KAUSALE STÖRUNGSTHEORIE AUF GEKRÜMMTER RAUMZEIT

Diplomarbeit

Tim Pfitzenreiter
II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

Oktober 1997

Inhaltsverzeichnis

Gutachter:

Prof. Dr. K. Fredenhagen

Prof. Dr. G. Mack

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Warum gekrümmte Raumzeit?

Alle mikroskopischen physikalischen Phänomene lassen sich auf vier Wechselwirkungen zurückführen, die elektromagnetische, die schwache, die starke Wechselwirkung und die Gravitation. Die Gravitation ist hierbei die Wechselwirkung, deren physikalische Grundlagen am schlechtesten verstanden sind. Zwar läßt sie sich klassisch als eine Eigenschaft der Raumzeit auffassen, was auf den mathematischen Apparat der Riemannschen Geometrie führt, jedoch ist eine Formulierung im Rahmen der Quantenfeldtheorie bis jetzt nicht zufriedenstellend gelungen: Die Feldgleichungen sind wie üblich nichtlinear, und da sie nichtpolynomial sind, schwierig zu quantisieren. Die Theorie scheint darüberhinaus als eine Spin-2 Theorie nicht renormierbar zu sein. Erschwerend kommt hinzu, daß eine experimentelle Überprüfung theoretischer Voraussagen nahezu unmöglich ist, da die Effekte der Gravitation erst bei extrem hohen Massedichten in Erscheinung treten, wie man sie in den Überresten massereicher kollabierter Sterne vorfindet: in schwarzen Löchern.

Im Gegensatz dazu sind die drei anderen Wechselwirkungen recht gut verstanden, eine Quantisierung scheint (im algebraischen Sinne) zumindest prinzipiell nicht unmöglich. Wechselwirkungen zwischen Teilchen können störungstheoretisch sehr gut behandelt werden. Auch wenn die Störungsreihe nicht konvergiert, so ist die Übereinstimmung mit dem Experiment schon nahezu unheimlich. Es scheint daher sinnvoller, anstatt einer Quantengravitation zunächst die gewöhnlichen Quantenfeldtheorien in einem klassischen gravitativen Hintergrund zu betrachten, z.B. auf dem Ereignishorizont schwarzer Löcher. Auftrieb hat diese Betrachtungsweise durch die Arbeit von Hawking

[21] erhalten, die im nächsten Abschnitt etwas ausführlicher dargestellt wird. Auslöser für diese Arbeit war jedoch eine klassische Betrachtung schwarzer Löcher durch Bardeen, Carter und Hawking [2], wobei eine Analogie zwischen stationären schwarzen Löchern und thermodynamischen Systemen im Gleichgewicht hergestellt wurde. Hierbei kam man zu dem Ergebnis, daß schwarze Löcher eine Schwarzkörpertemperatur von

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M} \simeq 10^{-4} \frac{M_\odot}{M} \mathrm{K}$$

aufweisen. Hawking versuchte nun, die physikalische Ursache dieser Strahlung näher zu spezifizieren.

1.2 Der Hawking-Effekt

Im Jahre 1975 veröffentlichte S. Hawking die Arbeit, in der er der Frage, woher die „Schwarzkörpertemperatur“ schwarzer Löcher stammt, nachging. Da diese Untersuchung eine maßgebliche Motivation für die Behandlung von Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten darstellt, soll deren Inhalt an dieser Stelle kurz referiert werden.

