

# Kausale Störungstheorie und Differentielle Renormierung

Dirk Prange  
II. Institut für Theoretische Physik  
Universität Hamburg

Diplomarbeit  
Mai 1997

Gutachter der Diplomarbeit:  
Prof. Dr. K. Fredenhagen  
Prof. Dr. G. Mack

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1 Grundlagen der Renormierung</b>	<b>7</b>
1.1 Die Fortsetzung von Distributionen . . . . .	8
1.2 Freie Skalare Quantenfeldtheorie . . . . .	15
1.2.1 Quantisierung . . . . .	15
1.2.2 Die Zweipunktfunktion . . . . .	16
1.2.3 Der Fockraum . . . . .	16
<b>2 Die Methode von Epstein und Glaser</b>	<b>19</b>
2.1 Woher stammen die UV-Divergenzen in der QFT? . . . . .	19
2.2 Die induktive Konstruktion . . . . .	20
2.2.1 Die Axiome . . . . .	20
2.2.2 Annahme . . . . .	23
2.2.3 Induktionsschritt . . . . .	23
2.3 Renormierbarkeit von $\phi^k$ -Theorien . . . . .	26
<b>3 Renormierte Distributionen als Integralkerne</b>	<b>27</b>
3.1 Die Integralkerndarstellung . . . . .	28
3.1.1 Eine Wahl von $w$ . . . . .	31
3.1.2 Die Abhängigkeit von der Skala . . . . .	32
3.2 Die Impulsraumdarstellung und BPHZ-Renormierung . . . . .	33
<b>4 Anwendungen</b>	<b>35</b>
4.1 Einige Beispiele aus zweiter Ordnung Störungstheorie . . . . .	35
4.1.1 Die masselose Theorie . . . . .	36
4.1.2 Die massive Theorie . . . . .	38
4.1.3 Vergleich mit Ergebnissen der Differentiellen Renormierung . . . . .	40
4.2 Die Renormierungsbedingungen im Ortsraum . . . . .	40
4.2.1 Minimale Subtraktion . . . . .	41
4.3 Die Renormierungsgruppen-Gleichungen . . . . .	42
4.3.1 Im masselosen Fall . . . . .	43
4.3.2 Im massiven Fall . . . . .	44
4.4 Ein Beispiel im Minkowskiraum . . . . .	44
4.5 Gekrümmte Raumzeiten . . . . .	45
4.5.1 Grundlagen . . . . .	46
4.5.2 Das freie skalare Feld . . . . .	47

4.5.3 Renormierung der selbstwechselwirkenden Theorie . . . .	48
<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>52</b>
<b>A Anhang</b>	<b>53</b>
A.1 Fouriertransformationen der in 4.1 auftretenden Distributionen .	53
A.1.1 Der masselose Ein-Loop-Graph . . . . .	54
A.1.2 Der masselose Zwei-Loop-Graph . . . . .	55
A.1.3 Der massive Ein-Loop-Graph . . . . .	55
A.2 Die masselose RG-Gleichung für allgemeines $w$ . . . . .	57
A.3 Modifizierte Besselfunktionen . . . . .	58
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>61</b>
<b>Danksagung</b>	<b>62</b>

# Einleitung

Alle uns heutzutage bekannten Naturprozesse werden durch vier elementare Wechselwirkungen beschrieben. Dies sind die Gravitation, die elektromagnetische, die schwache sowie die starke Kraft. Eine Betrachtung auf mikroskopischem Niveau erfordert die Quantisierung der zu diesen Kräften gehörenden Feldtheorien. Dabei werden die letzten drei im sogenannten Standardmodell zusammengefaßt. Die Quantisierung der Gravitation ist bis heute noch nicht gelungen. Obwohl die Wechselwirkungen im Standardmodell komplexer Natur sind, lassen sich alle wesentlichen Eigenschaften quantisierter Felder auch an einfacheren selbstwechselwirkenden Theorien studieren.

Tatsächlich ist noch keine dieser Theorien in 4 Raumzeitdimensionen geschlossen gelöst worden. Trotzdem verfügt man durch die Störungstheorie über ein Hilfsmittel zur Berechnung von Observablen. Diese stellt einen allerdings vor zwei schwerwiegende Probleme. Zum ersten ist die Störungsreihe keine konvergente Reihe. Dennoch kann ihr Einsatz durch die hervorragende Übereinstimmung mit den experimentellen Daten gerechtfertigt werden. Zum zweiten divergieren bei naiver Berechnung fast alle Übergangswahrscheinlichkeiten ab der zweiten Ordnung. Das Verfahren, welches aus den unendlichen Größen die endlichen meßbaren extrahiert, trägt den Namen Renormierung und ist die Grundlage für die überraschenden Effekte in Quantenfeldtheorien. Die sogenannte *running coupling constant* sowie auch die *running mass* sind wohl die wichtigsten unter diesen und so zu verstehen, daß die in der Theorie angenommenen Konstanten nach der Renormierung als Funktionen einer äußeren Skala erscheinen. Das heißt zum Beispiel, daß das elektromagnetische Feld des Elektrons umso stärker wird, je dichter man an es herankommt.

Obwohl die ersten Ideen zur Renormierung schon aus den Zeiten kurz nach der Formulierung der Störungstheorie kamen, ist der zugrunde liegende Mechanismus erst in den siebziger Jahren verstanden worden. Die wohl eleganteste Formulierung der Renormierungstheorie im korrekten funktionalanalytischen Rahmen ist 1973 von EPSTEIN und GLASER gegeben worden [EG73]. Sie trägt den Namen Kausale Störungstheorie.

Meine Arbeit befaßt sich mit der Anwendung dieses Verfahrens auf die skalare  $\phi^4$ -Theorie. Der Schwerpunkt liegt hierbei auf der Erzeugung von Integralerndarstellungen der nach Epstein-Glaser renormierten Funktionale. Dabei kann ich den Zusammenhang zur Differentiellen Renormierung [FJL92, SZ93] aufzeigen und mit diesen Ergebnissen die Renormierungsgruppe betrachten.

Da die Gravitation um viele Größenordnungen kleiner ist als die anderen Kräfte, ist es ein sinnvoller Ansatz, Gravitation als klassischen Hintergrund zu

betrachten, vor dem die anderen Kräfte quantenfeldtheoretisch beschrieben werden. Dieses Konzept ist unter dem Namen Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit bekannt. Während es viele Untersuchungen zu freien Quantenfeldern auf gekrümmter Raumzeit gibt (s. z.B. [Ful89] für einen Überblick), ist eine vollständige störungstheoretische Behandlung von wechselwirkenden (skalaren) Feldern erstmals in [BF97] vorgenommen worden. Sie basiert auf dem Epstein-Glaser-Verfahren.

In Anlehnung an diese Formulierung werde ich mit den Ergebnissen des ersten Teils Integralkern Darstellungen für die wichtigen Beiträge zur Störungstheorie zweiter Ordnung herleiten und die Renormierung der Kopplungskonstanten mithilfe der Renormierungsgruppe durchführen.

# Kapitel 1

## Grundlagen der Renormierung

Das fundamentale Objekt in der Quantenfeldtheorie (QFT) ist das Feld  $\phi$ .<sup>1</sup> Um aus  $\phi$  einen Träger physikalischer Information im Sinne der Quantentheorie und der speziellen Relativitätstheorie zu machen, verlangt man die Erfüllung von Vertauschungsrelationen. Diese machen aus  $\phi$  nicht eine operatorwertige Funktion, sondern ein operatorwertiges Funktional, weshalb der richtige Rahmen zur Behandlung von QFT die Funktionalanalysis bzw. Distributionentheorie ist. Der Raum der Distributionen ist per Definition linear, so daß die Addition sowie die Multiplikation mit komplexen Zahlen a priori definiert sind. In der QFT treten allerdings auch punktweise Produkte<sup>2</sup> von operatorwertigen Distributionen auf. Diese sind a priori nicht erklärt und müssen definiert werden. Für Produkte von Feldoperatoren wird dies durch die sog. Wick- oder Normalordnung gemacht. In der Störungstheorie treten allerdings noch weitere Produkte auf. Von diesen kann man zeigen, daß sie wohldefinierte Distributionen für nicht zusammenfallende Argumente sind. Somit kann das Problem der Definition des Produktes auf die Lösung eines Fortsetzungsproblems reduziert werden.

In diesem Kapitel möchte ich zuerst das Fortsetzungsproblem diskutieren. Die Grundlagen der Distributionentheorie, wie sie zum Verständnis dieses Kapitels notwendig sind, findet man z.B. in dem Buch von REED und SIMON [RS80] oder in [Hör90]. Eine meiner Meinung nach gute Darstellung findet sich auch in den beiden Büchern von FULLING [Ful89] und FRIEDLANDER [Fri75]. Diese bilden ohnehin eine gut lesbare Grundlage für die Konzepte von Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten. Die Sätze in diesem Abschnitt stammen aus [Fre].

In dem Abschnitt über Quantenfeldtheorie werde ich nur sehr kurz die Grundlagen wiederholen, die zum Verständnis der kausalen Störungstheorie nach EPSTEIN und GLASER nötig sind.

---

<sup>1</sup>Obwohl  $\phi$  immer das skalare ungeladene Feld symbolisieren soll, ist die folgende Betrachtung für alle Felder, die nach endlichdimensionalen Darstellungen der Lorentzgruppe transformieren, richtig.

<sup>2</sup>Im folgenden ist mit dem Ausdruck Produkt immer das punktweise Produkt gemeint. Das Tensorprodukt von Distributionen ist unproblematisch. Das mathematische Werkzeug, mit welchem sich die Produktbildung von Distributionen allgemein untersuchen läßt, ist die mikrolokale Analysis. Diese findet im weiteren keine Verwendung.

## 1.1 Die Fortsetzung von Distributionen

Zuerst möchte ich die Notation erklären, die nicht nur in diesem Kapitel, sondern in der gesamten Arbeit Verwendung finden wird. Unser Testfunktionenraum sei  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , der Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger. Der zugehörige Dualraum, also der Raum der Distributionen, sei  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Sei  $I$  eine Indexmenge, d.h.  $I \subset \mathbb{N}$ : Dann ist  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in I^n$  ein Multiindex und  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ . Entsprechend gilt  $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ . Bezeichne

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (1.1)$$

einen partiellen Differentialoperator der Ordnung  $|\alpha|$ . Sei  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt:

$$(D^\alpha T)(\varphi) := (-)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \quad (1.2)$$

$$\int d^n x T(\lambda x) \varphi(x) := T(\varphi^\lambda), \quad (1.3)$$

mit  $\varphi^\lambda(x) = \lambda^{-n} \varphi(\lambda^{-1}x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wenn Ausdrücke in der Form der linken Seiten der Gleichungen (1.2) und (1.3) auftreten, so sind sie immer durch die entsprechenden rechten Seiten erklärt. Um auf diesen Umstand hinzuweisen, benutze ich gelegentlich die Redewendung „im Sinne von Distributionen“. In einer Darstellung  $T(\varphi)$  der Form

$$T(\varphi) = \int d^n x T(x) \varphi(x) \quad (1.4)$$

bezeichnet  $T(x)$  den Integralkern von  $T$ .

In diesem Abschnitt geht es darum folgendes Problem zu lösen: Angenommen, wir kennen eine Distribution auf allen Testfunktionen, die in einer Umgebung des Ursprungs verschwinden. Wie läßt sich eine Fortsetzung auf alle Testfunktionen konstruieren?<sup>3</sup> <sup>4</sup> Dafür benutzen wir folgende Schreibweise: Sei

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mid 0 \notin \text{supp}(\varphi)\} \quad (1.5)$$

dieser Testfunktionenraum und  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  der zugehörige Dualraum. Dann beginnen wir mit der

**Definition 1 (s.a. [Ste71]).** Eine Distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  oder  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  hat am Punkt  $x = 0$  den Skalengrad  $\delta$ , wenn

$$\delta = \inf\{\delta' \in \mathbb{R} \mid \lambda^{\delta'} T(\lambda x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \text{ im Sinne von Distributionen}\}. \quad (1.6)$$

Bezeichne  $\text{scal deg}(T) = \delta$ . Die singuläre Ordnung  $\omega$  von  $T$  ist:<sup>5</sup>

$$\omega = [\delta] - n. \quad (1.7)$$

Bezeichne  $\text{singord}(T) = \omega$ .

<sup>3</sup>Die Existenz einer Fortsetzung ist durch das HAHN-BANACH-Theorem garantiert.

<sup>4</sup>Eine Behandlung dieses Themas für homogene Distributionen findet man in [Hör90][Chap. III.2]

<sup>5</sup>Sei  $[\delta]$  die größte ganze Zahl, die kleiner gleich  $\delta$  ist.

**Beispiel 1.** Für  $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  gilt:  $\delta(\lambda x) = |\lambda|^{-n}\delta(x)$ . Damit ist der Skalengrad von  $\delta$  gleich  $n$ , die singuläre Ordnung gleich Null.

**Beispiel 2.** Sei  $\frac{1}{(x^2)^3} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$  die dritte Potenz des Feynmanpropagators in der skalaren masselosen euklidischen Feldtheorie. Hier ist der Skalengrad 6 und die singuläre Ordnung 2.

Desweiteren benötigen wir noch das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz von Banach-Steinhaus, [RS80][Theorem III.9]) in der Anwendung auf Distributionen.

**Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Banach-Steinhaus).**

Sei  $(T_n) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ein Folge von Distributionen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Dann existiert für jedes kompakte Gebiet  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein Polynom  $P$ , so daß

$$|T_n(\varphi)| < \sup_{x \in K} |P(\partial)\varphi(x)| =: \|\varphi\|_P \quad (1.8)$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \varphi \subset K$ .

Die Berechnung des Skalengrades für verschiedene einfache Sonderfälle sei in folgender Proposition zusammengefaßt:

**Proposition 1.** Sei  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  oder  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ,  $\text{scal deg}(T) = \delta$  und  $\beta$  Multiindex. Dann gilt:

I.  $\text{scal deg}(x^\beta T) = \delta - |\beta|.$

II.  $\text{scal deg}(D^\beta T) = \delta + |\beta|.$

III.  $\text{scal deg}(w) \leq 0, \text{scal deg}(wT) \leq \delta, w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$

IV.  $\text{scal deg}(T_1 \otimes T_2) = \delta_1 + \delta_2$ , wenn  $\text{scal deg}(T_i) = \delta_i, i = 1, 2.$

*Beweis.* Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  oder  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ,  $\delta' \in \mathbb{R}$ . Zu I und II:

$$\begin{aligned} \lambda^{\delta'} \int d^n x T(\lambda x) x^\beta \lambda^{|\beta|} \varphi(x) &= \lambda^{\delta'+|\beta|} \int d^n x T(\lambda x) x^\beta \varphi(x) \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0, \text{ falls } \delta' > \delta - |\beta|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^{\delta'} \int d^n x (D^\beta T)(\lambda x) \varphi(x) &= \lambda^{\delta'-n} \int d^n x (D^\beta T)(x) \varphi(\lambda^{-1}x) \\ &= (-)^{|\beta|} \lambda^{\delta'-n} \int d^n x T(x) \lambda^{-|\beta|} (D^\beta \varphi)(\lambda^{-1}x) \\ &= (-)^{|\beta|} \lambda^{\delta'-|\beta|} \int d^n x T(\lambda x) (D^\beta \varphi)(x) \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0, \text{ falls } \delta' > \delta + |\beta|. \end{aligned}$$

Zu III: Die Behauptung folgt aus der einfachen Beobachtung, daß  $w(\lambda x)$  eine konvergente Folge von Distributionen mit Grenzwert  $w(0)$  ist. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt die Behauptung. Eine Verkleinerung des

Skalengrades ist möglich, wenn  $w = x^\alpha v, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Zu IV: Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$  oder  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\})$ :

$$\begin{aligned} \lambda^{\delta'_1} \lambda^{\delta'_2} \int d^n x_1 \int d^n x_2 T_1(\lambda x_1) T_2(\lambda x_2) \varphi(x_1, x_2) \\ = \lambda^{\delta'_1 + \delta'_2} \int d^n x_1 \int d^n x_2 (T_1 \otimes T_2)(\lambda x_1, \lambda x_2) \varphi(x_1, x_2) \\ \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0, \text{ falls } \delta'_1 > \delta_1 \wedge \delta'_2 > \delta_2. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 3.** Der Skalengrad von  $\delta^{(\alpha)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ist  $|\alpha| + n$ .

**Beispiel 4.** Die singuläre Ordnung von  $\square \frac{1}{x^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$  ist 0.

*Bemerkung 1.* Bei der punktwweisen Multiplikation von Distributionen erwartet man auch, daß die Skalengrade sich wie im Fall des Tensorproduktes addieren. Dies läßt sich nicht aus der Definition des Skalengrades ableiten, sondern benötigt die verfeinerte Version des mikrolokalen Skalengrades [BF97].

Für die Lösung des Fortsetzungsproblems betrachten wir als erstes den Fall, daß der Skalengrad kleiner als die Raumdimension ist. Hier können wir folgenden Satz formulieren:

**Satz 1.** Sei  ${}^0T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  mit Skalengrad  $\delta < n$ , dann gibt es ein eindeutig bestimmtes  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  mit Skalengrad  $\delta$  und  $T(\varphi) = {}^0T(\varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

*Beweis.* Seien  $T_1$  und  $T_2$  zwei Fortsetzungen. Dann gilt:  $(T_1 - T_2)(\varphi) = 0$ , falls  $0 \notin \text{supp}(\varphi)$ .  $\Rightarrow \text{supp}(T_1 - T_2) = \{0\}$ .  $\Rightarrow T_1 - T_2 = \sum_{|\alpha| < \infty} C_\alpha \delta^{(\alpha)}$ . Aus  $\text{scal deg}(\delta^{(\alpha)}) = n + |\alpha|$  folgt die Eindeutigkeit.

Sei  $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\theta \equiv 1 \forall x$  in einer Umgebung des Nullpunkts. Wir setzen  $T^{(m)}(x) := {}^0T(x)(1 - \theta(2^m x)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} |(T^{(m)} - T^{(m+1)})(\varphi)| &= \left| \int d^n x {}^0T(x) (\theta(2^{m+1} x) - \theta(2^m x)) \varphi(x) \right| \\ &= 2^{-mn} \left| \int d^n x {}^0T(2^{-m} x) (\theta(2x) - \theta(x)) \varphi(2^{-m} x) \right| \\ &\stackrel{m \rightarrow \infty}{<} c 2^{-m(n-\delta')}, \text{ für } \delta < \delta' < n, \end{aligned}$$

da  $\theta(2x) - \theta(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  und der Faktor  $\varphi(2^{-m} x)$  für die Abschätzung keine Rolle spielt, gemäß Proposition 1III. Somit gilt für  $l < m$ :

$$|(T^{(l)} - T^{(m)})(\varphi)| \leq \sum_{k=l}^{m-1} |(T^{(k)} - T^{(k+1)})(\varphi)| \leq c \frac{2^{-l(n-\delta')} - 2^{-m(n-\delta')}}{1 - 2^{-(n-\delta')}}.$$

$\Rightarrow T^{(m)}(\varphi)$  ist eine Cauchyfolge.  $\Rightarrow$  Es existiert<sup>6</sup>

$$T := \lim_{m \rightarrow \infty} T^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} {}^0T(x)(1 - \theta(2^m x)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (1.9)$$

<sup>6</sup>Siehe z.B. Theorem 2.1.8 in [Hör90]

Zur Bestimmung des Skalengrades von  $T$  betrachten wir

$$\begin{aligned} \lambda^{\delta'} \int d^n x T(\lambda x) \varphi(x) &= \lambda^{\delta'-n} \int d^n x T(x) \varphi(\lambda^{-1} x) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda^{\delta'-n} \int d^n x {}^0 T(x) (1 - \theta(2^m x)) \varphi(\lambda^{-1} x). \end{aligned}$$

Seien  $\mathbb{R} \ni R, \epsilon > 0$  so gewählt, daß  $\text{supp}(\varphi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < R\}$  und  $\theta(x) = 1$  für  $|x| < \epsilon$ . Dann ist  $(1 - \theta(2^m x)) \varphi(\lambda^{-1} x) \equiv 0$ , falls  $2^{-m} \epsilon > \lambda R$ . Sei  $m_\lambda \in \mathbb{N}$  mit  $2^{-m_\lambda} \epsilon > \lambda R > 2^{-(m_\lambda+1)} \epsilon$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} &\left| \lambda^{\delta'} \int d^n x T(\lambda x) \varphi(x) \right| \\ &= \sum_{m=m_\lambda}^{\infty} \lambda^{\delta'-n} \left| \int d^n x {}^0 T(x) (\theta(2^m x) - \theta(2^{m+1} x)) \varphi(\lambda^{-1} x) \right| \\ &= \sum_{m=m_\lambda}^{\infty} \lambda^{\delta'-n} 2^{-mn} \left| \int d^n x {}^0 T(2^{-m} x) (\theta(x) - \theta(2x)) \varphi(\lambda^{-1} 2^{-m} x) \right|, \end{aligned}$$

wenn  $\delta' > \delta'' > \delta$ ,

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{m=m_\lambda}^{\infty} \lambda^{\delta'-n} 2^{-mn} c 2^{-m\delta''} \|(\theta(x) - \theta(2x)) \varphi(\lambda^{-1} 2^{-m} x)\|_P \\ &\leq c' \lambda^{\delta'-n} \frac{2^{-m_\lambda(n-\delta'')}}{1 - 2^{-(n-\delta'')}} \\ &\leq \left(\frac{2R}{\epsilon}\right)^{n-\delta''} c'' \lambda^{\delta'-n+n-\delta''} \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

mit Konstanten  $c, c', c''$ . Damit ist der Skalengrad von  $T$  gleich  $\delta$ , und der Satz ist bewiesen.  $\square$

Wenn der Skalengrad größer oder gleich der Raumdimension ist, d.h. die singuläre Ordnung  $\omega$  ist größer oder gleich Null, läßt sich mit (1.9) immer noch eine Fortsetzung konstruieren, wenn die Testfunktionen bis zum Grade  $\omega$  bei 0 verschwinden. Eine Fortsetzung im allgemeinen Fall bekommt man, indem man eine Projektion in diesen Unterraum vorschaltet und anschließend (1.9) anwendet. Die naive Idee, diese Projektion durch Subtraktion der ersten  $\omega$  Taylorterme bei Null zu erhalten, muß etwas abgewandelt werden, da man durch die Addition eines Polynoms den Raum  $\mathcal{D}$  verläßt. Wir formulieren eine entsprechende Projektion in

**Definition 2 (Die  $W$ -Operation).** Sei  $\mathcal{D}^\omega(\mathbb{R}^n)$  der Raum aller Testfunktionen, die bis zum Grade  $\omega$  bei 0 verschwinden. Ein Operator, der Testfunktionen aus  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  auf den Unterraum  $\mathcal{D}^\omega(\mathbb{R}^n)$  abbildet, ist durch  $W_{(\omega;w)}$  gegeben:

$$\begin{aligned} W_{(\omega;w)} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{D}^\omega(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \rightarrow W_{(\omega;w)} \varphi \\ (W_{(\omega;w)} \varphi)(x) &= \varphi(x) - w(x) \sum_{|\alpha| \leq \omega} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \left( D^\alpha \frac{\varphi}{w} \right)(0) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Hierbei ist  $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  beliebig, mit  $w(0) \neq 0$ .

