$ abbildet.
Auf ähnliche Weise lässt sich folgende Indentität beweisen:

$$\langle \pi_\omega(x^*)\lambda_\omega(b), \lambda_\omega(a) \rangle = \overline{\omega(b^*xa)}, \quad a, b \in \mathcal{A}_0 \tag{7.15}$$

ebenso erhalten wir für $x \in \mathcal{A}$ und $a \in \mathcal{A}_0$ die Gleichung

$$\langle \pi_\omega(xa)\lambda_\omega(b), \lambda_\omega(c) \rangle = \langle \pi_\omega(a)\lambda_\omega(b), \pi_\omega(x^*)\lambda_\omega(c) \rangle. \quad \forall b, c \in \mathcal{A}_0. \tag{7.16}$$

Dies impliziert, dass $\pi_\omega(x)_\omega(a)$ wohldefiniert ist, und dass gilt:

$$\pi_\omega(xa) = \pi_\omega(x)_\omega(a), \quad \forall x \in \mathcal{A}, a \in \mathcal{A}_0 \tag{7.17}$$

□

7.5 GNS-Darstellung unserer Quasi ∗-Algebra

7.5.1 Zur Wahl des Zustands

Wir haben bereits in Kapitel 7.1 die Definition der Quasi ∗-Algebren vorgestellt, welches die von uns gefundene Struktur passend beschreibt. Den Konzepten in [9] folgend, wollen wir nun eine verallgemeinerte GNS-Konstruktion einführen die es uns erlaubt, Darstellungen der Quasi ∗-Algebra Struktur zu finden.

Zunächst beschäftigen wir uns dafür mit der Frage wie eine mögliche Verallgemeinerung des in Satz 2.2 eingeführten quasifreien Zustands aussehen kann.

Wir machen dazu zunächst folgende Beobachtung:

Proposition 7.5.1. *Sei* F *ein beliebiges Funktional in* $\varphi \in \mathrm{C}^\infty$. *Wir definieren* $\langle \Delta_+, \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}\rangle$ *durch die Wirkung auf solche Funktionale durch:*

$$\langle \Delta_+, \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}\rangle|_{\varphi=0}\mathrm{F} = \int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\Delta_+(x-y)\frac{\delta^2\mathrm{F}}{\delta\varphi^2}(x,y)|_{\varphi=0} \tag{7.18}$$

Dann gilt:

$$\mathrm{e}^{\langle \Delta_+, \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}\rangle|_{\varphi=0}} W(f) = \omega_\alpha(W(f)) \tag{7.19}$$

wobei ω_α *den in* (2.2) *definierten Zustand bezeichnet.*

Beweis:

Sei $W(f) = \exp(i\,\mathrm{F}_1) \in \mathcal{W}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle \Delta_+ \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}\rangle \exp(i\,\mathrm{F}_1)|_{\varphi=0} &= 2\,i \int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\Delta_+(x-y)f(x)f(y) \\ &= i\,\alpha(f,f) \end{aligned} \tag{7.20}$$

Exponenzieren liefert die Behauptung. □

Wir machen daher folgenden Ansatz für eine Erweiterung von ω_α:
Sei $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{U}_2$, so berechnen wir: $\mathrm{e}^{\langle \Delta_+, \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}\rangle} \exp_\star(i\,\mathrm{F}_2)|_{\varphi=0}$.

Dazu erinnern wir zunächst daran, dass wir das Sternexponential $\exp_\star(i\,\mathrm{F}_2)$ mit Hilfe eines quadratischen Funktionals $\mathrm{M}_2 \in \mathcal{F}_2$ mit Integralkern $m(x,y) \in \mathcal{D}(M \times M)$ und einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ ausdrücken können durch:

$$\exp_\star(i\,\mathrm{F}_2) = \exp(i\,c)\,\exp(i\,\mathrm{M}_1) \tag{7.21}$$

Berechnen wir nun die Funktionalableitungen $\frac{\delta^2}{\delta\,\varphi^2}$ von $\exp(i\,\mathrm{M}_2)$, so gilt:

$$\frac{\delta^2}{\delta\,\varphi^2}\exp(i\,\mathrm{M}_2)(x,y) = (2i^2\,(\int \mathrm{d}x_1\,m(x,x_1)\varphi(x_1))(\int \mathrm{d}x_2\,m(y,x_2)\varphi(x_2)) + 2\,im(x,y))\exp(i\,\mathrm{M}_\varpi)(x,y) \tag{7.22}$$