Aus der klassischen Theorie schwarzer Löcher ist das Phänomen der *Superradianz* bekannt. Hierbei wird die klassische Streuung von Wellen (elektromagnetische oder gravitative) an rotierenden schwarzen Löchern betrachtet. Es zeigt sich, daß es hierbei zu einer Vergrößerung der Amplitude kommt (Superradianz). In der Quantenphysik bedeutet eine Vergrößerung der Amplitude jedoch Teilchenerzeugung. Hawking [21] betrachtete daher ein masseloses, freies Skalarfeld

$$\phi_{;\mu;\nu} g^{\mu\nu} + \tfrac{1}{6} R\phi = 0 \ ,$$

dessen Teilchen an einem schwarzen Loch gestreut werden sollen. ϕ kann, wie üblich, zerlegt werden in

$$\phi = \sum_i (f_i \hat{a}_i + \bar{f}_i \hat{a}_i^\dagger) \ , \tag{1.1}$$

wobei die $\{f_i\}$ wie üblich die Wellengleichung lösen: $f_{;\mu;\nu} g^{\mu\nu} = 0$ und somit dahingehend gewählt werden können, daß sie in der unendlich zurückliegenden Vergangenheit $\mathscr{I}^-$ orthonormal sind:

$$\frac{\mathrm{i}}{2} \int_S (f_i \bar{f}_{j;\mu} - \bar{f}_j f_{i;\mu}) \mathrm{d}\, \Sigma^\mu = \delta_{ij}$$

Das Feld muß in der Vergangenheit, d.h. bei $\mathscr{I}^-$ und somit durch (1.1), vollständig bestimmt sein. Ebenso läßt sich das Feld durch die Cauchy-Daten in der unendlichen Zukunft $\mathscr{I}^+$ *und* auf dem Ereignishorizont bestimmen. Es seien $\{p_i\}$ auslaufende Lösungen der Wellengleichung, deren Cauchy-Daten auf dem Ereignishorizont Null sind, und $\{q_i\}$ Lösungen, deren Cauchy-Daten bei $\mathscr{I}^+$ Null sind, d.h. die *keine* auslaufende Komponente enthalten. Dann ist

$$\phi = \sum_i (p_i \hat{b}_i + \bar{p}_i \hat{b}_i^\dagger + q_i \hat{c}_i + \bar{q}_i \hat{c}_i^\dagger)$$

Da masselose Felder vollständig durch Lösungen bei $\mathscr{I}^-$ bestimmt sind, müssen sich $\{p_i\}$ und $\{q_i\}$ als Linearkombinationen von $\{f_i\}$ und $\{\bar{f}_i\}$ darstellen lassen:

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} \bar{f}_j) \\ q_i &= \sum_j (\gamma_j f_i + \eta_{ij} \bar{f}_i) \end{aligned}$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned} \hat{b}_i &= \sum_j (\bar{\alpha}_{ij} \hat{a}_j - \bar{\beta}_{ij} \hat{a}_j^\dagger) \\ \hat{c}_i &= \sum_j (\bar{\gamma}_{ij} \hat{a}_j - \bar{\eta}_{ij} \hat{a}_j^\dagger) \end{aligned}$$

denn

$$\phi = \sum_i \Big[\sum_{jk} (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} \bar{f}_j)(\bar{\alpha}_{ik} \hat{a}_k - \bar{\beta}_{ik} \hat{a}_k^\dagger) + \ldots \Big] \,.$$

Man betrachte jetzt den Fall, daß keine einlaufenden Teilchen vorhanden sind, d.h. bei $\mathscr{I}^-$ ist $\hat{a}_i|0\rangle = 0$ für alle i. Bei $\mathscr{I}^+$ jedoch laufen

$$\langle 0| \, \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \, |0\rangle = \sum_j |\beta_{ij}|^2$$

Teilchen ein! Daraus folgt, daß die „klassische" Temperatur schwarzer Löcher durch die Emission von Teilchen hervorgerufen wird, die durch das Gravitationsfeld auf dem Ereignishorizont aus dem Vakuum erzeugt werden.

Diese Betrachtung wirft diverse konzeptionelle Fragen auf. Zunachst: Wie kann eine freie Theorie mathematisch möglichst sauber definiert werden? Wie kann eine Störungsreihe formuliert werden? Wie definiert man Wick-Polynome? Ist die Theorie überhaupt renormierbar? Wenn ja, wie? Einige dieser Fragen sollen in dieser Arbeit näher betrachtet werden.