Daß  $W_{(\omega;w)}\varphi \in \mathcal{D}^\omega(\mathbb{R}^n)$  ist, sieht man durch Ausklammern von  $w$  in (1.10). Der Taylorrest von  $\varphi/w$  geht dann gerade wie  $x^\beta$ ,  $|\beta| = \omega + 1$ , bei Null. Da  $W_{(\omega;w)}\varphi \in C^\infty$ , existieren  $\varphi_\beta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit

$$(W_{(\omega;w)}\varphi)(x) = \sum_{|\beta|=\omega+1} x^\beta \varphi_\beta(x). \quad (1.11)$$

Die W-Operation hat die schöne Eigenschaft:

$$W_{(\omega;w)}w\varphi = wW_{(\omega;1)}\varphi. \quad (1.12)$$

Mit  $(D^\alpha x^\gamma)(0) = \gamma! \delta_\alpha^\gamma$  gilt für  $|\gamma| \leq \omega$ :

$$W_{(\omega;w)}w x^\gamma = wW_{(\omega;1)}x^\gamma = w(x) \left( x^\gamma - \sum_{|\alpha| \leq \omega} \frac{x^\alpha}{\alpha!} (D^\alpha x^\gamma)(0) \right) \equiv 0. \quad (1.13)$$

Jetzt sind alle Vorbereitungen getroffen, um auch die Fortsetzung im anderen Fall zu konstruieren. Diese beschreiben wir im folgenden

**Satz 2.** Sei  ${}^0T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  mit Skalengrad  $\delta \geq n$ . Sei  $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $w(0) \neq 0$ , und seien  $C^\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha$  Multiindex,  $|\alpha| \leq \omega$  gegeben. Dann gibt es genau eine Distribution  $T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  mit Skalengrad  $\delta$  und den Eigenschaften:

- I.  $\langle T', \varphi \rangle = \langle {}^0T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ,
- II.  $\langle T', w x^\alpha \rangle = C^\alpha$ .

Es ist:

$$\langle T', \varphi \rangle = \langle T, W_{(\omega;w)}\varphi \rangle + \sum_{|\alpha| \leq \omega} \frac{C^\alpha}{\alpha!} \left( D^\alpha \frac{\varphi}{w} \right) (0). \quad (1.14)$$

Hierbei ist  $T$  durch (1.9),  $W_{(\omega;w)}$  durch (1.10) gegeben und  $\omega$  die singuläre Ordnung von  ${}^0T$ .

*Beweis.* Seien die beiden Summanden in (1.14) mit  $T'_1$  und  $T'_2$  bezeichnet. Zu I: Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  ist die W-Operation die Identität und es gilt:

$$\langle T', \varphi \rangle = \langle T'_1, \varphi \rangle = \langle T, W_{(\omega;w)}\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle = \langle {}^0T, \varphi \rangle,$$

da  $T'_2$  gleich Null.

Zu II: Die Behauptung folgt direkt aus (1.13).

Zur Bestimmung des Skalengrades: Wir betrachten den Fall, daß  $w \equiv 1$  in einer Umgebung des Ursprungs. Der allgemeine Fall unterscheidet sich nur durch einen Term  $P(\partial)\delta$ , wobei  $P$  ein Polynom mit  $\text{Grad } P \leq \omega$  ist, d.h. dieser Term hat höchstens Skalengrad  $\delta$ . Dann ist  $T'_2 = \sum_{|\alpha| \leq \omega} \frac{C^\alpha}{\alpha!} \delta^{(\alpha)}$  mit Skalengrad

kleiner gleich  $\delta$ . Wir bestimmen den Skalengrad von  $T'_1$ . Sei  $\varphi^\lambda := \lambda^{-n} \varphi(\lambda^{-1}x)$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} (W_{(\omega;w)}\varphi^\lambda)(x) &= \lambda^{-n} \left( \varphi(\lambda^{-1}x) - w(x) \sum_{|\alpha| \leq \omega} \frac{(\lambda^{-1}x)^\alpha}{\alpha!} (D^\alpha \varphi)(0) \right) \\ &= (W_{(\omega;w)}\varphi)^\lambda(x) + \lambda^{-n} (w(\lambda^{-1}x) - w(x)) \sum_{|\alpha| \leq \omega} \frac{(\lambda^{-1}x)^\alpha}{\alpha!} (D^\alpha \varphi)(0). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Es gilt:

$$\langle T'_1, \varphi^\lambda \rangle = \langle T, W_{(\omega;w)}\varphi^\lambda \rangle.$$

Nach Einsetzen von (1.15) betrachten wir den ersten Term. Mit (1.11) folgt

$$\begin{aligned} \lambda^{\delta'} \langle T, (W_{(\omega;w)}\varphi)^\lambda \rangle &= \lambda^{\delta' - n - \omega - 1} \sum_{|\beta| = \omega + 1} \int d^n x T(x) x^\beta \varphi_\beta(\lambda^{-1}x) \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{0}, \end{aligned}$$

falls  $\delta' > \delta$ , da  $Tx^\beta$  eindeutige Fortsetzung von  ${}^0Tx^\beta$  mit Skalengrad  $\delta - \omega - 1 = \delta - [\delta] + n - 1 < n$  ist. Zur Abschätzung des Skalenverhaltens des zweiten Terms benutzen wir

$$\begin{aligned} w(x) - w(\lambda x) &= \int_\lambda^1 dt \frac{d}{dt} w(tx) \\ &= \int_\lambda^1 dt x^\mu (\partial_\mu w)(tx) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\left| \int d^n x {}^0T(\lambda x) \int_\lambda^1 dt (\partial_\mu w)(tx) x^\mu x^\alpha \right| \\ &= \lambda^{-1 - |\alpha|} \left| \int_\lambda^1 dt t^{-n} \int d^n x {}^0T(\lambda t^{-1}x) (\lambda t^{-1}x)^{\mu + \alpha} (\partial_\mu w)(x) \right| \\ &\leq c \lambda^{-1 - |\alpha|} \left| \int_\lambda^1 dt t^{-n} \left( \frac{\lambda}{t} \right)^{-\delta' + 1 + |\alpha|} \right|, \text{ falls } \delta' > \delta \\ &= c \lambda^{-\delta'} \begin{cases} \frac{1 - \lambda^{\delta' - n - |\alpha|}}{\delta' - n - |\alpha|}, & \text{falls } \delta' - n - |\alpha| > 0, \\ |\ln \lambda|, & \text{falls } \delta' - n - |\alpha| > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Der Skalengrad des zweiten Terms ist  $\delta$ . □

Wenn wir im folgenden die Konvention benutzen, daß  $W_{(-m; \cdot)} = \text{id}$ , für  $m \in \mathbb{N}$ , dann können wir die Unterscheidung von  $T'$  und  $T$  aus Satz 2 vernachlässigen.

**Beispiel 5 (Die Fortsetzung von  $\Delta_F^n$ ).** Die  $n$ -te Potenz des Feynmanpropagators  $(i\Delta_F)^n(x) = \theta(x^0)\Delta_+^n(x) + \theta(-x^0)\Delta_+^n(-x)$  ist Distribution auf  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ . Wir bestimmen den Skalengrad von  $\Delta_+^n$ .

$$\begin{aligned}\Delta_+^n(\lambda x) &= (2\pi)^{-3n} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}_i}{2\omega_{\mathbf{p}_i}} e^{\sum_{i=1}^n (-i\omega_{\mathbf{p}_i}\lambda x^0 + i\mathbf{p}_i\lambda\mathbf{x})} \\ &= \lambda^{-2n} (2\pi)^{-3n} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}_i}{2\sqrt{(\lambda m)^2 + \mathbf{p}_i^2}} e^{\sum_{i=1}^n (-i\sqrt{(\lambda m)^2 + \mathbf{p}_i^2}x^0 + i\mathbf{p}_i\mathbf{x})} \\ &= \lambda^{-2n} \Delta_+^n(x, \lambda m) \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-2n} D_+^n(x).\end{aligned}$$

Der Skalengrad ist  $2n$ . Die Fortsetzung ergibt sich durch Anwendung der  $W$ -Operation mit  $\omega = 2n - 4$ .

**Beispiel 6 (Die Selbstenergie des Elektrons).** In der Elektrostatik ist das elektrische Potential eines Elektrons am Ursprung durch die Greensche Funktion der Laplace-Gleichung in 3 Dimensionen gegeben:

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= -4\pi\rho = 4\pi e\delta \\ \Rightarrow \phi &= -\frac{e}{r} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).\end{aligned}$$

Das elektrische Feld ist

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\frac{e}{r^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Da  $\text{sing supp}(\mathbf{E}) = \{0\}$ , gilt:

$$\mathbf{E}^2 = \frac{e^2}{r^4} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

Die singuläre Ordnung ist 1.  $\Rightarrow$  Mit der  $W$ -Operation existiert eine Fortsetzung auf alle Testfunktionen, und die Energiedichte  $U = \mathbf{E}^2$  kann definiert werden.

$$\langle U, \varphi \rangle := \langle \mathbf{E}^2, W_{(1;w)}\varphi \rangle. \quad (1.16)$$

Für ein ruhendes Elektron ist die Selbstenergie  $E = 1/(4\pi) \langle U, 1 \rangle$ . Wegen hinreichender Infrarotkonvergenz ist die Wahl von  $\varphi \equiv 1$  und auch  $w \equiv 1$  in (1.16) möglich. Es gilt

$$E = \frac{1}{4\pi} \langle U, W_{(1;1)}1 \rangle + C^0 = C^0.$$

Die Konstante  $C^0$  kann aus der Forderung bestimmt werden, daß die Masse des Elektrons rein elektromagnetischer Natur ist, d.h.

$$E = mc^2.$$

## 1.2 Freie Skalare Quantenfeldtheorie

Im folgenden betrachten wir das freie skalare massive Feld  $\phi$ , das die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt.

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (1.17)$$

Eine Lösung der Gleichung im ganzen Raum ist durch ihre Cauchydaten eindeutig bestimmt. Sei

$$\phi(0, \mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x}), \quad (\partial_0\phi)(0, \mathbf{x}) = \phi_b(\mathbf{x}), \quad (1.18)$$

auf der Cauchyfläche  $t = 0$ , dann ist  $\phi$  gegeben durch:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = - \int d^3\mathbf{y} [(\partial_0\Delta)(t, \mathbf{x} - \mathbf{y})\phi_a(\mathbf{y}) + \Delta(t, \mathbf{x} - \mathbf{y})\phi_b(\mathbf{y})]. \quad (1.19)$$

Hierbei ist  $\Delta$ , die Kommutatorfunktion, eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung mit der Randbedingung

$$\Delta(0, \mathbf{x}) = 0, \quad (\partial_0\Delta)(0, \mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}). \quad (1.20)$$

Die Klein-Gordon-Gleichung ist Bewegungsgleichung zu folgender Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x) - \frac{m^2}{2}\phi^2(x) \quad (1.21)$$

Die zu den Feldern kanonisch konjugierten Impulse berechnen sich wie folgt:

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}_0(x)}{\partial\dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x) \quad (1.22)$$

Bis hierhin ist das Vorgehen klassisch.

### 1.2.1 Quantisierung

Um die Theorie kanonisch zu quantisieren, verlangen wir folgende gleichzeitige Vertauschungsrelationen:

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] = 0 \quad (1.23)$$

$$[\dot{\phi}(t, \mathbf{x}), \dot{\phi}(t, \mathbf{y})] = 0 \quad (1.24)$$

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \dot{\phi}(t, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.25)$$

Gleichung (1.25) erfordert, daß  $\phi$  eine Distribution ist. Alle Gleichungen sind somit im Sinne von Distributionen zu verstehen. Der Kommutator  $[\phi(x), \phi(y)]$  muß für beliebige Zeiten die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen. Da er auf der Cauchyfläche  $t = \text{const.}$  durch (1.23) und (1.25) festgelegt ist, gilt daher:

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^4. \quad (1.26)$$

Die Distribution  $\Delta$  hat folgende Trägereigenschaften:  $\text{supp}(\Delta) = \overline{V}_+ \cup \overline{V}_-$ .

### 1.2.2 Die Zweipunktfunktion

Die Zweipunktfunktion  $\Delta_+$  ist wie folgt definiert:

$$\Delta_+(x-y) := \omega_2(x,y) = (\Omega, \phi(x)\phi(y)\Omega) \quad (1.27)$$

Mit der Kommutatorfunktion  $\Delta$  besteht folgender Zusammenhang:

$$-i\Delta(x) = \Delta_+(x) - \Delta_+(-x) \quad (1.28)$$

Mit der Zweipunktfunktion lassen sich die Wickprodukte wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} :1: &= 1, \\ :\phi(x): &= \phi(x), \\ :\phi(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n): &= \phi(y) :\phi(x_1)\cdots\phi(x_n): + \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \Delta_+(y-x_i) :\phi(x_1)\cdots\phi(x_i)\cdots\phi(x_n):. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Das Wick'sche Theorem ist die rekursive Anwendung von (1.29) auf ein Produkt von Feldoperatoren:

$$\begin{aligned} \phi(x_1)\cdots\phi(x_n) &= :\phi(x_1)\cdots\phi(x_n): + \\ &\quad + \sum_{\text{Paare}(i,j)} \Delta_+(x_i-x_j) :\phi(x_1)\cdots\phi(x_i)\cdots\phi(x_j)\cdots\phi(x_n): + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \sum_{\text{Paare}(i,j)\cdots(k,l)} \Delta_+(x_i-x_j)\cdots\Delta_+(x_k-x_l) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Eine weitere wichtige Distribution, die man aus  $\omega_2$  konstruieren kann, ist die zeitgeordnete Zweipunktfunktion oder auch Feynmanpropagator:

$$i\Delta_F(x-y) = \theta(x^0-y^0)\Delta_+(x-y) + \theta(y^0-x^0)\Delta_+(y-x) \quad (1.31)$$

Der Feynmanpropagator ist eine Fundamentallösung der Klein-Gordon-Gleichung. Es ist nicht a priori klar, daß das punktweise Produkt der beiden Distributionen in (1.31) wohldefiniert ist. Dies läßt sich aber beweisen.<sup>7</sup>

### 1.2.3 Der Fockraum

Die durch die Relationen

$$f \rightarrow \phi(f), \quad (1.32)$$

$$\phi^*(f) = \phi(\bar{f}), \quad (1.33)$$

$$\phi((\square + m^2)f) = 0, \quad (1.34)$$

$$[\phi(f), \phi(g)] = i(\Delta * g)(f) \quad (1.35)$$

<sup>7</sup>In [RS75] findet man einen Beweis mithilfe der mikrolokalen Analysis. Als Fortsetzungsproblem von Distributionen kann dies aber auch viel leichter gezeigt werden, siehe Beispiel 5, Seite 13.

bestimmte  $*$ -Algebra  $\mathcal{A}$  besitzt eine treue Darstellung im Fockraum

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n.$$

Hierbei ist

$$\mathcal{H}_n = \left\{ \psi_n : H_m^{\times n} \xrightarrow{\text{symm.}} \mathbb{C}, \|\psi_n\|^2 = \int \prod_{i=0}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2\omega_{\mathbf{p}_i}} \|\psi_n(p_1, \dots, p_n)\|^2 < \infty \right\}$$

der bosonische  $n$ -Teilchen Hilbertraum. Die Symmetrie bezieht sich auf die Vertauschung der Argumente in  $\psi_n$ , und

$$H_m = \{p \in \mathbb{R}^4, p^2 = m^2, p_0 > 0\}$$

ist die Massenschale. Die Nullkomponente auf der Massenschale ist hier und im folgenden mit

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (1.36)$$

bezeichnet.

Es existiert eine unitäre Darstellung der Poincaré-Gruppe auf  $\mathcal{H}$ .

$$(U(x)\psi)_n(p_1, \dots, p_n) = e^{i \sum_{k=0}^n p_k x} \psi_n(p_1, \dots, p_n), \quad (1.37)$$

$$(U(\Lambda)\psi)_n(p_1, \dots, p_n) = \psi_n(\Lambda^{-1}p_1, \dots, \Lambda^{-1}p_n). \quad (1.38)$$

Als nächstes definieren wir die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Der Vernichter ist

$$a(f) : \mathcal{H}_{n+1} \rightarrow \mathcal{H}_n, \quad (1.39)$$

$$(a(f)\psi)_n(p_1, \dots, p_n) = \sqrt{n+1} \int \prod_{i=0}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2\omega_{\mathbf{p}_i}} \bar{f}(p) \psi_{n+1}(p, p_1, \dots, p_n). \quad (1.40)$$

Der Erzeuger  $a^*$  ist der adjungierte Operator zu  $a$ :

$$a^*(f) : \mathcal{H}_{n-1} \rightarrow \mathcal{H}_n, \quad (1.41)$$

$$(a^*(f)\psi)_n(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(p_k) \psi_{n-1}(p_1, \dots, \cancel{p_k}, \dots, p_n), & n \geq 1. \end{cases} \quad (1.42)$$

Mit dieser Definition gelten die Vertauschungsrelationen:

$$[a(f), a(g)] = [a^*(f), a^*(g)] = 0, \quad [a(f), a^*(g)] = (f, g). \quad (1.43)$$

Die Algebra  $\mathcal{A}$  wird auf dem Fockraum  $\mathcal{H}$  durch die Zerlegung

$$\phi(f) = a(f_-) + a^*(f_+), \quad (1.44)$$

$$f_-(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4 x \bar{f}(x) e^{ipx}, \quad (1.45)$$

$$f_+(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4 x f(x) e^{ipx} \quad (1.46)$$

dargestellt. Hierbei ist  $p \in H_m$ . Das Einsetzen von (1.44) verifiziert die algebraischen Relationen (1.32) bis (1.35). Der Vakuumvektor

$$\Omega \in \mathcal{H}, \quad \Omega_0 = 1, \quad \Omega_n = 0, \forall n > 0, \quad (1.47)$$

ist invariant unter den unitären Operationen der Poincaré-Gruppe:

$$U(x)\Omega = \Omega, \quad U(\Lambda)\Omega = \Omega. \quad (1.48)$$

Das Vakuum wird vom Vernichter vernichtet, der Erzeuger  $a^*(f)$  erzeugt ein Teilchen mit Wellenfunktion  $f \in \mathcal{H}_1$ :

$$a(f)\Omega = 0, \quad a^*(f)\Omega = f. \quad (1.49)$$

Der Kommutator (1.43) wird auch in der Form

$$[a(\mathbf{p}), a^*(\mathbf{q})] = 2\omega_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

geschrieben, mit Erzeugern  $a^*(\mathbf{p})$  und Vernichtern  $a(\mathbf{p})$  zu scharfem Impuls  $p$ . Tatsächlich hat der Operator  $a(\mathbf{p})$  gar kein Adjungiertes auf  $\mathcal{H}$ . Diese Ausdrücke sind immer im Sinne von Distributionen zu verstehen.

## Kapitel 2

# Die Methode von Epstein und Glaser

In diesem Kapitel soll die kausale Störungstheorie erläutert werden. Die Idee, daß die  $S$ -Matrix im wesentlichen durch Kausalität bestimmt ist, geht auf BOGOLIUBOV zurück und stammt schon aus den fünfziger Jahren [BS76]. Die komplette störungstheoretische Konstruktion ist erstmals 1973 in der Arbeit von EPSTEIN und GLASER [EG73] durchgeführt worden (s.a. [Sch95]). Die Methode beruht auf einem rekursiven Verfahren, welches aus wenigen Axiomen hervorgeht. Im folgenden werde ich eine Weiterentwicklung dieses Verfahrens vorstellen, welches von STORA und FREDENHAGEN stammt [Sto93, SP, Fre].