Somit erhalten wir:

$$\langle \Delta_+, \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}\rangle|_{\varphi=0}\,\exp_\star(i\,\mathrm{M}_2) = 2\,i\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\Delta_+(x-y)m(x,y) = \frac{2\,i}{\hbar}\,\mathrm{Tr}_\Delta(\tan\hbar\mathrm{P}_f) \tag{7.23}$$

Wir wollen nun nachrechnen, dass der auf diese Weise auf $\mathcal{M}$ verallgemeinerte Zustand die in (7.4.2) geforderten Bedingungen erfüllt, womit wir dann unsere Quasi ∗-Algebra als $\mathcal{O}$∗-Algebra darstellen können:

Proposition 7.5.2. *Der Zustand $\tilde{\omega}_\alpha$ erfüllt die in Prop.* (7.4.2) *geforderten Bedingungen (1)-(3)*

Beweis: Für Bedingung (3) muss gelten, dass für jedes $\mathrm{F} \in \mathcal{M}$ ein γ_{F} existiert, so dass die Ungleichung

$$|\tilde{\omega}_\alpha(\mathrm{F}^* \star W(g))| \leq \gamma_{\mathrm{F}}\, \tilde{\omega}(W(g)^* \star W(g)) \tag{7.24}$$

für alle $W(g) \in \mathcal{W}$ erfüllt ist.

Wir nehmen zunächst an, dass es sich bei $\mathrm{F} = \exp(i\,\mathrm{F}_2)$ um das Sternexponential eines rein quadratischen Funktionals handelt.
Nach Satz (5.1.1) existiert das Sternprodukt zwischen $\mathrm{F}^\star$ und $W(g)$. Wir erhalten ein Resultat der Form:

$$\exp_\star(-i\,\mathrm{F}_2) \star \exp(i\,\mathrm{G}_1) = \exp_\star(-i\,\mathrm{F}_2 + i\,\mathrm{G}_1 + i\,\mathrm{J}_1 + i\,c) \tag{7.25}$$

hierbei hängen offensichtlich J und c explizit von G_1 ab. Wir definieren:

$$\tilde{\mathrm{J}}(\varphi) := \mathrm{G}_1 + \mathrm{J}_1 \tag{7.26}$$

und erhalten für das Sternexponential nach Satz 4.47 das Resultat:

$$\exp_\star(-i\,\mathrm{F}_2) \star \exp(i\,\mathrm{G}_1) = \exp(c)\, exp(i\tilde{c})\, \exp(i\,(\mathrm{M}_1 + \kappa_1)) \tag{7.27}$$

Dabei sind nun aber M_1 und c unabhängig von $\tilde{\mathrm{J}}$ und damit auch unabhängig von G_1. Die Konstante $\tilde{c}$ hängt explizit von G_1 ab, ergibt aber nur eine komplexe Phase vom Betrag 1.
Desweiteren hängt aber auch κ_1 noch von G_1 ab.

Wir berechnen nun das entsprechende Funktional zum Ausdruck (7.27). Sei dazu m der Integralkern von M_1 und k der Integralkern von κ_1.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle \Delta_+, \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}\rangle \exp_\star(-i\,\mathrm{F}_2) \star \exp(i\,\mathrm{G}_1) &= \exp_\star(-i\,\mathrm{F}_2) \star \exp(i\,\mathrm{G}_1)\, \exp(c)\, \exp(i\tilde{c})\, \exp(i\,(\mathrm{M}_1 + \kappa_1)) \\ &= -\exp(c)\, \exp(i\tilde{c})\, (\int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \Delta_+(x-y) m(x,y) + \alpha(k,k)) \end{aligned} \tag{7.28}$$

Durch exponentieren des Audrucks erhalten wir:

$$\tilde{\omega}_\alpha(\exp_\star(-i\,\mathrm{F}_2) \star \exp(i\,\mathrm{G}_1)) = -\exp(c)\, \exp(i\tilde{c})\, \exp(-\int \Delta_+(x-y) m(x,y) - \alpha(k,k)) \tag{7.29}$$

Nun hängen in diesem Ausdruck $\tilde{c}$ und k als Integralkern von κ_1 explizit von G_1 ab. Wir können nun verwenden, dass α eine positive Bilinearform ist und erhalten für den Betrag die Abschätzung:

$$\begin{aligned}|\tilde{\omega}_\alpha(\exp_\star(-i\,\mathrm{F}_2) \star \exp(i\,\mathrm{G}_1))| &= |\exp(c)\, \exp(-\int \Delta_+(x-y) m(x,y))|\, \underbrace{|\exp(-\alpha(k,k))|}_{\leq 1} \\ &\leq \underbrace{|\exp(c)\, \exp(-\int \Delta_+(x-y) m(x,y))|}_{=:\gamma_{\mathrm{F}}} \end{aligned} \tag{7.30}$$

Damit haben wir ein geeignetes γ_{F} gefunden, das die geforderte Bedingung erfüllt.