Kapitel 2

QFT auf gekrümmter Raumzeit

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der expliziten Berechnng und Renormierung bestimmter Graphen zweiter Ordnung auf gekrümmter Raumzeit. Betrachtet wird eine skalare selbstwechselwirkende Quantenfeldtheorie, die zwar keinen unmittelbaren physikalischen Bezug aufweist, an der aber die wichtigsten Eigenschaften anderer Quantenfeldtheorien studiert werden können. Die Untersuchungen sollen mathematisch möglichst exakt gehalten werden. Im folgenden wird eine Einführung in die allgemeine Formulierung der Theorie gegeben. Zunächst aber werden die Grundlagen in flachen (Minkowskischen) Raumzeiten betrachtet.

2.1 Die Wightman-Axiome

Eine mathematisch sorgfältige Formulierung von Quantenfeldtheorien erfolgt mit Hilfe der Wightman Axiome (ich benutze die Formulierung nach Haag '93 [20]):

1. Gegeben sei ein Hilbert-Raum $\mathscr{H}$, welcher eine unitäre Darstellung der Überlagerungsgruppe der Poincaré-Gruppe $\mathbf{P}$ trägt. Es existiere weiter genau ein Zustand in $\mathscr{H}$ der invariant ist unter allen Transformationen $U(g)$, mit $g \in \mathbf{P}$. Dieser Zustand heißt *physikalisches Vakuum.* Das Spektrum des Energie-Impuls Operators P^μ ist eingeschränkt auf den geschlossenen Vorwärtslichtkegel $p^2 \geq 0$; $p^0 \geq 0$.

2. Die Felder Φ seien operatorwertige Distributionen über dem Minkowski-Raum. Die mit Testfunktionen f aus dem Schwartz-Raum gesteste-

ten Distributionen $\Phi(f) = \int \Phi(x) f(x) \mathrm{d}x$ sind unbeschränkte Operatoren, die auf $\mathscr{H}$ wirken. Definiert sind diese auf einer dichten Teilmenge $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$. Die Menge $\mathscr{D}$ soll den Vakuumzustandsvektor enthalten und invariant sein unter $U(g)$ und $\Phi(f)$.

3. Zu jedem Feld Φ existiere ein hermitesch konjugiertes Feld Φ^*, definiert als sesquilineare Form auf $\mathscr{D}$ durch $\langle \psi_2 | \Phi^*(x) | \psi_1 \rangle = \overline{\langle \psi_2 | \Phi(x) | \psi_1 \rangle}$.

4. Die Felder Φ transformieren sich unter $\bar{\mathbf{P}}$ gemäß
$$U(a, \omega) \Phi^i_\lambda(x) U^{-1}(a, \omega) = M^{(i)\varrho}_\lambda(\omega^{-1}) \Phi^i_\varrho(\Lambda(\omega)x + a) \ ,$$
wobei $M(\omega)$ eine endlichdimensionale Matrixdarstellung von $\omega \in \bar{\mathbf{L}}$ ist. $\mathbf{L}$ ist die Überlagerungsgruppe der Lorentz-Gruppe. Die Indices i und λ bezeichnen verschiedene Felder und Komponenten.

5. Die Felder genügen den kausalen Vertauschungsrelationen. Es seien f und h Testfunktionen mit zueinander raumartigen Träger. Dann gilt $[\Phi^i(f), \Phi^j(h)]_\pm = 0$ für fermionische bzw. bosonische Felder.

6. Es existiert kein beschränkter Operator, der mit allen $\Phi(f)$ vertauscht, außer den vielfachen der Identität.

7. Es existiert ein dynamisches Gesetz, welches die Berechnung der Felder zu beliebigen Zeiten durch Felder in $\mathscr{O}_{t,\varepsilon} = \{x \,|\, |x^0 - t| < \varepsilon\}$ erlaubt.