### 2.1 Woher stammen die UV-Divergenzen in der QFT?

In der Quantenfeldtheorie spielen die sogenannten zeitgeordneten Produkte eine wesentliche Rolle. Dabei wird der Zeitordnungsoperator  $T$  wie folgt definiert:

$$TA(x)A(y) := \theta(x^0 - y^0)A(x)A(y) + \theta(y^0 - x^0)A(y)A(x) \quad (2.1)$$

Diese Definition ist sicherlich sinnvoll, solange  $A$  eine Funktion ist. In der herkömmlichen Formulierung der QFT, wie sie in praktisch allen Lehrbüchern zu finden ist,<sup>1</sup> wird sie auch kommentarlos auf den Fall übertragen, wenn  $A$  eine Distribution ist. Solange die singulären Träger von zwei Distributionen disjunkt sind, ist das punktweise Produkt aber immer noch wohldefiniert.<sup>2</sup> Normalerweise wird die  $S$ -Matrix dann so definiert:

$$\begin{aligned} S &= Te^{-i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n T \mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \cdots \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Hierbei ist das  $T$ -Produkt gerade die Verallgemeinerung von Definition (2.1) auf  $n$  Faktoren. Da  $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$  ein Wickpolynom ist, hat  $\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \cdots \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n)$  gerade

---

<sup>1</sup>Eine Ausnahme bildet das Buch von SCHARF [Sch95]. Dort wird QED mit dem Verfahren von EPSTEIN und GLASER gerechnet.

<sup>2</sup>Theorem IX.42 in [RS75]

dort singulären Träger, wo mindestens zwei Punkte zusammenfallen. Dies ist aber auch der singuläre Träger der  $\theta$ -Funktionen im  $T$ -Produkt. In diesem Fall ist (2.2) nicht wohldefiniert und führt auf die bekannten Ultraviolettdivergenzen in der QFT.

Für nicht zusammenfallende Punkte ist (2.1) allerdings ein wohldefinierter Ausdruck. Es ist daher zu erwarten, daß die richtige Fortsetzung auf zusammenfallende Punkte eine wohldefinierte  $S$ -Matrix ergibt. Dies leistet die induktive Konstruktion von EPSTEIN- und GLASER.

## 2.2 Die induktive Konstruktion

Um für die wechselwirkende Theorie Übergangswahrscheinlichkeiten ausrechnen zu können, gehen wir davon aus, daß die Wechselwirkung adiabatisch an und abgeschaltet wird, so daß das Feld in sehr früher und sehr später Zeit der freien Klein-Gordon-Gleichung genügt. Dann läßt sich die  $S$ -Matrix als formale Potenzreihe schreiben.

$$S(g) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n T_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) \quad (2.3)$$

Sie ist eine operatorwertige Distribution aus  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ . Die Testfunktion  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  spielt die Rolle der Kopplungs„konstanter“. Die  $T_n$  heißen zeitgeordnete  $n$ -Punkt-Funktionen.

Für die folgenden Betrachtungen ist es nützlich ein paar vereinfachende Schreibweisen einzuführen. Sei  $N = \{1, \dots, n\}$ ,  $I \subseteq N$ , und  $I^c$  das Komplement von  $I$  in  $N$ .

$$I \cup I^c = N \quad I \cap I^c = \emptyset \quad (2.4)$$

Dann bezeichne  $T_{|I|}(I) = T_{|I|}(x_i, i \in I)$ . Weiterhin sei  $\bar{V}_+(I) = \bigcup_{i \in I} \bar{V}_+(x_i)$ , und entsprechend  $\bar{V}_-(I)$ . Für die kausalen Beziehungen der Punkte  $x_i$  benutzen wir folgende Abkürzungen:

$$x \gtrsim y \Leftrightarrow x \notin \bar{V}_-(y) \quad I \gtrsim J \Leftrightarrow x_i \notin \bar{V}_-(J) \quad (2.5)$$

$$x \lesssim y \Leftrightarrow x \notin \bar{V}_+(y) \quad I \lesssim J \Leftrightarrow x_i \notin \bar{V}_+(J) \quad (2.6)$$

$$x \sim y \Leftrightarrow x \gtrsim y \cap x \lesssim y \Leftrightarrow (x - y)^2 < 0 \quad (2.7)$$

$$I \sim J \Leftrightarrow I \gtrsim J \cap I \lesssim J \Leftrightarrow (x_i - y_j)^2 < 0 \quad \forall i \in I \subseteq N, \forall j \in J \subseteq N. \quad (2.8)$$

Mit der Konvention  $T(\emptyset) = 1$  lassen sich die Axiome formulieren, aus denen die  $T_n$  rekursiv bestimmbar sind.

### 2.2.1 Die Axiome

Die  $T_n$  sind operatorwertige Distributionen im Fockraum.

#### 1. Induktionsanfang

$$T_1(x) = \mathcal{L}_{\text{int}}(x).$$

## II. Symmetrie

$$T_n(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) = T_n(x_1, \dots, x_n), \quad \forall \pi \in S_n.$$

## III. Kausalität

$$T_n(N) = T_{|I|}(I) T_{|I^c|}(I^c), \text{ falls } I \gtrsim I^c.$$

## IV. Translationskovarianz

$$U(a)T_n(x_1, \dots, x_n)U^{-1}(a) = T_n(x_1 + a, \dots, x_n + a).$$

## V. Lorentzkovarianz

$$U(\Lambda)T_n(x_1, \dots, x_n)U^{-1}(\Lambda) = T_n(\Lambda x_1, \dots, \Lambda x_n).$$

## VI. Unitarität

$$S^*(g) = S^{-1}(g).$$

Aus der Kausalität III ergibt sich folgende Konsequenz. Angenommen die Punkte in  $I$  und  $I^c$  liegen raumartig zueinander. Dann folgt wegen (2.8):

$$[T_{|I|}(I), T_{|I^c|}(I^c)] = 0, \quad I \sim I^c. \quad (2.9)$$

Für  $n = 2$  folgt aus (2.9) insbesondere, daß  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  aus der Borchersklasse des freien Feldes sein muß. Weiterhin gilt es zu prüfen, ob III eine konsistente Forderung ist. Annahme: Es existiert eine andere Aufteilung der Punkte:  $N = J \cup J^c$  mit  $J \gtrsim J^c$ . Dann gilt:

$$T_n(N) = T_{|I|}(I) T_{|I^c|}(I^c) \quad (2.10)$$

$$= T_{|I \cap J|}(I \cap J) T_{|I \cap J^c|}(I \cap J^c) T_{|I^c \cap J|}(I^c \cap J) T_{|I^c \cap J^c|}(I^c \cap J^c) \quad (2.11)$$

$$= T_{|I \cap J|}(I \cap J) T_{|I^c \cap J|}(I^c \cap J) T_{|I \cap J^c|}(I \cap J^c) T_{|I^c \cap J^c|}(I^c \cap J^c) \quad (2.12)$$

$$= T_{|J|}(J) T_{|J^c|}(J^c). \quad (2.13)$$

Zeile (2.12) folgt direkt aus  $(I \cap J^c) \sim (I^c \cap J)$  und (2.9).

Obwohl die S-Matrix für jede Wechselwirkung aus der Borchersklasse des freien Feldes konstruiert werden kann, nehme ich der Einfachheit halber eine monomiale Selbstwechselwirkung an. Die Wechselwirkungs-Lagrangedichte sei

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) =: \phi^k(x) :. \quad (2.14)$$

Die induktive Konstruktion beginnt mit dem folgenden

**Satz 3 (Theorem 0 bei Epstein und Glaser).** *Sei  $t_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{4n})$  eine translationsinvariante numerische Distribution, dann sind die punktweisen Produkte*

$$t(x_1, \dots, x_n) : \phi^{k_1}(x_1) \cdots \phi^{k_n}(x_n) :$$

*operatorwertige Distributionen auf dem invarianten Definitionsbereich*

$$D = \left\{ \sum_{l < \infty} \int \prod_{i=1}^l \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2\omega_{\mathbf{p}_i}} \varphi_l(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_l) a^*(\mathbf{p}_1) \cdots a^*(\mathbf{p}_l) \Omega, \varphi_l \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3l}) \right\}.$$

*Beweis.* Durch Einsetzen von

$$\phi^k(x) = \int d^4 y_1 \cdots \int d^4 y_{k-1} \phi(x) \phi(y_1) \cdots \phi(y_{k-1}) \delta(x - y_1) \cdots \delta(x - y_{k-1})$$

kann o.b.d.A.  $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1$  gesetzt werden. Betrachten wir zuerst die Wirkung auf das Vakuum:

$$\psi := \int d^4 x_1 \cdots \int d^4 x_n g(x_1, \dots, x_n) t(x_1, \dots, x_n) : \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) : \Omega \quad (2.15)$$

$$= c \int d^4 x_1 \cdots \int d^4 x_n g(x_1, \dots, x_n) t(x_1, \dots, x_n) \times \\ \times \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2\omega_{\mathbf{p}_i}} e^{\sum_{i=1}^n (-i\omega_{\mathbf{p}_i} x_i^0 + i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i)} a^*(\mathbf{p}_1) \cdots a^*(\mathbf{p}_n) \Omega \quad (2.16)$$

$$= \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2\omega_{\mathbf{p}_i}} \widehat{gt}(\omega_{\mathbf{p}_1}, \mathbf{p}_1; \dots; \omega_{\mathbf{p}_n}, \mathbf{p}_n) a^*(\mathbf{p}_1) \cdots a^*(\mathbf{p}_n) \Omega. \quad (2.17)$$

Da  $gt$  eine Distribution mit kompaktem Träger ist, ist  $\widehat{gt}(k) = \langle gt, e^{-ikx} \rangle = \langle t, g e^{-ikx} \rangle \in C^\infty$ , polynomial in  $k$  beschränkt. Dabei ist bei festgehaltenem Träger von  $g$  der Grad des Polynoms unabhängig von  $g$ .

Als nächstes gilt es zu zeigen, daß  $\widehat{gt}$  im Vorwärtslichtkegel schnell abfällt. Nach dem vorher gesagten ist  $|\widehat{gt}(k)| \leq c(g)(1 + |k|)^N$ . Im Vorwärtslichtkegel ist  $k_i^0 > |\mathbf{k}_i|$ , und es gilt:

$$\left| \left( \sum_{i=1}^n k_i^0 \right)^m \widehat{gt}(k) \right| = |\widehat{g^{(m)}t}(k)| \leq C_m (1 + |k|)^N,$$

mit  $g^{(m)}(x_1, \dots, x_n) = i^m (\sum_{i=1}^n \partial_0^i)^m g(x_1, \dots, x_n)$ , da  $t$  translationsinvariant ist, und daher die Summe über die Ableitung nach allen Koordinaten verschwindet. Somit folgt:  $\widehat{gt}(k)$  fällt in  $V_+^n$  schneller ab als jede Potenz von  $k$ .

$\Rightarrow \widehat{gt}(\omega_{\mathbf{p}_1}, \mathbf{p}_1; \dots; \omega_{\mathbf{p}_n}, \mathbf{p}_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n}) \Rightarrow \psi \in D$ .

Der allgemeine Fall:

$$\varphi = \int \prod_{i=1}^l \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2\omega_{\mathbf{p}_i}} \varphi_l(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_l) a^*(\mathbf{p}_1) \cdots a^*(\mathbf{p}_l) \Omega \in D,$$

mit  $\varphi_l \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3l})$ , symmetrisch. Dann gilt:

$$\psi := \int d^4 x_1 \cdots \int d^4 x_n g(x_1, \dots, x_n) t(x_1, \dots, x_n) : \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) : \varphi \\ = \sum_{k=0}^{\min\{|n-l|, l\}} c_k \int \prod_{i=1}^{n+l-2k} \frac{d^3 \mathbf{q}_i}{2\omega_{\mathbf{q}_i}} a^*(\mathbf{q}_1) \cdots a^*(\mathbf{q}_{n+l-2k}) \xi_k(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n+l-2k}) \Omega,$$

mit

$$\xi_k(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n+l-2k}) := \int \prod_{i=1}^k \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2\omega_{\mathbf{p}_i}} \widehat{gt}(q, p) \varphi_l(q', p), \\ q = (\omega_{\mathbf{q}_1}, \mathbf{q}_1; \dots; \omega_{\mathbf{q}_{n-k}}, \mathbf{q}_{n-k}) \\ q' = (\mathbf{q}_{n-k+1}, \dots, \mathbf{q}_{n+l-2k}), \\ p = (-\omega_{\mathbf{p}_1}, -\mathbf{p}_1; \dots; -\omega_{\mathbf{p}_k}, -\mathbf{p}_k).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^{n+l-2k} \omega_{\mathbf{q}_i} \right)^m \xi_k(q, q') &= \sum_{j=0}^m \int \prod_{i=1}^k \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2\omega_{\mathbf{p}_i}} \binom{m}{j} \left( \sum_{i=1}^{n-k} q_i^0 + \sum_{i=1}^k p_i^0 \right)^j \times \\ &\quad \times \widehat{gt}(q, p) \left( \sum_{i=n-k+1}^{n+l-2k} q_i^0 - \sum_{i=1}^k p_i^0 \right)^{m-j} \varphi_l(q', p). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Mit der entsprechenden Abschätzung  $\omega_{\mathbf{q}} \geq |\mathbf{q}|$  und der gleichen Argumentation wie oben, ist auch die rechte Seite von (2.18) polynomial beschränkt, und es folgt:

$$\left| \left( \sum_{i=1}^{n+l-2k} \omega_{\mathbf{q}_i} \right)^m \xi_k(q, q') \right| \leq C_m (1 + |q_i|)^N,$$

$$\Rightarrow \xi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3(n+l-2k)}) \Rightarrow \psi \in D. \quad \square$$

### 2.2.2 Annahme

Für alle  $n' < n$  existieren die zeitgeordneten Produkte  $T_{n'}(x_1, \dots, x_{n'})$  und haben die Form:

$$T_{n'}(x_1, \dots, x_{n'}) = \sum_{l, l_i \leq k} t_{n'}^{l_1 \dots l_{n'}}(x_1, \dots, x_{n'}) : \phi^{k-l_1}(x_1) \dots \phi^{k-l_{n'}}(x_{n'}) : \quad (2.19)$$

Hierbei ist  $t_{n'} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{4n'})$  eine symmetrische, translations- und lorentzinvariante numerische Distribution. Der Skalengrad von  $t_{n'}^{l_1 \dots l_{n'}}$  sei  $\sum_{i=1}^{n'} l_i$ .

### 2.2.3 Induktionsschritt

Im Induktionsschritt zeigen wir als erstes, daß  $T_n$  vollständig bestimmt ist, wenn wenigstens zwei Argumente von  $T_n$  unterschiedlich sind. Als zweites folgt dann die Fortsetzung auf zusammenfallende Punkte.

Für alle  $n < n'$  sei  $T_{n'}$  bekannt und erfülle die unter 2.2.2 gestellten Bedingungen. Seien  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^4$  und  $x_i \neq x_j$  für mindestens ein Paar  $i \neq j$ . Dann existiert eine raumartige Ebene  $E$ , die keinen Punkt  $x_k$  enthält, so daß  $x_i$  in der Zukunft und  $x_j$  in der Vergangenheit dieser Ebene liegt, für alle  $k \in N = \{1, \dots, n\}$ . Sei

$$I := \{k \in N | x_k \text{ liegt in der Zukunft von } E\} \quad (2.20)$$

Nach der Kausalität III gilt:

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = T_{|I|}(I) T_{|I^c|}(I^c). \quad (2.21)$$

Falls eine andere raumartige Ebene  $E'$  eine andere Zerlegung der Menge  $N = J \cup J^c$  mit  $J \not\approx J^c$  bewirkt, ist  $T_n$  durch (2.13) gegeben.  
 $\Rightarrow T_n$  ist wohldefiniert auf  $\mathbb{R}^{4n} \setminus D_n, D_n = \{(x, \dots, x) \in \mathbb{R}^{4n}\}$ .

Die Anwendung des Wick'schen Theorems auf (2.21) ergibt:

$${}^0T_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l, l_i \leq k} {}^0t_n^{l_1 \dots l_n}(x_1, \dots, x_n) : \phi^{k-l_1}(x_1) \cdots \phi^{k-l_n}(x_n) :, \quad (2.22)$$

mit translationsinvariantem numerischen  ${}^0t_n^{l_1 \dots l_n} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{4n} \setminus D_n)$ :

$${}^0t_n^{l_1 \dots l_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l_{ij}} C(l_{ij}) t_{|I|}^{l'_i, i \in I}(I) t_{|I^c|}^{l'_j, j \in I^c}(I^c) \prod_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \Delta_+(x_i - x_j)^{l_{ij}}, \quad (2.23)$$

$$l'_i + \sum_{j \in I^c} l_{ij} = l_i, \quad i \in I, \quad (2.24)$$

$$l'_j + \sum_{i \in I} l_{ij} = l_j, \quad j \in I^c, \quad (2.25)$$

$C(l_{ij}) =$  kombinatorischer Faktor.

Es existiert ein  ${}^0\tau_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{4n-4} \setminus \{0\})$  mit

$${}^0\tau_n(x_1 - x_2, \dots, x_{n-1} - x_n) = {}^0t_n^{l_1 \dots l_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Die Fortsetzung von  ${}^0\tau_n$  auf den Ursprung ist mit der W-Operation lösbar. Zur Bestimmung des Skalengrades von  ${}^0\tau_n$  setzen wir o.B.d.A.  $I = \{1, \dots, m\}$ . Mit den Differenzvariablen  $y_i = x_i - x_{i+1}$  folgt:

$$\begin{aligned} {}^0\tau_n(y_1, \dots, y_{n-1}) &= \sum_{l_{ij}} C(l_{ij}) \tau_m^{l'_1 \dots l'_m}(y_1, \dots, y_{m-1}) \tau_{n-m}^{l'_{m+1} \dots l'_n}(y_{m+1}, \dots, y_{n-1}) \times \\ &\quad \times \prod_{\substack{i \in \{1, \dots, m\} \\ j \in \{m+1, \dots, n-1\}}} \Delta_+^{l_{ij}} \left( \sum_{r=i}^{j-1} y_r \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Sei  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} &F(y_1, \dots, y_{m-1}, y_{m+1}, \dots, y_{n-1}) \\ &= \int d^4 y_m f(y_m) \prod_{\substack{i \in \{1, \dots, m\} \\ j \in \{m+1, \dots, n-1\}}} \Delta_+^{l_{ij}} \left( \sum_{r=i}^{j-1} y_r \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} &= \int d^4 y_m f(y_m) \int \prod_{\alpha} \frac{d^3 \mathbf{p}_{\alpha}}{2\omega_{\mathbf{p}_{\alpha}}} e^{-iy_m \sum_{\alpha} p_{\alpha} - i \sum_{s \neq m} y_s (\sum_{\alpha \in M_s} p_{\alpha})} \Big|_{p_{\alpha}^0 = \omega_{\mathbf{p}_{\alpha}}} \\ &= \int \prod_{\alpha} \frac{d^3 \mathbf{p}_{\alpha}}{2\omega_{\mathbf{p}_{\alpha}}} \hat{f} \left( \sum_{\alpha} p_{\alpha} \right) e^{-i \sum_{s \neq m} y_s (\sum_{\alpha \in M_s} p_{\alpha})} \Big|_{p_{\alpha}^0 = \omega_{\mathbf{p}_{\alpha}}}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

mit  $\alpha = (i, j, v)$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{m+1, \dots, n-1\}$ ,  $v = 0, \dots, l_{ij}$  und  $M_s = \{\alpha, i < s < j\}$ .