7.6 Betrachtung der partiellen Algebra auf dem Fockraum

Mit Hilfe der in (1.8) definierten reellen symmetrischen Form $\mu(f,f)$ hatten wir in Kapitel 2 den Fockraum aus der GNS-Konstruktion der Weylalgebra $\mathcal{W}$ erhalten. Wir diskutieren hier einen alternativen Ansatz, der es uns erlaubt die Fockraumrelationen zu beweisen. Dieser hat den Vorteil, erste mögliche Aussagen über die Eigenschaften der Fockraumdarstellung von Sternexponentialen quadratischer Operatoren zu ermöglichen.

Jedoch sind die Aussagen dieses Abschnitts nicht mathematisch exakt ausformuliert, da die Darstellung des Sternexponentials eines quadratischen Funktionals einen unbeschränkten Operator ergibt und wir damit keine stark stetige einparametrige Gruppe haben.

Sei ω wie zuvor definiert durch $\omega(W(f)) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mu(f,f)}$. Sei $\mathcal{H}$ der Hilbertraum der mit ω assoziierten GNS-Konstruktion. Sei Ω_ω das entsprechende GNS-Vakuum.

Wir schreiben dann

$$\pi(W(tf)) = \exp(i\,\Phi(f)), \tag{7.31}$$

wobei der Feldoperator $\Phi(f)$ die infinitesimale Erzeugende der Abbildung $t \mapsto W(t\,f)$ ist. Wir definieren weiterhin die Operatoren $(\mathrm{a}, \mathrm{a}^\dagger)$ durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{a}^\dagger(f) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi(f) - i\Phi(if)) \\ \mathrm{a}(f) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi(f) + i\Phi(if)) \end{aligned} \tag{7.32}$$

Wir beweisen zunächst:

Lemma 7.6.1. *Für den Operator* $\mathrm{a}(f)$ *gilt:* $\mathrm{a}(f)\Omega_\omega = 0$

Beweis: Wir wissen, dass das GNS-Vakuum ein zyklischer Vektor der GNS-Darstellung von $\mathcal{W}$ ist. Es reicht also aus zu zeigen, dass das Skalaprodukt von $\mathrm{a}(f)\Omega_\omega$ mit jedem $W(-g) \in \mathcal{W}$ verschwindet.

Wir verwenden dazu die Identität

$$\begin{aligned} \mathrm{a}(f) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{2}}(-i\mathrm{e}^{it\Phi(f)} + \mathrm{e}^{it\Phi(if)})|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{2}}(-iW(t\,f) + W(it\,f))|_{t=0} \end{aligned} \tag{7.33}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} & \langle \Omega_\omega W(-g), \mathrm{a}(f)\Omega_\omega \rangle \\ = \; & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{2}}\langle \Omega_\omega, W(g)(-i\,W(t\,f) + W(it\,f))\Omega_\omega\rangle|_{t=0} \\ = \; & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{2}}\langle \Omega_\omega, -i\mathrm{e}^{t\,\frac{-i\hbar}{2}\sigma(g,f)}W(g+tf) + \mathrm{e}^{t\,\frac{i\hbar}{2}\sigma(g,i\,f)}W(g+itf)\Omega_\omega\rangle|_{t=0} \\ = \; & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-i\mathrm{e}^{t\,\frac{-i\hbar}{2}\sigma(g,f)}e^{-\frac{1}{2}\mu(g+tf,g+tf)} + \mathrm{e}^{t\,\frac{i\hbar}{2}\sigma(g,i\,f)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mu(g+itf,g+itf)})|_{t=0} \\ = \; & 0, \end{aligned} \tag{7.34}$$

wobei wir verwendet haben, dass die beiden Formen σ und μ $\mathbb{C}$-linear sind.

□

Also vernichtet der Operator $\mathrm{a}(f)$ das Vakuum. Mit analogen Rechnungen lässt sich unter anderem die Kommutatorrelation

$$[\mathrm{a}^\dagger(f), \mathrm{a}(g)] = \mu(f,g) - i\sigma(f,g) \tag{7.35}$$

verifizieren.