Es bezeichne jetzt Ω den oben angesprochenen Vakuumvektor. Der *Vakuumerwartungswert* eines Produktes von Feldern ist gegeben durch
$$w^n(x_1, \ldots, x_n) = \langle \Omega | \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) | \Omega \rangle \ .$$
Die w^n sind temperierte Distributionen, was aus dem 2. Wightman-Axiom unter Verwendung des Schwartzschen Kerntheorems folgt. Bezeichnet werden sie als Wightman-Distributionen oder auch Wightman-Funktionale. Aus dieser sog. *Hierarchie* von Distributionen w^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ kann der Hilbertraum $\mathscr{H}$ samt Felder rekonstruiert werden. Diese GNS (Gelfand-Naimark-Segal)-Rekonstruktion führt auf die Borchers-Uhlmann Algebren [5].

2.2 Die Borchers-Uhlmann Algebra

Es sei $\mathscr{S}_0$ die Menge der Komplexen Zahlen und $\mathscr{S}_n$ der Schwartz-Raum der Testfunktionen in $4n$ Variablen. Es bezeichne $\mathfrak{A}_U$ die Menge der geordneten Systeme
$$(f_0, f_1, f_2, \ldots) = f \ ,$$

wobei $f_i \in \mathscr{S}_i$, sowie eine endliche Zahl von Funktionen f, die von Null verschieden sind. Die Funktionen f sollen die folgenden Eigenschaften erfüllen: Es seien $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$ und $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$ mit $f, g \in \mathfrak{A}_U$. Dann soll gelten

$$f + g = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, \ldots)\ ,$$

sowie

$$f \times g = \left(f_0 \cdot g_0, f_0 g_1(x) + f_1(x) g_0, \ldots, \sum_{k+l=i} f_k(x_1, \ldots, x_k) g_l(x_{k+1}, \ldots x_i), \ldots \right)\ ,$$

wobei $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_i)$ und $g_i = g_i(x_1, \ldots, x_i)$. Weiterhin gelte $\lambda \cdot f = (\lambda f_0, \lambda f_1, \ldots)$ und es existiere eine Involution

$$f^+ = (\bar{f}_0, \ldots, \overline{f_i(x_i, \ldots, x_1)}, \ldots).$$

Für alle Operationen gelte das Distributiv- und Assoziativgesetz.

Offensichtlich handelt es sich bei $\mathfrak{A}_U$ um eine Algebra, genauer (wegen der Involution) um eine *-Algebra. Weiter benötigt man für die Behandlung physikalischer Probleme noch die die Wirkung der Lorentz-Gruppe in $\mathfrak{A}_U$. Diese kann als ein Automorphismus in der folgenden Weise definiert werden:

$$U(a, \Lambda)(f_0, \ldots, f_i(x_1, \ldots, x_i), \ldots) = (f_0, \ldots, f_i(\Lambda^{-1}(x_1 - a), \ldots, \Lambda^{-1}(x_i - a)), \ldots) \quad (2.1)$$

Weiter kann noch eine Fourier-Transformation eingeführt werden:

$$(\widehat{f_0, f_1, f_2, \ldots}) = (\hat{f}_0, \hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots)$$

Man benötigt noch folgende Formulierung eines Teilraumes der Algebra:

$$\mathfrak{M} = \left\{ g \in \mathfrak{A}_U \;\middle|\; \frac{\partial_m}{\partial p_i^\nu \cdots \partial p_k^\mu} \hat{g}_n(p_1, \ldots, p_n) = 0 \quad \text{falls} \quad p_n, p_{n-1} + p_n, \ldots, p_2 + \cdots + p_n \in \bar{V}^+ \quad \textit{und} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 0 \right\}\ ,$$

um eine *Spektrumsbedingung* formulieren zu können. $\bar{V}^+$ ist hierbei der abgeschlossene Vorwärtslichtkegel. $\mathfrak{M}$ ist ein unter involutionen und Lorentz-Transformationen invarianter Vektorraum.

