

# Zum Problem des semiklassischen Limes der Loop-Quantengravitation

Diplomarbeit

vorgelegt von

Felix Reszewski

Juni 2006

II. Institut für theoretische Physik  
Universität Hamburg

**Gutachter der Diplomarbeit:**

Prof. Dr. K. Fredenhagen

Prof. Dr. J. Louis

## **Abstract**

The goal of this diploma thesis is to present an overview of Loop Quantum Gravity, which is a background independent, non-perturbative approach to the canonical quantization of General Relativity. The emphasis is on communicating the underlying ideas and physical implications. Systematic derivations and detailed proofs can be found in the listed references. In particular, the problem of finding a semiclassical limit is addressed and discussed using the toy model of a single quantum mechanical particle. For this model it is shown how states in the Schrödinger representation can be approximated by states in the so-called polymer representation.

## **Zusammenfassung**

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Überblick über die Loop-Quantengravitation zu geben, die ein hintergrundunabhängiger, nicht perturbativer Ansatz zur kanonischen Quantisierung der Allgemeinen Relativitätstheorie ist. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Vermittlung der zu Grunde liegenden Ideen und der physikalischen Konsequenzen. Systematische Herleitungen und detaillierte Beweise finden sich in den angeführten Referenzen. Insbesondere wird das Problem des semiklassischen Limes angesprochen und am Modellbeispiel eines quantenmechanischen Teilchens diskutiert. Es wird gezeigt, wie man für dieses System Zustände der Schrödinger-Darstellung durch Zustände der sogenannten Polymerdarstellung approximieren kann.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>1 Ashtekar-Formulierung der ART</b>	<b>5</b>
1.1 Ashtekar-Formulierung der ART . . . . .	5
1.2 Physikalische Interpretation der Zwangsbedingungen . . . . .	9
1.3 Euklidische ART und der reelle Zusammenhang . . . . .	10
1.4 Barbero-Zusammenhang und Immirzi-Parameter . . . . .	11
<b>2 Kanonische Quantisierung</b>	<b>13</b>
2.1 Der kinematische Zustandsraum $\mathcal{K}$ . . . . .	13
2.1.1 Projektiver Limes . . . . .	15
2.1.2 Invarianz des Skalarproduktes . . . . .	17
2.1.3 Eine orthonormale Basis von $\mathcal{K}$ . . . . .	18
2.2 Eichinvarianz. Der Raum $\mathcal{K}_0$ . . . . .	18
2.2.1 Spin-Netzwerk-Zustände . . . . .	19
2.3 Diffeomorphismeninvarianz. Der Raum $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$ . . . . .	20
2.3.1 Knoten und $s$ -Knoten-Zustände . . . . .	20
<b>3 Operatoren</b>	<b>23</b>
3.1 Operatoren auf $\mathcal{K}$ . . . . .	23
3.2 Operatoren auf $\mathcal{K}_0$ . . . . .	24
3.2.1 Der Flächenoperator . . . . .	24
3.2.2 Der Volumenoperator . . . . .	26
3.3 Quantengeometrie . . . . .	28
<b>4 Einige Bemerkungen zu Dynamik und Materie</b>	<b>31</b>
4.1 Dynamik . . . . .	31
4.2 Materie . . . . .	32
<b>5 Errungenschaften und offene Probleme der LQG</b>	<b>35</b>
5.1 Errungenschaften . . . . .	35
5.2 Offene Probleme . . . . .	36
5.3 Das Problem des semiklassischen Limes . . . . .	37

<b>6</b>	<b>Mathematische Konzepte</b>	<b>41</b>
6.1	Algebraische Grundbegriffe . . . . .	41
6.1.1	C*-Algebren, Ideale, Darstellungen . . . . .	41
6.1.2	GNS-Konstruktion und Theorem von Fell . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Quantenmechanik eines nichtrelativistischen Teilchens</b>	<b>45</b>
7.1	Schrödinger-Darstellung . . . . .	46
7.2	Die Polymerdarstellung . . . . .	46
7.3	Schrödinger- und Polymerdarstellung . . . . .	48
7.3.1	Approximation durch Riemannsche Summen . . . . .	51
7.3.2	Approximation durch Integration im $\mathbb{R}^L$ . . . . .	52
7.4	Approximation des Impulsoperators . . . . .	54
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>57</b>

# Einführung

Die Quantenmechanik und die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) sind zwei Säulen der theoretischen Physik, die zu Beginn des letzten Jahrhunderts unser Naturverständnis revolutioniert haben. Sie führen zu Vorhersagen, die bisher ausnahmslos und mit hoher Präzision durch unzählige Experimente bestätigt worden sind.

Das kohärente Weltbild prärelativistischer Physik musste dazu jedoch aufgegeben werden, denn beide Theorien basieren auf Annahmen, die sich zum Teil gegenseitig widersprechen. Die Formulierung der Quantenmechanik macht Gebrauch von einem externen Zeitparameter und einer festen, nicht dynamischen Hintergrundraumzeit, was beides nicht mit den Prinzipien der ART vereinbar ist. Andererseits basiert die ART auf der Riemannschen Geometrie und beschreibt die Metrik als glattes, deterministisches und dynamisches Feld. Die Quantenmechanik besagt jedoch, dass jedes dynamische Feld eine quantisierte Größe ist, über die nur Wahrscheinlichkeitsaussagen gemacht werden können.

Aus diesen Gründen ist es wünschenswert, eine Quantentheorie der Gravitation zu formulieren und so die Prinzipien von Quantenmechanik und ART in konsistenter Weise zu vereinen. Sollte eine solche Theorie gefunden werden, so wird sie das Bild, das wir von der Natur haben, erneut drastisch modifizieren. Die Raumzeit wäre als dynamische Größe quantisiert, es gäbe so etwas wie „Quanten des Raums“ und „Quanten der Zeit“. Was hat man sich darunter vorzustellen, und was ist der adäquate mathematische Rahmen, um diese Phänomene zu beschreiben? Fragen dieser Art müssen auf der Suche nach einer Theorie der Quantengravitation beantwortet werden.

Konventionelle Methoden zur Feldquantisierung basieren auf der Störungstheorie und lassen sich auf die ART nicht anwenden, da das Ergebnis eine nicht renormierbare Theorie ist. Dies wurde lange Zeit vermutet und 1986 von Goroff und Sagnotti bewiesen (siehe [1]).

Die zwei zur Zeit am weitesten entwickelten Kandidaten für eine Quantentheorie der Gravitation sind die Stringtheorie und die Loop-Quantengravitation (LQG). Darüber hinaus gibt es einige weniger bekannte Ansätze, zum Beispiel die dyna-

mische Triangularisierung, die nichtkommutative Geometrie oder Sorokin's kausale Mengen. Einen Überblick über die bestehenden Ansätze findet man unter anderem in [2]. Die LQG, die sich Ende der Achtziger aus der Ashtekar-Formulierung der ART entwickelt hat, ist Gegenstand dieser Diplomarbeit. Eine kurze Bemerkung zur Stringtheorie, die momentan den populärsten Ansatz darstellt, ist jedoch angebracht.

Die elementaren Freiheitsgrade der Stringtheorie sind eindimensionale Objekte, die wie eine eingespannte Saite Grund- und Oberschwingungen besitzen. Ihre Schwingungsmoden identifiziert man mit den Elementarteilchen. Diese Hypothese (zusammen mit weiteren Annahmen) führt zu einer vereinheitlichten Theorie, die sowohl Fermionen, Yang-Mills-Felder als auch Gravitonen beschreibt. Man geht davon aus, dass diese Theorie frei von Ultraviolettdivergenzen ist. Eine Konsequenz daraus ist, dass neue physikalische Phänomene wie zusätzliche Dimensionen und Supersymmetrie postuliert werden, die bisher noch nicht im Experiment nachgewiesen werden konnten und daher spekulativen Charakter haben.

Die Stringtheorie vertritt den Standpunkt, dass die Ursache für die Nichtrenormierbarkeit der perturbativen Ansätze zur Quantisierung der ART darin liegt, dass die Einstein-Hilbert-Wirkung nur ein niederenergetischer Grenzfall ist und bei hohen Energien durch eine andere Theorie ersetzt werden muss. Eine ähnliche Situation gab es bei der Suche nach einer Theorie der schwachen Wechselwirkung. Mit der Fermi-Theorie hatte man eine empirisch erfolgreiche, jedoch nicht renormierbare Theorie. Diese wurde durch die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung von Glashow, Weinberg und Salam ersetzt, die eine Korrektur der Fermi-Theorie für hohe Energien ist.

In der Loop-Quantengravitation nimmt man in dieser Hinsicht gerade den entgegengesetzten Standpunkt ein. Man geht davon aus, dass die Ursachen für die Obstruktionen, denen man in den perturbativen Ansätzen zur Quantisierung der ART begegnet, darin liegen, dass die herkömmlichen störungstheoretischen Methoden der Quantenfeldtheorie auf die Gravitation nicht anwendbar sind. Man betrachtet die Invarianz unter Diffeomorphismen sowie die Hintergrundunabhängigkeit der ART als die fundamentalen Prinzipien und geht davon aus, dass diese wahrscheinlich auch in einer Hochenergiethorie überdauern. Die LQG verfolgt aus diesen Gründen das Ziel, eine nicht perturbative, hintergrundunabhängige Quantentheorie der Gravitation zu formulieren.

Dies führt zu interessanten Konsequenzen. Aus der LQG ergibt sich ein Bild der Raumzeitstruktur auf kleinen Skalen, das sich drastisch von dem einer glatten Hintergrundgeometrie unterscheidet. (Auch in der Stringtheorie gibt es Hinweise in diese Richtung, siehe [3].) Die Raumzeit besitzt in der Größenordnung der Planck-Länge eine quantisierte, diskrete Struktur, die explizit von der Theorie beschrieben wird. Dadurch ist die LQG frei von Ultraviolettdivergenzen. In den



störungstheoretischen Entwicklungen der Quantenfeldtheorie sind diese Divergenzen demnach eine Folge davon, dass man die diskrete Struktur durch eine glatte Hintergrundgeometrie ersetzt.

Die LQG findet außerdem Anwendung in der Kosmologie. Ashtekar hat kürzlich gezeigt [4], dass es für homogene und isotrope kosmologische Modelle im Rahmen der LQG zu einem Verschwinden der Urknallsingularität kommt. Als ein Prüfstein für jede Quantentheorie der Gravitation gilt auch, die Formel für die Bekenstein-Hawking-Entropie eines Schwarzen Lochs aus ersten Prinzipien abzuleiten. Dies ist in der LQG bis auf einen Faktor  $\gamma$ , den sogenannten Immirzi-Parameter, gelungen (siehe [5]). Smolin hat kürzlich sogar die Vermutung geäußert [6, 7], dass die LQG bereits eine vereinheitlichte Theorie sein könnte. Er hat nachgewiesen, dass man gewisse angeregte Zustände der Theorie mit den Fermionen der ersten Generation des Standardmodells identifizieren kann.

Diesen interessanten Konsequenzen stehen derzeit jedoch noch einige ungelöste Probleme in zentralen Aspekten der Theorie gegenüber. Dazu zählt vor allem die Konstruktion eines semiklassischen Limes. Wie man mit Hilfe der LQG eine gegebene klassische Lösung der Einstein-Gleichungen in geeigneter Weise approximieren kann, ist nicht klar. Auch ist die endgültige Form des Hamilton-Operators, der die dynamische Entwicklung der Theorie kontrolliert, noch nicht gefunden. Diese beiden Probleme sind eng miteinander verbunden, denn insbesondere ist offen, ob es überhaupt eine Form des Hamilton-Operators gibt, so dass die Menge der physikalischen Zustände hinreichend groß ist, um den semiklassischen Limes zu formulieren.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Abschnitte. Der erste Teil soll einen Überblick über den Formalismus der LQG geben und schließt mit einer kritischen Betrachtung, in der die Erfolge der Theorie den offenen Fragen gegenübergestellt werden. Insbesondere wird das Problem des semiklassischen Limes diskutiert. Dies motiviert die Betrachtungen im zweiten Teil der Arbeit. Dort wird das Problem des semiklassischen Limes an einem Modellbeispiel untersucht. Für ein quantenmechanisches Teilchen, das sich in einer räumlichen Dimension bewegen kann, zeigen wir, dass man Zustände der Schrödinger-Darstellung durch Zustände der sogenannten Polymerdarstellung approximieren kann.

Im folgenden Kapitel wird zunächst die Ashtekar-Formulierung der ART präsentiert, auf der die LQG basiert. Dieser Abschnitt orientiert sich an [8]. Die physikalische Interpretation der Zwangsbedingungen wird diskutiert und der Barbero-Zusammenhang sowie der Immirzi-Parameter eingeführt.

In Kapitel 2 wird skizziert, wie man den kinematischen Zustandsraum der LQG konstruiert. Die Zwangsbedingungen, die Invarianz unter Eichtransformationen und Diffeomorphismen gewährleisten, werden implementiert und mit den Spinnetzwerkzuständen wird eine Basis des resultierenden Hilbert-Raums angegeben.

Auf der Grundlage von [9] konstruieren wir in Kapitel 3 geometrische Operatoren, die den klassischen Observablen Fläche und Volumen entsprechen. Es wird gezeigt, dass diese selbstadjungierten Operatoren ein diskretes, reelles Eigenwertspektrum besitzen. Es gibt jeweils einen kleinsten, von Null verschiedenen Eigenwert. Daraus resultiert die diskrete Struktur des Raums in der Größenordnung der Planck-Länge. Einen Spinnnetzwerkzustand kann man in diesem Zusammenhang als eine diskrete Metrik auffassen.

Einige Bemerkungen zu den Problemen, denen man bei der Implementierung der Hamiltonschen Zwangsbedingung begegnet, finden sich in Kapitel 4. Außerdem wird dort die Möglichkeit diskutiert, Materie in den Formalismus der LQG mit einzubeziehen. Erstaunlicher Weise ergibt sich, dass dies nicht nur unproblematisch, sondern die resultierende Theorie auch frei von Ultraviolettdivergenzen ist.

In Kapitel 5 werden sowohl die Errungenschaften als auch die offenen Probleme der LQG aufgezählt. Insbesondere wird das Problem des semiklassischen Limes näher erläutert.

Kapitel 6 dient zur Bereitstellung der mathematischen Konzepte, die für den Rest der Arbeit relevant sind. Es werden grundlegende Begriffe wie  $C^*$ -Algebren, Ideale und Darstellungen eingeführt. Zudem werden die GNS-Konstruktion und das Theorem von Fell erläutert.

Schließlich wird in Kapitel 7 die quantenmechanische Beschreibung eines Teilchens, das sich in einer räumlichen Dimension bewegen kann, näher untersucht. Neben der Schrödinger-Darstellung existiert auch die sogenannte Polymerdarstellung, die Parallelen zum Hilbert-Raum der LQG aufweist. Dem Problem des semiklassischen Limes entspricht in diesem einfachen Modell die Fragestellung, inwiefern Zustände der Schrödingerdarstellung durch Zustände der Polymerdarstellung approximiert werden können. Die Antworten, die bisher auf diese Frage gegeben wurden (siehe [10]), sind, von einem mathematischen Standpunkt aus gesehen, unbefriedigend. Wir weisen auf die Unzulänglichkeiten hin und entwickeln eine neue Methode, in der diese Probleme nicht auftreten.

# Kapitel 1

## Ashtekar-Formulierung der ART

Der Allgemeinen Relativitätstheorie begegnet man gewöhnlich in der metrischen Formulierung (siehe zum Beispiel [11]). Ashtekar hat 1986 gezeigt [12], dass es ebenso möglich ist, die ART als eine dynamische Theorie des Zusammenhangs aufzufassen. Diese nach ihm benannte Formulierung führt zu einer drastischen Vereinfachung der Bewegungsgleichungen. Außerdem nimmt die ART die Struktur einer Yang-Mills-Theorie an und ähnelt so den Eichtheorien, die zur Beschreibung der drei anderen fundamentalen Naturkräfte benutzt werden. Insbesondere führte die Ashtekar-Formulierung zum Verschwinden einiger zentraler Probleme, denen man zuvor bei dem Versuch begegnete, eine Quantentheorie der Gravitation zu konstruieren. Die Loop-Quantengravitation, die zur Zeit als ein vielversprechender Kandidat für eine solche Theorie bewertet wird, basiert auf dieser Formulierung.

In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang zwischen der Einsteinschen und der Ashtekar-Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie hergestellt werden. Wir beginnen mit der metrischen Formulierung und führen dann schrittweise die Transformation zu den neuen Ashtekar-Variablen aus.

### 1.1 Ashtekar-Formulierung der ART

Im Folgenden nehmen wir an, dass  $\mathcal{M}$  eine 4-dimensionale, orientierte Mannigfaltigkeit mit Topologie  $M \times \mathbb{R}$  ist.  $M$  sei dabei eine orientierte, kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand. Die Metrik auf  $\mathcal{M}$  bezeichnen wir mit  $g_{\mu\nu}$ . Ausgedrückt durch die Metrik lautet die Einstein-Hilbert-Wirkung

$$S[g] = \int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}[g]. \quad (1.1)$$

Im Vierbein-Formalismus wählt man einen Vektorraum  $V$  mit fester Metrik  $\eta_{IJ}$  und führt ein Vierbeinfeld  $e_I^\mu$  ein, so dass gilt

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^I(x)e_\nu^J(x)\eta_{IJ}. \quad (1.2)$$

Das Vierbein ersetzt also die Metrik und definiert darüber hinaus den so genannten Spin-Zusammenhang  $\omega_\mu^{IJ}[e]$  durch die Bedingung

$$\partial_{[\mu}e_{\nu]}^I + \omega_{[\mu J}^I[e]e_{\nu]}^J = 0. \quad (1.3)$$

Dabei bedeuten die tiefgestellten eckigen Klammern Antisymmetrisierung in den entsprechenden Indizes. Man benutzt also als Variablen das Paar  $(e_I^\mu, \omega_\mu^{IJ})$  von 1-Formen auf  $\mathcal{M}$  mit Werten in  $V$  beziehungsweise in der Lie-Algebra  $so(\eta)$  der Gruppe  $SO(\eta)$  von linearen Transformationen von  $V$ , die die Metrik  $\eta_{IJ}$  erhalten. Der Zusammenhang zwischen der Riemannschen Krümmung und der Krümmung des Spin-Zusammenhangs ist

$$R_{\nu\tau\sigma}^\mu[g] = e_I^\mu e_{\nu J} e_{\tau\sigma}^{IJ}[\omega]. \quad (1.4)$$

Die Wirkung kann man nun durch das Vierbein und den Spinzusammenhang ausdrücken, wobei man beide als voneinander unabhängige Variablen auffasst:

$$S[e, \omega] = \int d^4x e e_I^\mu e_J^\nu R_{\mu\nu}^{IJ}[\omega]. \quad (1.5)$$

Dabei ist  $e$  die Determinante und  $e_I^\mu$  das Inverse von  $e_\mu^I$ . Die Bewegungsgleichungen für  $\omega$  besagen gerade, dass  $\omega = \omega[e]$  der Spinzusammenhang ist, der über (1.3) durch  $e$  definiert ist. Die Bewegungsgleichungen für  $e$  sind die Vakuum-Einstein-Gleichungen.