Da  $f \in \mathcal{D} \Rightarrow F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n-4})$ , und (2.26) ist eine wohldefinierte Distribution. Für die Skalierung von  $F$  wird in (2.27)  $\Delta_+(y)$  durch  $\Delta_+(\lambda y)$  ersetzt. Das ergibt:

$$F_\lambda(y_1, \dots, y_{m-1}, y_{m+1}, \dots, y_{n-1}) = \int \prod_\alpha \frac{d^3 \mathbf{p}_\alpha}{2\omega_{\mathbf{p}_\alpha}} \hat{f}\left(\lambda \sum_\alpha p_\alpha\right) e^{-i \sum_{s \neq m} y_s (\lambda \sum_{\alpha \in M_s} p_\alpha)} \Big|_{p_\alpha^0 = \omega_{\mathbf{p}_\alpha}} \quad (2.29)$$

$$= \lambda^{-2 \sum l_{ij}} \int \prod_\alpha \frac{d^3 \mathbf{p}_\alpha}{2\sqrt{\lambda^2 + \mathbf{p}_\alpha^2}} \hat{f}\left(\sum_\alpha p_\alpha\right) e^{-i \sum_{s \neq m} y_s (\sum_{\alpha \in M_s} p_\alpha)} \Big|_{p_\alpha^0 = \sqrt{\lambda^2 + \mathbf{p}_\alpha^2}}. \quad (2.30)$$

Das Integral in (2.30) konvergiert gegen eine  $C^\infty$ -Funktion für  $\lambda \rightarrow 0$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} & \lambda^{\delta'} \int \prod_{l=1}^n d^4 y_l \tau_m^{l'_1 \dots l'_m}(\lambda y_1, \dots, \lambda y_{m-1}) \tau_{n-m}^{l'_{m+1} \dots l'_n}(\lambda y_{m+1}, \dots, \lambda y_{n-1}) \times \\ & \quad \times \prod_{\substack{i \in \{1, \dots, m\} \\ j \in \{m+1, \dots, n-1\}}} \Delta_+^{l_{ij}} \left( \lambda \sum_{r=i}^{j-1} y_r \right) f(y_m) g(y_1, \dots, y_{m-1}) h(y_{m+1}, \dots, y_{n-1}) \\ & = \lambda^{\delta'-2 \sum l_{ij}} \int \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^n d^4 y_l \tau_m^{l'_1 \dots l'_m}(\lambda y_1, \dots, \lambda y_{m-1}) \tau_{n-m}^{l'_{m+1} \dots l'_n}(\lambda y_{m+1}, \dots, \lambda y_{n-1}) \times \\ & \quad \times F_\lambda(y_1, \dots, y_{m-1}, y_{m+1}, \dots, y_{n-1}) g(y_1, \dots, y_{m-1}) h(y_{m+1}, \dots, y_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Da in (2.31) nur Distributionen mit verschiedenen Argumenten multipliziert werden, hat man es mit einem Tensorprodukt zu tun. Die Skalengrade addieren sich hier einfach. Nach Voraussetzung gilt:

$$\text{scal deg}(\tau_m^{l'_1 \dots l'_m}) = \sum_{i=1}^m l'_i, \quad (2.32)$$

$$\text{scal deg}(\tau_{n-m}^{l'_{m+1} \dots l'_n}) = \sum_{i=m+1}^n l'_i. \quad (2.33)$$

Mit (2.24) und (2.25) folgt:

$$\text{scal deg}({}^0\tau_n) = \sum_{i=1}^n l'_i + \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=m+1, \dots, n-1}} 2l_{ij} = \sum_{i=1}^n l_i. \quad (2.34)$$

$\Rightarrow$  Es existiert eine Fortsetzung von  ${}^0\tau_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{4n-4} \setminus \{0\})$  zu  $\tau_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{4n-4})$  mit Skalengrad  $\sum_{i=1}^n l_i$ . Dann ist  $t_n^{l_1 \dots l_n}(x_1, \dots, x_n) = \tau_n(x_1 - x_2, \dots, x_{n-1} - x_n)$ , und schließlich:

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l, l_i \leq k} t_n^{l_1 \dots l_n}(x_1, \dots, x_n) : \phi^{k-l_1}(x_1) \cdots \phi^{k-l_n}(x_n) :. \quad (2.35)$$

Damit ist die induktive Konstruktion fertig. Wir haben gezeigt, daß  $T_n$  die richtige Form und den richtigen Skalengrad hat.

### 2.3 Renormierbarkeit von $\phi^k$ -Theorien

Im letzten Abschnitt haben wir die störungstheoretische Konstruktion von monomial selbstwechselwirkenden skalaren Feldern durchgeführt. In jedem Schritt tritt bei der Lösung des Fortsetzungsproblems eine Unbestimmtheit in einem Polynom von  $\delta$ -Distributionen auf, dessen Grad  $r$  durch die singuläre Ordnung von  ${}^0\tau_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  gegeben ist. Diese Unbestimmtheit muß durch physikalische Bedingungen fixiert werden. Da man nicht in jeder neuen Ordnung Störungstheorie mehr physikalische Bedingungen stellen möchte, unterscheidet man zwischen drei verschiedenen Arten von Theorien:

- *renormierbar*: Der Singularitätsgrad ist in jeder Ordnung beschränkt.
- *superrenormierbar*: Der Singularitätsgrad ist nur für endlich viele Ordnungen größer gleich Null, d.h. nur endlich viele Parameter sind unbestimmt.
- *nicht renormierbar*: Der Singularitätsgrad wächst mit der Ordnung unbeschränkt an.

Dies erlaubt die Charakterisierung von  $\phi^k$ -Theorien. Mit (2.34) folgt:

$$r \leq \sum_{i=1}^n l_i - 4(n-1) \leq nk - 4n + 4,$$

da  $l_i \leq k$ . Daher gilt:

- $\phi^4$ -Theorie ist renormierbar,
- $\phi^3$ -Theorie ist superrenormierbar,
- $\phi^k$ -Theorie ist nicht renormierbar, für  $k \geq 5$ .

Auch für eine allgemeine Form der Wechselwirkung aus der ganzen Borchersklasse ist die Berechnung der Renormierbarkeit an diesem Punkt mit Hilfe der Skalengradanalyse leicht durchführbar. Die Wechselwirkung ist renormierbar, solange  $\text{scal deg}(\mathcal{L}_{\text{int}}) \leq 4$ .

## Kapitel 3

# Renormierte Distributionen als Integralkerne

Im vorherigen Kapitel ist die  $S$ -Matrix störungstheoretisch konstruiert worden. Alle Terme sind hierbei endlich. Das Vorgehen ist eindeutig bis zu dem Punkt, an dem die Fortsetzung der zeitgeordneten Funktionen auf zusammenfallende Punkte erfolgt. Tatsächlich entspricht die an diesem Punkt durchgeführte  $W$ -Operation genau der in herkömmlicher Formulierung auftretenden Renormierung. Dies kann man sehen, indem man die numerischen zeitgeordneten Funktionen, die Distributionen sind, als Grenzwert von  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen schreibt:<sup>1</sup>  $t = \lim_{m \rightarrow \infty} t^m, t^m \in \mathcal{C}^\infty$ . Dann gilt:

$$\langle t^m, W\varphi \rangle = \langle t^m, \varphi \rangle - \sum_{\alpha \leq \omega} C_\alpha \langle \delta^{(\alpha)}, \varphi \rangle,$$

mit  $C_\alpha = (-)^\alpha / \alpha! \langle t^m, w x^\alpha \rangle$ . Im Limes  $m \rightarrow \infty$  ergeben sich hier die unendlichen nicht renormierten Distributionen minus den unendlichen Countertermen, die die Differenz gerade wieder endlich machen. Dieses ist dem Vorgehen in herkömmlicher Renormierungstheorie äquivalent.

Im folgenden möchte ich die Fortsetzung auch wieder als Renormierung bezeichnen.<sup>2</sup> Sie ist durch die  $W$ -Operation auf den Testfunktionen gegeben. Allerdings hat sich in der Physik beim Rechnen mit Distributionen die Integralkern-Darstellung durchgesetzt. Jede Distribution hat unendlich viele solcher Darstellungen, z.B. als Randwert analytischer Funktionen, als Grenzwert von Testfunktionen oder als Ableitung stetiger Funktionen. Der Vorteil einer solchen Darstellung ist, daß man bei Rechnungen nicht immer die Testfunktionen „mitschleppen“ muß.

---

<sup>1</sup>EPSTEIN und GLASER führen dies explizit durch, indem sie das Maß in  $\Delta_+$ , welches durch  $\theta(p^0)\delta(p^2 - m^2)$  gegeben ist, durch ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Maß ersetzen. Dies wird z.B. durch die PAULI-VILLAR-Regularisierung erreicht. Das naive zeitgeordnete Produkt kann dann zur Berechnung der zeitgeordneten Funktionen benutzt werden, da es nur auf  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen wirkt. Wenn das Maß bei Null identisch verschwindet, kann man die Fortsetzung so fixieren, daß alle ersten  $\omega$  Ableitungen der fortgesetzten Distribution bei Impuls Null verschwinden. Läßt man das  $\mathcal{C}^\infty$ -Maß gegen das richtige Maß konvergieren, so sieht man, daß die zeitgeordneten Funktionen genau gegen die nicht renormierten plus Counterterme im BPHZ-Verfahren „konvergieren“.

<sup>2</sup>Diese Bezeichnung habe ich auch schon in der mathematischen Literatur gefunden, siehe z.B. [RS80][Kap V, Beispiel 9].

Ich werde in diesem Kapitel eine nützliche Integralkerndarstellung für die fortgesetzten Distributionen herleiten, um mit dieser die Renormierung in der QFT durchzuführen. Hierfür werde ich die durch (1.9) definierte Projektion von  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  nach  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  in dem Sinne unterschlagen, daß ich die Distribution vor und nach dieser Projektion mit dem gleichen Symbol bezeichnen werde.<sup>3</sup>

### 3.1 Die Integralkerndarstellung

Um die Abhängigkeit der Fortsetzung von der Funktion  $w$  sowie von der Zahl  $\omega$  zu verdeutlichen, benutze ich die folgende Schreibweise:

**Definition 3.** Sei  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  eine Distribution mit singulärer Ordnung  $\omega$ . Dann bestimmt sich die renormierte Distribution mit  $C^\alpha = 0$  aus Satz 2 gemäß:

$$\langle T_{R(\omega;w)}, \varphi \rangle := \langle T, W_{(\omega;w)}\varphi \rangle. \quad (3.1)$$

Sei  $T_t$  eine Familie von Distributionen, die stetig von einem reellen Parameter  $t$  abhängt, d.h.  $t \rightarrow T_t(\varphi) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ ,  $\forall \varphi$ . Wenn  $d\mu$  ein beschränktes Maß ist, dann existiert  $\int d\mu(t) T_t(\varphi)$  als Riemann'sches Integral und wir formulieren die

**Definition 4** ( [Ful89][S.83] ).

$$\left( \int d\mu(t) T_t \right) (\varphi) := \int d\mu(t) T_t(\varphi). \quad (3.2)$$

Hieraus folgt die

**Proposition 2.** Für die Integralkerndarstellung von  $T_{R(\omega;w)}w$  gilt:

$$(T_{R(\omega;w)}w)(x) = (-)^{\omega+1}(\omega+1) \sum_{|\beta|=\omega+1} D^\beta \frac{x^\beta}{\beta!} \int_0^1 dt \frac{(1-t)^\omega}{t^{n+\omega+1}} T\left(\frac{x}{t}\right) w\left(\frac{x}{t}\right). \quad (3.3)$$

*Beweis.* Die Taylorreihe von  $\varphi$  um den Ursprung lautet:

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\omega} \frac{x^\alpha}{\alpha!} (D^\alpha \varphi)(0) + (\omega+1) \sum_{|\beta|=\omega+1} \frac{x^\beta}{\beta!} \int_0^1 dt (1-t)^\omega (D^\beta \varphi)(tx), \quad (3.4)$$

somit ist  $(W_{(\omega;1)}\varphi)(x)$  das Taylor'sche Restglied der Ordnung  $\omega+1$ . Mit

$$d\mu(t) = dt, \quad (3.5)$$

$$(T_{R(\omega;w)}w)_t(x) = (-)^{\omega+1}(\omega+1) \frac{(1-t)^\omega}{t^{n+\omega+1}} \sum_{|\beta|=\omega+1} D^\beta \frac{x^\beta}{\beta!} T\left(\frac{x}{t}\right) w\left(\frac{x}{t}\right), \quad (3.6)$$

---

<sup>3</sup>Diese Projektion ist eindeutig, und daher dürfte der Verzicht auf die Unterscheidung keine Verwirrung auslösen. Dieses Vorgehen entspricht in etwa der Methode, die Funktion  $f(x) := x$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  stetig bei Null fortzusetzen, und die Fortsetzung nicht durch

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

sondern einfach durch  $f(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  zu bezeichnen.

folgt:

$$\begin{aligned} (T_{R(\omega;w)}w)_t(\varphi) &= (\omega + 1) \frac{(1-t)^\omega}{t^{\omega+1}} \int d^n x \sum_{|\beta|=\omega+1} \frac{x^\beta}{\beta!} T\left(\frac{x}{t}\right) w\left(\frac{x}{t}\right) (D^\beta \varphi)(x) \\ &= (\omega + 1)(1-t)^\omega \int d^n x \sum_{|\beta|=\omega+1} \frac{x^\beta}{\beta!} T(x)w(x)(D^\beta \varphi)(tx). \end{aligned}$$

Einsetzen in Definition 4 ergibt:

$$\begin{aligned} \int d\mu(t) (T_{R(\omega;w)}w)_t(\varphi) &= (\omega + 1) \int_0^1 dt (1-t)^\omega \int d^n x \sum_{|\beta|=\omega+1} \frac{x^\beta}{\beta!} T(x)w(x)(D^\beta \varphi)(tx) \\ &= \int d^n x T(x)w(x)(\omega + 1) \sum_{|\beta|=\omega+1} \frac{x^\beta}{\beta!} \int_0^1 dt (1-t)^\omega (D^\beta \varphi)(tx) \\ &= \langle T, wW_{(\omega;1)}\varphi \rangle, \end{aligned}$$

und nach Gleichung (1.12):

$$\begin{aligned} &= \langle T, W_{(\omega;w)}w\varphi \rangle \\ &= \langle T_{R(\omega;w)}, w\varphi \rangle \\ &= \langle T_{R(\omega;w)}w, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

Der Differentialoperator in Gleichung (3.3) ist als *schwache* Ableitung zu verstehen.

Offensichtlich ist durch die Renormierung folgendes passiert: Wir haben die Distribution  $Tw$  durch Herausziehen eines Differentialoperators der Ordnung  $\omega + 1$  in die Form  $\sum D^\beta T^\beta$  gebracht, wobei  $T^\beta$  gerade die singuläre Ordnung  $-1$  hat, und damit eine Distribution auf dem uneingeschränkten Testfunktionsraum ist.

Um diese Darstellung für die ganze Distribution zu bekommen, nehme ich jetzt eine Einschränkung für die Funktion  $w$  an.<sup>4</sup> Sei  $w(0) = 1$  und  $(D^\alpha w)(0) = 0$ , für  $|\alpha| \leq \omega$ . Dann verschwindet  $(1-w)$  bis zur Ordnung  $\omega$  bei 0. Folglich gilt:

$$W_{(\omega;w)}(1-w)\varphi = (1-w)\varphi, \quad (3.7)$$

<sup>4</sup>EPSTEIN und GLASER sowie SCHARF verwenden nur diese eingeschränkte Klasse von Funktionen. Die  $W$ -Operation hat dann wieder die einfachere Form:

$$(W_{(\omega;w)}\varphi)(x) = \varphi(x) - w(x) \sum_{|\alpha| \leq \omega} \frac{x^\alpha}{\alpha!} (D^\alpha \varphi)(0).$$

und damit

$$\langle T_{R(\omega;w)}, (1-w)\varphi \rangle = \langle T, (1-w)\varphi \rangle. \quad (3.8)$$

In diesem Fall gilt

**Lemma 1.** Sei  $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $w(0) = 1$  und  $(D^\alpha w)(0) = 0$  für  $|\alpha| \leq \omega$ . Dann hat die renormierte Distribution  $T_{R(\omega;w)}$  folgende Darstellung als Integralkern:

$$T_{R(\omega;w)}(x) = (-)^\omega (\omega + 1) \sum_{|\beta|=\omega+1} D^\beta \frac{x^\beta}{\beta!} \left[ - \int_0^1 dt \frac{(1-t)^\omega}{t^{n+\omega+1}} T\left(\frac{x}{t}\right) w\left(\frac{x}{t}\right) + \int_1^\infty dt \frac{(1-t)^\omega}{t^{n+\omega+1}} T\left(\frac{x}{t}\right) (1-w)\left(\frac{x}{t}\right) \right]. \quad (3.9)$$

*Beweis.* Der erste Summand in (3.9) ist mit (3.3) gleich  $(T_{R(\omega;w)}w)(x)$ . Mit Gleichung (3.8) genügt es zu zeigen, daß der zweite Summand gleich  $T(1-w)$  ist. Ausschmieren mit  $\varphi$  ergibt nach Definition 4

$$-(\omega + 1) \int_1^\infty dt \frac{(1-t)^\omega}{t^{n+\omega+1}} \int d^n x T\left(\frac{x}{t}\right) (1-w)\left(\frac{x}{t}\right) \sum_{|\beta|=\omega+1} \frac{x^\beta}{\beta!} (D^\beta \varphi)(x).$$

Dies ist nach (1.3) und Vertauschen der Integrationen

$$\begin{aligned} &= - \int d^n x T(x) (1-w)(x) (\omega + 1) \underbrace{\sum_{|\beta|=\omega+1} \frac{x^\beta}{\beta!} \int_1^\infty dt (1-t)^\omega (D^\beta \varphi)(tx)} \\ &= \frac{1}{\omega!} \int_1^\infty dt (1-t)^\omega \left( \frac{d}{dt} \right)^{\omega+1} \varphi(tx), \end{aligned}$$

und nach  $\omega$ -facher partieller Integration,

$$\begin{aligned} &= \int_1^\infty dt \frac{d}{dt} \varphi(tx) \\ &= -\varphi(x). \end{aligned}$$

□

In den physikalischen Anwendungen ist die Dimension  $n$  ein Vielfaches von 4. Dann können wir den Operator  $\sum_{|\beta|=\omega+1} D^\beta \frac{x^\beta}{\beta!}$  in Lemma 1 durch kovariante Ableitungen und kontravariante Koordinaten ausdrücken. Sei  $n = 4m$  und  $P(\partial, x)$  ein Polynom in Differentialoperatoren und Koordinaten, dann bezeichne  $\natural P(\partial, x) \natural$  das gleiche Polynom, bei dem alle Differentialoperatoren links von allen Koordinaten stehen. Es gilt:

$$k! \sum_{|\beta|=k} D^\beta \frac{x^\beta}{\beta!} = \natural \left( \sum_{|\beta|=1} D^\beta x^\beta \right)^k \natural = \natural (\partial_{\mu_1} x^{\mu_1} + \cdots + \partial_{\mu_m} x^{\mu_m})^k \natural, \quad (3.10)$$

$$\text{mit } x = \begin{pmatrix} x^{\mu_1} \\ \vdots \\ x^{\mu_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4m}.$$

3.1.1 Eine Wahl von  $w$ 

Für einige Betrachtungen wird sich die Bedingung  $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  als eine zu starke Einschränkung erweisen. Sei  $w_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  eine Folge mit Grenzwert  $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Die  $W$ -Operation wird auch dann eine renormierte Distribution erzeugen, wenn wir fordern, daß der  $\lim_{m \rightarrow \infty} (T_{R(\omega; w_m)} \varphi) \in \mathbb{C}$  existiert  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Ich möchte hierzu folgendes Beispiel betrachten: Sei  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  mit singulärer Ordnung  $\omega$ , und  $\text{sing supp}(T) = \{0\}$ . Dann ist die Wahl  $w(x) = \theta(1/M - |x|) =: \theta^<(x)$ ,  $M \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$ , in der  $W$ -Operation möglich. Da  $\text{sing supp}(T) \cap \text{sing supp}(\theta^<) = \emptyset$  und  $\theta^<$  kompakten Träger hat, existiert das punktweise Produkt  $\theta^< T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .<sup>5</sup> Die Distribution kann als

$$\int_{|x| < 1/M} d^n x T(x) \left( \varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leq \omega} \frac{x^\alpha}{\alpha!} (D^\alpha \varphi)(0) \right) + \int_{|x| \geq 1/M} d^n x T(x) \varphi(x) \quad (3.11)$$

geschrieben werden. Mit Lemma 1 läßt sich die Integralkernendarstellung berechnen. Unter Berücksichtigung von

$$\int_a^b dx f(x) \theta(x - c) = \theta(b - c) \left[ \theta(c - a) \int_c^b dx f(x) + \theta(a - c) \int_a^b dx f(x) \right] \quad (3.12)$$

folgt für die Integrale in (3.9):

$$\int_0^1 dt \frac{(1-t)^\omega}{t^{n+\omega+1}} T\left(\frac{x}{t}\right) \theta(1/M - |x|/t) = \theta(1/M - |x|) \int_{M|x|}^1 dt \frac{(1-t)^\omega}{t^{n+\omega+1}} T\left(\frac{x}{t}\right), \quad (3.13)$$

und

$$\int_1^\infty dt \frac{(1-t)^\omega}{t^{n+\omega+1}} T\left(\frac{x}{t}\right) \theta(|x|/t - 1/M) = \theta(|x| - 1/M) \int_1^{M|x|} dt \frac{(1-t)^\omega}{t^{n+\omega+1}} T\left(\frac{x}{t}\right). \quad (3.14)$$

Damit ergibt sich die renormierte Distribution:

$$\begin{aligned} T_{R(\omega; \theta^<)}(x) &= (-)^\omega (\omega + 1) \sum_{|\beta| = \omega + 1} D^\beta \frac{x^\beta}{\beta!} \int_1^{M|x|} dt \frac{(1-t)^\omega}{t^{n+\omega+1}} T\left(\frac{x}{t}\right) \\ &=: T_R^M(x). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Durch Manipulation des Parameters  $M$  lassen sich aus (3.15) zwei wichtige Spezialfälle herleiten: Für  $M \rightarrow 0$  folgt  $\theta^< \rightarrow 1$ , und im Falle der Existenz für  $M \rightarrow \infty$  folgt  $T_{R(\omega; \theta^<)} \rightarrow P(T)$ , wobei  $P$  den Hauptwert bezeichnet [Hör90][S.73].

<sup>5</sup>Siehe Theorem IX.42 in [RS75].  $\mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty$ ,  $\mathcal{E}'$  ist der Raum der Distributionen mit kompaktem Träger.

### 3.1.2 Die Abhängigkeit von der Skala

Für jede ganze Zahl, die größer ist als die singuläre Ordnung liefert die  $W$ -Operation eine Renormierung. Bei festgehaltener Funktion  $w(Mx)$  kann sich diese von der Renormierung mit der singulären Ordnung (minimale Renormierung) nur durch ein Polynom in Ableitungen von  $\delta$  unterscheiden. Mit der Verallgemeinerung von  $W_{(\omega;w)}$  auf negative  $\omega$  ist  $T_{R(-m,w)} = T$  für  $m \in \mathbb{N}$ .