DEFINITION 2.2.1 [5]: *Die raumartig getrennten Träger der Testfunktionen, d.h.*

$$\mathrm{supp}\chi \subset \{(x,y)\,|\,(x-y)^2 < 0\}$$

mit

$$f = f(0,0,f_2,0,\ldots) \qquad \textit{und} \qquad f_2(x,y) = \chi(x,y) - \chi(y,x)$$

erzeugen ein zweiseitiges Lokalitätsideal. Dieses werde mit $\mathfrak{J}$ bezeichnet. $\mathfrak{J}$ ist ein linearer Teilraum von $\mathfrak{A}_U$.

Wir sind jetzt in der Lage, mit Hilfe der Algebra $\mathfrak{A}_U$ (die sog. Borchers-Uhlmann Algebra) die Wightman-Funktionale zu definieren. Wir tun dies nach [5]:

DEFINITION 2.2.2 *w heißt Wightman-Funktional, wenn es ein unter der Lorentz-Gruppe invariantes lineares stetiges Funktional ist, das der Spektrumsbedingung $w(\mathfrak{M}) = 0$ und Lokalitätsbedingung $w(\mathfrak{J}) = 0$ genügt und darüberhinaus positiv definit ist, d.h. $w(g^+ \times g) \geq 0$.*

Es bleibt jetzt nur noch der Hilbert-Raum zu konstruieren. Es sei zunächst $\mathfrak{J}_{\mathrm{sp}}$ das maximale in $\mathfrak{M}$ enthaltene Links-Ideal[1]. Es sei weiterhin w ein Wightman-Funktional und $\mathfrak{U} = \{g \in \mathfrak{A}_U\,|\,w(g^+ \times g) = 0\}$. Es kann gezeigt werden, daß $\mathfrak{U}$ ein unter der Lorentz-Gruppe invariantes Links-Ideal ist, mit $\mathfrak{J}_{\mathrm{sp}} \subset \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{U}$. $\mathfrak{U}$ ist somit ein linearer Teilraum von $\mathfrak{A}_U$, so daß es möglich ist, einen Vektorraum $\mathfrak{V} = \mathfrak{A}_U/\mathfrak{U}$ zu konstruieren. Es seien $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{V}$ und g ein Repräsentant der Restklasse nach $\mathfrak{U}$. Mit Hilfe der Gleichung $\langle\psi_1(g), \psi_2(h)\rangle = w(g^+ \times h)$ kann ein inneres Produkt definiert werden. $\mathfrak{V}$ läßt sich jetzt zu einem Hilbertraum $\mathscr{H}$ vervollständigen.

2.3 Die Formulierung auf gekrümmten Raum-Zeiten

Es kann gezeigt werden, daß aus der Zuordnung einer offenen Raumzeitregion $\mathscr{O}$ zu einer Algebra $\mathfrak{A}_U$

$$\mathscr{O} \longrightarrow \mathfrak{A}(\mathscr{O})$$

alle physikalischen Größen abgeleitet werden können. Die Felder sind Distributionen, die mit Testfunktionen, deren Träger in $\mathscr{O}$ liegt, verschmiert werden. Es stellt sich jetzt die Frage, wie dieses Konzept auf gekrümmte

[1]Es sei hier der Vollständigkeit halber darauf hingewiesen, daß jede Teilmenge einer Algebra ein Maximales Links-Ideal besitzt. (Zornsches Lemma). In diesem Fall kann auch gezeigt werden, daß dieses Ideal eindeutig ist.