Der Übergang zur Ashtekar-Formulierung wird nun skizziert. Zunächst stellt man fest, dass der Ausdruck

$$T[e, \omega] = -\frac{1}{2}i \int d^4x e e_I^\mu e_J^\nu \epsilon^{IJ}{}_{MN} R_{\mu\nu}^{MN}[\omega], \quad (1.6)$$

wobei  $\epsilon^{IJ}{}_{MN}$  der vollständig antisymmetrische Tensor ist, zur Wirkung hinzuaddiert werden kann. Denn  $T[e] = T[e, \omega[e]]$  ist invariant unter lokalen Variationen von  $e$ . Also ist

$$S'[e, \omega] = \int d^4x e e_I^\mu e_J^\nu (R_{\mu\nu}^{IJ}[\omega] - \frac{1}{2}i\epsilon^{IJ}{}_{MN} R_{\mu\nu}^{MN}[\omega]) \quad (1.7)$$

eine ebenso gute Wirkung für die Allgemeine Relativitätstheorie. Nun führt man eine komplexe Größe ein, den sogenannten selbstdualen Zusammenhang<sup>1</sup>:

$$A_\mu^{IJ}[\omega] = \omega_\mu^{IJ} - \frac{1}{2}i\epsilon^{IJ}{}_{MN}\omega_\mu^{MN}. \quad (1.8)$$

<sup>1</sup>Selbstdual bedeutet, dass der Zusammenhang die Bedingung  $A_\mu^{MN} = -\frac{1}{2}i\epsilon^{MN}{}_{IJ}A_\mu^{IJ}$  erfüllt.

Die Krümmung des selbstdualen Zusammenhangs bezeichnen wir mit  $F_{\mu\nu}^{IJ}$ . Die entscheidende Beobachtung ist nun, dass die Krümmung des selbstdualen Zusammenhangs gleich dem selbstdualen Teil der Krümmung des Spinzusammenhangs  $\omega$  ist:

$$F_{\mu\nu}^{IJ}[A[\omega]] = R_{\mu\nu}^{IJ} - \frac{1}{2}i\epsilon^{IJ}{}_{MN}R_{\mu\nu}^{MN}[\omega]. \quad (1.9)$$

Dies ist aber gerade der Ausdruck in der Klammer von (1.7). Man kann die Wirkung also schreiben als

$$\begin{aligned} S[e, A] &= \int d^4x e e_I^\mu e_J^\nu F_{\mu\nu}^{IJ}[A[\omega]] \\ &= \int d^4x e_{\mu I} e_{\nu J} F_{\tau\sigma}^{IJ}[A] \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Auf diese Weise wird die Wirkung der Allgemeinen Relativitätstheorie durch ein Vierbeinfeld  $e$  und einen selbstdualen Zusammenhang  $A$  ausgedrückt. Dies ist die Ashtekar-Formulierung der ART im Lagrange-Formalismus.

Um zum kanonischen Formalismus überzugehen, führt man zunächst eine 3+1-Dekomposition der Lagrange-Variablen aus. Dazu wählt man eine glatte Funktion  $t$  auf  $\mathcal{M}$ , so dass  $dt$  nirgendwo verschwindet und jede  $t = \text{const}$  Hyperebene isomorph zu  $M$  ist. Außerdem sei  $t^\alpha$  ein Vektorfeld, so dass  $t^\alpha \nabla_\alpha t = 1$ . Sei  $n^\alpha$  das Normaleneinheitsvektorfeld senkrecht zu den  $t = \text{const}$  Hyperebenen. Dann definiert die Zerlegung  $t^\alpha = N n^\alpha + N^\alpha$  die sogenannten *Lapse*- und *Shift*-Vektorfelder  $N$  und  $N^\alpha$ .

Die Metrik auf einer raumartigen Cauchy-Fläche bezeichnen wir mit  $q_{ab} = g_{ab}[e]$ . Es besteht der folgende Zusammenhang (siehe [8]) zwischen den Lapse-, Shift- und Vierbeinvektorfeldern:

$$N^a = e_I^a e^{0I}, \quad (1.11)$$

$$N = \frac{e}{\sqrt{q}}. \quad (1.12)$$

Außerdem definieren wir noch die Größe

$$E_I^a = \sqrt{q} (e_I^a - N^a e_I^0). \quad (1.13)$$

Dabei ist  $q$  die Determinante der 3-Metrik  $q_{ab}$ . Mit dem antisymmetrischen 3-Index-Tensor

$$\epsilon^{IJK} = e_L^0 \epsilon^{LIJK} \quad (1.14)$$

kann man schließlich noch den sogenannten 1-Index-Zusammenhang

$$A_a^I[e] = \epsilon_{JK}^I A_a^{JK}[e] \quad (1.15)$$

definieren. In [13] oder [8] wird gezeigt, dass es sich hierbei in der Tat um einen Zusammenhang auf  $M$  handelt mit einer Strukturgruppe, die isomorph zur  $SU(2)$

ist. Mit Hilfe dieser Variablen kann man die Wirkung in der folgenden Form schreiben:

$$S[E, N, N^a, e_I^0] = \int d^4x \, iA_a^I[e] \dot{E}_I^a + iA_0^I[e] D_b E_I^b + iN^a E_J^b F_{ab}^J + N E_I^a E_J^b F_{ab}^{IJ}. \quad (1.16)$$

Dabei sind  $D_a$  und  $F_{ab}^I$  die kovariante Ableitung und die Krümmung, die durch den 1-Index-Zusammenhang definiert werden. Es ist offensichtlich, dass  $E_I^a$  die einzige dynamische Variable ist. Alle anderen können als Lagrange-Multiplikatoren aufgefasst und frei gewählt werden. Insbesondere kann man die Freiheit in der Wahl des Vierbeins ausnutzen, indem man

$$e_i^0 = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.17)$$

setzt. Dadurch wird  $\epsilon^{IJK}$  zum total antisymmetrischen Tensor  $\epsilon^{ijk}$  in drei Dimensionen, und die einzigen nicht verschwindenden Komponenten von  $A_a^I[e]$  sind  $A_a^i[e]$ . Damit schreibt sich die Wirkung als

$$S[E, N, N^a, e_I^0] = \int d^4x \, iA_a^i[e] \dot{E}_i^a + iA_0^i[e] C_i + iN^a C_a + NC, \quad (1.18)$$

mit

$$C_i = D_b E_i^b, \quad (1.19)$$

$$C_a = E_i^b F_{ab}^i, \quad (1.20)$$

$$C = E_i^a E_i^b F_{ab}^{ij}. \quad (1.21)$$

Nun kann man die zu  $E_i^a$  kanonisch konjugierten Impulse berechnen und erhält

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{E}_i^a} = iA_a^i[e]. \quad (1.22)$$

Gemäß den Regeln der Hamiltonschen Mechanik fasst man  $E_i^a$  und  $A_a^i$  als unabhängige kanonische Variablen auf und erhält für deren Poisson-Klammer

$$\{A_a^i(\vec{x}), E_j^b(\vec{y})\} = i \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(\vec{x}, \vec{y}). \quad (1.23)$$

Als nächstes betrachten wir die Zwangsbedingungen. Die primären Zwangsbedingungen ergeben sich aus der Definition der Impulse. Es zeigt sich, dass der Realteil der Impulse  $\text{Re}[iA_a^i[e]]$  übereinstimmt mit den herkömmlichen Impulsen des Vierbein-Formalismus, dessen Wirkung (1.5) gerade der Realteil der Wirkung (1.7) ist.

Für den Imaginärteil erhält man

$$\text{Im}[iA_a^i[e]] = \text{Im}[i\epsilon_{jk}^i A_a^{jk}[e]] = \epsilon_{jk}^i \omega_a^{jk}[e]. \quad (1.24)$$

Aus der Definition (1.3) folgt, dass  $\omega_a^{jk}[e]$  nicht von Zeitableitungen des Vierbeins  $e$  abhängt. Es ist lediglich eine Funktion des Dreibeins  $E_i^a$ . Die sich so ergebende primäre Zwangsbedingung nennt man auch die *Realitätsbedingung*. Man schreibt sie gewöhnlich in der Form

$$\bar{A}_a^i = A_a^i + 2i\epsilon_{ijk}\omega_a^{jk}[E]. \quad (1.25)$$

Die übrigen Zwangsbedingungen ergeben sich aus dem Auftreten der Lagrange-Multiplikatoren in der Wirkung:

$$C_i[A, E] = 0, \quad (1.26)$$

$$C_a[A, E] = 0, \quad (1.27)$$

$$C[A, E] = 0. \quad (1.28)$$

Man nennt sie die Eichbedingung, die Vektorbedingung sowie die Hamilton-Bedingung. Eine ausführliche Rechnung (siehe [14]) zeigt, dass es sich hierbei um Zwangsbedingungen erster Klasse handelt.

## 1.2 Physikalische Interpretation der Zwangsbedingungen

Die Zwangsbedingungen (1.26) und (1.27) sind die Erzeugenden von Eichtransformationen und Diffeomorphismen auf  $M$ . Der physikalische Ursprung der Eichsymmetrie liegt in der Verwendung der Vierbeine. Sie spiegelt die Freiheit in der Wahl des lokalen euklidischen Bezugssystems wider. Bedingung (1.28) ist die Erzeugende einer Entwicklung in dem Parameter  $t$ .

Man gibt die Zwangsbedingungen oft in verschmierter Form an. Das heißt, man integriert sie gegen eine geeignete „Testfunktion“ und fordert, dass das Integral identisch verschwindet. Man erhält

$$G[\lambda] = - \int d^3x \lambda^i(x) C_i(x) = 0, \quad (1.29)$$

$$C[\vec{N}] = \int d^3x N^a(x) C_a(x) = 0. \quad (1.30)$$

Da es sich bei dem Ausdruck in (1.28) um eine Dichte vom Gewicht zwei handelt, muss man zunächst durch die Determinante von  $E$  dividieren, um gegen eine skalare Größe integrieren zu können. Um eine Form der Hamiltonschen Zwangsbedingung zu erhalten, die sich für die Quantisierung als fruchtbar erweisen wird, bedient man sich dazu des folgenden Tricks. Man schreibt das Volumen in der Form

$$V = \int d^3x \sqrt{\det E(x)} \quad (1.31)$$

und berechnet die Poissonklammer zwischen dem Volumen und dem Zusammenhang. Man erhält (siehe [9])

$$\{V, A_a^i(x)\} = \frac{3E_j^b(x)E_k^c(x)\epsilon_{abc}\epsilon^{ijk}}{2\det E(x)}. \quad (1.32)$$

Damit kann man dann (1.28) in integrierter Form schreiben als

$$H[N] = \int N \operatorname{tr}(F \wedge \{V, A\}) = 0. \quad (1.33)$$

Diese Form ist hinsichtlich der Quantentheorie zweckmäßig, da es einen wohldefinierten Operator für die Observable Volumen gibt (siehe Abschnitt 3.2.2) und die Poissonklammer in natürlicher Weise als Kommutator realisiert werden kann.

### 1.3 Euklidische ART und der reelle Zusammenhang

Man kann eine Feldtheorie definieren, die sich von der ART geringfügig unterscheidet und für den Übergang zur Quantentheorie eine wichtige Rolle spielt. Diese *Euklidische ART* genannte Variante wird ebenfalls durch die Wirkung (1.5) beschrieben. Der Unterschied besteht darin, dass man im Raum  $V$  statt der Minkowski-Metrik  $\eta_{IJ}$  die Euklidische Metrik  $\delta_{IJ}$  wählt. Zur eindeutigen Unterscheidung bezeichnen wir im Folgenden die ART gelegentlich auch als *Lorentzsche ART*.

Man kann den oben beschriebenen Formalismus auf die Euklidische ART übertragen und wiederum einen selbstdualen Zusammenhang einführen. Dieser ist jedoch reell. Es gilt

$$A^i = \omega^i + \omega^{0i}. \quad (1.34)$$

Daraus ergibt sich für die Poissonklammer

$$\{A_a^i(\vec{x}), E_j^b(\vec{y})\} = \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(\vec{x}, \vec{y}). \quad (1.35)$$

Bemerkenswerter Weise ist der kanonische Formalismus der Euklidischen Theorie formal identisch mit dem der Lorentzschon. Es gelten die gleichen Zwangsbedingungen (1.26)-(1.28). Der einzige Unterschied ist, dass die Realitätsbedingung (1.25) ersetzt wird durch:

$$E^{ai} - \overline{E^{ai}} = 0, \quad (1.36)$$

$$A^{ai} - \overline{A^{ai}} = 0. \quad (1.37)$$



Auch wenn die Euklidische ART nicht die Welt beschreibt, in der wir leben, so spielt sie eine wegweisende Rolle in der Suche nach einer physikalisch korrekten Quantentheorie der Gravitation. Dafür gibt es mehrere Gründe.

Zum einen ist die Euklidische ART aufgrund der einfacheren Gestalt der Realitätsbedingung leichter handzuhaben als die Lorentzsche. Sie ist aber dennoch ein hochgradig nichttriviales Beispiel für eine allgemein kovariante Feldtheorie. Eine Quantisierung wäre also bereits ein bedeutender Schritt in Richtung der endgültigen, physikalisch korrekten Theorie.

Zweitens gibt es auf flachen Raumzeiten eine enge Verbindung zwischen Euklidischen und Lorentzischen Quantenfeldtheorien. Vereinfacht gesagt kann man über eine Wick-Rotation von der einen zur anderen Theorie wechseln. Dies ist in der ART nicht ohne weiteres möglich, da es keine ausgezeichnete Zeit-Koordinate gibt. Die Analogie zur QFT auf flachen Raumzeiten legt jedoch nahe, dass auch in der Quantentheorie der Gravitation ein solcher Zusammenhang existieren könnte.

Eine weitere Motivation besteht in der Tatsache, dass die Euklidische und die Lorentzsche Theorie hinsichtlich ihrer Kinematik identisch sind. Für eine Untersuchung der kinematischen Aspekte ist es also insbesondere gerechtfertigt, die Euklidische ART zu studieren.

## 1.4 Barbero-Zusammenhang und Immirzi-Parameter

Kehren wir nun zur Lorentzischen ART zurück. Man kann dort alternativ die Größe

$$A^i = \omega^i + \omega^{0i}. \quad (1.38)$$

introduzieren, genau wie in (1.34). Jedoch transformiert sich dieser Ausdruck unter lokalen Lorentz-Transformationen nicht wie ein Zusammenhang. Wählen wir jedoch die Eichung wie in (1.17), so transformiert sich (1.38) bemerkenswerter Weise auch in der Lorentzischen Theorie als Zusammenhang unter der reduzierten Eichgruppe  $SU(2)$ . Wir können diese Größe dann wiederum als eine kanonische Variable auffassen und die Theorie damit formulieren. Die Realitätsbedingung ist dann trivial. Man kann sogar noch einen Schritt weitergehen und definieren:

$$A^i = \omega^i + \gamma \omega^{0i}, \quad (1.39)$$

wobei  $\gamma$  ein komplexer Parameter ist. Diese Größe nennt man den Barbero-Zusammenhang. Der Parameter  $\gamma$  heißt, wenn er reell ist, Immirzi-Parameter. Wiederum hat man eine triviale Realitätsbedingung, die Hamilton-Funktion nimmt

nun die folgende, etwas kompliziertere Form an:

$$H = (F_{ab}^{ij} + (\gamma^2 + 1)K_{[a}^i K_{b]}^j) E_i^a E_j^b . \quad (1.40)$$

Dabei ist  $K_a^i = A_a^i - \Gamma_a^i[E]$  (siehe zum Beispiel [15]). Dies ist der Formalismus, den wir für die Quantentheorie benutzen werden. Für die Poissonklammer gilt:

$$\{A_a^i(\vec{x}), E_j^b(\vec{y})\} = \gamma \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(\vec{x}, \vec{y}) . \quad (1.41)$$

Der Parameter  $\gamma$  hat klassisch keine Bedeutung. Allerdings ergeben sich aus der Quantentheorie für verschiedene Werte von  $\gamma$  unterschiedliche Vorhersagen. Zum Beispiel geht  $\gamma$  in die Berechnung der Entropie eines schwarzen Loches ein. Ein Vergleich mit der thermodynamisch bestimmten Entropie liefert dann den Wert

$$\gamma = \frac{\ln 2}{\pi\sqrt{3}} \approx 0,06 . \quad (1.42)$$

# Kapitel 2

## Kanonische Quantisierung

Die Loop-Quantengravitation ist ein Versuch, die Allgemeine Relativitätstheorie ausgehend von der in Kapitel 1 beschriebenen Formulierung kanonisch zu quantisieren. Wie erwähnt, geht man dabei meist von der in Abschnitt 1.4 definierten Variante mit reellem Zusammenhang aus.

Die Methode der kanonischen Quantisierung ist eine Weiterentwicklung der Methode von Dirac zur Quantisierung Hamiltonscher Systeme mit Zwangsbedingungen. Eine ausführliche Beschreibung dieser Vorgehensweise ist in der Arbeit [16] zu finden. Man konstruiert zunächst einen Zustandsraum  $\mathcal{K}$ . Dieser besteht aus Funktionalen auf dem klassischen Konfigurationsraum und wird auch als kinematischer Zustandsraum bezeichnet. Auf  $\mathcal{K}$  muss dann ein geeignetes Skalarprodukt definiert werden. Die Dynamik ist in den Zwangsbedingungen kodiert. Diese müssen in geeigneter Weise in die Quantentheorie einfließen. Dazu definiert man Operatoren auf  $\mathcal{K}$ , drückt die Zwangsbedingungen durch diese Operatoren aus und fordert, dass die physikalischen Zustände im Kern dieser Operatoren liegen.

In den nächsten Abschnitten wird diese Methode auf die oben genannte Formulierung der ART angewandt. Ziel ist es, einen Überblick über die wesentlichen Konzepte zu geben und das physikalische Bild zu präsentieren, das sich aus dieser Vorgehensweise ergibt. Die folgende Darstellung erhebt nicht den Anspruch, die mathematischen Grundlagen der Loop-Quantengravitation in vollem Umfang zu behandeln. Dazu sei auf die Arbeit [15] verwiesen.

### 2.1 Der kinematische Zustandsraum $\mathcal{K}$

Wie in Abschnitt 1.4 erläutert, basiert die Ashtekar-Formulierung der ART auf dem Zusammenhang  $A$ , der Werte in der Lie-Algebra  $su(2)$  annimmt. Wir wählen

mit  $\tau_i = -\frac{1}{2}\sigma_i$  eine feste Basis in  $su(2)$ , wobei  $\sigma_i$  die Pauli-Matrizen sind, und schreiben  $A$  als

$$A(\vec{x}) = A_a^i(\vec{x}) \tau_i dx^a. \quad (2.1)$$

Der Konfigurationsraum  $\mathcal{A}$  ist der Raum der glatten reellen Zusammenhänge auf der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$ . Man konstruiert den kinematischen Zustandsraum auf die folgende Weise.

Unter einem Pfad verstehen wir eine Äquivalenzklasse von orientierten, stückweise analytischen Kurven in  $M$  unter Reparametrisierung. Die Holonomie entlang eines orientierten Pfades  $\gamma$  in  $M$ , also das Gruppenelement  $U(A, \gamma) = \mathcal{P} \exp \int_\gamma A$ , kann man für gegebenes  $\gamma$  auffassen als ein Funktional auf  $\mathcal{A}$ .