*Bemerkung 2.* Sei  $\text{sing ord}(T) = \omega$  und  $\tau > \omega, \tau \in \mathbb{Z}$ . Es gilt:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} (T_{R(\tau;w(Mx))} - T_{R(\omega;w(Mx))}) = 0. \quad (3.16)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \langle T_{R(\tau;w(Mx))} - T_{R(\omega;w(Mx))}, \varphi \rangle &= \langle T, (W_{(\tau;w(Mx))} - W_{(\omega;w(Mx))}) \varphi \rangle \\ &= - \left\langle T, w(Mx) \sum_{\omega < |\alpha| \leq \tau} \frac{x^\alpha}{\alpha!} (D^\alpha \varphi)(0) \right\rangle \\ &= \sum_{\omega < |\alpha| \leq \tau} C^\alpha \langle \delta^{(\alpha)}, \varphi \rangle, \\ \text{mit } C^\alpha &= \frac{(-)^{|\alpha|+1}}{\alpha!} \langle T, w(Mx) x^\alpha \rangle. \end{aligned}$$

Die Skalengradschätzung liefert

$$\langle T, w(Mx) x^\alpha \rangle = M^{-n} \int d^n x T(M^{-1}x) (M^{-1}x)^\alpha w(x) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0,$$

da  $|\alpha| > \omega$ . □

Wir nennen den Parameter  $M$  Skala. Für „große Skalen“ erhalten wir die minimale Renormierung (MR). Als nächstes untersuchen wir die Abhängigkeit der Counterterme von der Skala. Eine ähnliche Rechnung ergibt:

$$M \frac{\partial}{\partial M} \langle T_{R(\omega;w(Mx))}, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq \omega} B^\alpha \langle \delta^{(\alpha)}, \varphi \rangle, \quad (3.17)$$

$$\text{mit } B^\alpha = \frac{(-)^{|\alpha|+1}}{\alpha!} \langle T, M x^\mu (\partial_\mu w)(Mx) x^\alpha \rangle. \quad (3.18)$$

Für  $w = \theta^<$  ergibt sich insbesondere

$$B^\alpha = \frac{(-)^{|\alpha|}}{\alpha!} \left\langle T, \delta \left( \frac{1}{M} - r \right) x^\alpha \right\rangle. \quad (3.19)$$

### 3.2 Die Impulsraumdarstellung und BPHZ-Renormierung

Die Fouriertransformation, abgekürzt mit  $\widehat{\phantom{x}}$ , ist eine Abbildung  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$ .<sup>6</sup> Die Fouriertransformation einer Distribution  $T$  ist erklärt als

$$\widehat{T}(\varphi) := T(\widehat{\varphi}). \quad (3.20)$$

Daher fordern wir in diesem Abschnitt:  $T \in \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ . Um die Impulsraumdarstellung herzuleiten, definieren wir zuerst die Momente

$$K^\alpha(\psi) := \int d^n x x^\alpha \psi(x), \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (3.21)$$

Sei

$$\mathcal{S}_\omega(\mathbb{R}^n) := \{\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), K^\alpha(\psi) = 0, |\alpha| \leq \omega\},$$

dann gilt:  $\psi \in \mathcal{D}^\omega \Rightarrow \check{\psi} \in \mathcal{S}_\omega$ . Wählen wir die Funktion  $w$  wie in Lemma 1, so folgt:

$$K^\alpha(\widehat{w}) = 0 \text{ für } 0 < |\alpha| \leq \omega, \quad K^0(\widehat{w}) = (2\pi)^n. \quad (3.22)$$

Eine einfache Rechnung ergibt:

$$K^\gamma(D^\alpha \widehat{w}) = (-)^{|\gamma|} \gamma! \delta_\alpha^\gamma (2\pi)^n, \quad \gamma \leq \alpha. \quad (3.23)$$

Wir berechnen die Fouriertransformierte von  $W\varphi$ :

$$(W_{(\omega;w)}\varphi)^\vee(p) = \check{\varphi}(p) - \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha| \leq \omega} \frac{(-)^{|\alpha|}}{\alpha!} (\widehat{wx^\alpha})(-p) \langle \delta^{(\alpha)}, \varphi \rangle \quad (3.24)$$

$$= \check{\varphi}(p) - \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha| \leq \omega} \frac{K^\alpha(\check{\varphi})}{\alpha!} (D^\alpha \widehat{w})(-p). \quad (3.25)$$

Unter Verwendung von (3.23) ergibt sich:

$$K^\gamma \left( (W_{(\omega;w)}\varphi)^\vee \right) = 0, \quad |\gamma| \leq \omega, \quad (3.26)$$

d.h.  $(W_{(\omega;w)}\varphi)^\vee$  ist tatsächlich die Projektion von  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_\omega$ . Mit

$$\langle \widehat{T}_{R(\omega;w)}, \check{\varphi} \rangle = \langle \widehat{T}, (W_{(\omega;w)}\varphi)^\vee \rangle \quad (3.27)$$

folgt die Integralkerndarstellung

$$\widehat{T}_{R(\omega;w)}(k) = \widehat{T}(k) - \sum_{|\alpha|=0}^{\omega} \frac{k^\alpha}{\alpha!} (D^\alpha \widehat{T}w)(0). \quad (3.28)$$

<sup>6</sup>Sei  $\mathcal{S}$  der Raum der  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen, die schneller abfallen als jede Potenz und  $\mathcal{S}'$  der zugehörige Dualraum.  $\mathcal{S}$  heißt auch Schwartzraum und die Elemente von  $\mathcal{S}'$  heißen temperierte Distributionen.

Diese Darstellung ist im Sinne von Distributionen zu verstehen, d.h. die Subtraktion auf den Testfunktionen muß vor der Verschmierung durchgeführt werden. Da diese Subtraktion fast so aussieht, wie die Renormierung im BPHZ-Verfahren, bei dem die ersten Taylortermine um den Entwicklungspunkt  $q$  abgezogen werden, stellt sich die Frage, ob es ein  $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gibt, welches auf diese Impulsraumrenormierung führt. Bezeichne

$$\widehat{T}_R^q(k) := \widehat{T}(k) - \sum_{|\alpha|=0}^{\omega} \frac{(k-q)^\alpha}{\alpha!} (D^\alpha \widehat{T})(q) \quad (3.29)$$

die BPHZ-renormierte Distribution im Impulsraum. Nach Einsetzen des Taylor'schen Restgliedes und Fouriertransformation ergibt sich:

$$T_R^q(x) = (-)^{\omega+1} (\omega+1) e^{-iqx} \sum_{|\beta|=\omega+1} D^\beta \frac{x^\beta}{\beta!} \int_0^1 dt \frac{(1-t)^\omega}{t^{n+\omega+1}} T\left(\frac{x}{t}\right) e^{i\frac{qx}{t}}, \quad (3.30)$$

und durch Vergleich mit (3.3),

$$= T_{R(\omega; e^{iqx})}. \quad (3.31)$$

Wir sehen, daß die Renormierung im BPHZ- und im Epstein-Glaser-Verfahren äquivalent sind. Über die Zusammenhänge oder Differenzen hinsichtlich der Kombinatorik kann ich hier keine Aussage machen. Weiterhin sieht man, daß die Wahl von  $w(x) \equiv 1$  dem Subtraktionspunkt  $q = 0$  entspricht. Offensichtlich ist  $e^{iqx}$  auch keine Testfunktion. Daher scheint es sinnvoll, eine größere Klasse von Funktionen für  $w$  zuzulassen.

# Kapitel 4

## Anwendungen

### 4.1 Einige Beispiele aus zweiter Ordnung Störungstheorie

Wir betrachten das selbstwechselwirkende skalare Feld. Die Lagrangedichte sei

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} : \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) : - \frac{m^2}{2} : \phi^2(x) : - \frac{\lambda^4}{4!} : \phi^4(x) : . \quad (4.1)$$

Durch den Wechselwirkungsterm ist der Induktionsanfang für die kausale Konstruktion gegeben.

$$T_1(x) = - \frac{\lambda^4}{4!} : \phi^4(x) : . \quad (4.2)$$

Aus dem Kausalitätsaxiom ergibt sich  ${}^0T_2$  für nicht zusammenfallende Punkte.

$$\begin{aligned} {}^0T_2(x_1, x_2) &= \theta(x_1 - x_2) T_1(x_1) T_1(x_2) + \theta(x_2 - x_1) T_1(x_2) T_1(x_1) \\ &= \frac{\lambda^2}{(4!)^2} [\theta(x_1 - x_2) : \phi^4(x_1) :: \phi^4(x_2) : + \theta(x_2 - x_1) : \phi^4(x_2) :: \phi^4(x_1) :], \end{aligned}$$

und nach Anwendung des Wick'schen Theorems

$$= \frac{\lambda^2}{(4!)^2} [ : \phi^4(x_1) \phi^4(x_2) : + \quad (4.3)$$

$$+ 16 \Delta_F(x_1 - x_2) : \phi^3(x_1) \phi^3(x_2) : + \quad (4.4)$$

$$+ 72 (i \Delta_F)^2(x_1 - x_2) : \phi^2(x_1) \phi^2(x_2) : + \quad (4.5)$$

$$+ 96 (i \Delta_F)^3(x_1 - x_2) : \phi(x_1) \phi(x_2) : + \quad (4.6)$$

$$+ 24 (i \Delta_F)^4(x_1 - x_2) ]. \quad (4.7)$$

Die zu den einzelnen Termen entsprechenden Feynmangraphen sind in Abbildung 4.1 dargestellt.

Im folgenden werde ich die Feynmanpropagatoren im euklidischen betrachten. Diese haben singulären Träger bei Null und können daher mit (3.15) renormiert werden.

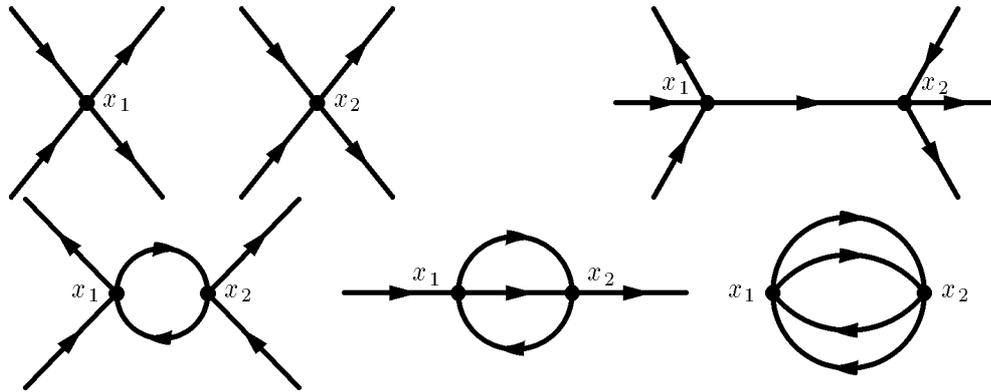


Abbildung 4.1: Die Graphen sind der Reihe nach: Der unzusammenhängende Graph (4.3), der Tree-Graph (4.4), der Ein-Loop-Beitrag zur 4-Punkt- und der Zwei-Loop-Beitrag zur Zwei-Punkt-Vertexfunktion. Der Graph (4.7) heißt Vakuum polarisation.

### 4.1.1 Die masselose Theorie

Der Propagator der euklidischen Wellengleichung (o.a. Laplacegleichung) ist:

$$D_F(x) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{x^2}. \tag{4.8}$$

Er hat die singuläre Ordnung  $-2$ . Wir bestimmen die Beiträge zur Vierpunkt- und Zweipunkt-Vertexfunktion.



#### Der Ein-Loop-Graph

Der Graph wird wegen seines Aussehens auch Fisch-Graph genannt. Hier ist  $\text{sing ord}(D_F^2) = 0$ .

$$\begin{aligned} D_F^2|_R^M(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \partial_\mu x^\mu \frac{1}{(x^2)^2} \int_1^{M\sqrt{x^2}} dt \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \partial_\mu x^\mu \frac{\ln(M^2 x^2)}{(x^2)^2}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Die Fouriertransformierte von  $D_F^2|_R^M$  kann leicht berechnet werden (siehe Anhang A.1.1).

$$\widehat{D_F^2|_R^M}(p) = \frac{1}{16\pi^2} \left( 1 - \ln \frac{p^2}{M^2} \right) \tag{4.10}$$

Hierbei ist  $\bar{M} = \frac{M}{2\gamma}$ . Da sich alle verschiedenen Lösungen nur um Vielfache der  $\delta$ -Funktion unterscheiden, muß  $M \frac{\partial}{\partial M} D_F^2|_R^M$  ein reiner Counterterm sein.

$$M \frac{\partial}{\partial M} D_F^2|_R^M(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \partial_\mu x^\mu \frac{1}{(x^2)^2}. \tag{4.11}$$

Da die singuläre Ordnung von  $\frac{x^\mu}{(x^2)^2}$  negativ ist, können wir nach Satz 1 eindeutig

$$\frac{x^\mu}{(x^2)^2} = -\frac{1}{2}\partial^\mu \frac{1}{x^2} \quad (4.12)$$

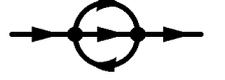
schreiben. Daher folgt:

$$\partial_\mu x^\mu \frac{x^\mu}{(x^2)^2} = -\frac{1}{2}\square \frac{1}{x^2} = 2\pi^2\delta(x), \quad (4.13)$$

$$M \frac{\partial}{\partial M} D_F^2|_R^M(x) = \frac{1}{8\pi^2}\delta(x). \quad (4.14)$$

Dies Ergebnis folgt auch durch Einsetzen in (3.19). Offensichtlich läßt sich mit geeigneter Wahl von  $M$  jeder mögliche reelle Koeffizient vor  $\delta$  erzeugen. Dieser muß durch die Renormierungsbedingungen festgelegt werden.

### Der Zwei-Loop-Graph



Dieser Graph wird auch Setting-Sun-Graph genannt. Hier ist  $\text{sing ord}(D_F^3) = 2$ .

$$\begin{aligned} D_F^3|_R^M(x) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma x^\mu x^\nu x^\sigma \frac{1}{(x^2)^3} \int_1^{M\sqrt{x^2}} dt \frac{(1-t)^2}{t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma x^\mu x^\nu x^\sigma \frac{1}{(x^2)^3} \left[ \ln(t) - 2t + \frac{t^2}{2} \right]_1^{M\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{4} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma x^\mu x^\nu x^\sigma \frac{1}{(x^2)^3} \left[ \ln(M^2 x^2) + M^2 x^2 - 4M\sqrt{x^2} + 3 \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Term zwei, drei und vier in (4.15) haben jeweils die singuläre Ordnung 0, 1 und 2. Da sie außerhalb des Ursprungs identisch Null sind, müssen sie proportional zu  $\delta$ , bzw. der ersten und zweiten Ableitung von  $\delta$  sein. Der dritte Term muß Null sein, da er paritätsinvariant ist, jedoch  $\partial\delta$  negative Parität hat. Wir berechnen die Counterterme mit Gleichung (3.19). Sei  $r := \sqrt{x^2}$ .

$$B^0 = \left\langle \frac{1}{r^6}, r\delta \left( \frac{1}{M} - r \right) \right\rangle = 2\pi^2 M^2, \quad (4.16)$$

$$B^{2,0,0,0} = \dots = B^{0,0,0,2} = \frac{1}{4}(B^{2,0,0,0} + \dots + B^{0,0,0,2}) \quad (4.17)$$

$$= \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{r^6}, r^3\delta \left( \frac{1}{M} - r \right) \right\rangle = \frac{\pi^2}{4}. \quad (4.18)$$

Daher folgt

$$M \frac{\partial}{\partial M} \frac{1}{(x^2)^3} \Big|_R^M = \frac{\pi^2}{4} \square \delta(x) + 2\pi^2 M^2 \delta(x), \quad (4.19)$$

und aus (4.15)

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma x^\mu x^\nu x^\sigma \left( \frac{1}{(x^2)^3} + \frac{M^2}{(x^2)^2} - 2M\sqrt{x^2} \right). \quad (4.20)$$

Der Vergleich liefert

$$\partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma x^\mu x^\nu x^\sigma \frac{1}{(x^2)^3} = \frac{\pi^2}{2} \square \delta(x), \quad (4.21)$$

$$\partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma x^\mu x^\nu x^\sigma \frac{1}{(x^2)^2} = 4\pi^2 \delta(x), \quad (4.22)$$

$$\partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma x^\mu x^\nu x^\sigma \frac{1}{\sqrt{x^2}} \equiv 0. \quad (4.23)$$

#### 4.1.2 Die massive Theorie

Der Propagator der massiven Theorie ist:<sup>1</sup>

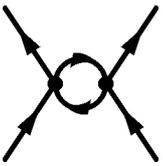
$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m K_1(m\sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2}}. \quad (4.24)$$

Da  $K_1(x) \propto 1/x$  für  $x \rightarrow 0$ , gilt auch hier:  $\omega(\Delta_F) = -2$ . Für die folgenden Rechnungen macht man in (3.15) die Substitution:

$$s = m \frac{\sqrt{x^2}}{t}, \quad dt = -m \frac{\sqrt{x^2}}{s^2} ds. \quad (4.25)$$

Das ergibt:

$$T_R^M(x) = \frac{1}{\omega!} (\partial_\mu x^\mu)^{\omega+1} \frac{1}{(m\sqrt{x^2})^{n+\omega}} \int_{m\sqrt{x^2}}^{\frac{m}{M}} ds (s - m\sqrt{x^2})^\omega s^{n-1} T(s), \quad (4.26)$$



mit  $s = m\sqrt{x^2}$ .

#### Der Ein-Loop-Graph

Hier ist  $\text{sing ord}(\Delta_F^2) = 0$ . Mit (4.26) folgt:

$$\begin{aligned} (\Delta_F^2)|_R^M(x) &= -\frac{1}{16\pi^4} \partial_\mu x^\mu \frac{1}{(x^2)^2} \int_{m\sqrt{x^2}}^{\frac{m}{M}} ds s K_1^2(s) \\ &= \frac{1}{32\pi^4} \partial_\mu x^\mu \left\{ \frac{m^2}{x^2} \left[ K_1^2(m\sqrt{x^2}) - K_0(m\sqrt{x^2}) K_2(m\sqrt{x^2}) \right] + \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2}{M^2} \frac{1}{(x^2)^2} \left[ K_1^2\left(\frac{m}{M}\right) - K_0\left(\frac{m}{M}\right) K_2\left(\frac{m}{M}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Für  $w(x) \equiv 1$  folgt  $M \rightarrow 0$ , und der zweite Summand verschwindet. Für diese Lösung soll noch einmal das Verhalten für große Skala untersucht werden. Sei

<sup>1</sup>Die wichtigsten Eigenschaften der modifizierten Besselfunktionen sind im Anhang A.3 zusammengefasst.

$r := \sqrt{x^2}$  dann folgt für großes  $M$ :

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{M^2 r^4} \left[ K_1^2 \left( \frac{m}{M} \right) - K_0 \left( \frac{m}{M} \right) K_2 \left( \frac{m}{M} \right) \right] \\ = \frac{1}{r^4} \left( 1 + \ln \left( \frac{m^2}{4M^2} \right) + 2\gamma \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^2}\right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

und entsprechend für kleine Abstände,

$$\frac{m^2}{r^2} [K_1^2(mr) - K_0(mr)K_2(mr)] = \frac{1}{r^4} \left( 1 + \ln \left( \frac{m^2 r^2}{4} \right) + 2\gamma \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (4.29)$$

Daher gilt

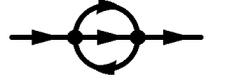
$$\left. \frac{m^2 K_1^2(mr)}{r^2} \right|_R^M = \frac{1}{2} \partial_\mu x^\mu \frac{\ln(M^2 r^2)}{r^4} + \frac{1}{2} \partial_\mu x^\mu \left( \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^4} \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^2}\right) \right) \quad (4.30)$$

$$= \frac{1}{r^4} \Big|_R^M + \left( \frac{m^2 K_1^2(mr)}{r^2} - \frac{1}{r^4} \right) \Big|_R^M \quad (4.31)$$

$$= \frac{1}{r^4} \Big|_R^M + \left( \frac{m^2 K_1^2(mr)}{r^2} - \frac{1}{r^4} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^2}\right) \delta(x) \quad (4.32)$$

Schreiben wir  $\frac{m^2 K_1^2(mr)}{r^2}$  als Reihe, so wird bei großer Skala nur der Term mit nicht negativer singulärer Ordnung renormiert, die weiteren Terme bleiben unverändert.

### Der Zwei-Loop-Graph



Formel (4.26) führt hier auf ein Integral der Form

$$\int ds (s - \text{const})^2 K_1^3(s),$$

welches ich leider nicht lösen konnte. Allerdings kann auch hier die minimale Renormierung durchgeführt werden.

$$\frac{m^3 K_1^3(mr)}{r^3} = \frac{1}{r^6} + \frac{3m^2}{4r^4} \left( \ln \left( \frac{m^2 r^2}{4} \right) + \ln(\gamma^2) - 1 \right) + R(r^2) \quad (4.33)$$

Die einzelnen Summanden werden mit ihrer singulären Ordnung renormiert. Diese ist 2, 0 und -2. Mit

$$\left. \frac{\ln \left( \frac{m^2 x^2}{4} \right)}{(x^2)^2} \right|_R^M = \frac{1}{4} \partial_\mu x^\mu \frac{\ln \left( \frac{m^4 x^2}{16M^2} \right) \ln(M^2 x^2)}{(x^2)^2} \quad (4.34)$$

nach Gleichung (3.15) und den Ergebnissen aus Abschnitt 4.1.1 folgt

$$\begin{aligned} (\Delta F^3) \Big|_{MR}^M(x) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \left\{ \frac{1}{4} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma x^\mu x^\nu x^\sigma \frac{1}{(x^2)^3} [\ln(M^2 x^2) + M^2 x^2 + 3] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3m^2}{16} \partial_\mu x^\mu \frac{1}{(x^2)^2} \left[ \ln \left( \frac{m^4 x^2}{16M^2} \right) + 2 \ln(\gamma^2) - 2 \right] \ln(M^2 x^2) + R(x^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

### 4.1.3 Vergleich mit Ergebnissen der Differentiellen Renormierung

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind teilweise unter dem Namen Differentielle Renormierung bekannt. So verwenden die Autoren in [FJL92] Ausdrücke der Form

$$\frac{1}{(x^2)^2} \Big|_R = -\frac{1}{4} \square \frac{\ln(M^2 x^2)}{x^2}. \quad (4.36)$$

Diese Ausdrücke lassen sich zwar nicht mit Formel (3.9) erzeugen, liefern aber eine Lösung des Fortsetzungsproblems, welche sich nur durch einen Counterterm von (4.9) unterscheidet (durch Umformungen wie in (4.12)). Im massiven Fall gilt Entsprechendes für [HL92] und (4.27) bzw. (A.21).