Raumzeiten verallgemeinert werden kann. Schwierigkeiten treten hier bei der Formulierung der Spektrumsbedingung auf, da auf Mannigfaltigkeiten keine (globale) Fouriertransformation angegeben werden kann. Weiterhin ist es auch nicht möglich, einen eindeutigen Vakuumzustand anzugeben. Bezüglich der Spektrumsbedingung genügt eine mikrolokale Formulierung des Problems [36], [28], [4]. Diese Formulierung führt auf den Begriff der *Wellenfrontmengen.*

Definition 2.3.1 *(Wellenfrontmenge): Es sei $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ein Punkt*

$$(x, k) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

heißt regulär gerichtet, wenn eine Umgebung N von x, eine Umgebung M von k und eine Funktion $g \in \mathscr{D}$ die in N identisch 1 ist, so existieren, daß $\forall m > 0$ eine Konstante C_m existiert mit

$$|\widehat{gT}(\lambda p)| \leq C_m (1 + |\lambda|)^{-m} \quad \forall\, p \in M, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+ \tag{2.2}$$

Das Komplement in $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ heißt ***Wellenfrontmenge*** *von T und wird mit $\mathrm{WF}(T)$ bezeichnet (siehe M. Reed, B. Simon [38]).*

Genauer wird auf das Konzept der Wellenfrontmengen an späterer Stelle eingegangen. Es sei w^{02} die Zweipunktfunktion im Minkowski-Raum. Die Spektrumsbedingung für die Zweipunktfunktion lautet nach Radzikowski [36]:

$$\operatorname{supp} \widehat{w^{02}} \subset \left\{ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \,\middle|\, k_1 \in \bar{V}^+ ; k_1 + k_2 = 0 \right\}$$

Es sei jetzt π_2 die Projektion auf die zweite Variable[2]. Dann gilt gemäß [36]:

$$\pi_2 \mathrm{WF}(w^{02}) \subset \left\{ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \,\middle|\, k_1 \in \bar{V}^+ ; k_1 + k_2 = 0 \right\}$$

Auf (gekrümmten) Mannigfaltigkeiten lautet die Wellenfrontmenge der Zweipunktfunktion

$$\begin{aligned} &\mathrm{WF}(w^2) = \\ &\left\{ ((x_1, k_1), (x_2, k_2)) \in T^*(\mathbb{R}^4) \setminus \{0\} \times T^*(\mathbb{R}^4) \setminus \{0\} \,\middle|\, (x_1 - x_2)^2 = 0 \,, \right. \\ &\qquad\qquad \left. k_1 = k_2 \,, \quad k_1^0 \geq k_2^0 \,, \qquad \begin{cases} k_1 \parallel (x_1 - x_2) & \text{falls} \quad x_1 \neq x_2 \\ k_1^2 = 0 & \text{falls} \quad x_1 = x_2 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

[2]Die Projektion bezieht sich hier auf das entsprechende Produktbündel. Man vergleiche hierzu die Arbeit von Radzikowski, S. 26.

Radzikowski hat weiter gezeigt, daß diese Bedingung mit der Hadamard-Bedingung (siehe nächsten Abschnitt) äquivalent ist. Es bleibt also noch die Konstruktion eines Vakuumzustandes. Für Robertson-Walker Raumzeiten hat man hier eine bestimmte Klasse von Vakuumzuständen, die adiabatischen Vakua. Diese Vakuumzustände lassen sich für solche Raumzeiten rekursiv konstruieren. Allerdings besteht hier in dem Abbruch der Iteration und der Wahl des Anfangszeitpunktes eine gewisse Willkür, die dazu führt, daß diese Zustände nicht eindeutig sind (siehe auch W. Junker [27]).

Wie bereits angesprochen, beschränkt sich diese Arbeit auf skalare Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten. Für diesen Fall können jetzt mit dem zuvor Gesagten die entsprechend modifizierten Wightman-Axiome angegeben werden (siehe M. Köhler [28]):

Definition 2.3.2 *Das Quadrupel $(\mathscr{H}, \mathscr{D}, \Phi, \Omega)$ heißt* ***neutrales, skalares Quantenfeldmodell*** *auf einer Raumzeit $(M, g_{\mu\nu})$, wenn folgende Bedingungen (Wightman-Axiome) erfüllt werden:*

1. *$\mathscr{H}$ ist ein separierbarer Hilberraum mit einem positiv definiten inneren Produkt.*