Ein Graph  $\Gamma$  sei eine geordnete Menge von endlich vielen glatten Pfaden  $\gamma_n$ . Sei  $N$  die Anzahl der Pfade in  $\Gamma$ . Für eine glatte Funktion  $f : SU(2)^{\times N} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert das Paar  $(\Gamma, f)$  ein Funktional

$$\Psi_{\Gamma, f}[A] = f(U(A, \gamma_1), \dots, U(A, \gamma_N)). \quad (2.2)$$

von  $A$ . Funktionale dieser Form nennen wir zylindrische Funktionen.  $\mathcal{S}$  sei definiert als der lineare Raum solcher Funktionale für alle  $\Gamma$  und  $f$ . Für zwei Funktionale  $\Psi_{\Gamma, f}$  und  $\Psi_{\Gamma, g}$ , die auf demselben Graphen  $\Gamma$  definiert sind, kann man ein Skalarprodukt einführen:

$$\langle \Psi_{\Gamma, f} | \Psi_{\Gamma, g} \rangle \equiv \int dU_1 \dots dU_N \overline{f(U_1, \dots, U_N)} g(U_1, \dots, U_N). \quad (2.3)$$

Dabei ist  $dU$  das Haarsche Maß auf  $SU(2)$ . Man kann dieses Skalarprodukt auf ganz  $\mathcal{S}$  ausdehnen. Wenn ein Graph  $\Gamma$  in einem größeren Graphen  $\Gamma'$  enthalten ist, kann man für das Paar  $(\Gamma, f)$  stets eine Funktion  $f'$  finden, so dass  $(\Gamma, f)$  und  $(\Gamma', f')$  dasselbe Funktional darstellen. Zwei Funktionale  $\Psi_{\Gamma', f'}$  und  $\Psi_{\Gamma'', g''}$ , die durch unterschiedliche Graphen definiert werden, kann man so stets umschreiben zu Funktionalen  $\Psi_{\Gamma, f}$  und  $\Psi_{\Gamma, g}$ , die auf demselben Graphen, etwa der Vereinigung von  $\Gamma'$  und  $\Gamma''$ , definiert sind. Dadurch greift die Definition (2.3) auf ganz  $\mathcal{S}$ :

$$\langle \Psi_{\Gamma', f'} | \Psi_{\Gamma'', g''} \rangle \equiv \langle \Psi_{\Gamma, f} | \Psi_{\Gamma, g} \rangle. \quad (2.4)$$

Es gibt im Allgemeinen mehrere Graphen, die sowohl  $\Gamma'$  als auch  $\Gamma''$  enthalten. Man kann zeigen, dass die Definition des Skalarproduktes wohldefiniert ist in dem Sinne, dass der Wert des Skalarproduktes unabhängig von der Wahl des Graphen  $\Gamma$  ist.

Den kinematischen Hilbert-Raum  $\mathcal{K}$  definiert man als die Vervollständigung von  $\mathcal{S}$  in der durch (2.3) gegebenen Norm.  $\mathcal{S}'$  sei die Vervollständigung von  $\mathcal{S}$  in die durch (2.3) definierte schwache Topologie. Das Tripel  $\mathcal{S} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S}'$  macht die Definition des Hilbert-Raums komplett.

Für diese Definition des Skalarproduktes gibt es verschiedene Gründe. Zum einen ist (2.3) invariant unter Diffeomorphismen sowie lokalen Eichtransformationen, wie wir in Abschnitt 2.1.2 zeigen werden, und hat die Eigenschaft, dass klassische Observablen zu selbstadjungierten Operatoren werden. Darüber hinaus sind mit der obigen Wahl die Loop-Zustände<sup>1</sup>, welche natürliche Objekte der Quantentheorie darstellen, normierbar.

Allerdings könnte man einwenden, dass der konstruierte Hilbertraum  $\mathcal{K}$  nicht separabel ist. Das wäre zum Beispiel bei einer Quantenfeldtheorie auf flacher Raumzeit ein Problem. In einem allgemein-relativistischen Kontext ist dieser Sachverhalt jedoch unproblematisch. Er ist vielmehr ein Artefakt der Eichinvarianz. Der physikalische Hilbertraum, den wir erhalten, wenn wir die Zwangsbedingung implementieren, wird separabel sein.

### 2.1.1 Projektiver Limes

Die Definition von  $\mathcal{K}$  als Vervollständigung des Raums  $\mathcal{S}$  in der durch (2.3) gegebenen Norm ist die Grundlage für die Betrachtungen in den nächsten Abschnitten. In manchen Fällen erweist sich jedoch eine alternative Definition von  $\mathcal{K}$  als zweckmäßig. Man führt dazu eine distributionale Erweiterung  $\overline{\mathcal{A}}$  des Raums der glatten Zusammenhänge ein sowie ein geeignetes Maß auf  $\overline{\mathcal{A}}$  und definiert  $\mathcal{K}$  als den Raum der quadratintegriblen Funktionen auf diesem Raum. Diese Definition findet man in aller Ausführlichkeit in [15]. Die Konstruktion von  $\overline{\mathcal{A}}$  sei im Folgenden skizziert. Dazu führen wir den Begriff des projektiven Limes ein.

**Definition 2.1.** Sei  $\mathcal{L}$  eine partiell geordnete, gerichtete Indexmenge. Das heißt, für jedes  $l, l' \in \mathcal{L}$  gibt es ein  $l'' \in \mathcal{L}$ , so dass  $l, l' \prec l''$ .

1. Eine projektive Familie  $(X_l, p_{ll'})_{l \prec l' \in \mathcal{L}}$  besteht aus Mengen  $X_l$  und surjektiven Projektionen

$$p_{ll'} : X_{l'} \rightarrow X_l \quad \forall l \prec l' \quad (2.5)$$

mit der Eigenschaft

$$p_{ll''} \circ p_{l'l''} = p_{ll'} \quad \forall l \prec l' \prec l''. \quad (2.6)$$

2. Der projektive Limes  $\overline{X}$  einer projektiven Familie  $(X_l, p_{ll'})$  ist die Teilmenge des direkten Produktes  $X_\infty := \prod_{l \in \mathcal{L}} X_l$ , die durch

$$\overline{X} := \{(x_l)_{l \in \mathcal{L}} \mid p_{ll'}(x_{l'}) = x_l \quad \forall l \prec l'\} \quad (2.7)$$

---

<sup>1</sup>Ein Loop-Zustand  $\Psi_\alpha$  liegt vor, wenn der Graph aus einem einzelnen, geschlossenen Pfad  $\alpha$  besteht und  $f$  die Spurfunktion auf der Gruppe ist, also  $(\Gamma, f) = (\alpha, \text{tr})$ . Der tragenden Rolle, die diese Zustände in der Entwicklung der LQG gespielt haben, verdankt die Theorie ihren Namen.

definiert ist.

Man definiert nun zunächst die Kategorie  $\mathfrak{M}$ , deren Objekte Punkte in  $M$  und deren Morphismen Pfade zwischen zwei Punkten in  $M$  sind. Da jeder Morphismus automatisch ein Isomorphismus ist, handelt es sich bei  $\mathfrak{M}$  um einen Grupoid. Sei außerdem  $\mathcal{P}$  die Menge aller Pfade in  $M$  und  $\text{Hom}(\mathcal{P}, G)$  die Menge aller Morphismen von  $\mathcal{P}$  nach  $G$ . In unserem Fall ist die Gruppe  $G$  gegeben durch die  $SU(2)$ .

Die Idee ist nun, den Begriff des projektiven Limes auszunutzen, um  $\text{Hom}(\mathcal{P}, G)$  mit einer Topologie auszustatten. Jeden Graph  $\Gamma$  kann man auffassen als Untergrupoiden von  $\mathfrak{M}$ . Sei  $\mathcal{L}$  die Menge aller Untergrupoiden  $l(\Gamma)$ , die durch einen Graphen  $\Gamma$  definiert werden. Dann erhält  $\mathcal{L}$  die Struktur einer partiell geordneten, gerichteten Indexmenge, indem man definiert  $l \prec l'$  genau dann, wenn  $l$  ein Subgrupoid von  $l'$  ist.

Sei  $X_l := \text{Hom}(l, G)$  die Menge aller Homomorphismen vom Subgrupoid  $l$  nach  $G$ . Dann kann man die folgenden Projektionen definieren:

$$p_{l'l} : X_{l'} \rightarrow X_l; \quad x_{l'} \mapsto (x_{l'})_l . \quad (2.8)$$

Dabei ist  $(x_{l'})_l$  die Einschränkung des Homomorphismus  $l'$  auf  $l$ . Diese Projektionen sind surjektiv und man kann so den projektiven Limes  $\overline{X}$  der Mengen  $X_l$  definieren. Auf  $\overline{X}$  gibt es eine natürliche Topologie, die Tychonoff-Topologie. Man kann zeigen, dass  $\overline{X}$  für  $G = SU(2)$  in dieser Topologie kompakt und Hausdorff ist.

Nun definiert jeder Punkt  $H$  in  $\text{Hom}(\mathcal{P}, G)$  einen Punkt in  $\overline{X}$  durch  $x_l := H|_l$ . Man kann zeigen, dass diese Abbildung bijektiv ist und auf diese Weise den Raum  $\overline{\mathcal{A}} := \text{Hom}(\mathcal{P}, G)$  mit  $\overline{X}$  identifizieren.

Sei nun  $C(X_l)$  der Raum der stetigen, komplexwertigen Funktionen auf  $X_l$  und  $\text{Cyl}(\overline{X})$  die Vereinigung

$$\text{Cyl}(\overline{X}) := \bigcup_{l \in \mathcal{L}} C(X_l) . \quad (2.9)$$

Für  $f, f' \in \text{Cyl}(\overline{X})$  kann man stets  $l, l' \in \mathcal{L}$  finden, so dass  $f \in C(X_l)$ ,  $f' \in C(X_{l'})$ . Man sagt,  $f$  und  $f'$  sind äquivalent, wenn gilt

$$p_{l''l}^* f = p_{l''l'}^* f' \quad \forall l, l' \prec l'' . \quad (2.10)$$

Der Raum der zylindrischen Funktionen auf  $\overline{X}$  definiert man dann als den Raum von Äquivalenzklassen in  $\text{Cyl}(\overline{X})$ .

### 2.1.2 Invarianz des Skalarproduktes

Der konstruierte kinematische Zustandsraum trägt natürliche Darstellungen der lokalen  $SU(2)$  sowie der Gruppe  $Diff^*(M)$ , die über die Transformation des Arguments  $A$  definiert werden. Im Folgenden zeigen wir, dass diese Transformationen das Skalarprodukt invariant lassen und daher unitär sind.

Unter lokalen  $SU(2)$ -Transformationen  $\lambda : M \rightarrow SU(2)$  transformiert sich der Zusammenhang gemäß

$$A \rightarrow A_\lambda = \lambda A \lambda^{-1} + \lambda d\lambda^{-1}. \quad (2.11)$$

Eine natürliche Darstellung auf  $\mathcal{K}$  ist gegeben durch  $\Psi(A) \rightarrow \Psi(A_{\lambda^{-1}})$ . Die Holonomie transformiert sich homogen

$$U(A, \gamma) \rightarrow U(A_\lambda, \gamma) = \lambda(x_f^\gamma) U(A, \gamma) \lambda^{-1}(x_i^\gamma), \quad (2.12)$$

wobei  $x_i^\gamma, x_f^\gamma$  den Anfangs- und Endpunkt vom Pfad  $\gamma$  bezeichnen. Nun definiert man

$$f_\lambda(U_1(A, \gamma_1), \dots, U_N(A, \gamma_N)) = f(U_1(A_\lambda, \gamma_1), \dots, U_N(A_\lambda, \gamma_N)) \quad (2.13)$$

und erhält so für die Transformation der Zustände:

$$\Psi_{\Gamma, f}(A) \rightarrow \Psi_{\Gamma, f}(A_{\lambda^{-1}}) = \Psi_{\Gamma, f_{\lambda^{-1}}}(A). \quad (2.14)$$

Da das Haarsche Maß invariant unter linker und rechter Wirkung der Gruppe ist, folgt sofort die Invarianz von (2.3).

Nun betrachten wir das Verhalten unter erweiterten Diffeomorphismen. Dies sind Abbildungen  $\phi : M \rightarrow M$ , die stetig und umkehrbar sind und für die gilt, dass die Abbildung selbst sowie ihre Umkehrung überall glatt sind mit Ausnahme endlich vieler isolierter Punkte. Diese Abbildungen formen eine Gruppe, die wir  $Diff^*(M)$  nennen. Es existiert eine natürliche Darstellung dieser Gruppe auf dem Raum  $\mathcal{S}$ . Man definiert  $U_\phi \Psi(A) = \Psi((\phi^*)^{-1}A)$ . Die Holonomie transformiert sich gemäß

$$U(A, \gamma) \rightarrow U(\phi^* A, \gamma) = U(A, \phi^{-1} \gamma). \quad (2.15)$$

Eine zylindrische Funktion  $\Psi_{\Gamma, f}[A]$  wird dann abgebildet auf eine zylindrische Funktion  $\Psi_{\phi\Gamma, f}[A]$ . Ein Diffeomorphismus ändert also nur den zum Zustand gehörigen Graphen, nicht aber die Funktion  $f$ . Da jedoch die rechte Seite von (2.3) explizit nicht vom Graphen abhängt, ist die Invarianz des Skalarproduktes unter  $Diff^*(M)$  offensichtlich.

### 2.1.3 Eine orthonormale Basis von $\mathcal{K}$

Man kann eine orthonormale Basis von  $\mathcal{K}$  finden. Das Hilfsmittel hierzu ist das Peter-Weyl-Theorem, welches besagt, dass eine Basis des Hilbertraums der quadratintegralen Funktionen auf  $SU(2)$  gegeben ist durch die Matrixelemente der irreduziblen Darstellungen der Gruppe. Wir schreiben für die Matrixelemente der Darstellung  $j$

$$R^{(j)\alpha}_{\beta}(U) = \langle U|j, \alpha, \beta\rangle. \quad (2.16)$$

Eine Basis auf dem endlichdimensionalen Unterraum  $\mathcal{K}_{\Gamma}$  der zylindrische Funktionen mit Träger auf  $\Gamma$  ist dann gegeben durch das  $L$ -fache Tensorprodukt der Basis (2.16), wobei  $L$  die Anzahl der Pfade in  $\Gamma$  ist:

$$\begin{aligned} |\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle &\equiv |\Gamma, j_1, \alpha_1, \beta_1 \dots j_L, \alpha_L, \beta_L\rangle, \\ \langle A|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle &= R^{(j_1)\alpha_1}_{\beta_1}(U(A, \gamma_1)) \dots R^{(j_L)\alpha_L}_{\beta_L}(U(A, \gamma_L)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die Menge aller Vektoren  $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$  ist noch keine Basis von  $\mathcal{K}$ , denn derselbe Vektor ist sowohl in  $\mathcal{K}_{\Gamma}$  als auch in  $\mathcal{K}'_{\Gamma}$  enthalten, wenn der Graph  $\Gamma$  eine echte Teilmenge von  $\Gamma'$  ist. Diese Redundanz kann man jedoch leicht vermeiden, indem man fordert, dass die Spins  $j_l$  nicht den Wert 0 annehmen.

Mit dieser Definition und mit (2.14) ergibt sich das folgende Verhalten der Basiszustände unter  $SU(2)$ -Transformationen:

$$\begin{aligned} |\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle &\rightarrow R^{(j_1)\alpha_1}_{\alpha'_1}(\lambda^{-1}(x_{f_1}))R^{(j_1)\beta'_1}_{\beta_1}(\lambda(x_{i_1})) \dots \\ &\quad R^{(j_L)\alpha_L}_{\alpha'_L}(\lambda^{-1}(x_{f_L}))R^{(j_L)\beta'_L}_{\beta_L}(\lambda(x_{i_L})) \\ &\quad |\Gamma, j_l, \alpha'_l, \beta'_l\rangle. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dabei sind  $i_l$  und  $f_l$  Anfangs- und Endpunkt des Pfads  $l$ .

## 2.2 Eichinvarianz. Der Raum $\mathcal{K}_0$

Wir wollen nun die Zustände in  $\mathcal{K}$  finden, die invariant unter  $SU(2)$ -Transformationen sind. Den Raum dieser Zustände nennen wir  $\mathcal{K}_0$ .  $\mathcal{S}_0$  sei der entsprechende invariante Unterraum von  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}'_0$  der zugehörige Dualraum. In den Anfängen der LQG haben die Loop-Zustände eine wichtige Rolle gespielt, da sie den Raum  $\mathcal{K}_0$  aufspannen. Jedoch ist die Menge dieser Zustände linear abhängig. Heute benutzt man daher die Spin-Netzkerk-Zustände, die eine orthonormale Basis von  $\mathcal{K}_0$  bilden.



### 2.2.1 Spin-Netzwerk-Zustände

Wir bezeichnen im Folgenden die Anfangs- und Endpunkte von Pfaden in einem Graphen  $\Gamma$  als Knotenpunkte und fordern ohne Beschränkung der Allgemeinheit, dass die Pfade des Graphen sich nur an Knotenpunkten schneiden. Ein Knotenpunkt heißt  $m$ -wertig, wenn an ihm  $m$  Pfade zusammentreffen. Wenn wir jedem Pfad von  $\Gamma$  eine irreduzible Darstellung  $j_l$  der  $SU(2)$  zuordnen und jedem  $m$ -wertigen Knotenpunkt einen invarianten Tensor  $i_n$ , auch Intertwiner genannt, mit  $m$  Indizes in den Darstellungen der angrenzenden Pfade, dann nennen wir das Tripel  $(\Gamma, j_l, i_n)$  ein Spinnetzwerk in  $M$ . Eine Wahl der,  $j_l$  und  $i_n$  nennt man eine Färbung der Pfade bzw. der Knotenpunkte (siehe Abb. 2.1).

Ein Spinnetzwerk definiert einen unter  $SU(2)$ -Transformationen invarianten Zustand  $|S\rangle$ . Diesen erhält man, indem man den zugehörigen Zustand  $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$  aus Abschnitt 2.1.3 mit den Intertwinern  $i_n$  kontrahiert. Dabei wird der Index  $\alpha_l$  (bzw.  $\beta_l$ ) kontrahiert mit dem entsprechenden Index des zugehörigen Intertwiners,

$$\Psi_S[A] = \langle A|S\rangle \equiv \left( \bigotimes_l R^{(j_l)}(U(A, \gamma_l)) \right) \cdot \left( \bigotimes_n i_n \right). \quad (2.19)$$

Die Invarianz der so erhaltenen Zustände folgt aus dem Transformationsverhalten der Basiszustände (2.18) sowie der Invarianz der Intertwiner. Die Spinnetzwerk-Zustände bilden eine orthonormale Basis von  $\mathcal{K}_0$ . Diese Basis ist nicht eindeutig, sondern hängt von der Wahl einer Basis im Raum der Intertwiner an jedem Punkt von  $\Gamma$  ab. Der Raum  $\mathcal{S}_0$  ist der Raum der endlichem Linearkombinationen von Spinnetzwerk-Zuständen und ist dicht in  $\mathcal{K}_0$ .  $\mathcal{S}'_0$  ist der entsprechende Dualraum.

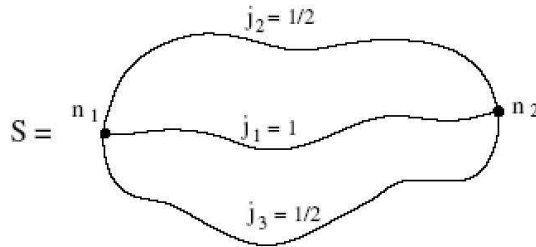


Abbildung 2.1: Ein einfaches Spinnetzwerk mit zwei dreiwertigen Knotenpunkten.