Sei nun $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{F}_2$. Wir wollen zunächst einfach voraussetzen, dass ein infinitesimaler Generator $\hat{\Psi}(f)$ der Abbildung $t \mapsto \pi(\exp_\star(i\mathrm{F}_2))$ existiert und wollen zuerst dessen Vakuumerwartungswert mit dem des in (4.78) definierten Operators $\Psi(f \otimes g)$ auf dem Fockraum vergleichen.

Wir kennen den Vakuumerwartungswert $\langle \Omega_\omega, \pi(\exp_\star(it\mathrm{F}_2))\Omega_\omega\rangle$, dieser ist durch (7.29) gegeben, wenn wir M_1 durch $\mathrm{M}_1(t)$ und c durch $c(t)$ ersetzen (siehe (4.18)).

Entsprechend können wir dann den Vakuumerwartungswert von $\Psi_2(f)$ durch Differentieren von $\langle \Omega_\omega, \pi(\exp_\star(it\mathrm{F}_2))\Omega_\omega\rangle$ an der Stelle $t = 0$ bestimmen.
Wir erhalten:

$$\begin{aligned} i\langle \Omega_\omega, \hat{\Psi}(f)\Omega_\omega\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \Omega_\omega, \mathrm{e}^{it\hat{\Psi}(f)}\Omega_\omega\rangle|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(c(t))\exp(\frac{i}{\hbar}\mathrm{Tr}_\Delta(\tanh(\hbar\mathrm{P}_f))|_{t=0} \\ &= i\,\mathrm{Tr}_\Delta(\mathrm{P}_f) = i\,\mathrm{Tr}_\Delta(f) = i\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\Delta_+(x-y)f(x,y) \end{aligned} \tag{7.36}$$

□

Kapitel 8

Kanonische quadratische Transformationen

Summers, Reents und Proksch führen in ihrem Paper [11] die quadratischen Operatoren auf dem Fockraum ein, um mit deren Hilfe sogenannte kanonische Transformationen auf dem Fockraum durchzuführen. Die Menge der dicht definierten quadratischen Operatoren Λ der Form $\Lambda : H \mapsto \mathrm{P}_+ H^2$ werden mit $\mathcal{L}$ bezeichnet. Deren Definitionsbereich sei $D(\Lambda)$. Zur Defintion der quadratischen kanonischen Transformationen werden zuerst allgemeine Feldtransformationen für $\Lambda \in \mathcal{L}$ von der Form

$$\Phi(f) \mapsto \Phi_\Lambda(f) := \overline{\Phi(f) + \Psi(\Lambda f)}, \quad f \in D(\Lambda) \tag{8.1}$$

eingeführt.
Dabei bezeichnet $\overline{\Phi(f) + \Psi(\Lambda f)}$ den Normabschluss von $\Phi(f) + \Psi(\Lambda f)$ auf $\mathcal{F}_0$.
Dann heißt die Feldtransformation (8.1) quadratische kanonische Transformation, wenn sie die kanonischen Vertauschungsrelationen erfüllt, das heißt, wenn gilt:

$$[\Phi_\Lambda(f), \Phi_\Lambda(g)] = i\,\sigma(f,g)\mathbb{1} \tag{8.2}$$

wenn $f, g \in D(\Lambda)$.

In [11] wird weiterhin gezeigt, dass für die in 5.3.3 und 5.3.5 eingeführten Operatoren $b(f,F)$ und $B(F,G)$ gilt:

Proposition 8.0.2. *Sei $\Lambda \in \mathcal{L}$. Die Transformation $\Phi(f) \mapsto \Phi_\Lambda(f)$, $f \in D(\Lambda)$, ist genau dann kanonisch, wenn für alle $f, g \in D(\Lambda)$ gilt:*

$$b(f, \Lambda g) = b(g, \Lambda f) \tag{8.3}$$

und

$$P_+ B(\Lambda f, \Lambda g) = 0 \tag{8.4}$$

Bemerkung 8.0.3. *Wir interessieren uns nun für die äquivalenten Transformationen auf der Ebene der Weylalgebra. In* [11]*, s. 800, wird bereits angemerkt dass sich die quadratischen kanonischen Transformationen nicht auf der Ebene der Weylalgebra realisieren lassen. Mit Hilfe der in Kapitel 4 eingeführten Exponentialfunktionen quadratischer Funktionale lassen sich aber sehr wohl äquivalente Transformationen im verallgemeinerten Kontext der quasi $*$-Algebren angeben. Dafür definieren wir zunächst $\tilde{\mathcal{L}}$ als die Menge der Abbildungen $\tilde{\Lambda} : \mathrm{F}_1 \mapsto \tilde{\Lambda}(\mathrm{F}_2) \in \mathcal{F}_2$.*