2. *$\mathscr{D}$ ist ein dichter Teilraum von $\mathscr{H}$.*

3. *Φ ist eine $\mathscr{H}$-Operatorwertige Distribution auf $\mathscr{C}_0^\infty(M)$ mit Operatoren auf $\mathscr{D}$.*

4. *Für jedes $f \in \mathscr{C}_0^\infty(M)$ sei $\Phi(f)\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$.*

5. *Der Vektor $\Omega \in \mathscr{H}$ ist zyklisch für Φ und $\mathscr{D}$ ist die lineare Hülle der Menge*
$$\{\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_m)\Omega \in \mathscr{H}\,|f_1, \ldots, f_m \in \mathscr{C}_0^\infty(M)\} \ .$$

6. *Das Feld sei Hermitesch, d.h. $\Phi(f)^* = \Phi(\bar{f})$ auf $\mathscr{D}$.*

7. *Das Feld genüge den lokalen Vertauschungsrelationen, d.h.*
$$[\Phi(f_1), \Phi(f_2)] = 0$$
auf $\mathscr{D}$ mit zwei Testfunktionen $f_1, f_2 \in \mathscr{C}_0^\infty(M)$ mit raumartig separierten Träger.

Um den Zusammenhang zur Borchers-Uhlmann Algebra herstellen zu können, benötigt man jetzt noch eine verallgemeinerte GNS-Rekonstrukton [28]:

SATZ 2.3.1 *Für jeden Zustand w der Borchers-Uhlmann Algebra $\mathfrak{A}_U(\mathscr{O})$ der den lokalen Vertauschungsrelationen genügt, existiert ein skalares Quantenfeld-Modell $(\mathscr{H}, \mathscr{D}, \Phi, \Omega)$, eindeutig bis auf eine unitäre Äquivalenz, so daß für $f_1, \ldots, f_m \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{O})$ gilt:*

$$w^m(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m) = \langle \Omega, \Phi(f_1) \cdots \Phi(f_m)\Omega \rangle \ . \tag{2.3}$$

Durch diese Gleichung definiert auch jedes Quantenfeld-Modell $(\mathscr{H}, \mathscr{D}, \Phi, \Omega)$ einen Zustant w auf $\mathfrak{A}_U(\mathscr{O})$ der den lokalen Kommutatorrelationen genügt.

Einen lesbaren Beweis dieses Satzes findet man bei M. Radzikowski [36] im Anhang. Bezüglich der Zweipunktfunktion nimmt man an, daß die physikalisch sinnvollen Zustände der *Hadamard-Bedingung* genügen müssen. Auf diesen Aspekt wird später noch eingegangen.

2.3.1 Die Hadamard-Bedingung

Es stellt sich die Frage, von welcher Singularitätsstruktur die Zweipunktfunktionen sind. Es scheint so, als ob an die Zweipunktfunktion diesbezüglich weitere Forderungen gestellt werden müssen, um physikalisch sinnvolle Zustände konstruieren zu können. Diese Forderung ist die *Hadamard-Bedingung*. Ich folge hierbei der Darstellung in [28]. Es sei $(M, g^{\mu\nu})$ eine global hyperbolische Mannigfaltigkeit und w ein quasifreier Zustand einer Borchers-Uhlmann Algebra. Es bezeichne $J^\pm(x)$ die kausale Zukunft bzw. Vergangenheit eines Punktes x. Es sei $\mathscr{O} \subset M \times M$ eine offene Umgebung der Menge kausal verbundener Punkte $(x_1, x_2) \in M \times M$, so daß $J^+(x_1) \cap J^-(x_2)$ und $J^+(x_2) \cap J^-(x_1)$ in einer *konvexen Normalumgebung*[3]. In einer solchen Normalumgebung ist das Quadrat des geodätischen Abstandes σ wohldefiniert. Jetzt kann folgende Funktion definiert werden:

$$G_\varepsilon^{T,n}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{\sqrt{\Delta(x, x')}}{\sigma(x, x') + 2i\varepsilon t + \varepsilon^2} + v^{(n)}(x, x') \ln \left[\sigma(x, x') + 2i\varepsilon t + \varepsilon^2 \right] \right\} \ .$$