## 2.3 Diffeomorphismeninvarianz. Der Raum $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$

Es müssen nun die Zustände gefunden werden, die invariant unter  $\text{Diff}^*(M)$  sind. Diese Zustände liegen nicht in  $\mathcal{K}_0$ , sondern in  $\mathcal{S}'_0$ . Dies ist der Raum der linearen Funktionale  $\Phi$  auf  $\mathcal{S}_0$ . Die Wirkung eines Diffeomorphismus in  $\mathcal{S}'_0$  ist wohldefiniert, es gilt

$$(U_\phi\Phi)(\Psi) \equiv \Phi(U_{\phi^{-1}}\Psi), \quad \phi \in \text{Diff}^*. \quad (2.20)$$

Die Forderung nach Diffeomorphismeninvarianz in  $\mathcal{S}'_0$  macht also Sinn, und für ein invariantes Funktional muss gelten

$$\Phi(U_\phi\Psi) \equiv \Phi(\Psi). \quad (2.21)$$

Wir konstruieren nun eine Abbildung  $P_{\text{Diff}} : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}'_0$ , deren Bild gerade der Raum  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$  der diffeomorphismeninvarianten Zustände ist.  $P_{\text{Diff}}$  sei definiert durch die Vorschrift

$$(P_{\text{Diff}}\Psi)(\Psi') = \sum_{\Psi''=U_\phi\Psi} \langle \Psi'' | \Psi' \rangle. \quad (2.22)$$

Summiert wird über alle  $\Psi'' \in \mathcal{S}_0$ , für die ein  $\phi \in \text{Diff}^*$  existiert, so dass gilt  $\Psi'' = U_\phi\Psi$ . Die Summe ist stets endlich und somit wohl definiert, denn  $\Psi$  und  $\Psi'$  liegen in  $\mathcal{S}_0$  und lassen sich daher als endliche Linearkombinationen von Spinnetzwerkzuständen schreiben. Da Spinnetzwerkzustände auf unterschiedlichen Graphen orthogonal zueinander sind, tragen von allen Diffeomorphismen, die den Graph verändern, nur endlich viele bei. Die Diffeomorphismen, die den Graph eines Spinnetzwerkes belassen, ändern höchstens die Orientierung oder Ordnung der einzelnen Pfade. Da dies jedoch diskrete Operationen sind, ist auch die Anzahl dieser Summanden endlich.  $P_{\text{Diff}}\Psi$  erfüllt die Bedingung (2.21). Außerdem kann man zeigen (siehe [17]), dass die Funktionale der Form (2.22) den Raum der invarianten Zustände aufspannen, so dass das Bild von  $P_{\text{Diff}}$  gerade der gesuchte Raum  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$  ist.

### 2.3.1 Knoten und $s$ -Knoten-Zustände

In diesem Abschnitt betrachten wir die Wirkung von  $P_{\text{Diff}}$  auf die Spinnetzwerk-Zustände und konstruieren eine Basis des Raums  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$ .

Sei  $g_k|S\rangle$  ein Zustand, den man aus  $|S\rangle$  über einen Diffeomorphismus erhält, der nicht den Graphen  $\Gamma$ , sondern nur die Orientierung oder Ordnung der Pfade in  $\Gamma$  ändert. Wie oben bemerkt, formen diese Abbildungen  $g_k$  eine diskrete Gruppe  $G_\Gamma$  mit endlich vielen Elementen. Es gilt dann

$$\langle S | P_{\text{Diff}} | S' \rangle = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \Gamma \neq \phi\Gamma', \\ \sum_k \langle S | g_k | S' \rangle & \text{wenn } \Gamma = \phi\Gamma'. \end{cases} \quad (2.23)$$

Eine Äquivalenzklasse  $K$  von Graphen unter Diffeomorphismen wird Knoten genannt. An (2.23) sieht man also, dass zwei Spinnetzwerke  $S$  und  $S'$  orthogonale Zustände in  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$  definieren, wenn ihre Graphen nicht zur selben Klasse  $K$  gehören. Es sei  $\mathcal{K}_K$  der Unterraum von  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$ , der von den Basiszuständen aufgespannt wird, die zur Klasse  $K$  gehören, also

$$\mathcal{K}_K = P_{\text{Diff}} \mathcal{K}_\Gamma, \quad \Gamma \in K. \quad (2.24)$$

Zwei Zustände in  $\mathcal{K}_K$  mit unterschiedlichen Färbungen sind allerdings nicht notwendig orthogonal aufgrund der nicht trivialen Wirkung der Gruppe  $G_\Gamma$ . Um eine orthonormale Basis von  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$  angeben zu können, muss man die quadratische Form, die durch die zweite Zeile von (2.23) gegeben ist, diagonalisieren. Bezeichnen wir die resultierenden Zustände mit  $|s\rangle = |K, c\rangle$ , so nennt man  $c$  die Färbung des Knoten  $K$ . Modulo der Wirkung der Gruppe  $G_\Gamma$  entspricht diese der Färbung eines Graphen  $\Gamma$  aus  $K$ . Wir nennen die Zustände  $|s\rangle$  Spin-Knoten-Zustände oder  $s$ -Knoten-Zustände. Sie bilden eine Basis von  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$ . Es ist ein Resultat der Knotentheorie, dass die Menge aller Knoten abzählbar ist.<sup>2</sup> Damit ist der Hilbert-Raum  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$  separabel.

---

<sup>2</sup>Dies ist der Grund für die Wahl der Gruppe  $\text{Diff}^*$ . Hätte man stattdessen die Gruppe  $\text{Diff}$  gewählt, so wäre der Raum der Knotenklassen kontinuierlich.



# Kapitel 3

## Operatoren

Alle messbaren Größen der klassischen Theorie können als Funktionen der Felder  $A_a^i(x)$  und  $E_i^a(x)$  aufgefasst werden. Wir führen nun entsprechende Operatoren ein, die auf die Funktionale des Zusammenhangs wirken gemäß

$$A_a^i(x) \Psi[A] = A_a^i(x) \Psi[A], \quad (3.1)$$

$$E_i^a(x) \Psi[A] = -i \frac{\delta}{\delta A_a^i(x)} \Psi[A]. \quad (3.2)$$

Der Zusammenhang wirkt also als multiplikativer Operator,  $E$  hingegen als funktionale Ableitung. Beide sind jedoch in dieser Form auf dem Raum  $\mathcal{K}$  nicht wohl definiert. Wir betrachten daher statt dessen im Folgenden einige einfache Funktionen dieser Operatoren.

### 3.1 Operatoren auf $\mathcal{K}$

Ein Beispiel für einen wohl definierten Operator auf  $\mathcal{S}$  sind die Matrixelemente der Holonomie  $U_B^A(A, \gamma)$ ,

$$(U_B^A(A, \gamma)\Psi)[A] = U_B^A(A, \gamma)[A] \Psi[A]. \quad (3.3)$$

Für  $\Psi[A] \in \mathcal{S}$  ist die rechte Seite dieser Gleichung ein Produkt zylindrischer Funktionen, also selbst wieder eine zylindrische Funktion und damit in  $\mathcal{S}$ . Allgemeiner ist jede zylindrische Funktion als multiplikativer Operator in  $\mathcal{K}$  wohl definiert.

Nun untersuchen wir die Wirkung von  $E$  auf zylindrische Funktionen. Die Wirkung auf die Holonomie wird in [18] berechnet. Es gilt

$$\frac{\delta}{\delta A_a^i(x)} U(A, \gamma) = \int ds \dot{\gamma}^a(s) \delta^3(\gamma(s), x) [U(A, \gamma_1) \tau_i U(A, \gamma_2)], \quad (3.4)$$

wobei die Kurve  $\gamma$  durch den Parameter  $s$  parametrisiert wird.  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sind so definiert, dass gilt  $\gamma_2 \circ \gamma_1 = \gamma$  und  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \gamma(s)$ . Wir konstruieren einen Operator  $E_i(S)$ , indem wir  $E$  entlang einer zwei-dimensionalen Fläche  $S : (\sigma^1, \sigma^2) \mapsto x^a(\sigma^1, \sigma^2)$  verschmieren:

$$\begin{aligned} E_i(S) &= -i \int_S d\sigma^1 d\sigma^2 n_a(\vec{\sigma}) \frac{\delta}{\delta A_a^i(x(\vec{\sigma}))}, \\ n_a(\vec{\sigma}) &= \epsilon_{abc} \frac{\partial x^b(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Wenn man annimmt, dass  $\gamma$  die Fläche  $S$  genau einmal schneidet, so kann man zeigen [9], dass gilt

$$E_i(S)U(A, \gamma) = \pm i U(A, \gamma_1) \tau_i U(A, \gamma_2). \quad (3.6)$$

Das Vorzeichen gibt die relative Orientierung von  $\gamma$  und  $S$  an. Schneidet die Kurve die Fläche nicht, steht auf der rechten Seite von (3.6) Null. Es gilt wieder  $\gamma_2 \circ \gamma_1 = \gamma$  und  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \gamma \cap S$ . Die Wirkung des Operators  $E_i(S)$  besteht also darin, am Durchstoßpunkt die Matrix  $(\pm i \tau_i)$  einzufügen. Die Verallgemeinerung für den Fall mehrerer Durchstoßpunkte ist

$$E_i(S)U(A, \gamma) = \sum_{P \in (S \cap \gamma)} \pm i U(A, \gamma_1^P) \tau_i U(A, \gamma_2^P). \quad (3.7)$$

## 3.2 Operatoren auf $\mathcal{K}_0$

Um auf dem Raum  $\mathcal{K}_0$  wohldefiniert zu sein, müssen Operatoren invariant unter Eichtransformationen sein. Das ist für den Zusammenhang unproblematisch. Wie wir oben gesehen haben, ist jede zylindrische Funktion ein multiplikativer Operator. Die zylindrische Funktion muss lediglich eichinvariant sein, um als Operator auf  $\mathcal{K}_0$  wohldefiniert zu sein.

### 3.2.1 Der Flächenoperator

Der Operator  $E_i(S)$  ist nicht invariant unter Eichtransformationen. Solange sich die Fläche  $\mathcal{S}$  und der Graph  $\Gamma$  eines Spinnetzwerkes  $S$  jedoch nur in einem Punkt schneiden, können wir den folgenden Operator betrachten:

$$E^2(\mathcal{S}) = E_i(\mathcal{S})E_i(\mathcal{S}). \quad (3.8)$$

Sei  $j$  der Spin des Pfads, der die Fläche  $\mathcal{S}$  schneidet. Der Operator fügt dann zwei Matrizen  ${}^{(j)}\tau_i$  an der Schnittstelle ein. Aber  $-{}^{(j)}\tau_i {}^{(j)}\tau_i = j(j+1) \times \mathbb{1}$  ist gerade der Casimir-Operator der  $SU(2)$ . Es gilt also

$$E^2(\mathcal{S})|S\rangle = j(j+1)|S\rangle. \quad (3.9)$$

Dieses schöne Ergebnis gilt jedoch nicht, falls sich die Fläche  $\mathcal{S}$  und der Graph  $\Gamma$  mehr als einmal schneiden, da in diesem Falle die Matrizen  $\tau_i$  an verschiedenen Punkten miteinander kontrahiert werden. Der resultierende Zustand wäre dann nicht mehr eichinvariant. Man behilft sich mit dem folgenden Trick.

Man unterteilt für gegebenes  $N$  die Fläche  $\mathcal{S}$  in  $N$  Flächen  $\mathcal{S}_n$ , die beliebig klein werden für  $N \rightarrow \infty$ , so dass gilt  $\bigcup_n \mathcal{S}_n = \mathcal{S}$ . Dann definiert man den Operator

$$\mathbf{A}(\mathcal{S}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n \sqrt{E^2(\mathcal{S}_n)}. \quad (3.10)$$

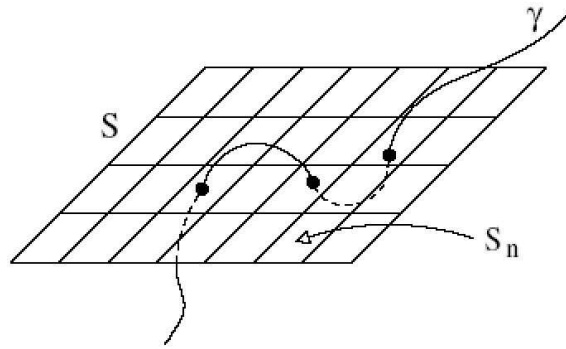


Abbildung 3.1: Eine Partition der Fläche  $\mathcal{S}$ .

Klassisch würde dieser Ausdruck übergehen in das folgende Integral, das gerade den Flächeninhalt der Fläche  $\mathcal{S}$  repräsentiert,

$$\int_{\mathcal{S}} \sqrt{n_a E_i^a n_b E_i^b} d^2 \sigma. \quad (3.11)$$

Wir nennen deshalb den Operator  $\mathbf{A}(\mathcal{S})$  auch Flächenoperator. Seine Wirkung auf einen Spinnetzwerkzustand ist einfach zu berechnen unter der Annahme, dass keine Punkte von  $\Gamma$  auf der Fläche  $\mathcal{S}$  liegen. Für hinreichend großes  $N$  wird jede Fläche  $\mathcal{S}_n$  höchstens einen Schnittpunkt enthalten (siehe Abb. 3.1). Die Summe über  $n$  reduziert sich dann auf die Summe über die Schnittpunkte  $P$  zwischen  $\Gamma$  und  $\mathcal{S}$  und ist unabhängig von  $N$ . Mit (3.9) folgt dann

$$\mathbf{A}(\mathcal{S})|S\rangle = \sum_{P \in (\mathcal{S} \cap \Gamma)} \sqrt{j_P(j_P + 1)}|S\rangle. \quad (3.12)$$

Die Spinnetzwerkzustände, die keinen Punkt auf  $\mathcal{S}$  haben, sind also Eigenzustände von  $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ . Das zugehörige Eigenwertspektrum kann man durch ein Multipllett  $\vec{j} = (j_1, \dots, j_n)$  charakterisieren. Auch der Rest des Spektrums erweist sich als diskret und reell. Der Operator  $\mathbf{A}(\mathcal{S})$  ist somit selbstadjungiert.

Die obige Konstruktion des Flächenoperators ist nur skizzenhaft. Dennoch handelt es sich um einen mathematisch wohldefiniertes Operator auf ganz  $\mathcal{K}_0$ . Für eine detaillierte Beschreibung sei hier auf die Arbeit von Ashtekar und Lewandowski [19] verwiesen.

Die obigen Ergebnisse führen zu wichtigen physikalischen Konsequenzen. Der Observablen, die durch den Inhalt einer Fläche gegeben ist, entspricht in der Quantentheorie ein selbstadjungierter Operator mit diskrettem Eigenwertspektrum. Jede Messung einer Fläche muss also einen Wert liefern, der im Spektrum von  $\mathbf{A}$  liegt. Stellt man die physikalischen Einheiten wieder her, so ergeben sich die folgenden Eigenwerte

$$\mathbf{A}_{\vec{j}} = 8\pi\hbar G c^{-3} \sum_i \sqrt{j_i(j_i + 1)}. \quad (3.13)$$

Bis auf den Immirzi-Parameter ist dies eine exakte quantitative Vorhersage der Theorie. Für  $\gamma = 1$  ist der kleinste nicht verschwindende Eigenwert

$$A_0 = 4\sqrt{3}\pi\hbar G c^{-3} \sim 10^{-66} \text{cm}^2. \quad (3.14)$$

Die Tatsache, dass man keine Fläche kleiner als diese messen kann, zeigt, dass es so etwas wie eine minimale Größe des Raums gibt. Eine Diskretheit des Raums in der Größenordnung der Plancklänge ist in der Quantengravitation schon lange vermutet worden. Im Rahmen der LQG wird diese Diskretheit nicht postuliert, sondern ergibt sich als Konsequenz der kanonischen Quantisierung der ART.

### 3.2.2 Der Volumenoperator

Wir suchen nun einen Operator, der dem klassischen Ausdruck für das Volumen eines dreidimensionalen Gebiets  $\mathcal{R}$  entspricht, also der Größe

$$V(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} d^3x \sqrt{\frac{1}{3!} |\epsilon_{abc} \epsilon_{ijk} E^{ai} E^{bj} E^{ck}|}. \quad (3.15)$$

Um eine regularisierte Form dieses Ausdrucks zu erhalten, betrachten wir den sogenannten 3-Hand-Operator:

$$\begin{aligned} T^{abc}(x, r, s, t) &= \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} R^{(1)}(U(A, \gamma_{xr}))^{il} E_l^a(r) \\ &\quad \times R^{(1)}(U(A, \gamma_{xs}))^{jm} E_m^b(s) R^{(1)}(U(A, \gamma_{xt}))^{kn} E_n^c(t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mit  $R^{(1)}(U)^{ij}$  ist die adjungierte Darstellung der  $SU(2)$  gemeint und  $\gamma_{xr}$  ist ein gerader Pfad von  $x$  nach  $r$ . Mit Hilfe des 3-Hand-Operators kann man für eine geschlossene Fläche  $\mathcal{S}$  den Operator

$$E^3(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} d\sigma \int_{\mathcal{S}} d\sigma' \int_{\mathcal{S}} d\sigma'' |n_a(\sigma) n_b(\sigma') n_c(\sigma'') T^{abc}(x, \sigma, \sigma', \sigma'')|, \quad (3.17)$$



definieren. Dabei ist  $x$  ein Punkt in dem durch die Fläche  $\mathcal{S}$  begrenzten Volumen, dessen exakte Lage nicht relevant ist, da wir im Folgenden den Grenzfall kleiner  $\mathcal{S}$  betrachten. Für ein gegebenes Koordinatensystem in der 3-Mannigfaltigkeit betrachten wir nun kleine würfelförmige Regionen  $\mathcal{R}_I$  mit Volumen  $\epsilon^3$ . Innerhalb jedes Würfels sei ein fester Punkt  $x_I$  gegeben. Wir können dann für kleine  $\epsilon$  die Holonomie durch den ersten Term approximieren und das Feld an einem Punkt  $s$  in  $\mathcal{R}_I$  durch das Feld an der Stelle  $x_I$ . Im Grenzfall geht der 3-Hand-Operator über in den Ausdruck

$$T^{abc}(x, r, s, t) \rightarrow 2\epsilon_{ijk} E^{ai}(x) E^{bj}(x) E^{ck}(x) = 2\epsilon^{abc} \det E(x). \quad (3.18)$$

Setzt man dies in (3.17) ein, so erhält man einen Ausdruck, der bis auf einen konstanten Faktor gleich dem Betrag der Determinante von  $E(x)$  ist. Wir haben damit einen regularisierten Ausdruck gefunden, der das Volumenelement für kleines  $\epsilon$  approximiert:

$$W_{I_\epsilon} := \frac{1}{16\epsilon^6 3!} E^3(\partial\mathcal{R}_I) = |\det E(x_I)|. \quad (3.19)$$

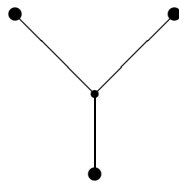
Wir können also für jedes  $\epsilon$  eine Riemannsche Summe für das Volumen einer Region  $\mathcal{R}$  angeben. In der Quantentheorie haben wir jeweils einen zugehörigen Operator. Dann lassen wir die Größe der Würfel  $\mathcal{R}_I$  gegen Null gehen und definieren den Volumenoperator  $\mathbf{V}(\mathcal{R})$  als den Limes dieser Operatoren:

$$\mathbf{V}(\mathcal{R}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} V_\epsilon(\mathcal{R}), \quad (3.20)$$

$$V_\epsilon(\mathcal{R}) = \sum_{I_\epsilon} \epsilon^3 W_{I_\epsilon}^{1/2}. \quad (3.21)$$

Auch der Volumenoperator ist ein mathematisch wohldefiniertes Objekt. Eine rigorose Konstruktion ist beispielsweise in [20] zu finden. Der entscheidende Schritt ist die Wahl einer Topologie, in der man den Grenzübergang (3.20) vollzieht.