In [SZ93] finden sich die gleichen Ergebnisse für die masselose Theorie wie hier. Für die Renormierung der massiven Theorie wird in [Smi95, Smi96] allerdings ein anderes Verfahren gewählt. In [Smi96] wird die Differentielle Renormierung auch im Minkowskiraum benutzt. Alle anderen hier angegebenen Quellen beschränken sich auf euklidische Feldtheorien.

Im Vergleich hat das hier vorgestellte Verfahren zwei Vorteile:

- Die differentiell renormierten Distributionen sind die Fortsetzungen der zeitgeordneten Funktionen auf zusammenfallende Punkte in der kausalen Störungstheorie. Dies gilt in jeder Ordnung. Ein entsprechender Beweis existiert in der Differentiellen Renormierung noch nicht [LMVC94].
- Die renormierten Distributionen müssen in der Differentiellen Renormierung als Lösungen entsprechender Differentialgleichungen gefunden werden. Hier sind die Ausdrücke explizit durch Formel (3.15) bzw. (3.9) gegeben.

## 4.2 Die Renormierungsbedingungen im Ortsraum

Um die Freiheit in den renormierten zeitgeordneten Funktionen zu fixieren, stellt man Forderungen an die Vertexfunktionen  $\Gamma_n$ . Diese ergeben sich als Summe aller zeitgeordneten Funktion nach Aufintegration über die inneren Vertices zu Ein-Teilchen-Irreduziblen Graphen. Dabei kennzeichnet  $n$  die Anzahl der ein- bzw. auslaufenden Felder [ $nk - \sum_{l_i < k} l_i = n$  in Gleichung (2.22)]. Die Integration entspricht der Wahl  $g \equiv 1$  in (2.3). Es ist a priori nicht evident, daß dieser adiabatische Limes allgemein existiert. Da bis zur zweiten Ordnung keine solchen Integrationen auftreten, ist dieses Vorgehen hier jedoch unproblematisch.

Zuerst möchte ich die Renormierungsbedingungen im Impulsraum wiederholen. Ich beschränke mich hier auf die euklidische Theorie [Ram89]. Die entsprechenden Gleichungen im Minkowskiraum findet man z.B. in [IB80][Kapitel 7]. Rotationsinvarianz, sowie die Tatsache, daß keine unzusammenhängenden Graphen vorkommen, beschränkt die Anzahl der freien Konstanten in  $\phi^4$ -Theorie auf drei. Die Renormierung wird in jeder Ordnung durch drei Forderungen an  $\hat{\Gamma}_2$  und  $\hat{\Gamma}_4$  fixiert. Für einen bestimmten Wert von  $p^2 = \mu^2$  sollen alle Beiträge

verschwinden, die höher als erster Ordnung in der Kopplungskonstanten sind. Der Punkt  $\mu$  wird als Renormierungsskala bezeichnet. Da man für drei Parameter noch eine dritte Bedingung braucht, stellt man eine zusätzliche Forderung an die Ableitung von  $\widehat{\Gamma}_2$ . Die beiden Vertexfunktionen haben die Form:

$$\widehat{\Gamma}_2 = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) [p_1^2 + m^2 + \widehat{\gamma}_2(\lambda, p_1^2)], \quad (4.37)$$

$$\widehat{\Gamma}_4 = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) [-\lambda + \widehat{\gamma}_4(\lambda, s, t, u)]. \quad (4.38)$$

Hierbei sind die Mandelstamvariablen  $s = (p_1 + p_2)^2$ ,  $t = (p_1 + p_3)^2$ , und  $u = (p_1 + p_4)^2$ . Die Renormierungsbedingungen lauten:

$$\widehat{\gamma}_2(\lambda, \mu^2) = 0, \quad (4.39)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \widehat{\gamma}_2(\lambda, p^2) \right|_{p^2=\mu^2} = 0, \quad (4.40)$$

$$\widehat{\gamma}_4(\lambda, \mu^2, \mu^2, \mu^2) = 0. \quad (4.41)$$

Der Renormierungspunkt in (4.41) wird als der symmetrische Punkt bezeichnet. Die Wahl von  $p_i p_j = \mu^2 (\delta_{ij} - 1/4)$  führt auf  $s = t = u = \mu^2$ .

Die Vertexfunktionen haben im Ortsraum die Form:

$$\Gamma_2(x_1, x_2) = -\square \delta(x_1 - x_2) + m^2 \delta(x_1 - x_2) + \gamma_2(\lambda, x_1 - x_2), \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = & -\lambda \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_1 - x_4) + \\ & + \gamma_4(\lambda, x_1 - x_2, x_1 - x_3, x_1 - x_4). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Die Renormierung wird eindeutig fixiert, wenn wir verlangen, daß alle in  $\gamma_2$  und  $\gamma_4$  beitragenden numerischen Distributionen mit derselben Funktion  $w(Mx)$  renormiert werden, d.h. alle Konstanten  $C^\alpha$  in Satz 2 sind Null. Dann ist  $M$  die Renormierungsskala.

In der masselosen Theorie müssen wir die Forderung für die Konstanten  $C^0$  dahingehend abändern, daß die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial M} \gamma_2$  keinen Counterterm erzeugt, der proportional  $\delta$  ist, so daß die masselose Theorie nach der Renormierung masselos bleibt (s. nächsten Abschnitt). In zweiter Ordnung Störungstheorie ist der einzige Beitrag zu  $\gamma_2$  durch die Setting-sun (4.15) gegeben. Die obige Forderung ergibt:

$$\gamma_2(\lambda, x) \propto \partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma x^\mu x^\nu x^\sigma \frac{1}{(x^2)^3} [\ln(M^2 x^2) + 3]. \quad (4.44)$$

### 4.2.1 Minimale Subtraktion

In der dimensionalrenormierung gibt es ein weiteres Schema zur Fixierung der freien Konstanten, die Minimale Subtraktion (MS) [Ram89, ZJ96]. Die unrenormierten zeitgeordneten Produkte sind hier meromorphe Funktionen von der Dimension der Theorie, wenn diese ins Komplexe fortgesetzt wird. Die Renormierung besteht daraus, nur die Pole bei vier von diesen Funktionen abzuziehen.

Um eine Minimale Subtraktion auch hier definieren zu können, benutzen wir das Verhalten der zeitgeordneten Funktionen für große Skalen. Sei

$$(\Delta_F^2)|_R^M = (\Delta_F^2)|_R^{M'} + f(M, M') \delta. \quad (4.45)$$

Wir definieren

$$(\Delta_F^2)|_{MS}^M := (\Delta_F^2)|_R^M - \lim_{M' \rightarrow \infty} \left( f(M, M') - \frac{1}{16\pi^2} \ln \left( \frac{M^2}{M'^2} \right) \right) \delta. \quad (4.46)$$

Die Konstante vor dem Logarithmus ergibt sich durch Vergleich mit (4.32). Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.1.2 folgt:

$$(\Delta_F^2)|_{MS}^M(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^4} \partial_\mu x^\mu \left\{ \frac{m^2}{x^2} \left[ K_1^2(m\sqrt{x^2}) - K_0(m\sqrt{x^2}) K_2(m\sqrt{x^2}) \right] + \right. \\ \left. - \frac{1}{(x^2)^2} \left[ 1 + \ln \left( \frac{m^2 x^2}{4} \right) + 2\gamma \right] \right\}. \quad (4.47)$$

Dies Ergebnis ist identisch mit (4.32) abzüglich dem  $\mathcal{O}(\frac{1}{M^2})$ -Term. Entsprechend verfahren wir mit der dritten Potenz des Feynmanpropagators. Es ist

$$(\Delta_F^3)|_{MR}^M - (\Delta_F^3)|_{MR}^{M'} = \frac{1}{64\pi^4} \left\{ \frac{1}{8} \ln \left( \frac{M^2}{M'^2} \right) \square \delta + \left[ M^2 - M'^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3m^2}{4} \left( \ln \left( \frac{m^2}{4MM'} \right) + \ln(\gamma^2) - 1 \right) \ln \left( \frac{M^2}{M'^2} \right) \right] \delta \right\}. \quad (4.48)$$

Mit

$$(\Delta_F^3)|_R^M = (\Delta_F^3)|_R^{M'} + g(M, M') \square \delta + f(M, M') \delta \quad (4.49)$$

definieren wir:

$$(\Delta_F^3)|_{MS}^M := (\Delta_F^3)|_R^M - \lim_{M' \rightarrow \infty} \left( g(M, M') - \frac{1}{512\pi^4} \ln \left( \frac{M^2}{M'^2} \right) \right) \square \delta + \\ - \lim_{M' \rightarrow \infty} \left\{ f(M, M') - \frac{1}{64\pi^4} \left[ M^2 - M'^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3m^2}{4} \left( \ln \left( \frac{m^2}{4MM'} \right) + \ln(\gamma^2) - 1 \right) \ln \left( \frac{M^2}{M'^2} \right) \right] \right\} \delta \quad (4.50)$$

### 4.3 Die Renormierungsgruppen-Gleichungen

Die  $n$ -Punkt-Vertexfunktionen, die prinzipiell mit physikalisch meßbaren Observablen korreliert sind, dürfen nicht von der willkürlichen Wahl der Renormierungsskala abhängen. Eine Änderung der Skala wird daher in einer Änderung der physikalisch nicht beobachtbaren Parameter der Lagrangedichte absorbiert.<sup>2</sup> Dies wird durch die Renormierungsgruppen-Gleichungen (RG-Gleichungen) ausgedrückt:

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + m \gamma_m(g) \frac{\partial}{\partial m} - n \gamma(g) \right] \Gamma_n(x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (4.51)$$

<sup>2</sup>Hierbei betrachtet man nicht das Feld  $\phi$ , sondern einen dimensionslosen Parameter  $Z$ , so daß eine Multiplikation der Lagrangedichte mit dem Faktor  $Z$  dieselbe Bewegungsgleichung ergibt. Dies kann als Transformation  $\phi \rightarrow \sqrt{Z}\phi, \lambda \rightarrow Z^{-1}\lambda$  aufgefaßt werden.

Hierin sind

$$\beta(g, m, M) = M \frac{\partial g}{\partial M} = \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n g^n, \quad (4.52)$$

$$\gamma_m(g, m, M) = M \frac{\partial \ln m}{\partial M} = \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_{m,n} g^n, \quad (4.53)$$

$$\gamma(g, m, M) = \frac{M}{2} \frac{\partial \ln Z}{\partial M} = \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n g^n, \quad (4.54)$$

wenn man die Größen in eine Reihe um die „irrationalisierte“ Kopplungskonstante  $g = \lambda/(16\pi^2)$  entwickelt.

### 4.3.1 Im masselosen Fall

Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.1.1 möchte ich die Renormierungsgruppen-Gleichungen bis zur Ordnung  $g^2$  lösen. Mit (4.9) folgt für die 4-Punkt-Vertexfunktion:

$$\begin{aligned} \Gamma_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = & -16\pi^2 g \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_1 - x_4) + \\ & + 4g^2 \left[ \delta(x_1 - x_2) \delta(x_3 - x_4) \partial_\mu^1 (x_1^\mu - x_3^\mu) \frac{\ln(M^2(x_1 - x_3)^2)}{(x_1 - x_3)^4} + \right. \\ & \left. + 2\text{Perm.} \right] + \mathcal{O}(g^3). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Der erste Term aus (4.51) ist

$$M \frac{\partial}{\partial M} \frac{1}{2} \partial_\mu x^\mu \frac{\ln(M^2 x^2)}{(x^2)^2} = \partial_\mu x^\mu \frac{1}{(x^2)^2} = 2\pi^2 \delta(x). \quad (4.56)$$

Einsetzen in (4.51) mit  $n = 4$ , bis zur zweiten Ordnung in  $g$  ergibt:

$$[48\pi^2 g^2 - 16\pi^2 g^2 \beta_2] \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_1 - x_4) + \mathcal{O}(g^3) = 0. \quad (4.57)$$

Somit folgt<sup>3</sup>  $\beta_2 = 3$ . Für die 2-Punkt-Vertexfunktion folgt mit (4.44):

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x_1, x_2) = & -\square \delta(x_1 - x_2) + \\ & - \frac{g^2}{6\pi^2} \partial_\mu^1 \partial_\nu^1 \partial_\sigma^1 (x_1^\mu - x_2^\mu) (x_1^\nu - x_2^\nu) (x_1^\sigma - x_2^\sigma) \frac{\ln(M^2(x_1 - x_2)^2) + 3}{(x_1 - x_2)^2} + \mathcal{O}(g^3). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Mit

$$M \frac{\partial}{\partial M} \Gamma_2(x) = -\frac{g^2}{3\pi^2} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma x^\mu x^\nu x^\sigma \frac{1}{(x^2)^3} = -\frac{g^2}{6} \square \delta(x) \quad (4.59)$$

ergibt das Einsetzen in (4.51) bis zur Ordnung  $g^2$ :

$$-\frac{g^2}{6} \square \delta(x_1 - x_2) + 2\gamma_2 g^2 \square \delta(x_1 - x_2) + \mathcal{O}(g^3) = 0, \quad (4.60)$$

und damit:  $\gamma_2 = \frac{1}{12}$ .

---

<sup>3</sup>Die Bestimmung von  $\beta_2$  ist auch ohne eine explizite Integralkernardarstellung möglich, s. Anhang A.2.

### 4.3.2 Im massiven Fall

Für  $n = 4$  tragen in (4.51) bis zur Ordnung  $g^2$  nur dieselben Terme bei wie im masselosen Fall. Mit (4.27) und

$$M \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{m^2 K_1^2(m\sqrt{x^2})}{x^2} \right)_R^M = 2\pi^2 \frac{m^2}{M^2} K_1^2 \left( \frac{m}{M} \right) \delta(x) \quad (4.61)$$

folgt, daß

$$\beta_2 = 3 \frac{m^2}{M^2} K_1^2 \left( \frac{m}{M} \right), \quad (4.62)$$

und damit  $\beta_2 \rightarrow 3$ , für  $M \rightarrow \infty$ . Für große Skalen und für die Minimale Subtraktion ergibt sich für die  $\beta$ -Funktion das Ergebnis der masselosen Theorie.

Die Renormierung des Zwei-Loop-Graphen mit Minimaler Subtraktion (4.35) ergibt die Werte:

$$\gamma_2 = \frac{1}{12}, \quad (4.63)$$

$$\gamma_{m,2} = \frac{2M^2}{3m^2} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{m^2}{4M^2} \right) + \ln(\gamma) - \frac{5}{12}. \quad (4.64)$$

Die Ergebnisse für  $\beta_2$  und  $\gamma_2$  stimmen mit denen der dimensionalrenormierung im MS-Schema überein, nicht jedoch  $\gamma_2$  [Ram89]. Um hier Übereinstimmung zu erreichen, müßte Definition (4.50) verändert werden.

## 4.4 Ein Beispiel im Minkowskiraum

Im Minkowskiraum haben wir die Schwierigkeit, daß es keine lorentzinvariante Testfunktion gibt, so daß bei der Renormierung nach Gleichung (3.9), die Lorentzinvarianz zerstört wäre. Dieses Problem kann im Nachhinein behoben werden, da alle Fortsetzungen sich nur um ein Polynom in  $\delta$ -Funktionen unterscheiden. Der Raum der Lösungen ist somit ein endlichdimensionaler Vektorraum, und man sucht die Vektoren, die unter Lorentztransformationen invariant bleiben. Es kann gezeigt werden, daß solche immer existieren [SP], [Sch95][Kapitel 4.5], [Fre].

Da das Rechnen mit nicht lorentzinvarianten Objekten sehr unübersichtlich wird, und es darüber hinaus äußerst schwierig ist, eine Testfunktion zu finden, mit der die Integrale in (3.9) noch lösbar wären, werde ich diesen Weg hier nicht weiter verfolgen. Statt dessen mache ich Gebrauch von der Möglichkeit, in der massiven Theorie  $w \equiv 1$  zu setzen. Die Existenz dieser Fortsetzung ist durch die BPHZ-Renormierung garantiert, und die Lorentzinvarianz bleibt erhalten. Die renormierten masselosen Distributionen erhält man durch Anpassung der Counterterme und Limesbildung  $m \rightarrow 0$ .

Formel (3.9) liefert:

$$T_{R(\omega;1)}(x) = (-)^\omega (\omega + 1) \sum_{|\beta|=\omega+1} D^\beta \frac{x^\beta}{\beta!} \int_0^1 dt \frac{(1-t)^\omega}{t^{n+\omega+1}} T \left( \frac{x}{t} \right). \quad (4.65)$$

Mit

$$\Delta_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{mK_1\left(m\sqrt{-x^2+i\epsilon}\right)}{\sqrt{-x^2+i\epsilon}} \quad (4.66)$$

folgt für den Fisch:

$$\Delta_{F^2}|_{R(0,1)} = \frac{m^2}{16\pi^4} \partial_\mu x^\mu \int_0^1 \frac{dt}{t^3} \frac{K_1^2\left(\frac{m}{t}\sqrt{-x^2+i\epsilon t^2}\right)}{-x^2+i\epsilon t^2}. \quad (4.67)$$

Nach Definition 4 kann der Faktor  $t^2$  vor dem  $i\epsilon$  jeweils weggelassen werden. Eine Substitution wie (4.25) ergibt

$$= -\frac{1}{32\pi^4} \partial_\mu x^\mu \frac{m^2}{-x^2+i\epsilon} \left[ K_1^2\left(m\sqrt{-x^2+i\epsilon}\right) + K_0\left(m\sqrt{-x^2+i\epsilon}\right) K_2\left(m\sqrt{-x^2+i\epsilon}\right) \right]. \quad (4.68)$$

Der stetige Übergang zum masselosen Ausdruck erfordert die Addition des Counterterms

$$\frac{1}{32\pi^4} \partial_\mu x^\mu \frac{m^2}{M^2(-x^2+i\epsilon)^2} \left[ K_1^2\left(\frac{m}{M}\right) - K_0\left(\frac{m}{M}\right) K_2\left(\frac{m}{M}\right) \right] \quad (4.69)$$

zu (4.68). Im Limes  $m \rightarrow 0$  erhalten wir den renormierten masselosen Propagator zum Quadrat:

$$D_{F^2}|_R^M(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{i}{(-x^2+i\epsilon)^2} \Big|_R^M = -\frac{1}{32\pi^4} \partial_\mu x^\mu \frac{\ln(M^2(-x^2+i\epsilon))}{(-x^2+i\epsilon)^2}. \quad (4.70)$$

## 4.5 Gekrümmte Raumzeiten

In diesem Abschnitt möchte ich zeigen, wie die Methoden der differentiellen Renormierung in der kausalen Störungstheorie auf skalare Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten angewandt werden können. Tatsächlich kann die gesamte kausale Störungstheorie in streng mathematischer Weise implementiert werden. Dies wurde in [BF97] durchgeführt. Die Konstruktion benötigt allerdings Methoden der mikrolokalen Analysis. Ich werde hier das Ergebnis benutzen, daß auf global hyperbolischen Raumzeiten die induktive Konstruktion genau wie im Minkowskiraum durchgeführt werden kann.

Für die Renormierung benötigt man nur die Singularitätenstruktur der entsprechenden Distributionen. Diese sind in diversen Arbeiten untersucht worden ([Rad92, Köh95, Jun95]). Damit ist es möglich, die Renormierung ohne spezielle Kenntnis der Metrik auf allen global hyperbolischen Raumzeiten durchzuführen.

### 4.5.1 Grundlagen

Das Paar  $(\mathcal{M}, g)$  bezeichne eine Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  mit zugehöriger Metrik  $g_{ab} \in \mathcal{C}^\infty$ . Die Mannigfaltigkeit wird als global hyperbolisch angenommen. Sei  $y(\tau) \in \mathcal{M}$  ein Weg mit  $y(0) = x$  und  $y(1) = x'$ . Dann ist die Bogenlänge dieses Weges durch

$$s(y) = \int_0^1 d\tau \sqrt{g_{ab}(y(\tau)) \dot{y}^a(\tau) \dot{y}^b(\tau)} \quad (4.71)$$

gegeben. Wenn  $y(\tau)$  eine Geodäte zwischen den Punkten  $x$  und  $x'$  ist, wird die Bogenlänge extremal. In diesem Fall wird der Integrand in (4.71) unabhängig von  $\tau$ . In einer kausal normalen Umgebung sind jeweils zwei Punkte durch genau eine Geodäte verbunden, die ganz in dieser Umgebung liegt. Dann ist  $\sigma(x, x') = \frac{1}{2}s^2(x, x')$  eindeutig definiert.<sup>4</sup>

Ein Bitensor  $T_{a_1 \dots a_n a'_1 \dots a'_m}{}^{b_1 \dots b_k b'_1 \dots b'_l}(x, x')$  ist ein Tensor vom Typ  $(n, k)$  am Punkt  $x$  und ein Tensor vom Typ  $(m, l)$  am Punkt  $x'$ .<sup>5</sup> Zum Beispiel ist  $\sigma(x, x')$  ein Biskalar. Die Reihenfolge der ungestrichenen mit den gestrichenen Indices kann beliebig vertauscht werden.