Als quadratische kanonische Transformationen definieren wir dann definieren wir dann:

Definition 8.0.4. *Sei F_1 ein lineares Funktional mit Integralkern $f \in \mathcal{D}(M)$, sei $W(f) = \exp_\star(i\mathrm{F}_1) \in \mathcal{W}$. Wir definieren dann die kanonischen quadratischen Transformationen für lineare Funktionale durch:*

$$\mathrm{F}_1 \mapsto \mathrm{F}_{\tilde{\Lambda}} = \mathrm{F}_1 + \tilde{\Lambda}(\mathrm{F}_1). \tag{8.5}$$

Wir wollen dann, dass die kanonischen Vertauschungsrelationen erhalten bleiben, d.h. wir definieren $\tilde{\mathcal{L}}_{CCR} \subset \tilde{\mathcal{L}}$ als die Menge derjenigen Operatoren $\tilde{\Lambda}$, für die gilt:

$$[\mathrm{F}_{\tilde{\Lambda}}, \mathrm{G}_{\tilde{\Lambda}}]_\star = [\mathrm{F}_1, \mathrm{G}_1]_\star = i\hbar\sigma(f,g) \tag{8.6}$$

Die Bedingung ist ganz offensichtlich erfüllt, wenn sowohl:

$$[\tilde{\Lambda}(\mathrm{F}_1), \tilde{\Lambda}(\mathrm{G}_1)]_\star = 0 \quad \forall \mathrm{F}_1, \mathrm{G}_1 \tag{8.7}$$

als auch:

$$[\tilde{\Lambda}(\mathrm{F}_1), \mathrm{G}_1] = 0 \quad \forall \mathrm{F}_1, \mathrm{G}_1 \tag{8.8}$$

Da uns im Rahmen der Deformationsquantisierung der Begriff der wesentlichen Selbstadjungiertheit von Operatoren fehlt und damit auch die daraus folgenden Resultate, können wir die kanonischen Transformationen der Form 8.0.4 nur dann exponenzieren, wenn die in Kapitel 4 hergeleiteten Konvergenzkriterien erfüllt sind, das heißt, wenn $\tilde{\Lambda}(\mathrm{F}_1)$ für alle linearen Funktionale die entsprechenden Konvergenzbedingungen erfüllt.

In diesem Fall erhalten wir Transformationen, die die Weylalgebra $\mathcal{W}$ nicht auf sich selbst sondern nach $\mathcal{A}$ abbilden, jedoch die Weylrelationen invariant lassen:

$$W(f) \mapsto W_{\tilde{\Lambda}}(f) = \exp_\star(i(\mathrm{F}_1 + \tilde{\Lambda}(\mathrm{F}_1))). \tag{8.9}$$

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

Zunächst konnten wir bestätigen, dass es sich auch bei einer konkreten Realisierung der Weylalgebra mit Hilfe von Funktionalen im Formalismus der Deformationsquantisierung noch um eine C^*-Algebra handelt.

Es ist uns gelungen, das Sternexponential quadratischer Funktionale und die in (4.46) definierten verallgemeinerten Sternexoponentiale für den feldtheoretischen Fall zu berechnen und deren Konvergenz für geeignete Bedingungen zu Beweisen.

Hier sind wir jedoch bereits den ersten und letztendlich entscheidenden Schwierigkeiten begegnet, die sich bei dem Versuch die C^*-Algebra der Weyloperatoren zu vergößern gezeigt haben: die Konvergenz ist nur für hinreichend kleine Integralkerne der quadratischen Funktionale garantiert.

Vergleiche mit bereits bekannten Resultaten für konkrete Darstellungen der Weylalgebra auf dem Fockraum haben gezeigt, dass die gemachten Beobachtungen plausibel sind und zu etwas großzügigeren Konvergenzbedingungen führen.

Es existieren neben dem von uns betrachteten Moyal-Sternprodukt noch andere Sternprodukte, die zu diesem formal äquivalent sind (siehe [4]).
Es wäre interessant, die durchgeführten Konvergenzuntersuchungen diese Sternprodukte zu verallgemeinern.