**Wirkung des Volumenoperators auf Spinnetzwerkzustände.** Stehen im Argument des 3-Hand-Operators drei Punkte  $r, s, t$ , die auf dem Graphen des Spinnetzwerkes liegen, so besteht die Wirkung von  $T^{abc}(x, r, s, t)$  darin, in diesen Punkten je einen Knoten zu erzeugen, und von diesen ausgehend jeweils einen geraden Pfad zum Punkt  $x$  im inneren des Volumens. Man kann diesen Operator also durch das folgende Diagramm darstellen:



Man sagt in einem solchem Fall, der 3-Hand-Operator „greift“ das Spinnetzwerk an den Punkten  $r, s, t$ . Den Integrationsbereich des dreifachen Flächenintegrals im Volumenoperator bezeichnen wir als  $D^6$ . Das Integral wird also zu einer Summe über Tripel von Schnittpunkten des Spinnetzwerkes mit der begrenzenden Fläche  $\partial V$ . Der Betrag in (3.17) spielt eine wichtige Rolle. Beiträge von verschiedenen Punkten des  $D^6$  werden absolut summiert, wohingegen Beiträge vom selben Punkt zuerst addiert werden und sich somit gegenseitig aufheben können.

Aufgrund der Antisymmetrie des 3-Hand-Operators tragen daher von den  $3^3$  verschiedenen Summanden, die sich für jedes Tripel von Durchstoßpunkten ergeben, nur diejenigen bei, in denen keine zwei Hände am selben Punkt angreifen, woraus sich der Faktor  $3!$  ergibt. Gibt es nur zwei Durchstoßpunkte, so ist das Ergebnis immer Null. Die Summe in (3.21) reduziert sich also auf eine Summe über Würfel, deren Ränder mindestens drei Schnittpunkte mit dem Graphen besitzen. Für hinreichend kleines  $\epsilon$  sind dies genau die Würfel, die einen Knoten der Wertigkeit 3 oder höher enthalten.

Entscheidend ist die Tatsache, dass der Operator im Grenzfall  $\epsilon \rightarrow 0$  weder den Graphen noch die Färbung der Pfade verändert. Er wirkt also nur auf die Intertwiner. Es gilt also

$$\mathbf{V}(\mathcal{R}) |\Gamma, j_l, i_1, \dots, i_N\rangle = \sum_{n \in \{S \cap V\}} \mathcal{V}_{i_n}^{i'_n} |\Gamma, j_l, i_1, \dots, i'_n, \dots, i_N\rangle. \quad (3.22)$$

Eine detaillierte Berechnung der Matrixelemente  $\mathcal{V}_{i_n}^{i'_n}$  ist in [21] und [22] zu finden. Ein interessantes Ergebnis ist, dass ein Knoten mindestens vierwertig sein muss, um ein nichtverschwindendes Volumen zu besitzen. Weiterhin ergibt sich, dass der Volumenoperator ein selbstadjungierter, nichtnegativer Operator mit diskretem Spektrum ist. In der Regel wählt man eine Basis  $i_n$  von Intertwinern, so dass die Matrix  $\mathcal{V}_{i_n}^{i'_n}$  diagonal ist. Mit  $V_{i_n}$  bezeichnen wir im Folgenden die zugehörigen Eigenwerte.

### 3.3 Quantengeometrie

**Physikalische Interpretation der Spinnetzwerk-Zustände.** Wie wir gesehen haben, liefern nur die Knoten eines Spinnetzwerkes einen Beitrag zum Volumen. Raum besitzt also eine diskrete Struktur und ist gewissermaßen aus kleinen Zellen zusammengesetzt. Ein Spinnetzwerk mit  $N$  Knoten repräsentiert ein Ensemble  $N$  solcher Zellen.

Zwei Zellen sind benachbart, wenn die zugehörigen Knoten des Spinnetzwerkes durch einen Pfad  $l$  miteinander verbunden sind. Es gibt dann eine Fläche, welche

die beiden Volumina voneinander trennt. Die Größe dieser Fläche hängt von der Farbe  $j_l$  des Pfads  $l$  ab gemäß

$$\mathbf{A}_l = 8\pi\hbar Gc^{-3} \sqrt{j_l(j_l + 1)}. \quad (3.23)$$

Ein Graph bestimmt also die Nachbarschaftsrelationen zwischen den Zellen, aus denen der Raum besteht (siehe Abb. 3.2). Ein Spinnetzwerk-Zustand  $|S\rangle$  kann man so auffassen als eine diskrete, quantisierte 3d-Metrik.

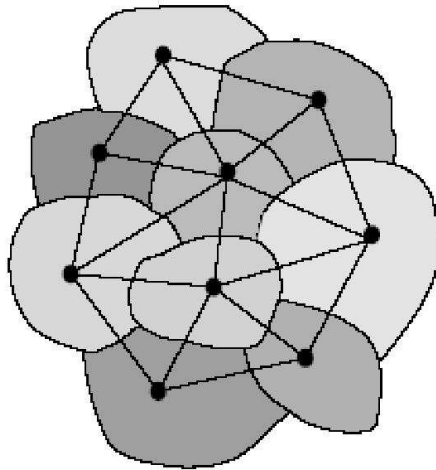


Abbildung 3.2: Der Graph eines Spinnetzwerkes und die zugehörigen Quanten des Volumens. Zwei Volumina sind benachbart, wenn die zugehörigen Knoten verbunden sind. Jede Verbindung schneidet genau eine Elementarfläche.

**Physikalische Interpretation der  $s$ -Knoten-Zustände.** Einen  $s$ -Knoten-Zustand können wir als die Projektion eines Spinnetzwerk-Zustandes unter  $P_{\text{Diff}}$  betrachten. Durch diese Projektion bleibt die Information über die Größe der einzelnen Volumina und deren räumlicher Beziehung zueinander erhalten. Was verloren geht, ist die Information über die Lokalisierung der Zellen in  $M$ . Dies spiegelt gerade die Diffeomorphismeninvarianz der klassischen Theorie wider. Einen Spinnetzwerkzustand  $|S\rangle$  haben wir als eine quantisierte Metrik auf  $M$  interpretiert. Eine Geometrie ist eine Äquivalenzklasse von Metriken unter Diffeomorphismen. Ein  $s$ -Knoten-Zustand  $|s\rangle$  beschreibt demnach eine diskrete quantisierte 3d-Geometrie.



# Kapitel 4

## Einige Bemerkungen zu Dynamik und Materie

Zwei Punkte, auf die im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen wird, sind (i) dynamische Aspekte der LQG und (ii) die Erweiterung der LQG zu einer hintergrundunabhängigen Theorie nicht nur der Gravitation sondern auch des Standardmodells. Der Vollständigkeit halber seien im Folgenden jedoch diesbezüglich einige Bemerkungen angeführt.

### 4.1 Dynamik

Bisher haben wir den Hilbert-Raum und einfache Operatoren der LQG konstruiert. Der nächste Schritt ist, die Hamiltonsche Zwangsbedingung zu implementieren. Dazu versucht man einen Operator zu definieren, welcher der klassischen Zwangsbedingung (1.21) entspricht und sucht dann nach dessen Kern.

Bei der Konstruktion des Hamilton-Operators begegnet man vielen Obstruktionen. Es ist zwar möglich, einen regularisierten Ausdruck für die Hamiltonsche Zwangsbedingung zu finden. Man geht dazu von der in Kapitel 1 hergeleiteten Form

$$H = \int N \operatorname{tr}(F \wedge \{V, A\}) = 0 \quad (4.1)$$

aus. Diese bietet sich an, da für die Größe  $V$  bereits ein entsprechender Operator existiert und die Operatoren  $F$  und  $A$  durch Holonomie-Operatoren approximiert werden können.

Die Definition des Hamilton-Operators ist jedoch nicht eindeutig, da man die Approximation auf viele verschiedene Weisen durchführen kann. Die am weitesten

entwickelte Methode stammt von Thiemann [23, 24, 25]. Wie auch beim Flächen- und Volumenoperator wird der Raum in kleine Regionen mit Volumen  $\epsilon^3$  unterteilt. Für jede Unterteilung konstruiert man einen geeigneten Operator  $H_\epsilon$  und definiert den Hamilton-Operator  $H$  als Limes dieser Operatoren für  $\epsilon \rightarrow 0$ . Dabei begegnet man dem Problem, dass für einen Spinnetzwerkzustand  $|S\rangle$  der Limes

$$H|S\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon|S\rangle \quad (4.2)$$

im Allgemeinen nicht existiert. Erstaunlicher Weise existiert der Limes jedoch, solange man sich auf diffeomorphismeninvariante Zustände beschränkt. Da dies gerade die physikalisch relevanten Zustände sind, ist der auf diese Weise konstruierte Hamilton-Operator wohldefiniert.

Für einen Überblick über weitere bestehende Strategien, siehe [26, 27, 28, 29, 30]. Im Allgemeinen werden sich die resultierenden Operatoren hinsichtlich der Dynamik, die sie beschreiben, voneinander unterscheiden. Man muss physikalische Kriterien in Betracht ziehen, um aus der Vielfalt der Kandidaten eine Auswahl zu treffen.

Doch selbst wenn sich eine kanonische Wahl herauskristallisieren sollte, so bleibt die Frage offen, ob die Menge der Zustände, die im Kern dieses Hamilton-Operators liegen, hinreichend groß ist. Insbesondere müssen genügend semiklassische Zustände darin enthalten sein. Aus diesem Grund ist das Problem der Dynamik eng verbunden mit der präzisen Formulierung des im Kapitel 5.3 diskutierten semiklassischen Limes.

## 4.2 Materie

Mit der LQG verfolgt man nicht das Ziel, eine vereinheitlichte Theorie aller bekannten fundamentalen Kräfte der Natur zu formulieren. Vielmehr hat man die Absicht, eine hintergrundunabhängige Quantentheorie der Gravitation zu finden. Man kann den Formalismus der letzten Kapitel jedoch in natürlicher Weise zu einer hintergrundunabhängigen Theorie erweitern, die neben der Gravitation auch Materie mit einbezieht. Dabei ist mit „Materie“ alles gemeint, was nicht das Gravitationsfeld ist, also Fermionen, Yang-Mills-Felder und vermutlich skalare Felder. Das bemerkenswerte an dieser Erweiterung ist, dass keine UV-Divergenzen auftreten.

Als einfachstes Beispiel sei im Folgenden skizziert, wie die Erweiterung auf Yang-Mills-Felder erfolgt. Sei  $G_{YM}$  eine kompakte Yang-Mills-Gruppe,  $A_{YM}$  der zugehörige 3d-Zusammenhang und  $A$  der Zusammenhang der Gravitation. Dann können  $A$  und  $A_{YM}$  zusammen als ein einziger Zusammenhang  $A \times A_{YM}$  für

die Gruppe  $G = SU(2) \times G_{YM}$  aufgefasst werden. Die in Kapitel 2 beschriebene Konstruktion der Räume  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_0$  und  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$  kann man problemlos auf diesen Zusammenhang übertragen.

Ebenso kann man völlig analog Holonomien des Yang-Mills-Feldes und Flächenintegrale des elektrischen Feldes als Operatoren auf  $\mathcal{K}$  definieren. Die diffeomorphismeninvarianten Zustände sind gegeben durch  $s$ -Knoten-Zustände mit Graphen, deren Seiten irreduzible Darstellungen von  $G$  und deren Knotenpunkten entsprechende Intertwiner zugeordnet werden. Da  $G$  ein direktes Produkt ist, sind die irreduziblen Darstellungen gegeben durch Produkte der irreduziblen Darstellungen von  $SU(2)$  und  $G_{YM}$ . Das heißt, jeder Seite wird ein Spin  $j_l$  und eine irreduzible Darstellung von  $G_{YM}$  zugeordnet.

Um die Dynamik des gekoppelten Systems Gravitation und Materie zu definieren, müssen die entsprechenden Terme zur Hamiltonfunktion der ART hinzugefügt werden. Für diese Funktion kann ein entsprechender auf  $\mathcal{K}$  wohldefinierter Operator konstruiert werden, der die gesamte Dynamik des Standardmodells und der ART beschreibt. Erstaunlicherweise treten dabei keine UV-Divergenzen auf. Für Details verweise ich auf die Arbeit [26] von Thiemann. Die Tatsache, dass der Hamilton-Operator wohldefiniert ist, ist eine Folge der hintergrundunabhängigen Quantisierung, auf der die LQG basiert. Eine Erklärung der inneren Zusammenhänge, die zum Verschwinden der UV-Divergenzen führen, findet man in [31].





# Kapitel 5

## Errungenschaften und offene Probleme der LQG

Der Formalismus der LQG, den wir in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben haben, zeigt, dass es möglich ist, eine mathematisch wohldefinierte, hintergrundunabhängige Quantentheorie der Gravitation zu formulieren. Zum einen führt die LQG zu sehr interessanten physikalischen Konsequenzen. Auf der anderen Seite ist man einigen schwerwiegenden konzeptuellen Problemen ausgesetzt und die Frage, ob man diesen Schwierigkeiten im Rahmen der Theorie adäquat begegnen kann, wird zur Zeit kontrovers diskutiert. Für eine kritische Betrachtung siehe zum Beispiel [32].

Im Folgenden möchte ich einer Aufzählung der wichtigen Ergebnisse, zu denen man mit der LQG kommt, eine Liste der offenen Fragen gegenüberstellen.

### 5.1 Errungenschaften

- *Hintergrundunabhängigkeit.* Mit der LQG hat man das Ziel verfolgt, Quantenmechanik und ART in einer Weise zu vereinen, die den konzeptuellen Einsichten beider Theorien Rechnung trägt. Ziel war es, eine Quantenfeldtheorie zu formulieren, ohne Gebrauch von einer Hintergrundraumzeit zu machen. Dieses Ziel hat man erreicht. Unabhängig davon, ob sich die LQG als physikalisch korrekt erweist oder nicht, ist sie ein Beispiel für eine nicht-triviale hintergrundunabhängige Quantenfeldtheorie.
- *Physikalische Interpretation.* Die Spinnetzwerk-Zustände sind einer anschaulichen physikalischen Interpretation zugänglich, die in Abschnitt (3.3) beschrieben wurde.

- *Quantitative Vorhersagen.* Die Spektren von Flächen- und Volumenoperator ermöglichen eine große Anzahl quantitativer Vorhersagen. Diese sind bis auf den Immirzi-Parameter eindeutig. Auch wenn der aktuelle Stand der technologischen Entwicklung zur Zeit eine direkte Messung dieser Vorhersagen nicht zulässt, so ist ein indirekter Nachweis eventuell möglich (siehe [33]).
- *UV-Divergenzen.* Wie in Abschnitt 4.2 diskutiert, scheint die LQG frei von Ultraviolett-Divergenzen zu sein, sogar wenn man sie an das Standardmodell koppelt. Dies ist eine Konsequenz der hintergrundunabhängigen Formulierung.

Auf die folgenden zwei Punkte wird im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen:

- *Thermodynamik Schwarzer Löcher.* Im Jahre 1974 hat Hawking hergeleitet, dass Schwarze Löcher Strahlung emittieren. Kurz zuvor hatte Bekenstein bereits beobachtet, dass man einem Schwarzen Loch in natürlicher Weise eine Entropie zuordnen kann. Die Formel für die sogenannte Bekenstein-Hawking-Entropie aus ersten Prinzipien abzuleiten, gilt als Prüfstein für jede Quantentheorie der Gravitation. Im Rahmen der LQG ist eine Herleitung gelungen (siehe [34, 5]). Der berechnete Ausdruck stimmt bis auf den Immirzi-Parameter  $\gamma$  mit der bekannten Formel überein. Dieser Zusammenhang wird benutzt, um  $\gamma$  festzulegen. Es ergibt sich

$$\gamma = \frac{\ln 2}{\pi\sqrt{3}}. \quad (5.1)$$

Eine alternative Bestimmung des Immirzi-Parameters wäre eine wichtige Bestätigung für dieses Resultat.

- *Urknallsingularität.* Die LQG findet ebenso Anwendung in der Kosmologie. Es ist möglich, innerhalb der Theorie Bedingungen wie Homogenität und Isotropie an Zustände und Operatoren zu formulieren und das resultierende Modell zu untersuchen. Daraus ergibt sich unter anderem, dass die Dynamik am Urknall wohl definiert ist und keine Singularitäten auftreten (siehe zum Beispiel [35, 4]).

## 5.2 Offene Probleme

Diesen Erfolgen der LQG stehen einige wichtige Aspekte der Theorie gegenüber, die noch unzulänglich entwickelt sind oder ganz fehlen.

- *Form des Hamilton-Operators.* Wie in Abschnitt 4.1 erörtert, ist die endgültige Form des Hamilton-Operators noch nicht gefunden. Eine Wahl unter den möglichen Kandidaten zu treffen ist schwer, da man die unterschiedlichen physikalischen Konsequenzen experimentell nicht überprüfen kann. Außerdem ist unklar, ob es überhaupt einen geeigneten Hamilton-Operator gibt, dessen Kern hinreichend groß ist, um zum Beispiel den semiklassischen Limes der LQG zu formulieren.
- *Streuamplituden.* Eine systematische Methode zur Berechnung von Streuamplituden, die zu beobachtbaren Vorhersagen führen würde, existiert nicht. Für eine kürzlich zu diesem Thema erschienene Veröffentlichung siehe [36].
- *Semiklassischer Limes.* Es ist eine zentrale Frage, ob man mit Hilfe der LQG klassische Lösungen der Einsteingleichungen in geeigneter Weise approximieren kann. Da dieses Problem unsere Betrachtungen in Kapitel 7 motiviert, formulieren wir es im folgenden Abschnitt detailliert.

### 5.3 Das Problem des semiklassischen Limes

Wie in den ersten Abschnitten erläutert, ist die LQG eine hintergrundunabhängige kanonische Quantentheorie der Allgemeinen Relativitätstheorie. Die zu Grunde liegenden physikalischen Konzepte und mathematischen Hilfsmittel unterscheiden sich drastisch von denen der herkömmlichen Quantenphysik, die auf einer Minkowski-Raumzeit formuliert wird. Eine große Herausforderung und aktuelles Forschungsgebiet ist es, zu untersuchen, ob es einen Bereich der LQG gibt, in dem sich das quantisierte Gravitationsfeld in etwa verhält wie eine klassische Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen. Nur wenn dieser so genannte semiklassische Limes existiert, kann man die LQG als einen brauchbaren Kandidaten für eine Quantentheorie der Gravitation bezeichnen.