Sei  $T$  ein Tensor, dann bezeichne  $T_{;a}$  die kovariante Ableitung  $\nabla_a T$ . Eine Ausnahme bildet  $\sigma$ . Hier werde ich das Semikolon weglassen, da jegliche Verwechslung mit anderen Tensoren ausgeschlossen ist. Diese Notation hat sich in der Literatur etabliert. Es gilt:

$$\sigma_a \sigma^a = 2\sigma. \quad (4.72)$$

Der Vektor  $\sigma^a \in T\mathcal{M}_x$  ist der Tangentenvektor an die Geodäte von  $x$  nach  $x'$ . Er hat die Länge  $s$  und zeigt in die Richtung  $x' \rightarrow x$ . Entsprechendes gilt für den Vektor  $\sigma^{a'}$ . Wiederholte kovariante Differentiation von (4.72) ergibt Beziehungen zwischen Kontraktionen von höheren Ableitungen von  $\sigma$ , nach einmaliger Anwendung z.B.:

$$\sigma_a{}^b \sigma^a = \sigma^b{}_a \sigma^a = \sigma^b. \quad (4.73)$$

Sei  $g = \det(g_{ab})$ . Die Van-Vleck-Morette Determinante

$$\Delta(x, x') = -\frac{1}{\sqrt{g(x)g(x')}} \det(-\sigma_{ab'}(x, x')) \quad (4.74)$$

ist ein Biskalar. Sie erfüllt die Differentialgleichung:

$$\nabla_a(\Delta \sigma^a) = 4\Delta. \quad (4.75)$$

<sup>4</sup>Da  $\sigma$  per Definition positiv ist, geben einige Autoren  $\sigma(x, x')$  ein Vorzeichen in Abhängigkeit davon, ob die Punkte  $x$  und  $x'$  raum- oder zeitartig getrennt sind (s. z.B. [Jun95]). Ich halte mich hier an [Fri75].

<sup>5</sup>Siehe hierfür den Artikel von DEWITT und BREHME über Elektrodynamik auf gekrümmter Raumzeit [DB60]. Dieser ist meines Wissens nach die erste Abhandlung über Feldtheorien auf gekrümmter Raumzeit und beinhaltet viele fundamentale Konzepte. Die im folgenden benutzten Gleichungen für  $\sigma^a$  und Verwandte werden dort hergeleitet.

Die  $\delta(x, x')$ -Funktion ist eine biskalare Dichte vom Gewicht  $-\frac{1}{2}$  an beiden Punkten. Seien  $y, y' \in \mathbb{R}^4$  lokale Koordinaten der Punkte  $x, x' \in \mathcal{M}$ , dann ist

$$\delta(x, x') \stackrel{*}{=} g^{-\frac{1}{4}}(y) g^{-\frac{1}{4}}(y') \delta(y - y'). \quad (4.76)$$

Hierbei bedeutet der Stern  $*$  über dem Gleichheitszeichen das Auswerten einer Größe auf der Mannigfaltigkeit in lokalen Koordinaten.

### 4.5.2 Das freie skalare Feld

Auf einer global hyperbolischen Raumzeit  $(\mathcal{M}, g)$  ist die freie Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square_g + m^2) \phi = 0. \quad (4.77)$$

Hierin ist  $\square_g$  der kovariante d'Alembert-Operator

$$\square_g = \nabla^a \nabla_a = g^{ab} \nabla_a \nabla_b = g^{-\frac{1}{2}} \partial_a (g^{\frac{1}{2}} g^{ab} \partial_b). \quad (4.78)$$

Jede Lösung der Gleichung ist eindeutig durch ihre Cauchydaten bestimmt.

Da man auf gekrümmten Raumzeiten wegen fehlender Lorentz- und Translationsinvarianz kein eindeutiges Kriterium für die Auswahl eines Vakuumzustandes hat, charakterisiert man den Grundzustand  $\Omega$  über die Zweipunktfunktion  $\omega_2$ . Daß die Kenntnis von lokalen Größen ausreicht, um auf die Singularitätenstruktur der Zweipunktfunktion auf der ganzen Mannigfaltigkeit zu schließen, ist von RADZIKOWSKI mithilfe der mikrolokalen Analysis entdeckt worden [Rad92]. Ich werde im folgenden ausschließlich mit dieser Struktur arbeiten. Sie hat die sogenannte Hadamard-Form. Auf einer global hyperbolischen Raumzeit existiert eine glatte globale streng monoton wachsende Zeitfunktion  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß kausal korrelierte Ereignisse eindeutig in früher und später geordnet werden können. In einer kausal normalen Umgebung von  $x$  und  $x'$  hat die Zweipunktfunktion folgende Gestalt [KW91]:

$$\omega_2(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}(x, x')}{2\sigma(x, x') + i\epsilon(T(x) - T(x'))} + v(x, x') \ln [2\sigma(x, x') + i\epsilon(T(x) - T(x'))] + w(x, x') \right). \quad (4.79)$$

Hierin sind  $v, w, \sigma$  und  $\Delta$  glatte biskalare Funktionen auf der Mannigfaltigkeit. Entwickelt man die Funktionen  $v$  und  $w$  in Potenzreihen nach  $\sigma$ ,

$$v(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, x') \sigma^n(x, x'), \quad (4.80)$$

$$w(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, x') \sigma^n(x, x'), \quad (4.81)$$

so kann man aus der Forderung, daß  $\omega_2$  die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt, Rekursionsrelationen für die  $v_n$  und  $w_n$  angeben. Während  $v$  somit eindeutig

bestimmt ist, kann  $w$  nur bis auf  $w_0$  bestimmt werden. Der Feynmanpropagator

$$\Delta_F(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}(x, x')}{2\sigma(x, x') + i\epsilon} + v(x, x') \ln(2\sigma(x, x') + i\epsilon) + w(x, x') \right) \quad (4.82)$$

ist die zeitgeordnete Zweipunktfunktion. Es gilt

$$\square_g \Delta_F(x, x') = -\delta(x, x'). \quad (4.83)$$

### 4.5.3 Renormierung der selbstwechselwirkenden Theorie

Auch auf gekrümmter Raumzeit betrachten wir die Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = -\frac{\lambda}{4!} : \phi^4(x) : =: T_1(x). \quad (4.84)$$

In [BFK96] ist die Existenz von Wickprodukten des freien Feldes als operatorwertige Distribution gezeigt worden. Damit kann der Induktionsschritt genau wie im Minkowskiraum durchgeführt werden. Unter Benutzung der Zeitfunktion  $T$  kann  $T_2$  für nicht zusammenfallende Punkte konstruiert werden. Es ergibt sich derselbe Ausdruck wie in (4.3) – (4.7). Die numerischen Distributionen haben denselben Skalengrad wie im Minkowskiraum [BF97].

$$\begin{aligned} {}^0T_2(x, x') = \frac{\lambda^2}{(4!)^2} & \left[ : \phi^4(x) \phi^4(x') : + 16i \Delta_F(x, x') : \phi^3(x) \phi^3(x') : + \right. \\ & + 72 (i\Delta_F)^2(x, x') : \phi^2(x) \phi^2(x') : + \\ & + 96 (i\Delta_F)^3(x, x') : \phi(x) \phi(x') : + \\ & \left. + 24 (i\Delta_F)^4(x, x') \right] \quad (4.85) \end{aligned}$$

Um die Renormierung durchzuführen, möchte ich zunächst die Analogien zum Minkowskiraum erläutern.

Fassen wir den Minkowskiraum als Mannigfaltigkeit auf, so gilt für zwei Punkte  $x, x'$  hieraus:

$$\sigma(x, x') \stackrel{*}{=} \frac{1}{2}(y - y')^2, \quad (4.86)$$

$$\sigma^a(x, x') \stackrel{*}{=} y^a - y'^a, \quad (4.87)$$

$$\Delta(x, x') \stackrel{*}{=} 1, \quad (4.88)$$

$$\nabla_a f(x, x') \stackrel{*}{=} \partial_a f(y, y'), \quad (4.89)$$

wenn  $y, y'$  die entsprechenden Koordinaten sind und  $f$  eine differenzierbare Funktion. Eine biskalare Funktion auf einer Mannigfaltigkeit kann man in eine kovariante Taylorreihe entwickeln [Ful89]:

$$\begin{aligned} f(x, x') = f(x', x') + \sigma^a(x, x') (\nabla_a f)(x', x') + \\ + \frac{1}{2!} \sigma^a(x, x') \sigma^b(x, x') (\nabla_a \nabla_b f)(x', x') + \dots \quad (4.90) \end{aligned}$$

Wir erwarten daher, daß die Rolle des Operators  $\partial_\mu(y^\mu - y'^\mu)$  durch  $\nabla_a \sigma^a$  übernommen wird. Die durch die  $W$ -Operation erzeugten Potenzen von  $\sigma^a$  produzieren dann eine Testfunktion, die mit entsprechender Ordnung auf der Diagonale verschwindet. Sei  $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^4)$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \natural(\partial_\mu y^\mu)^n \natural f(y^2) &= \partial_\mu y^\mu (1 + \partial_\nu y^\nu) \cdots (n-1 + \partial_\rho y^\rho) f(y^2) \\ &= (4 + y^\mu \partial_\mu) \cdots (n+3 + y^\rho \partial_\rho) f(y^2) \\ &= (4 + 2y^2 \frac{\partial}{\partial y^2}) \cdots (n+3 + 2y^2 \frac{\partial}{\partial y^2}) f(y^2) \\ &=: g(y^2). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Die folgenden Gleichungen sind im Sinne von Operatoren zu verstehen. Mit

$$\nabla_a \nabla_b \sigma^a \sigma^b = \nabla_a \sigma^a \nabla_b \sigma^b + \nabla_a \sigma^a \nabla_b \sigma^b = \nabla_a \sigma^a (1 + \nabla_b \sigma^b) \quad (4.92)$$

folgt entsprechend:

$$\natural(\nabla_a \sigma^a)^n \natural = \nabla_a \sigma^a (1 + \nabla_b \sigma^b) \cdots (n-1 + \nabla_c \sigma^c). \quad (4.93)$$

Mit Gleichung (4.75) gilt:

$$\nabla_a \sigma^a \Delta = \Delta (4 + \sigma^a \nabla_a). \quad (4.94)$$

Daher folgt mit (4.72):

$$\natural(\nabla_a \sigma^a)^n \natural \Delta f(2\sigma) = \Delta g(2\sigma), \quad (4.95)$$

mit  $g$  aus (4.91). Wenn die zu renormierende Distribution vom Typ der rechten Seite von (4.95) ist, können wir die Renormierung durch die Ersetzungen (4.86) bis (4.89) in der entsprechenden Distribution des Minkowskiraums bestimmen. Diese löst dann das Fortsetzungsproblem.

Für die Renormierung betrachte ich hier wieder nur die Distributionen mit entsprechender euklidischer Signatur. Das  $i\epsilon$  entfällt wie im Minkowskiraum, da  $\sigma$  nur für zusammenfallende Punkte Null werden kann. Desweiteren betrachte ich nur die minimale Renormierung.

### Der Ein-Loop-Graph

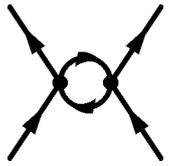
Hier ist

$$\begin{aligned} \Delta_{F^2} \Big|_{MR}^M &= \frac{1}{16\pi^4} \left( \frac{\Delta}{(2\sigma)^2} \Big|_R^M + 2 \frac{\Delta^{\frac{1}{2}} v \ln(2\sigma)}{2\sigma} + 2 \frac{\Delta^{\frac{1}{2}} w}{2\sigma} + 2vw \ln(2\sigma) + v^2 \ln^2(2\sigma) + w^2 \right). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Offensichtlich hat nur der erste Term die singuläre Ordnung Null<sup>6</sup> und muß daher renormiert werden. Dieser hat aber gerade die Form der rechten Seite in (4.95) und daher gilt mit (4.9):

$$\frac{\Delta}{(2\sigma)^2} \Big|_R^M = \frac{1}{2} \nabla_a \sigma^a \frac{\Delta \ln(2M^2 \sigma)}{(2\sigma)^2}. \quad (4.97)$$

<sup>6</sup>Die singuläre Ordnung kann leicht in Normalkoordinaten bestimmt werden, s. Seite 51.





### Der Zwei-Loop-Graph

Um die Terme mit nicht negativer singulärer Ordnung aus  $\Delta_F^3$  zu extrahieren, muß man für  $v$  und  $w$  die Entwicklungen (4.80) und (4.81) einsetzen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Delta_F^3|_{MR}^M &= \frac{1}{(2\pi)^6} \left( \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{(2\sigma)^3} \Big|_R^M + 3 \frac{\Delta v_0 \ln(2\sigma)}{(2\sigma)^2} \Big|_R^M + 3 \frac{\Delta w_0}{(2\sigma)^2} \Big|_R^M + 3 \frac{\Delta \bar{v} \ln(2\sigma)}{2\sigma} + \right. \\ &+ 3 \frac{\Delta \bar{w}}{2\sigma} + 3 \frac{\Delta^{\frac{1}{2}} v^2 \ln^2(2\sigma)}{2\sigma} + 6 \frac{\Delta^{\frac{1}{2}} v w \ln(2\sigma)}{2\sigma} + 3 \frac{\Delta^{\frac{1}{2}} w^2}{2\sigma} + \\ &\left. + v^3 \ln^3(2\sigma) + 3v^2 w \ln^2(2\sigma) + 2vw^2 \ln(\sigma) + w^3 \right). \quad (4.98) \end{aligned}$$

Hierbei sind

$$\bar{v} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} v_{n+1} \sigma^n, \quad (4.99)$$

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} w_{n+1} \sigma^n. \quad (4.100)$$

Da der erste Term in (4.98) nicht mit der rechten Seite von (4.95) übereinstimmt, berechnen wir den Ausdruck

$$\frac{1}{4} \nabla_a \nabla_b \nabla_c \Delta^{\frac{3}{2}} \sigma^a \sigma^b \sigma^c \frac{\ln(2M^2\sigma)}{(2\sigma)^3}.$$

Die Differenz zu  $\Delta^{\frac{3}{2}}(2\sigma)^{-3}$ , die von der Differentiation des Faktors  $\Delta^{\frac{1}{2}}$  herrührt, muß bei der Renormierung entsprechend berücksichtigt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{(2\sigma)^3} \Big|_R^M &= \frac{1}{4} (\nabla_a \nabla_b \nabla_c \Delta^{\frac{1}{2}} - 3 \nabla_a \nabla_b \Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;c} + 3 \nabla_a \Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;bc} - \Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;abc}) \sigma^a \sigma^b \sigma^c \frac{\ln(2M^2\sigma)}{(2\sigma)^3}. \quad (4.101) \end{aligned}$$

Entsprechend behandeln wir auch den zweiten und dritten Term in (4.98):

$$\frac{\Delta v_0 \ln(2\sigma)}{(2\sigma)^2} \Big|_R^M = \frac{1}{4} (\nabla_a v_0 - v_{0;a}) \sigma^a \frac{\Delta \ln(2M^2\sigma) \ln\left(\frac{2\sigma}{M^2}\right)}{(2\sigma)^2}, \quad (4.102)$$

$$\frac{\Delta w_0}{(2\sigma)^2} \Big|_R^M = \frac{1}{2} (\nabla_a w_0 - w_{0;a}) \sigma^a \frac{\Delta \ln(2M^2\sigma)}{(2\sigma)^2}. \quad (4.103)$$

### Die Renormierungsgruppengleichungen

In zweiter Ordnung kann man die RG-Gleichungen für die 4-Punkt-Vertexfunktionen lösen, ohne die Abhängigkeit des Feynman-Propagators (also der Funktionen  $v$  und  $w$ ) von der Masse zu kennen. Ich werde zunächst zeigen, daß

$$M \frac{\partial}{\partial M} \Delta_F^2|_R^M = \frac{1}{16\pi^4} \nabla_a \frac{\Delta \sigma^a}{(2\sigma)^2}$$

ein lokaler Counterterm ist. Hierfür werde ich Normalkoordinaten am Punkt  $x$  benutzen.<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} x &\stackrel{*}{=} y & x' &\stackrel{*}{=} y' \\ \sigma &\stackrel{*}{=} \frac{1}{2}(y - y')^2 & \sigma^a &\stackrel{*}{=} y^a - y'^a \\ \nabla_a &\stackrel{*}{=} \partial_a \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\nabla_a \frac{\Delta\sigma^a}{(2\sigma)^2} = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \partial_a \sqrt{g(x)} \frac{\Delta\sigma^a}{(2\sigma)^2} \quad (4.104)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{g(x)g(x')}} \partial_a \frac{\sigma^a \det(\sigma_{ab'})}{(2\sigma)^2} \quad (4.105)$$

$$\stackrel{*}{=} \frac{1}{\sqrt{g(y')}} \partial_a \frac{y^a - y'^a}{(y - y')^4} \quad (4.106)$$

$$= \frac{2\pi^2}{\sqrt{g(y')}} \delta(y - y') \quad (4.107)$$

$$= 2\pi^2 g^{-\frac{1}{4}}(y) g^{-\frac{1}{4}}(y') \delta(y - y') \quad (4.108)$$

$$\stackrel{*}{=} 2\pi^2 \delta(x, x') \quad (4.109)$$

Die 4-Punkt-Vertexfunktion ist

$$\begin{aligned} \Gamma_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = & -16\pi^2 g \delta(x_1, x_2) \delta(x_1, x_3) \delta(x_1, x_4) + \\ & + 128\pi^4 g^2 \left[ \delta(x_1, x_2) \delta(x_3, x_4) \Delta_F^2 \Big|_{MS}^M(x_1, x_3) + \right. \\ & \left. + 2\text{Perm.} \right] + \mathcal{O}(g^3). \quad (4.110) \end{aligned}$$

Das Einsetzen in die RG-Gleichung (4.51) ergibt  $\beta_2 = 3$ . Dieses Ergebnis stimmt mit der Berechnung von LÜSCHER überein, der dimensionale Renormierung und Minimale Subtraktion verwendet hat [Lüs82].

Eine weitere Auswertung der Renormierungsgruppengleichungen für  $\Gamma_2$  wird eine Ersetzung  $m^2 \rightarrow m^2 + \xi R$  in (4.77) erfordern. Diese erzeugt eine weitere  $\beta$ -Funktion für die Kopplungskonstante  $\xi$  [BOS89].

---

<sup>7</sup>Eine gute Referenz zum Thema Normalkoordinaten ist das Buch von FRIEDLANDER [Fri75]. Für die hier berechneten Größen siehe auch [Par79].

# Zusammenfassung und Ausblick

Die kausale Störungstheorie ist eine elegante Methode, um die Renormierbarkeit einer Theorie zu untersuchen. Im Gegensatz zu anderen Formulierungen hat sie zwei wesentliche Vorteile:

- In jedem Induktionsschritt muß die Renormierung nur an einem Punkt durchgeführt werden. Dies vereinfacht nicht nur den Beweis der Renormierbarkeit, sondern hat auch in der Anwendung Vorteile: In der herkömmlichen Formulierung muß man zu jedem Graphen, den man aus den Feynmanregeln konstruiert hat, die divergenten Untergraphen bestimmen und renormieren. Dies hat man im Epstein-Glaser-Verfahren in gleicher Ordnung aber bereits getan, da die zeitgeordneten Funktionen niedriger Ordnung schon renormiert sind.
- Die Konstruktion ist vollständig lokal. Sie benötigt insbesondere nicht den Impulsraum und läßt sich daher auch auf gekrümmte Raumzeiten übertragen.

Üblicherweise werden Rechnungen in der Quantenfeldtheorie mit den Integral-kernen von Distributionen im Impulsraum durchgeführt. Obwohl die Verfahren dort hochentwickelt sind, ist es dennoch teilweise recht schwierig, analytische Ausdrücke für die renormierten Größen zu bekommen. Mit dem hier entwickelten Verfahren zur Erzeugung von Integralkern-darstellungen scheinen diese im Ortsraum einfacher auszurechnen zu sein, zumindest bis zur hier betrachteten Ordnung. Darüberhinaus liefert das Verfahren Aufschluß über die Grundlagen der Differentiellen Renormierung. Damit war es mir möglich, auch auf gekrümmter Raumzeit die Renormierung des Ein- und Zwei-Loop-Graphen durchzuführen.

Aufbauend auf dieser Untersuchung scheinen mir die nächsten Fragen, die im Zusammenhang mit der Differentiellen Renormierung stehen, die folgenden zu sein: Läßt sich für die Renormierung der Form (4.36) eine Formel der Art (3.9) herleiten? Ergeben sich mit der hier benutzten Methode in nächster Ordnung dieselben Ergebnisse wie in [SZ93]? Desweiteren wäre eine Formel wie (3.9) auf gekrümmter Raumzeit wünschenswert, die unabhängig von der Analogie zum Minkowskiraum eine Fortsetzung für Distributionen auf einer Mannigfaltigkeit liefert. Darüberhinaus ist sicherlich die systematische Behandlung der Renormierungsgruppe im Rahmen der kausalen Störungstheorie ein wichtiger Aspekt.