Es hat sich herausgestellt, das keine unter der Sternmultplikation abgeschlossenen Unteralgebren existieren, die Exponentialfunktionen quadratischer Funktionale beinhalten. Wir konnten jedoch zeigen, dass das Sternprodukt von zwei Exponentialen quadratischer Funktionale unter bestimmten Bedingungen existiert. Die gemachten Beobachtungen sind hier erneut ähnlich zu denen auf dem Fockraum.

In Kapitel 6 ist es uns gelungen, jedem quadratischen Funktional einen Automorphismus der Weylalgebra zuzuweisen. Hier ergibt sich eine Perspektive, die von uns zwar angedacht, im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht weiter verfolgt wurde:
Gelingt es eine geeignete Gruppenstruktur mit Komposition $\odot$ auf den quadratischen Funktionalen zu definieren, so dass $\alpha_{\mathrm{F}_2} \circ \alpha_{\mathrm{G}_2} = \alpha_{\mathrm{F}_2 \odot \mathrm{G}_2}$ gilt, so haben wir ein C^*-dynamisches System definiert, das auf $\mathcal{W}$ wirkt. Diese erlaubt es uns dann, das gekreuzte Produkt der C^*-Algebra $\mathcal{W}$ mit der entsprechenden Automorphismengruppe zu bilden, und dadurch eine neue C^*-Algebra zu definieren. Von dieser wären dann Struktur und Darstellungen zu untersuchen.

In Kapitel 7. konnten wir zeigen, dass unsere gefundene Struktur der einer *quasi* $*$-Algebra entspricht, und dass sich eine verallgemeinerte GNS-Konstruktion durchführen lässt, die zu möglicherweise neuen Operatoren auf dem Fockraum führt. Es wäre zu untersuchen, inwiefern diese äquivalent zu den von Summers in [11] behandelten quadratischen Operatoren sind. Desweiteren wäre der Definitionsbereich der zunächst unbeschränkten Operatoren zu untersuchen, die sich aus der Darstellung der Exponentiale quadratischer Funktionale ergeben.

In Kapitel 8. haben wir noch kurz angedacht, die quadratischen kanonischen Transformationen auf die Ebene der Weylalgebra in ihrer abstrakten Realisierung durch Funktionale zu übertragen. Die von Summers in [11] verwendeten Methoden zur Untersuchung der quadratischen Funktionale machen jedoch starken Gebrauch von der Hilbertraumstruktur des Fockraums. Es wäre zu untersuchen, inwiefern sich vergleichbare Aussagen auch auf der Ebene der Funktionale treffen lassen.

Literaturverzeichnis

[1] Robinson Bratteli, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2*, Springer, New York, 2003.

[2] Sirugue Manuceau et al., *The smallest C -algebra for canonical commutation relations*, Commun. Math. Phys **32** (1973), 231–243.

[3] M. A. Naimark, *Normed Rings*, P. Nordhoff, Groningen, 1959.

[4] Fredenhagen Dütsch, *Pertubative Algebraic Field Theory, and Deformation Quantization*, available at `arXiv:hep-th/0101079v1`.

[5] F. Bayen and J. M. Maillard, *Star exponentials of the elements of the inhomogeneous symplectic Lie algebra*, Letters in Mathematical Physics **6** (1982), 491-497.

[6] Gerald Folland B., *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Chichester, 1995.

[7] Walter Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Singapur, 1991.

[8] F. Constantinescu, *Distributionen und ihre Anwendung in der Physik*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1974.

[9] F. Bagarello and A. Inoue and C. Trapani, *Representations and derivations of quasi *-algebras induced by local modifications of states* (2009).

[10] Wald Kay, *Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate killing horizon* **207** (1991), 49-136.

[11] George Reents Martin Proksch and Stephen J. Summers, *Quadratic representations of the canonical commutation relations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **31** (1995), no. 5, 755-804.

Danksagung

Hiermit danke ich meinen beiden Betreuern Professor Fredenhagen und Professor Schrohe für die interessante Aufgabenstellung und die nette Zusammenarbeit.

Danken möchte ich auch Christina Ivan für zahlreiche hilfreiche Diksussionen und meinen beiden Büromitbewohnern für die schöne gemeinsame Zeit im ITP. Weiterhin Professor Frahm für die unkomplizierte Bereitstellung eines Büros während meiner Diplomarbeit.

Besonderer Dank gilt auch meinen Eltern, die mich während der gesamten Zeit meiner Diplomarbeit unterstützt haben.

Erklärung

Hiermit versichere ich, diese Diplomarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Hannover, den 20.01.2010

Achim Schneider