Zunächst muss man präzisieren, was man unter dem semiklassischen Limes einer Quantentheorie versteht. Nach meiner Kenntnis gibt es hierzu keine allgemein anerkannte Definition, die vollkommen überzeugt. Thiemann macht in [15] den folgenden Vorschlag. Er beschreibt den Begriff der Quantisierung als Versuch, einen \*-Homomorphismus

$$\Lambda : (\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\}, \mathcal{O}, \overline{(\cdot)}) \rightarrow (\mathcal{H}, -i[\cdot, \cdot], \hat{\mathcal{O}}, (\cdot)^\dagger) \quad (5.2)$$

zu konstruieren, der von der Teilalgebra  $\mathcal{O}$  der Poissonalgebra komplexwertiger Funktionen auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  abbildet auf die Teilalgebra  $\hat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  der Algebra von linearen Operatoren auf einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  mit innerem Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , so dass die Poissonklammer zum Kommutator wird und die komplexe Konjugation zur adjungierten Operation. Die Algebra  $\mathcal{O}$

sollte dabei hinreichend groß sein, so dass kompliziertere Funktionen durch Elemente in  $\mathcal{O}$  ausgedrückt werden können. Den umgekehrten Weg kann man auf die folgende Weise präzisieren:

**Definition 5.1.** Ein System von Zuständen  $\{\psi_m\}_{m \in \mathcal{M}} \in \mathcal{H}$  nennt man semiklassisch bezüglich der Operator-Teilalgebra  $\hat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , wenn für beliebige  $\hat{O}, \hat{O}' \in \hat{\mathcal{O}}$ ,  $O \in \mathcal{O}$  und für einen generischen Punkt  $m \in \mathcal{M}$  gilt:

$$\left| \frac{\langle \psi_m | \hat{O} | \psi_m \rangle}{O(m)} - 1 \right| \ll 1, \quad (5.3)$$

$$\left| \frac{\langle \psi_m | [\hat{O}, \hat{O}'] | \psi_m \rangle}{i\{O, O'\}(m)} - 1 \right| \ll 1, \quad (5.4)$$

$$\left| \frac{\langle \psi_m | \hat{O}^2 | \psi_m \rangle}{\langle \psi_m | \hat{O} | \psi_m \rangle^2} - 1 \right| \ll 1. \quad (5.5)$$

Das Quadrupel  $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\}, \mathcal{O}, \overline{(\cdot)})$  nennt man dann den semiklassischen Limes von  $(\mathcal{H}, -i[\cdot, \cdot], \hat{\mathcal{O}}, (\cdot)^\dagger)$ .

Dies ist die Definition, die wir im Folgenden gebrauchen werden. Allerdings ist sie nur sinnvoll, solange die Nenner in den Ausdrücken (5.3) bis (5.5) nicht verschwinden.

Im wesentlichen kann man die Bemühungen, die bisher unternommen wurden, um semiklassische Zustände zu definieren, in zwei Ansätze unterteilen:

- Die so genannten „verwobenen Zustände“ (englisch: „weave states“) waren historisch gesehen der erste Ansatz. Man versucht dabei, eine gegebene klassische makroskopische 3d-Metrik durch ein fein gewobenes Spinnetzwerk anzunähern. Was dies bedeutet, kann man mit Hilfe geometrischer Operatoren präzise formulieren. Auf diese Weise wurden Zustände für verschiedene Metriken gefunden, unter anderem für den flachen Raum, die Schwarzschildmetrik und für Gravitationswellen. Für Details zu diesem Ansatz sei auf die Arbeiten [37] und [38] verwiesen. Das Hauptproblem dieser Strategie besteht darin, dass die Algebra  $\mathcal{O}$  von Observablen, für die diese Näherungen gilt, zu klein ist. Alle bisher konstruierten verwobenen Zustände approximieren entweder den Zusammenhang oder das elektrische Feld, nicht aber beide gleichzeitig.
- Ein anderes Verfahren zielt auf die Konstruktion von kohärenten Zuständen ab. Diese haben die Eigenschaft, dass sie scharfe Peaks im Phasenraum besitzen und somit sowohl den Zusammenhang als auch den elektrischen Fluss annähern. Außerdem erfüllen diese Zustände die minimale Heisenbergsche

---

Unschärferelation. Eine genaue Definition von kohärenten Zuständen findet man in [15], einen Vorschlag für eine Methode, diese Zustände systematisch zu konstruieren, in [39].

Da jedoch keiner dieser Ansätze bisweilen voll befriedigende Ergebnisse geliefert hat, untersucht man das Problem auch an einigen einfachen Modellen mit dem Ziel, mathematische Methoden zu entwickeln, um sie schließlich für die Konstruktion eines semiklassischen Limes der LQG zu verwenden. Ein Modell, das eingehend untersucht wurde und das wir in Kapitel 7 ausführlich diskutieren, ist ein quantenmechanisches Teilchen, das sich in einer Dimension bewegen kann.



# Kapitel 6

## Mathematische Konzepte

In diesem Abschnitt sollen zunächst die mathematischen Konzepte eingeführt werden, von denen wir in Kapitel 7 Gebrauch machen.

### 6.1 Algebraische Grundbegriffe

#### 6.1.1 $C^*$ -Algebren, Ideale, Darstellungen

Im Folgenden werden wir uns mit beschränkten, linearen Operatoren auf Hilbert-Räumen beschäftigen. Die Menge aller beschränkten, linearen Operatoren auf  $\mathcal{H}$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ .  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  hat die mathematische Struktur einer assoziativen Algebra.

**Definition 6.1.** Ein komplexer Vektorraum  $\mathcal{A}$  heißt Algebra, wenn auf ihm eine Multiplikation, das heißt eine bilineare Abbildung  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (A, B) \mapsto AB \in \mathcal{A}$  ausgezeichnet ist.  $\mathcal{A}$  heißt assoziative Algebra, wenn gilt:  $(AB)C = A(BC)$  für alle  $A, B, C \in \mathcal{A}$ .

Ein Unterraum von  $\mathcal{A}$ , der selbst eine Algebra bezüglich der Operationen in  $\mathcal{A}$  ist, nennt man eine Unteralgebra.

**Definition 6.2.** Eine assoziative Algebra heißt  $*$ -Algebra, wenn auf ihr eine Involution, das heißt eine antilineare Abbildung  $\mathcal{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathcal{A}$  mit den Eigenschaften

1.  $A^{**} = A \quad \forall A \in \mathcal{A}$  und
2.  $(AB)^* = B^*A^* \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$

ausgezeichnet ist.

Die Multiplikation in  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  ist das Operatorprodukt. Eine Involution ist gegeben durch die Abbildung, die jedem Operator  $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$  den adjungierten Operator  $A^*$  zuordnet, der ebenfalls in  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  liegt.  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  ist also eine  $*$ -Algebra. Außerdem ist in  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  eine Norm, die Operatornorm

$$\|A\| = \sup_{\psi \in \mathcal{H}, \psi \neq 0} \frac{\|A\psi\|_{\mathcal{H}}}{\|\psi\|_{\mathcal{H}}}, \quad (6.1)$$

gegeben. Alle Operatoren in  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  sind per definitionem beschränkt, das heißt sie haben eine endliche Norm. Man kann zeigen, dass  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  mit dieser Norm eine Banach $*$ -Algebra ist.

**Definition 6.3.** Eine assoziative Algebra  $\mathcal{A}$  heißt normierte Algebra, wenn auf ihr eine Norm  $\|\cdot\|$  mit der Eigenschaft  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$  ausgezeichnet ist. Ist  $\mathcal{A}$  eine  $*$ -Algebra und gilt zusätzlich  $\|A\| = \|A^*\| \quad \forall A \in \mathcal{A}$ , dann heißt  $\mathcal{A}$  normierte  $*$ -Algebra. Ist schließlich  $\mathcal{A}$  vollständig in dieser Norm, so heißt  $\mathcal{A}$  Banach $*$ -Algebra.

Außerdem kann man zeigen, dass für alle  $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$  gilt  $\|AA^*\| = \|A\|^2$ . Damit wird  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  zur  $C^*$ -Algebra.

**Definition 6.4.** Eine Banach $*$ -Algebra  $\mathcal{A}$  heißt  $C^*$ -Algebra, wenn die zusätzliche Bedingung  $\|AA^*\| = \|A\|^2$  für alle  $A \in \mathcal{A}$  erfüllt ist.

Ein weiterer wichtiger Grundbegriff der Algebrentheorie ist der des Ideals.

**Definition 6.5.** Sei  $\mathcal{A}$  eine assoziative Algebra und  $\mathcal{B}$  ein Vektorraum von  $\mathcal{A}$ . Dann heißt  $\mathcal{B}$  linksseitiges Ideal von  $\mathcal{A}$ , wenn für alle  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  gilt  $AB \in \mathcal{B}$ . Entsprechend heißt  $\mathcal{B}$  rechtsseitiges Ideal, wenn  $BA \in \mathcal{B}$  und beidseitiges Ideal, wenn beide Aussagen erfüllt sind.

Als nächstes benötigen wir den wichtigen Begriff der Darstellung einer  $C^*$ -Algebra  $\mathcal{A}$ .

**Definition 6.6.** Ein  $*$ -Morphismus ist eine Abbildung  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zwischen zwei  $C^*$ -Algebren, so dass für alle  $A, B \in \mathcal{A}$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  gilt:  $\pi(\alpha A + \beta B) = \alpha\pi(A) + \beta\pi(B)$ ,  $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$ ,  $\pi(A^*) = \pi(A)^*$ .

Ein  $*$ -Morphismus heißt  $*$ -Isomorphismus, wenn er bijektiv ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt  $\ker(\pi) = \{0\}$ .

**Definition 6.7.** Bei einer Darstellung der  $C^*$ -Algebra  $\mathcal{A}$  handelt es sich um ein Paar  $(\mathcal{H}, \pi)$ , wobei  $\mathcal{H}$  ein komplexer Hilbert-Raum und  $\pi$  ein  $*$ -Morphismus von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  ist. Ist  $\pi$  ein  $*$ -Isomorphismus, so nennt man die Darstellung treu.



### 6.1.2 GNS-Konstruktion und Theorem von Fell

Zustände eines quantenmechanischen Systems kann man als lineare Funktionale einer  $C^*$ -Algebra auffassen. In diesem Abschnitt wird eine wichtige Methode vorgestellt, die es ermöglicht, zu einem gegebenen Zustand einen zugehörigen Hilbert-Raum sowie eine Darstellung der Algebra auf diesem Raum anzugeben. Dieses Verfahren ist nach Gelfand, Naimark und Segal als GNS-Konstruktion bekannt.

Wir betrachten also im Folgenden den Raum  $\mathcal{A}^*$  der stetigen, linearen Funktionale  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer  $*$ -Algebra  $\mathcal{A}$  und nennen ein Funktional  $\omega$  positiv, wenn gilt  $\omega(AA^*) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$ . Auf  $\mathcal{A}^*$  existiert die natürliche Norm

$$\|\omega\| = \sup_{\|A\|=1} |\omega(A)|. \quad (6.2)$$

Neben der Normtopologie existiert eine weitere wichtige Topologie auf  $\mathcal{A}^*$ . Jede endliche Familie  $A_1, \dots, A_n$  von Elementen aus  $\mathcal{A}$  definiert eine Seminorm auf  $\mathcal{A}^*$  durch

$$\|\omega\|_{A_1, \dots, A_n} = \sup_{k=1, \dots, n} |\omega(A_k)| \quad (6.3)$$

und zugehörige Nachbarschaften  $\mathcal{N}(\epsilon; A_1, \dots, A_n)$  des Ursprungs in  $\mathcal{A}^*$  durch

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\epsilon; A_1, \dots, A_n) &= \{\omega \in \mathcal{A}^* : \|\omega\|_{A_1, \dots, A_n} < \epsilon\} \\ &= \{\omega \in \mathcal{A}^* : |\omega(A_k)| < \epsilon \text{ für } k = 1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Die Menge dieser Nachbarschaften für beliebiges endliches  $n$  und jede beliebige Wahl von Elementen  $A_k$  definiert die schwache  $*$ -Topologie in  $\mathcal{A}^*$ .

**Definition 6.8.** Ein positives, lineares Funktional auf der  $C^*$ -Algebra  $\mathcal{A}$  heißt Zustand, wenn gilt  $\|\omega\| = 1$ .

Gegeben sei ein Zustand  $\omega$  über einer  $*$ -Algebra  $\mathcal{A}$ . Wenn man  $\mathcal{A}$  selbst als einen linearen Raum auffasst, so definiert  $\omega$  ein semidefinites Skalarprodukt auf  $\mathcal{A}$ :

$$\langle A|B \rangle = \omega(A^*B), \quad A, B \in \mathcal{A}. \quad (6.5)$$

Die Menge  $\mathfrak{I} \subset \mathcal{A}$ , die aus allen Elementen  $X \in \mathcal{A}$  besteht mit  $\omega(X^*X) = 0$ , ist ein linkes Ideal von  $\mathcal{A}$ . Der Quotientenraum  $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$  ist somit ein prä-Hilbert-Raum, das heißt ein linearer Raum mit einem hermiteschen, positiv definiten Skalarprodukt. Ein Vektor  $\Psi$  in diesem Raum ist gegeben durch eine Äquivalenzklasse modulo  $\mathfrak{I}$  von Elementen der Algebra. Die Klasse des Elements  $A$  bezeichnen wir mit  $[A]$ . Das Skalarprodukt (6.5) kann man sinnvoll auf Vektoren in  $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$  ausweiten, da es nicht von der Wahl eines Representanten innerhalb einer Äquivalenzklasse

abhängt. Wir erhalten dann einen Hilbert-Raum  $\mathcal{H}_\omega$  als die Vervollständigung von  $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$  in die durch das Skalarprodukt gegebene Norm.

Das Produkt in  $\mathcal{A}$  definiert eine Darstellung  $\pi_\omega(\mathcal{A})$  auf  $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$  durch

$$\pi_\omega(A)\Psi = [AB] \quad \text{wenn} \quad \Psi = [B]. \quad (6.6)$$

Wenn es sich bei  $\mathcal{A}$  um eine Banach  $*$ -Algebra handelt, kann man den Definitionsbereich von  $\pi_\omega(\mathcal{A})$  auf ganz  $\mathcal{H}_\omega$  ausweiten.

Gibt es in  $\mathcal{H}$  einen Vektor  $\Omega$ , so dass  $\pi(\mathcal{A})\Omega$  dicht in  $\mathcal{H}$  liegt, dann nennt man  $\Omega$  einen zyklischen Vektor und  $\pi$  eine zyklische Darstellung. Enthält  $\mathcal{A}$  ein Einselement, so erhält man durch die GNS-Konstruktion eine zyklische Darstellung, in welcher der zyklische Vektor durch die Äquivalenzklasse der Eins gegeben ist,

$$\Omega = [1]. \quad (6.7)$$

Jeder Vektor  $\psi \in \mathcal{H}$  definiert einen Zustand

$$\omega_\psi(A) = \langle \psi | \pi_\omega(A) | \psi \rangle. \quad (6.8)$$

Darüber hinaus können wir mit einem statistischen Operator  $\rho$  gemischte Zustände

$$\omega_\rho(A) = \text{tr } \rho \pi_\omega(A) \quad (6.9)$$

konstruieren. Die Menge aller Zustände der Form (6.9) bezeichnen wir als das Folium der Darstellung  $\pi_\omega$ . Für die Überlegungen in Kapitel 7 ist das folgende Theorem [40] von zentraler Bedeutung.

**Theorem 1 (Fell).** *Das Folium einer treuen Darstellung einer  $C^*$ -Algebra ist bezüglich der schwachen  $*$ -Topologie dicht in der Menge aller Zustände.*

# Kapitel 7

## Quantenmechanik eines nichtrelativistischen Teilchens

In diesem Kapitel untersuchen wir als einfaches Modellbeispiel die nichtrelativistische quantenmechanische Beschreibung eines Teilchens, das sich entlang der reellen Achse bewegen kann. Man betrachtet üblicherweise die Algebra  $\mathcal{W}$ , die von den Operatoren  $U(\alpha) = \exp i\alpha X$  und  $V(\beta) = \exp i\beta P$  erzeugt wird. Dabei ist  $X$  der Orts- und  $P$  der Impulsoperator der Schrödinger-Darstellung. Die Einheiten sind so gewählt, dass  $\hbar = 1$ . Die Weyl-Operatoren

$$W(\alpha, \beta) = e^{\frac{i}{2}\alpha\beta} U(\alpha)V(\beta) . \quad (7.1)$$

erfüllen die Weyl-Relation

$$W(\alpha, \beta) W(\gamma, \delta) = e^{-\frac{i}{2}(\alpha\delta - \beta\gamma)} W(\alpha + \gamma, \beta + \delta) \quad (7.2)$$

und die Bedingung

$$[W(\alpha, \beta)]^* = W(-\alpha, -\beta) . \quad (7.3)$$

Zusammen definieren (7.1) und (7.2) bereits eindeutig eine  $C^*$ -Algebra, die man Weyl-Algebra nennt.

Man sucht normalerweise nach Darstellungen der Weyl-Algebra, in denen  $U(\alpha)$  und  $V(\beta)$  durch 1-Parameter-Familien unitärer Operatoren repräsentiert werden, die schwach stetig in den Parametern  $\alpha$  und  $\beta$  sind. Das Theorem von Neumann besagt, dass jede Darstellung der Weyl-Algebra, die diese Eigenschaft erfüllt, unitär equivalent zur Schrödinger-Darstellung ist, weswegen man in der Regel ausschließlich mit dieser Darstellung arbeitet. Verzichtet man jedoch auf die Forderung der schwachen Stetigkeit, kommen auch andere Darstellungen in Frage.

Wir werden im Folgenden kurz die wichtigsten Eigenschaften der Schrödinger-Darstellung rekapitulieren und danach anhand der sogenannten Polymerdarstellung aufzeigen, was passiert, wenn man auf die Stetigkeitsforderung verzichtet. Das Resultat ist ein Hilbertraum, der Parallelen zum Hilbertraum der LQG aufweist. Es wird anschließend gezeigt, dass man jeden Zustand der Schrödinger-Darstellung, aufgefasst als lineares Funktional auf der Weyl-Algebra, durch Zustände der Polymerdarstellung approximieren kann.

## 7.1 Schrödinger-Darstellung

Der Hilbert-Raum  $\mathcal{H}_{Sch}$  der Schrödinger-Darstellung ist der Raum  $L^2(\mathbb{R})$  der quadratintegriblen Funktionen. Das Skalarprodukt ist definiert durch

$$(\psi, \phi) = \int_{\mathbb{R}} dx \overline{\psi(x)} \phi(x). \quad (7.4)$$

Es existiert die folgende Darstellung der Weyl-Algebra auf  $L^2(\mathbb{R})$ ,

$$(U(\alpha)\psi)(x) = e^{i\alpha x} \psi(x), \quad (7.5)$$

$$(V(\beta)\psi)(x) = \psi(x - \beta) \quad (7.6)$$

$$(W(\alpha, \beta)\psi)(x) = e^{-\frac{i}{2}\alpha\beta} e^{i\alpha x} \psi(x - \beta). \quad (7.7)$$

Die unitären 1-Parameter-Gruppen  $U(\alpha)$  und  $V(\beta)$  sind schwach stetig in den Parametern  $\alpha, \beta$ . Nach dem Theorem von Stone gibt es also zwei selbstadjungierte Operatoren  $X$  und  $P$  auf  $\mathcal{H}_{Sch}$ , so dass

$$U(\alpha) = e^{i\alpha X} \quad \text{und} \quad V(\beta) = e^{i\beta P}. \quad (7.8)$$

Der Erwartungswert des Weyl-Operators  $W(\alpha, \beta)$  im Zustand  $\psi$  ist

$$(\psi, W(\alpha, \beta)\psi) = \int_{\mathbb{R}} dx \overline{\psi(x)} e^{i\alpha(x + \frac{1}{2}\beta)} \psi(x - \beta). \quad (7.9)$$

## 7.2 Die Polymerdarstellung

Der Hilbert-Raum  $\mathcal{H}_{Poly}$  der Polymerdarstellung besteht aus Funktionen auf  $\mathbb{R}$ , mit abzählbarem Träger, die der Bedingung

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} |\Psi(x)|^2 < \infty \quad (7.10)$$

genügen. Das Skalarprodukt ist definiert durch

$$(\Psi, \Phi) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \overline{\Psi(x)} \Phi(x) \quad (7.11)$$

und die Weyl-Operatoren wirken in derselben Weise wie in der Schrödinger-Darstellung,

$$(U(\alpha)\Psi)(x) = e^{i\alpha x} \Psi(x), \quad (7.12)$$

$$(V(\beta)\Psi)(x) = \Psi(x - \beta), \quad (7.13)$$

$$(W(\alpha, \beta)\Psi)(x) = e^{-\frac{1}{2}\alpha\beta} e^{i\alpha x} \Psi(x - \beta). \quad (7.14)$$

$U(\alpha)$  ist schwach stetig in dem Parameter  $\alpha$ . Deswegen kann man auch hier auf einem dichten Teilraum von  $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$  einen Ortsoperator  $X$  mit  $U(\alpha) = e^{i\alpha X}$  definieren, der sogar einen vollständigen Satz normierbarer Eigenvektoren  $\{|x\rangle, x \in \mathbb{R}\}$  besitzt:

$$X|x\rangle = x|x\rangle. \quad (7.15)$$

Hingegen ist  $V(\beta)$  in der Polymerdarstellung nicht mehr stetig in  $\beta$ . Dies liegt daran, dass auch beliebig nah beieinander liegende  $|x\rangle$  immer orthogonal zueinander sind, so dass

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \langle x|V(\beta)|x\rangle = 0, \quad (7.16)$$

während jedoch  $V(0) = \mathbb{1}$  und  $\langle x|x\rangle = 1$ . Aus diesem Grund gibt es keinen Impulsoperator. Die Analogie zwischen dieser Darstellung und der LQG ist die folgende. Der Ortsoperator  $X$  entspricht dem Operator  $E$  des elektrischen Flusses. Die Eigenzustände entsprechen den Spinnetzwerkzuständen.  $V(\beta)$  ist das Analogon zum Holonomie-Operator. Ebenso wie der Zusammenhang  $A$  in der LQG kein wohldefinierter Operator ist, existiert im Hilbertraum  $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$  kein Impulsoperator. Dies erscheint vom Standpunkt der nichtrelativistischen Quantenmechanik aus bedenklich. Heuristisch würde man in Abwesenheit eines räumlichen Kontinuums aber gerade erwarten, dass der Operator  $P = -i\frac{d}{dx}$  nicht definiert ist.