# Anhang A

## A.1 Fouriertransformationen der in 4.1 auftretenden Distributionen

Hier werden die Fouriertransformierten von Distributionen, die im Abschnitt 4.1 behandelt wurden, berechnet. Alle Transformationen finden im euklidischen  $\mathbb{R}^4$  statt. Ich verwende folgende für die Quantenfeldtheorie übliche Konventionen:

$$\widehat{f}(p) = \int d^4x f(x) e^{ipx}, \quad (\text{A.1})$$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \widehat{f}(p) e^{-ipx}. \quad (\text{A.2})$$

Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\widehat{x^\mu f} = -i\partial^\mu \widehat{f}, \quad \widehat{\partial_\mu f} = -ip_\mu \widehat{f}, \quad (\text{A.3})$$

$$(\partial_\mu x^\mu f)^\wedge = -p^\mu \partial_\mu \widehat{f}, \quad (\natural(\partial_\mu x^\mu)^\alpha \natural f)^\wedge = (-)^n \natural(p^\mu \partial_\mu)^n \natural \widehat{f}, \quad (\text{A.4})$$

$$\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^4} \widehat{f} * \widehat{g}. \quad (\text{A.5})$$

Hierbei bezeichnet die durch  $\natural \cdots \natural$  gekennzeichnete Ordnung gerade die umgekehrte von  $\natural \cdots \natural$ , d.h. die Differentialoperatoren stehen rechts von allen (Impuls-) Koordinaten. Die Fouriertransformierte von  $1/x^2$  sei als bekannt vorausgesetzt:

$$\widehat{\frac{1}{x^2}}(p) = \frac{4\pi^2}{p^2}. \quad (\text{A.6})$$

Hieraus folgt insbesondere schon

$$\widehat{\frac{x^\mu}{x^2}}(p) = 8\pi^2 i \frac{p^\mu}{p^4}, \quad \widehat{\frac{x^\mu}{(x^2)^2}}(p) = -\frac{1}{2} \widehat{\partial^\mu \frac{1}{x^2}}(p) = 2\pi^2 i \frac{p^\mu}{p^2}. \quad (\text{A.7})$$

Wenn die Funktion (Distribution) nur von  $r := \sqrt{x^2}$  abhängt, so wird aus der vierdimensionalen Fouriertransformation eine eindimensionale Hankeltransformation, die nur von  $p := \sqrt{p^2}$ , abhängt. Diese sind z.B. bei ERDÉLYI [EMOT54]

tabelliert.

$$\int d^4x f(r) e^{ipx} = \int_0^\infty r^3 dr f(r) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos\vartheta d\vartheta \int_0^\pi \sin^2\chi d\chi e^{ipr \cos\chi} \quad (\text{A.8})$$

$$= 4\pi \int_0^\infty dr r^3 f(r) \int_0^\pi d\chi \sin^2\chi pr e^{ipr \cos\chi} \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{4\pi^2}{p} \int_0^\infty dr r^2 J_1(pr) f(r) \quad (\text{A.10})$$

$$= -\frac{4\pi^2}{p} \frac{\partial}{\partial p} \int_0^\infty dr r J_0(pr) f(r). \quad (\text{A.11})$$

Das Integral in (A.9) findet man in [GR80, 3.915, Nr.5, S.482]. Bei der Fouriertransformation treten zwei Integrale auf, die ich mithilfe des Computeralgebraprogramms `Maple V` [HHR96] gelöst habe.

$$I := \int_0^\pi d\chi \frac{\sin^2\chi}{k^2 + p^2 - 2pk \cos\chi} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{k^2} \theta(k-p) + \frac{1}{p^2} \theta(p-k) \right) \quad (\text{A.12})$$

$$I_1 := \int_0^\pi d\chi \frac{\sin^2\chi (p - k \cos\chi)}{(k^2 + p^2 - 2pk \cos\chi)^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} I = \frac{\pi}{2p^3} \theta(p-k) \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_0^\pi d\chi \frac{\sin^2\chi \cos\chi}{k^2 + p^2 - 2pk \cos\chi} \left( 1 - \frac{2(p - k \cos\chi)^2}{k^2 + p^2 - 2pk \cos\chi} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left( \frac{k}{p^5} (2k^2 - p^2) \theta(p-k) + \frac{p}{k^3} \theta(k-p) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

### A.1.1 Der masselose Ein-Loop-Graph

Zur Berechnung der Fouriertransformierten von (4.27) sei die Fouriertransformierte

$$\frac{\widehat{\ln(M^2 x^2)}}{x^2}(p) = -\frac{4\pi^2}{p^2} \ln\left(\frac{p^2}{M^2}\right) \quad (\text{A.15})$$

vorausgesetzt.<sup>1</sup> Hierbei ist  $\bar{M} = M/(2\gamma)$  und  $\gamma$  die Euler'sche Konstante. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left( \partial_\mu x^\mu \frac{\ln(M^2 x^2)}{(x^2)^2} \right)^\wedge(p) &= -ip_\mu \left( \frac{x^\mu \ln(M^2 x^2)}{x^2} \right)^\wedge \\ &= -2 \int d^4k \frac{p^2 - pk}{k^2(p-k)^4} \ln\left(\frac{k^2}{\bar{M}^2}\right), \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Eine sehr trickreiche Herleitung für die Fouriertransformationen von  $(\ln(M^2 x^2))^n/x^2$  findet man bei [FJL92]

Integration über  $\vartheta$  und  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}
&= -8\pi p \int_0^\infty dk k \ln \left( \frac{k^2}{M^2} \right) \int_0^\pi d\chi \frac{\sin^2 \chi (p - k \cos \chi)}{(k^2 + p^2 - 2pk \cos \chi)^2} \\
&= -8\pi p \int_0^\infty dk k \ln \left( \frac{k^2}{M^2} \right) I_1 \\
&= 2\pi^2 \left( 1 - \ln \left( \frac{p^2}{M^2} \right) \right). \tag{A.16}
\end{aligned}$$

### A.1.2 Der masselose Zwei-Loop-Graph

Zuerst berechnen wir

$$\widehat{\frac{x^\mu x^\nu}{(x^2)^2}}(p) = \frac{2\pi^2}{p^2} \left( \delta_\nu^\mu - 2 \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right). \tag{A.17}$$

Dann gilt für die Transformation des Setting-sun-Graphen:

$$\begin{aligned}
&\left( \partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma x^\mu x^\nu x^\sigma \frac{\ln(M^2 x^2)}{(x^2)^3} \right)^\wedge(p) \\
&= (-i)^3 p_\mu p_\nu p_\sigma \left( \frac{x^\sigma \ln(M^2 x^2)}{x^2} * \widehat{\frac{x^\mu x^\nu}{(x^2)^2}} \right)(p) \\
&= -p_\mu p_\nu p_\sigma \int d^4 k \frac{k_\sigma}{(k^2)^2 (p-k)^2} \left( 1 - \ln \left( \frac{k^2}{M^2} \right) \right) \left( \delta_\nu^\mu - 2 \frac{(p_\mu - k_\mu)(p_\nu - k_\nu)}{(p-k)^2} \right) \\
&= -4\pi p^3 \int_0^\infty dk \left( 1 - \ln \left( \frac{k^2}{M^2} \right) \right) I_2 \\
&= -\pi^2 \left[ \frac{1}{p^2} \int_0^p dk k \left( 1 - \ln \left( \frac{k^2}{M^2} \right) \right) (2k^2 - p^2) + \right. \\
&\quad \left. + p^4 \int_p^\infty \frac{dk}{k^3} \left( 1 - \ln \left( \frac{k^2}{M^2} \right) \right) \right] \\
&= \frac{\pi^2 p^2}{2} \left( \ln \left( \frac{p^2}{M^2} \right) - \frac{1}{2} \right). \tag{A.18}
\end{aligned}$$

### A.1.3 Der massive Ein-Loop-Graph

Für die Fouriertransformation des massiven Fisch-Graphen bedienen wir uns wieder des Tricks, die vektorwertige Distribution als  $\partial^\mu A(r)$  mit einer skalaren Distribution  $A(r)$  zu schreiben. Mit

$$A(x) := K_0^2 \left( m\sqrt{x^2} \right) - K_1^2 \left( m\sqrt{x^2} \right) + \frac{K_0 \left( m\sqrt{x^2} \right) K_1 \left( m\sqrt{x^2} \right)}{m\sqrt{x^2}} \tag{A.19}$$

folgt:

$$\partial^\mu A(x) = \frac{x^\mu}{x^2} \left( K_1^2 \left( m\sqrt{x^2} \right) - K_0 \left( m\sqrt{x^2} \right) K_2 \left( m\sqrt{x^2} \right) \right). \tag{A.20}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{m^2}{(2\pi)^4} \frac{K_1^2(m\sqrt{x^2})}{x^2} \right|_R^M \\ &= \frac{m^2}{2(2\pi)^4} \square \left\{ K_0^2(m\sqrt{x^2}) - K_1^2(m\sqrt{x^2}) + \frac{K_0(m\sqrt{x^2}) K_1(m\sqrt{x^2})}{m\sqrt{x^2}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2M^2x^2} \left[ K_1^2\left(\frac{m}{M}\right) - K_0\left(\frac{m}{M}\right) K_2\left(\frac{m}{M}\right) \right] \right\}. \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$

Man vergleiche diesen Ausdruck mit der entsprechenden Gleichung in [HL92]. Durch Umschreiben von

$$A(r) = -\frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial m} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial m^2} \right) K_0^2(mr) + 2K_0^2(mr), \quad (\text{A.22})$$

kann man die entsprechenden Integrale bei ERDÉLYI finden. Mit

$$\frac{\widehat{K_0^2(mr)}}{r^2}(p) = \frac{4\pi^2}{p} \int_0^\infty dr K_0^2(mr) J_1(pr) \quad (\text{A.23})$$

$$= \frac{4\pi^2}{p^2} \left( \frac{1}{z} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right) \right)^2, \quad z = \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}}, \quad (\text{A.24})$$

nach [EMOT54][8.13 (28)] und

$$\frac{1}{z} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{z} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)} \frac{1}{k!z^{2k}} \quad (\text{A.25})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)z^{2k+1}} \quad (\text{A.26})$$

$$= \operatorname{arccoth}(z), \quad (\text{A.27})$$

folgt also:

$$\frac{\widehat{K_0^2(mr)}}{r^2}(p) = \frac{4\pi^2}{p^2} \operatorname{arccoth}^2(z). \quad (\text{A.28})$$

Der zweite Term berechnet sich mit (A.11) folgendermaßen:

$$\widehat{K_0^2(mr)}(p) = -\frac{4\pi^2}{p} \frac{\partial}{\partial p} \int_0^\infty dr r J_0(pr) K_0^2(mr) \quad (\text{A.29})$$

$$= -\frac{4\pi^2}{p} \frac{\partial}{\partial p} \frac{2}{p^2 z} \operatorname{arccoth}(z), \quad (\text{A.30})$$

nach [EMOT54][8.3 (32)], mit  $z$  wie in (A.24). Daher folgt mit

$$\begin{aligned} & \frac{m^2}{2(2\pi)^4} \widehat{\square A(r)}(p) \\ &= -\frac{m^2 p^2}{2(2\pi)^2} \left[ \frac{1}{p^2} \left( \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial m} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial m^2} \right) \operatorname{arccoth}^2(z) + \frac{4}{p} \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{p^2 z} \operatorname{arccoth}(z) \right] \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \left( \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} \operatorname{arccoth} \left( \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} \right) - 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

der bekannte Impulsraum-Ausdruck (s. z.B. [Ram89]).

## A.2 Die masselose RG-Gleichung für allgemeines $w$

Wählen wir  $w(Mx) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ , so gilt:

$$M \frac{\partial}{\partial M} w(Mx) = Mx^\mu (\partial_\mu w)(Mx) = x^\mu \partial_\mu w(Mx). \quad (\text{A.32})$$

Als Funktional folgt für  $\Gamma_4$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_4(\varphi^{\otimes 4}) &= -16\pi^2 g \int d^4x \varphi^4(x) + \\ &+ 24g^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \frac{1}{(x_1 - x_2)^4} \Big|_R \varphi^2(x_1) \varphi^2(x_2), \end{aligned}$$

mit  $x_1 \rightarrow x_1 + x_2$ ,

$$\begin{aligned} &= -16\pi^2 g \int d^4x \varphi^4(x) + \\ &+ 24g^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \frac{1}{x_1^4} \left[ \varphi^2(x_1 + x_2) \varphi^2(x_2) - \frac{w(Mx_1)}{w(0)} \varphi^4(x_2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Mit (A.32) ergibt sich:

$$\begin{aligned} M \frac{\partial}{\partial M} \Gamma_4(\varphi^{\otimes 4}) &= -24g^2 \int d^4x_2 \varphi^4(x_2) \int d^4x_1 \frac{x_1^\mu}{(x_1^2)^2} \frac{1}{w(0)} \partial_\mu w(Mx_1) \\ &= 24g^2 \int d^4x_2 \varphi^4(x_2) \int d^4x_1 \frac{w(Mx_1)}{w(0)} \underbrace{\partial_\mu \frac{x_1^\mu}{(x_1^2)^2}}_{2\pi^2 \delta(x_1)} \\ &= 48\pi^2 g^2 \int d^4x \varphi^4(x). \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Einsetzen in die RG-Gleichungen (4.51) bis zur zweiten Ordnung in  $g$  ergibt:

$$(48\pi^2 g^2 - 16g^2 \beta_2) \int d^4x \varphi^4(x) + \mathcal{O}(g^3) = 0, \quad (\text{A.35})$$

und damit  $\beta_2 = 3$ .

### A.3 Modifizierte Besselfunktionen

Ich habe hier die Eigenschaften der modifizierten Besselfunktionen zusammengestellt, die für die Rechnungen in Kapitel 4 benötigt werden. Sie sind [AS84] entnommen.

$I_\nu$  und  $K_\nu$  sind Lösungen der Differentialgleichung

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} - (z^2 + \nu^2) f = 0.$$

Sie sind holomorphe Funktionen auf  $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ . Wenn  $n \in \mathbb{N}, \nu = \pm n \in \mathbb{Z}$ , ist  $I_\nu$  ganz. Es gilt:

$$I_{-n} = I_n, \quad K_{-\nu} = K_\nu.$$

Mit  $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$  ist

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}, \\ K_n(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}z\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k-1}{k!} \left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k + (-)^{n+1} \ln\left(\frac{1}{2}z\right) I_n(z) + \\ &\quad + (-)^n \left(\frac{1}{2}z\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} (\psi(k+1) + \psi(n+k+1)) \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!(n+k)!}, \\ K_0(z) &= -\left(\ln\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)\right) I_0(z) + \frac{\frac{1}{4}z^2}{(1!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^2}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^3}{(3!)^2} + \dots \end{aligned}$$

Mit den Ableitungen  $I'_0 = I_1$  und  $K'_0 = -K_1$  gelten die folgenden Rekursionsbeziehungen:

$$\begin{aligned} C_{\nu-1}(z) - C_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} C_\nu(z), \\ C'_\nu(z) &= C_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} C_\nu(z), \\ C_{\nu-1}(z) + C_{\nu+1}(z) &= 2C'_\nu(z), \\ C'_\nu(z) &= C_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} C_\nu(z), \end{aligned}$$

wobei  $C_\nu$  entweder  $I_\nu$  oder  $e^{i\pi\nu} K_\nu$  bezeichnet. Mit  $\mu = 4\nu^2$  und  $|z| \rightarrow \infty$  gilt die asymptotische Entwicklung

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^z \left( 1 + \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \dots \right).$$

# Literaturverzeichnis

- [AS84] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Pocketbook of Mathematical Functions*. Harri Deutsch, 1984.
- [BF97] R. Brunetti and K. Fredenhagen. Interacting quantum fields in curved space: Renormalizability of  $\varphi^4$ . *gr-qc*, 9701048, 1997. Preprint.
- [BFK96] R. Brunetti, K. Fredenhagen, and M. Köhler. The microlocal spectrum condition and wick polynomials of free fields on curved spacetimes. *Communications in Mathematical Physics*, 180:312, 1996.
- [BOS89] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, and I. L. Shapiro. Renormalization group approach to quantum field theory in curved space-time. *Revista del Nuovo Cimento*, 12(10):1–105, 1989.
- [BS76] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov. *Introduction to the Theory of Quantized Fields*. John Wiley and Sons, 3rd edition, 1976.
- [DB60] Bryce S. DeWitt and Brehme. Radiation damping in a gravitational field. *Annals of Physics*, 9:220–259, 1960.
- [EG73] H. Epstein and V. Glaser. The role of locality in perturbation theory. *Annals de l'Institut Henri Poincaré*, 19(A):211, 1973.
- [EMOT54] Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, and Tricomi. *Table of Integral-transforms*, volume 2. McGraw-Hill, 1954.
- [FJL92] Daniel Z. Freedman, Kenneth Johnson, and José I. Latorre. Differential regularization and renormalization: a new method of calculation in quantum field theory. *Nuclear Physics*, 371(B):352–414, 1992.
- [Fre] K. Fredenhagen. Renormierungstheorie. Vorlesung an der Universität Hamburg, WS 1996/97.
- [Fri75] F. G. Friedlander. *The Wave Equation on a Curved Space-Time*. Cambridge University Press, 1975.
- [Ful89] S. Fulling. *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime*. Cambridge University Press, 1989.
- [GR80] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 4th edition, 1980.

- [HHR96] K. M. Heal, M. L. Hansen, and K. M. Rickard. *Einführung in Maple V*. Springer, 1996.
- [HL92] Peter E. Haagensen and José I. Latorre. Differential renormalization of massive quantum field theories. *Physics Letters*, 283(B):293–297, 1992.
- [Hör90] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer, 2nd edition, 1990.
- [IB80] C. Itzykson and Zuber J. B. *Quantum Field Theory*. McGraw Hill, 1980.
- [Jun95] W. Junker. *Adiabatic Vacua and Hadamard States for Scalar Quantum Fields on Curved Spacetime*. PhD thesis, II. Institut f. Theoretische Physik, Hamburg, 1995. DESY-Preprint 95-144.
- [Köh95] M. Köhler. *The Stress Energy Tensor of a Locally Supersymmetric Quantum Field on a Curved Spacetime*. PhD thesis, II. Institut f. Theoretische Physik, Hamburg, 1995. DESY-Preprint 95-080.
- [KW91] B. Kay and R. Wald. Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, non singular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate killing horizon. *Physical Reports*, 207:49, 1991.
- [LMVC94] José I. Latorre, Cristina Manuel, and Xavier Vilasí-Cardona. Systematic differential renormalization to all orders. *Annals of Physics*, 231:149–173, 1994.
- [Lüs82] M. Lüscher. Dimensional regularisation in the presence of large background fields. *Annals of Physics*, 142:359–392, 1982.
- [Par79] Leonard Parker. Aspects of quantum field theory in curved spacetime: Effective action and energy-momentum tensor. In M. Lévy and S. Deser, editors, *Recent Developments in Gravitation (Cargèse 1978)*, pages 219–273, New York, 1979. Plenum.
- [Rad92] M. Radzikowski. *The Hadamard Condition and Kay’s Conjecture in (Axiomatic) Quantum Field Theory on Curved Space-Time*. PhD thesis, Princeton University, 1992.
- [Ram89] P. Ramond. *Field Theory: A Modern Primer*. Addison-Wesley, 2nd edition, 1989.
- [RS75] M. Reed and B. Simon. *Functional Analysis, Self Adjointness*. Academic Press, 1975.
- [RS80] M. Reed and B. Simon. *Functional Analysis*. Academic Press, 1980.
- [Sch95] G. Scharf. *Finite Quantum Electrodynamics*. Springer, 2nd edition, 1995.

- [Smi95] V. A. Smirnov. Differential renormalization, the action principle and renormalization group calculations. *Zeitschrift für Physik*, 67(C):531–541, 1995.
- [Smi96] V.A. Smirnov. Gauge invariant differential renormalization: *hep-th*, 9605164, may 1996. Preprint.
- [SP] R. Stora and G. Popineau. A pedagogical remark on the main theorem of perturbative renormalization theory. Unveröffentlichter Preprint.
- [Ste71] O. Steinmann. *Perturbation Expansions in Axiomatic Field Theory*, volume 11 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, 1971.
- [Sto93] R. Stora. Differential algebras in lagrangean field theory. ETH Lectures, Januar-Februar 1993.
- [SZ93] V. A. Smirnov and O. I. Zav'yalov. On differential renormalization. *Theoretical and Mathematical Physics*, 96:974–981, 1993.
- [ZJ96] J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 3rd edition, 1996.

## Danksagung

Als erstes möchte ich mich bei Herrn Fredenhagen für die Überlassung und die freundliche Betreuung der Arbeit bedanken.

Desweiteren bedanke ich mich hier bei Mark, Klaus-Heinrich und Tim, meinen Mitstreitern im Kampf gegen die gekrümmten Raumzeiten, für alle gemeinsamen Diskussionen und Gespräche. Genauso dankbar bin ich allen Barackenbewohnern für die nette Arbeitsatmosphäre.

Zum Schluß einen großen Dank an meine Eltern Karin und Rolf, die mich während des Studiums unterstützt haben.

## Erklärung

Ich versichere, diese Arbeit unter alleiniger Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel selbständig angefertigt zu haben.

Mai 1997

Dirk Prange