**Konstruktion von  $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$  über eine GNS-Konstruktion.** Man erhält die Polymerdarstellung auch über eine GNS-Konstruktion aus dem folgenden Funktional aus der Weyl-Algebra,

$$\omega_P(W(\alpha, \beta)) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \beta = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.17)$$

Den zugehörigen Hilbert-Raum nennen wir zunächst  $\mathcal{H}_P$  und werden zeigen, dass die resultierende Darstellung unitär äquivalent zur Polymerdarstellung ist.

Für den Vektor  $[W(\alpha, -\beta)]$ , der Äquivalenzklasse des Weyl-Operators  $W(\alpha, -\beta)$ , schreiben wir zur Abkürzung einfach  $\Psi_{\alpha\beta}$ . Für das Skalarprodukt von zwei Vektoren in  $\mathcal{H}_P$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\alpha\beta} | \Psi_{\gamma\delta} \rangle &= \omega_P (W(\alpha, -\beta)^* W(\gamma, -\delta)) \\ &= e^{\frac{i}{2}(\beta\gamma - \alpha\delta)} \omega_P (W(\gamma - \alpha, \beta - \delta)) \\ &= \begin{cases} e^{\frac{i}{2}(\gamma - \alpha)\beta} & \delta = \beta, \\ 0 & \delta \neq \beta \end{cases} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Dasselbe Ergebnis erhält man für das Skalarprodukt von  $e^{\frac{i}{2}\alpha\beta}|\beta\rangle$  und  $e^{\frac{i}{2}\gamma\delta}|\delta\rangle$  in  $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$ . Dies motiviert die folgende Abbildung  $U$ :

$$\begin{aligned} U : \mathcal{H}_P &\rightarrow \mathcal{H}_{\text{Poly}} \\ \Psi_{\alpha\beta} &\mapsto e^{\frac{i}{2}\alpha\beta}|\beta\rangle. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Wir zeigen nun, dass es sich hierbei um eine unitäre Abbildung handelt. Zunächst ist offensichtlich, dass  $U$  umkehrbar ist. Außerdem kann man sich leicht davon überzeugen, dass gilt  $U^{-1} = U^*$ . Es bleibt zu zeigen, dass die Gleichung

$$W(\gamma, \delta) e^{\frac{i}{2}\alpha\beta}|\beta\rangle = U \pi_P(W(\gamma, \delta)) \Psi_{\alpha\beta} \quad (7.20)$$

erfüllt ist. Dies folgt unmittelbar aus Anwendung von (7.12) und (6.6). Die resultierende Darstellung ist also unitär äquivalent zur Polymerdarstellung und wir können die Räume  $\mathcal{H}_P$  und  $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$  identifizieren.

### 7.3 Zusammenhang zwischen Schrödinger- und Polymerdarstellung

Die Schrödinger- und die Polymerdarstellung sind zwei inäquivalente irreduzible und unitäre Darstellungen der Weyl-Algebra. Es stellt sich die Frage, wie diese miteinander zusammenhängen. Insbesondere wäre es wünschenswert, einen gegebenen Zustand der Schrödinger-Darstellung durch Zustände der Polymerdarstellung approximieren zu können. In [10] findet Ashtekar einen solchen Zusammenhang für kohärente Zustände. Dies sind in der Schrödingerdarstellung Wellenfunktionen, die der Eigenwertgleichung für den Vernichtungsoperator  $a$  genügen:

$$a \psi(x) = (x_0 + ip_o)\psi(x). \quad (7.21)$$

Er konstruiert ein induktives System abzählbarer Teilmengen  $i$  von  $\mathbb{R}$  der Form  $\epsilon\mathbb{Z}$  mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung eines kohärenten Zustands  $\psi$  auf eine solche Teilmenge ein Element  $P_i\psi$  des Polymer-Hilbert-Raums definiert, auch

Schattenzustand genannt. Der Erwartungswert im Zustand  $\psi$  wird approximiert durch den Ausdruck

$$\epsilon(\psi, AP_i\psi), \quad (7.22)$$

wobei  $A$  eine endliche Linearkombination von Weyl-Operatoren ist. Im Grenzfall  $\epsilon \rightarrow 0$  konvergiert dieser Ausdruck gegen den Erwartungswert in der Schrödinger-Darstellung.

Jedoch ist diese Methode nicht voll zufriedenstellend. Das lineare Funktional

$$A \rightarrow \epsilon(\psi, AP_i\psi) \quad (7.23)$$

ist nicht normal bezüglich der Polymer-Darstellung, das heißt, eine Folge von Weyl-Operatoren kann in der Polymerdarstellung schwach gegen Null konvergieren, ihre Werte im obigen Funktional konvergieren jedoch gegen einen endlichen Wert. Darüber hinaus ist es nicht positiv.

Um die Verletzung der Normalität zu zeigen, betrachten wir das folgende Beispiel. Für die Folge  $W(0, \frac{1}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , von Weyl-Operatoren, konvergieren die Matrixelemente bezüglich beliebiger Ortseigenzustände gegen Null. Da es sich um eine beschränkte Folge handelt, konvergiert sie auch in der schwachen Operator-Topologie gegen Null. Das obige Funktional konvergiert jedoch gegen den Ausdruck

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(\psi, W(0, \frac{1}{n})P_i\psi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon \sum_{z \in \mathbb{Z}} \overline{\psi(\epsilon z - \frac{1}{n})} \psi(\epsilon z) \\ &= \epsilon \sum_{z \in \mathbb{Z}} |\psi(\epsilon z)|^2. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Die Verletzung der Positivität wird durch das folgende Beispiel illustriert. Sei die zu approximierende Schrödinger-Wellenfunktion

$$\psi(x) = e^{i\beta x} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (7.25)$$

Wir wollen eine Näherung für den Erwartungswert des folgenden positiven Operators

$$A = [1 - V(\alpha)]^* [1 - V(\alpha)] = 2 - V(\alpha) - V(-\alpha) \quad (7.26)$$

berechnen. Wählt man  $i = \epsilon(\mathbb{Z} + \lambda)$  als abzählbare Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , so liefert das obige Funktional den Ausdruck

$$\begin{aligned} &\epsilon \sum_{x \in i} \left[ 2 |\psi(x)|^2 - \overline{(\psi(x + \alpha) + \psi(x - \alpha))} \psi(x) \right] \\ &= \epsilon \sum_{x \in i} 2 e^{-x^2} \left[ 1 - (\cosh \alpha x \cos \alpha \beta - i \sinh \alpha x \sin \alpha \beta) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \right], \end{aligned}$$

was im Allgemeinen nicht reell ist, da der Sinus Hyperbolicus antisymmetrisch, das Gitter  $i$  aber um eine Konstante  $\lambda$  verschoben ist.

Im Folgenden konstruieren wir zu einem gegebenem Zustand  $\psi$  der Schrödingerdarstellung ein Netz von Zuständen in  $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$ , dass auf ganz  $\mathcal{W}$  schwach gegen  $\psi$  konvergiert. Die Existenz eines solchen Grenzwertes ist gesichert durch das Theorem von Fell, welches besagt, dass das Folium einer treuen Darstellung einer  $C^*$ -Algebra schwach dicht in der Menge aller Zustände liegt. Der Beweis des Theorems ist jedoch nicht konstruktiv, so dass nicht a priori klar ist, wie man die Approximation durchführen soll.

**Problem.** Gegeben sei also ein normierter Zustand  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  der Schrödingerdarstellung. Diesen kann man auffassen als ein Erwartungswertfunktional  $\omega_S : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$  auf der Weyl algebra,

$$\omega_S(W(\alpha, \beta)) = e^{\frac{i}{2}\alpha\beta} \int dx \bar{\psi}(x) e^{i\alpha x} \psi(x + \beta). \quad (7.27)$$

Ebenso kann man jeden Zustand  $\phi$  in der Polymerdarstellung auffassen als lineares Funktional  $\omega$  auf der Weyl-Algebra. Gesucht ist eine gerichtete Indexmenge  $J$  und ein Netz von Zuständen  $(\phi_i)_{i \in J}$ , so dass für die zugehörigen Funktionale gilt:

$$\begin{aligned} (\forall \epsilon)(\forall W(\alpha_1, \beta_1), \dots, W(\alpha_N, \beta_N))(\exists i_0 \in J) \quad \text{mit} \\ |\omega_S(W(\alpha_n, \beta_n)) - \omega_i(W(\alpha_n, \beta_n))| < \epsilon \quad (\forall n)(\forall i \in J, i > i_0). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Dann kann man zeigen, dass das Netz  $(\omega_i)$  auch auf ganz  $\mathcal{W}$  gegen  $\omega_S$  konvergiert.

*Beweis.* Für beliebiges  $A \in \mathcal{W}$  gilt:

$$\begin{aligned} (\forall \epsilon)(\exists W(\alpha_n, \beta_n), \lambda_n \in \mathbb{C}, n = 1, \dots, N), \quad \text{so dass} \\ \left\| A - \sum \lambda_n W(\alpha_n, \beta_n) \right\| < \epsilon. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Sei nun  $\epsilon$  gegeben. Dann kann man  $W(\alpha_1, \beta_1), \dots, W(\alpha_N, \beta_N)$  sowie Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  finden, so dass  $\|A - \sum \lambda_n W(\alpha_n, \beta_n)\| < \epsilon/3$  und nach (7.28) ein  $i_0$  so dass  $(\omega_S - \omega_i)(\sum \lambda_n W(\alpha_n, \beta_n)) < \epsilon/3$  für  $i > i_0$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} (\omega_S - \omega_i)(A) &= \omega_S(A - \sum \lambda_n W(\alpha_n, \beta_n)) + \\ &\quad (\omega_S - \omega_i)(\sum \lambda_n W(\alpha_n, \beta_n)) + \\ &\quad \omega_i(\sum \lambda_n W(\alpha_n, \beta_n) - A) < \epsilon. \end{aligned} \quad (7.30)$$

□



### 7.3.1 Approximation durch Riemannsche Summen

Zunächst liegt es nahe, das Integral (7.27) auf folgende Weise durch Riemannsche Summen zu approximieren. Sei  $J$  eine Indexmenge, die aus abzählbaren Teilmengen von  $\mathbb{R}$  besteht. Zu gegebenem  $i \in J$  unterteilen wir die reelle Achse in disjunkte Intervalle  $I_n$ , so dass in jedem Intervall genau ein  $x \in i$  liegt und  $\bigcup I_n = \mathbb{R}$ . Dann definieren wir ein Maß  $d_i$ , das jedem Punkt  $x \in i$  die Länge des zugehörigen Intervalls zuordnet und betrachten Zustände der Form

$$\phi_i = \sum_{x \in i} \psi(x) \sqrt{d_i(x)} |x\rangle. \quad (7.31)$$

Die Feinheit der zu  $i$  gehörenden Unterteilung ist  $\mu(d_i) = \sup_{x \in i} d_i(x)$ . Man kann das zugehörige Erwartungswertfunktional  $\omega_i(W(\alpha_n, \beta_n))$  berechnen. Dazu definieren wir  $i_{\beta_n} := \{x \in i \mid x + \beta_n \in i\}$ . Es ergibt sich

$$\omega_i(W(\alpha_n, \beta_n)) = e^{\frac{i}{2}\alpha_n\beta_n} \sum_{x \in i_{\beta_n}} \bar{\psi}(x) e^{i\alpha_n x} \psi(x + \beta_n) \sqrt{d_i(x) d_i(x + \beta_n)}. \quad (7.32)$$

Wir suchen nun eine konkrete Realisierung unserer Indexmenge  $J$  und zu jedem  $i \in J$  eine geeignete Unterteilung, so dass die folgenden Eigenschaften

- (i)  $i_{\beta_n} = i \quad (\forall i \in J)(\forall n = 1, \dots, N)$ ,
- (ii)  $d_i(x) = d_i(x + \beta_n) \quad (\forall i \in J)(\forall x \in i)(\forall n = 1, \dots, N)$ ,
- (iii)  $(\forall \epsilon)(\exists i_0 \in J) \quad \text{s.d.} \quad \mu(d_i) < \epsilon \quad (\forall i > i_0)$

erfüllt sind. Dann wird der Ausdruck (7.32) zur Riemannschen Summe und  $(\omega_i)$  konvergiert im Sinne von (7.28) für alle  $n = 1, \dots, N$  gegen das Integral (7.27). Bei dem Versuch, eine solche Menge zu konstruieren, begegnet man jedoch den folgenden Obstruktionen. Es ist bereits problematisch, überhaupt eine Menge  $i$  zu finden, die (i) und (ii) erfüllt. Diese Menge müsste also invariant unter Translationen um  $\beta_1, \dots, \beta_N$  sein, also zum Beispiel von der Gestalt

$$i = \left\{ \sum_n z_n \beta_n, z_1, \dots, z_N \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (7.33)$$

Die Punkte dieser Menge liegen im Allgemeinen dicht in  $\mathbb{R}$ , so dass Bedingung (ii) nicht zu erfüllen ist. Auch eine Abschwächung der Forderung (i) derart, dass die Menge  $i \setminus i_\beta$  gegen eine Nullmenge konvergieren muss, führt zu keiner signifikanten Vereinfachung des Problems. Die unregelmäßige Anordnung der Punkte in der Menge (7.33) erinnert jedoch an ein Quasigitter, das man als Projektion eines höherdimensionalen regelmäßigen Gitters erhält. Diese Beobachtung führt zur folgenden Idee.

### 7.3.2 Approximation durch Integration im $\mathbb{R}^L$

Sei  $G$  die additive Untergruppe von  $\mathbb{R}$ , die von  $\beta_1, \dots, \beta_N$  erzeugt wird, also die Menge (7.33). Dann gilt: Es gibt eine natürliche Zahl  $L \leq N$  und einen Isomorphismus von  $\mathbb{Z}^L$  nach  $G$ .

*Beweis.* Zunächst gibt es einen natürlichen Homomorphismus  $\Gamma$  von  $\mathbb{Z}^N$  nach  $G$ :

$$(z_1, \dots, z_N) \mapsto \sum_{n=1}^N z_n \beta_n. \quad (7.34)$$

$\Gamma$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn aus  $\sum z_n \beta_n = 0$  folgt  $z_n = 0$  ( $\forall n$ ). Ist dies nicht der Fall, so zeigen wir im Folgenden, dass man stets eine erzeugende Menge finden kann, die nur aus  $N - 1$  Elementen besteht.

Nehmen wir an, es gilt  $\sum z_n \beta_n = 0$ ,  $0 < z_1 < |z_k|$  ( $\forall z_k \neq 0$ ). Außerdem sei  $z_1$  minimal, d.h. es gibt keine erzeugende Menge und Koeffizienten  $z'_1, \dots, z'_N$ , die diese Bedingungen erfüllen mit  $z'_1 < z_1$ .

Dann sind alle  $z_k$ ,  $k = 2, \dots, N$  durch  $z_1$  teilbar. Ansonsten gäbe es ein  $k$  und ganze Zahlen  $q, r$  mit  $z_k = qz_1 - r$ ,  $0 < r < z_1$ . Dann würde gelten

$$0 = q \sum z_n \beta_n = r \beta_1 + \dots + \underbrace{z_k \beta_1 + q z_k \beta_k}_{\beta'_k} + \dots + q z_N \beta_N. \quad (7.35)$$

Da auch  $(\beta_1, \dots, \beta'_k, \dots, \beta_N)$  eine erzeugende Menge ist und  $r < z_1$ , steht dies im Widerspruch zu Annahme.

Aus diesem Grund kann man die Summe durch  $z_1$  dividieren und so  $\beta_1$  durch  $\beta_2, \dots, \beta_N$  ausdrücken. Auf diese Weise hat man die Anzahl der Elemente in der erzeugenden Menge um eins reduziert. Man kann induktiv fortfahren, bis man ein  $L \leq N$  gefunden hat, für das  $\Gamma$  ein Isomorphismus ist.  $\square$

Diesen Isomorphismus kann man auffassen als eine Projektion, die das Gitter  $\mathbb{Z}^L$  abbildet auf ein Quasigitter in  $\mathbb{R}$ . Es gibt eine eindeutige Erweiterung dieses Isomorphismus zu einer Abbildung von  $\mathbb{R}^L$  nach  $\mathbb{R}$ , die wir mit  $\gamma$  bezeichnen. Wir wählen nun eine stetige Funktion  $\chi$  mit kompaktem Träger in  $\mathbb{R}$ , für die gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{L-1}} dz^{L-1} |\chi(|z|^2)|^2 = 1. \quad (7.36)$$

Wir können die quadratintegrale Funktion  $\psi$  durch eine stetige Funktion  $\phi$  mit kompaktem Träger approximieren und so die Funktion

$$\Psi(z) = \|\gamma\|^{-\frac{L}{2}} \phi(\gamma(z)) \chi(\|\gamma\|^2 |z|^2 - \gamma(z)^2) \quad (7.37)$$

auf  $\mathbb{R}^L$  definieren. Damit kann man nun die folgenden Vektoren im Raum der Polymerdarstellung angeben, von denen wir zeigen, dass sie den Zustand  $\psi$  approximieren,

$$\Psi = m^{-\frac{L}{2}} \sum_{z \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}^L} \Psi(z) |\gamma(z)\rangle. \quad (7.38)$$

Berechnen wir für diese Vektoren den Erwartungswert des Operators  $W(\alpha, \beta)$ , so erhalten wir den Ausdruck

$$m^{-L} \sum_{z \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}^L} \overline{\Psi(z)} e^{i\alpha_n(\gamma(z) + \frac{1}{2}\beta_n)} \Psi(z - \Gamma^{-1}(\beta_n)). \quad (7.39)$$

Dies ist eine Riemannsche Summe, die für  $m \rightarrow \infty$  gegen das entsprechende Integral konvergiert. Bei geeigneter Wahl der Koordinaten faktorisiert der resultierende Ausdruck in ein Einfachintegral, das gerade den Erwartungswert im Zustand  $\phi$  liefert und ein  $(L-1)$ -dimensionales Integral über den Kern der Funktion  $\gamma$ , welches von der Funktion  $\chi$  abhängt,

$$(\phi, W(\alpha, \beta)\phi) \int_{\gamma(z)=0} d^{L-1}z \overline{\chi(|z|^2)} \chi(|z - \|\gamma\| |\Gamma^{-1}(\beta_n)|^2 - \beta_n^2). \quad (7.40)$$

Wir nutzen die Freiheit in der Wahl der Funktion  $\chi$  aus, so dass das Integral gegen eins konvergiert. Dies erreichen wir, indem wir die  $\chi$  wie folgt skalieren,

$$\chi_\lambda(|z|^2) = \lambda^{\frac{L-1}{2}} \chi(\lambda^2 |z|^2). \quad (7.41)$$

Setzen wir dies in den obigen Ausdruck ein, so erhalten wir für das Integral

$$\int_{\gamma(z)=0} d^{L-1}z \overline{\chi_\lambda(|z|^2)} \chi_\lambda(|z - \|\gamma\| |\Gamma^{-1}(\beta_n)|^2 - \beta_n^2) = \quad (7.42)$$

$$\int_{\gamma(z)=0} d^{L-1}z \overline{\chi(|z|^2)} \chi(|z - \lambda \|\gamma\| |\Gamma^{-1}(\beta_n)|^2 - \lambda^2 \beta_n^2). \quad (7.43)$$

Im Grenzfall  $\lambda \rightarrow 0$  konvergiert dies gegen eins. Damit haben wir eine Möglichkeit gefunden, den Funktion  $\psi$  der Schrödingerdarstellung im Sinne von (7.28) zu approximieren. Sei  $\phi_n$  eine Folge, die gegen  $\psi$  konvergiert, so können wir für gegebenes  $\epsilon$  immer ein Tripel  $(\phi_{n_0}, m_0, \lambda_0)$  finden, so dass der zugehörige Erwartungswert in der Polymerdarstellung um weniger als  $\epsilon$  von  $(\psi, W(\alpha, \beta)\psi)$  abweicht für alle  $n > n_0$ ,  $m > m_0$ ,  $\lambda < \lambda_0$ .

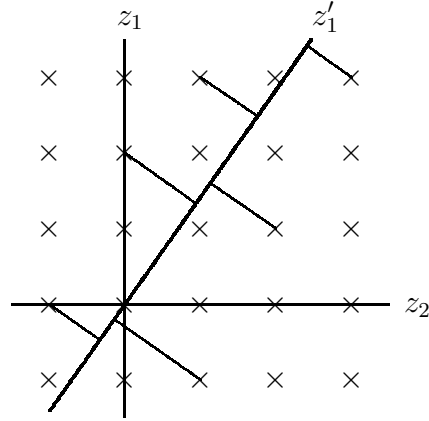
**Beispiel 7.1.** Wir geben nun ein konkretes Beispiel für den Fall, dass die additive Untergruppe von  $\mathbb{R}$  von nur zwei Zahlen  $\beta_1 = 1$  und  $\beta_2 = \sqrt{2}$  erzeugt wird. Die Abbildung  $\Gamma(z) = \sum_i \beta_i z_i$  ist dann bereits ein Isomorphismus. Für die Funktion  $\phi_\chi$  erhält man

$$\phi_\chi(z) = \sqrt{3} \phi(z_1 + \sqrt{2} z_2) \chi(2z_1^2 + z_2^2 - 2\sqrt{2} z_1 z_2). \quad (7.44)$$

Man kann nun neue Koordinaten  $z'_1, z'_2$  einführen. Sei

$$\begin{aligned} z'_1 &= z_1 + \sqrt{2} z_2, \\ z'_2 &= \sqrt{2} z_1 - z_2. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Dies entspricht einer Drehung des Koordinatensystems, so dass die  $z'_1$ -Achse nun in die Richtung zeigt, die durch den Vektor  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  festgelegt ist (in den alten Koordinaten). Der Isomorphismus  $\Gamma$  projiziert die Punkte des  $\mathbb{Z}^2$  auf die  $z'_1$ -Achse. Dies ist in dem nebenstehenden Bild veranschaulicht.



In diesen neuen Koordinaten nimmt der approximierende Vektor in der Polymerdarstellung die Form

$$\Psi_{m,\chi} = m^{-1} \sum_{z \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}^2} \sqrt{3} \phi(z'_1) \chi(z'_2) |z'_1\rangle \quad (7.46)$$

an. Man sieht, dass auf diese Weise das zugehörige Integral für den Erwartungswert separiert.

## 7.4 Approximation des Impulsoperators

Wie wir in Abschnitt 7.2 bereits bemerkt haben, existiert in der Polymerdarstellung kein Impulsoperator. Es besteht die Frage, inwiefern man den Impulsoperator der Schrödinger-Darstellung in der Polymerdarstellung approximieren kann. Betrachten wir zum Beispiel den kohärenten Schrödingerzustand

$$\psi(x) = (\pi d^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2d^2} + ip_0(x-x_0)\right), \quad (7.47)$$

wobei  $d$  ein Längenparameter ist, dessen Inverses proportional zur Impulsunschärfe ist. Der Erwartungswert von  $p$  in diesem Zustand ist  $p_0$ , der Erwartungswert für  $p^2$  ist  $\langle p^2 \rangle = p_0^2 + \frac{1}{d^2}$ . Für  $\beta^2 \langle p^2 \rangle \ll 1$  ist der Operator (siehe [10])

$$p_\beta = \frac{i}{2\beta} (V(\beta) - V(-\beta)) \quad (7.48)$$

eine Approximation des herkömmlichen Impulsoperators der Schrödinger-Darstellung. Insbesondere erhält man in dem obigen kohärenten Zustand für  $p_\beta$  den Erwartungswert

$$\begin{aligned} (\psi, p_\beta \psi) &= \frac{i}{2\beta} e^{-\frac{\beta^2}{4d^2}} (e^{-ip_0\beta} - e^{ip_0\beta}) \\ &= p_0 (1 + \mathcal{O}(\langle p^2 \rangle \beta^2)) , \end{aligned} \quad (7.49)$$

Für gegebenes  $\beta$  kann man nun den Zustand

$$\Psi_\beta = \beta^{\frac{1}{2}} \sum_{z \in \mathbb{Z}} \psi(\beta z) |\beta z\rangle \quad (7.50)$$

betrachten und erhält die folgende Approximation

$$|(\Psi_\beta, p_\beta \Psi_\beta) - (\psi, p\psi)| \sim \mathcal{O}(p_0 \langle p^2 \rangle \beta^2) . \quad (7.51)$$

Die Schwierigkeit besteht jedoch darin, dass man für jedes  $\beta$  einen anderen Polymerzustand wählen muss. Es ist nicht möglich, einen Zustand zu finden, der den Erwartungswert des Impulsoperators für alle hinreichend kleinen Werte von  $\beta$  approximiert. Dies ist eine unmittelbare Folge der Tatsache, dass die Polymerdarstellung nicht schwach stetig in dem Parameter  $\beta$  ist.

Wie wir im letzten Abschnitt explizit gezeigt haben, ist es jedoch möglich, Näherungen für jede endliche Menge von Werten  $\beta_1, \dots, \beta_N$  anzugeben. Seien zum Beispiel  $\beta_1, \beta_2 \ll \langle p^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$  zwei Werte mit irrationalem Verhältnis, dann ist der Polymerzustand

$$\Psi_{\beta_1\beta_2} = (\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{z_1, z_2 \in \mathbb{Z}} \psi(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2) \chi_\lambda((\beta_2 z_1 - \beta_1 z_2)^2) |\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2\rangle \quad (7.52)$$

eine gute Approximation, wobei man

$$\chi_\lambda(|z|^2) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda^2 |z|^2} \quad (7.53)$$

wählen kann mit  $\lambda < \langle p^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ .



# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Ausblick

Die Allgemeine Relativitätstheorie kann man als eine dynamische Theorie des Zusammenhangs auffassen. Ausgehend von dieser Formulierung, die zu einer drastischen Vereinfachung der Bewegungsgleichungen führt, kann man die Theorie, basierend auf der Methode von Dirac, kanonisch quantisieren. Dieser Ansatz führt zur Loop-Quantengravitation, die neben der Stringtheorie zur Zeit der populärste Kandidat für eine Quantentheorie der Gravitation ist.

Die LQG ist eine hintergrundunabhängige, nicht perturbative Quantenfeldtheorie. Aus ihr ergeben sich einige interessante physikalische Konsequenzen. Die kontinuierliche Raumzeit wird ersetzt durch eine diskrete Struktur in der Größenordnung der Planck-Länge. Dies führt dazu, dass keine Ultraviolettdivergenzen auftreten, da es eine Art natürlichen „cut-off“ gibt. Außerdem findet die LQG Anwendung in der frühen Kosmologie und der Thermodynamik Schwarzer Löcher. Sie führt unter vereinfachten Annahmen zum Verschwinden der Urknallsingularität und ermöglicht eine Herleitung der Bekenstein-Hawking-Entropie aus ersten Prinzipien.

Neben diesen Erfolgen begegnet man jedoch auch einigen hartnäckigen Problemen. So ist zur Zeit nicht klar, wie man eine klassische Lösung der Einstein-Gleichungen durch Zustände der LQG approximieren kann. Dies bezeichnet man auch als das Problem des semiklassischen Limes. Ebenfalls offen ist die Frage, welche Form der Hamiltonschen Zwangsbedingung in der LQG zu wählen ist. Die Konstruktion eines Hamilton-Operators ist nicht eindeutig und die Varianten haben im Allgemeinen unterschiedliche physikalische Konsequenzen. Diese beiden Probleme sind eng miteinander verbunden, denn insbesondere muss die Menge der Zustände, die im Kern des Hamilton-Operators liegt, hinreichend groß sein, um den semiklassischen Limes der LQG formulieren zu können.

Das Problem des semiklassischen Limes ist bisher an verschiedenen Modellbeispi-

len erörtert worden. Ein einfaches Beispiel ist gegeben durch ein quantenmechanisches Teilchen und die Frage, inwiefern Schrödinger-Zustände durch Zustände in der sogenannten Polymerdarstellung approximiert werden können. Ashtekar hat dazu in [10] zu einem gegebenen kohärenten Zustand ein induktives System von Funktionalen auf der Weyl-Algebra konstruiert, dass gegen den Schrödinger-Erwartungswert konvergiert. In dieser Arbeit haben wir gezeigt, dass dieses Funktional weder normal bezüglich der Polymerdarstellung noch positiv ist.

Man kann statt dessen versuchen, wie in Abschnitt 7.3.1 beschrieben, Polymerzustände zu wählen, so dass der Erwartungswert in der Polymerdarstellung zu einer Riemannschen Summe für den zugehörigen Erwartungswert in der Schrödinger-Darstellung wird. Dies scheitert jedoch zunächst daran, dass man eine abzählbare Menge wählen muss, die invariant unter Translation endlich vieler reeller Zahlen ist. Im Allgemeinen ist eine Menge mit dieser Eigenschaft dicht in  $\mathbb{R}$ . Wir haben explizit gezeigt, wie man dieses Problem umgehen kann, indem man die gesuchte Menge auffasst als Projektion eines regelmäßigen höherdimensionalen Gitters.

Ein anderes System, das man als Modell für das Problem des semiklassischen Limes betrachten kann, ist die Quantenelektrodynamik. Auch dort existiert neben der bekannten Fock-Raumdarstellung eine Polymerdarstellung, die eingehend untersucht wurde (siehe zum Beispiel [41]). Es wäre interessant zu untersuchen, ob die hier entwickelten Methoden auf die QED übertragen werden können.

Möglicherweise sind die Ergebnisse dieser Arbeit auch für bestimmte kosmologische Modelle von Interesse. In [4] untersucht Ashtekar mit Hilfe der LQG homogene, isotrope Raumzeiten. Bei diesen Untersuchungen spielt die Wheeler-De-Witt-Theorie eine Rolle, die vergleichbar ist mit der des Schrödinger-Hilbert-Raums in der Polymerdarstellung des quantenmechanischen Teilchens. Die Resultate aus Kapitel 7 könnten also dazu genutzt werden, die Beziehung zwischen Loop-Quantenkosmologie und Wheeler-De-Witt-Theorie näher herauszuarbeiten.



# Literaturverzeichnis

- [1] Marc H. Goroff and Augusto Sagnotti. The ultraviolet behavior of einstein gravity. *Nucl. Phys.*, B266:709, 1986.
- [2] Carlo Rovelli. Strings, loops and others: A critical survey of the present approaches to quantum gravity. 1997.
- [3] D. Amati, M. Ciafaloni, and G. Veneziano. Can space-time be probed below the string size? *Phys. Lett.*, B216:41, 1989.
- [4] Abhay Ashtekar. Gravity, geometry and the quantum. 2006.
- [5] Carlo Rovelli. Loop quantum gravity and black hole physics. *Helv. Phys. Acta*, 69:582–611, 1996.
- [6] Sundance O. Bilson-Thompson, Fotini Markopoulou, and Lee Smolin. Quantum gravity and the standard model. 2006.
- [7] Lee Smolin. Generic predictions of quantum theories of gravity. 2006.
- [8] Carlo Rovelli. Ashtekar formulation of general relativity and loop space nonperturbative quantum gravity: A report. *Class. Quant. Grav.*, 8:1613–1676, 1991.
- [9] Carlo Rovelli. Quantum gravity. Cambridge, UK: University Press (2004) 455 p.
- [10] Abhay Ashtekar, Stephen Fairhurst, and Joshua L. Willis. Quantum gravity, shadow states, and quantum mechanics. *Class. Quant. Grav.*, 20:1031–1062, 2003.
- [11] R. M. Wald. General relativity. Chicago, Usa: Univ. Pr. ( 1984) 491p.
- [12] A. Ashtekar. New variables for classical and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2244–2247, 1986.
- [13] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Background independent quantum gravity: A status report. *Class. Quant. Grav.*, 21:R53, 2004.

- 
- [14] Abhay Ashtekar. New perspectives in canonical quantum gravity. Talk given at Int. Conf. on Gravitation and Cosmology, Goa, India, Dec 14-19, 1987.
- [15] Thomas Thiemann. Introduction to modern canonical quantum general relativity. 2001.
- [16] Abhay Ashtekar, Jerzy Lewandowski, Donald Marolf, Jose Mourao, and Thomas Thiemann. Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom. *J. Math. Phys.*, 36:6456–6493, 1995.
- [17] Winston Fairbairn and Carlo Rovelli. Separable hilbert space in loop quantum gravity. *J. Math. Phys.*, 45:2802–2814, 2004.
- [18] J. Lewandowski, E. T. Newman, and C. Rovelli. Variations of the parallel propagator and holonomy operator and the gauss law constraint. *J. Math. Phys.*, 34:4646–4654, 1993.
- [19] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Quantum theory of geometry. i: Area operators. *Class. Quant. Grav.*, 14:A55–A82, 1997.
- [20] Carlo Rovelli and Lee Smolin. Discreteness of area and volume in quantum gravity. *Nucl. Phys.*, B442:593–622, 1995.
- [21] Roberto De Pietri and Carlo Rovelli. Geometry eigenvalues and scalar product from recoupling theory in loop quantum gravity. *Phys. Rev.*, D54:2664–2690, 1996.
- [22] T. Thiemann. Closed formula for the matrix elements of the volume operator in canonical quantum gravity. *J. Math. Phys.*, 39:3347–3371, 1998.
- [23] T. Thiemann. Anomaly-free formulation of non-perturbative, four-dimensional lorentzian quantum gravity. *Phys. Lett.*, B380:257–264, 1996.
- [24] T. Thiemann. Quantum spin dynamics (qsd). *Class. Quant. Grav.*, 15:839–873, 1998.
- [25] T. Thiemann. Qsd iii: Quantum constraint algebra and physical scalar product in quantum general relativity. *Class. Quant. Grav.*, 15:1207–1247, 1998.
- [26] T. Thiemann. Qsd v: Quantum gravity as the natural regulator of matter quantum field theories. *Class. Quant. Grav.*, 15:1281–1314, 1998.
- [27] T. Thiemann. Quantum spin dynamics (qsd). vii: Symplectic structures and continuum lattice formulations of gauge field theories. *Class. Quant. Grav.*, 18:3293–3338, 2001.

- 
- [28] Rodolfo Gambini, Jerzy Lewandowski, Donald Marolf, and Jorge Pullin. On the consistency of the constraint algebra in spin network quantum gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, D7:97–109, 1998.
- [29] Jerzy Lewandowski and Donald Marolf. Loop constraints: A habitat and their algebra. *Int. J. Mod. Phys.*, D7:299–330, 1998.
- [30] Marcus Gaul and Carlo Rovelli. A generalized hamiltonian constraint operator in loop quantum gravity and its simplest euclidean matrix elements. *Class. Quant. Grav.*, 18:1593–1624, 2001.
- [31] Thomas Thiemann. Lectures on loop quantum gravity. *Lect. Notes Phys.*, 631:41–135, 2003.
- [32] Hermann Nicolai, Kasper Peeters, and Marija Zamaklar. Loop quantum gravity: An outside view. *Class. Quant. Grav.*, 22:R193, 2005.
- [33] Martin Bojowald, Hugo A. Morales-Tecotl, and Hanno Sahlmann. On loop quantum gravity phenomenology and the issue of lorentz invariance. *Phys. Rev.*, D71:084012, 2005.
- [34] Carlo Rovelli. Black hole entropy from loop quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 77:3288–3291, 1996.
- [35] Martin Bojowald. Absence of singularity in loop quantum cosmology. *Phys. Rev. Lett.*, 86:5227–5230, 2001.
- [36] Eugenio Bianchi, Leonardo Modesto, Carlo Rovelli, and Simone Speziale. Graviton propagator in loop quantum gravity. 2006.
- [37] Abhay Ashtekar, Carlo Rovelli, and Lee Smolin. Weaving a classical geometry with quantum threads. *Phys. Rev. Lett.*, 69:237–240, 1992.
- [38] A. Corichi and J. M. Reyes. A gaussian weave for kinematical loop quantum gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, D10:325–338, 2001.
- [39] Thomas Thiemann. Complexifier coherent states for quantum general relativity. *Class. Quant. Grav.*, 23:2063–2118, 2006.
- [40] J.M.G. Fell. The dual spaces of  $C^*$ -algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 94:365, 1960.
- [41] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Relation between polymer and fock excitations. *Class. Quant. Grav.*, 18:L117–L128, 2001.



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Fredenhagen für die interessante Aufgabenstellung und die Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken. Aus den gemeinsamen Gesprächen habe ich einen großen Nutzen gezogen und viel gelernt.

Ebenso bedanken möchte ich mich bei der ganzen Arbeitsgruppe für die schöne gemeinsame Zeit und insbesondere bei Werner Bauer, Christian Sommer und Ferdinand Brennecke für viele interessante Gespräche und lustige Momente.

Tiefer Dank gilt meinen Eltern und Großeltern, die mich während meines Studiums stets nach Kräften unterstützt haben. Schließlich möchte ich mich in ganz besonderer Weise bei meiner Frau bedanken, die für mich in jeder Situation eine große Stütze ist. In ihrer liebevollen Art war sie im vergangenen Jahr Quelle meiner Kraft und hat so maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.



# Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Ich versichere, diese Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen verfasst zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Felix Reszewski