[3]Es sei $\mathscr{N}_0$ eine offene Umgebung des Ursprungs in $T_x M$ und $\mathscr{N}_x$ eine offene Umgebung des Punktes x in M, so daß die Abbildung EXP ein $\mathscr{C}^r$-Diffeomorphismus von $\mathscr{N}_0$ auf $\mathscr{N}_x$ ist. $\mathscr{N}_x$ heißt dann *Normalumgebung* von x [22]. Eine Umgebung heißt konvex, wenn $\forall (x_1, x_2) \in \mathscr{N}$ eine eindeutige Geodäte existiert, die die Punkte x_1, x_2 verbindet und vollständig in $\mathscr{N}$ liegt.

Hierbei bedeutet $t = T(x) - T(x')$, wobei T eine in die Zukunft anwachsende globale Zeitfunktion darstellt. $n \in \mathbb{N}$ und $(x, x') \in \mathscr{O}$. $\sqrt{\Delta}$ und $v^{(n)}$ sind glatte, durch die Geometrie auf M bestimmte Funktionen. Es sei $\mathscr{N}$ eine kausale Normalumgebung einer Cauchy-Fläche Σ der Mannigfaltigkeit M. Weiter sei $\mathscr{O}'$ eine Umgebung in $\mathscr{N} \times \mathscr{N}$ dergestalt, daß der Abschluß von $\mathscr{O}'$ in $\mathscr{O}$ liegt. Nun definiert man Funktionen χ auf $M \times M$ durch $\chi(x, y) = 0$ für $(x, y) \notin \mathscr{O}$ und $\chi(x, y) = 1$ für $(x, y) \in \mathscr{O}'$. Damit lassen sich jetzt die Hadamard-Zustände definieren:

DEFINITION 2.3.3 *Ein quasifreier Zustand w einer Borchers-Uhlmann Algebra heißt* ***global Hadamard****, wenn die Zweipunkt-Funktion w^2 für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Gestalt ist, daß eine $\mathscr{C}^n$-Funktion $H^{(n)}(x, y)$ auf $\mathscr{N} \times \mathscr{N}$ existiert, so daß $\forall F_1, F_2 \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{N})$ gilt*

$$w^2(F_1 \otimes F_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathscr{N} \times \mathscr{N}} \left[\chi(x, y) G_\varepsilon^{T,n}(x, y) + H^{(n)}(x, y)\right] F_1(x) F_2(y) \mathrm{d}\mu_x \mathrm{d}\mu_y$$

Diese Definition ist der Wellenfrontmengenbedingung von Radzikowski äquivalent. Dadurch vereinfachen sich diverse Beweise, insbesondere die der Existenz der Wick-Polynome.

2.3.2 Existenz der Wick-Polynome

Um störungtheoretische Aspekte untersuchen zu können, ist eine Definition der Wick-Produkte auf gekrümmten Raumzeiten notwendig. Die folgende Betrachtung gibt einen kurzen Abriss der Arbeit von R. Brunetti, K. Fredenhagen und M. Köhler [4]. Zunächst muß eine Normalordnung definiert werden:

DEFINITION 2.3.4 *Für das freie skalare Feld ist das normalgeordnete Produkt im Minkowski-Raum rekursiv definiert durch*

$$\begin{aligned} :\phi: &= \phi \\ :\phi(x_1)\cdots\phi(x_{n+1}): &= \;:\phi(x_1)\cdots\phi(x_n):\phi(x_{n+1}) - \\ &\quad - \sum_l :\phi(x_1)\cdots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wird weggelassen}}}{\phi(x_l)} \cdots\phi(x_n): w^2(x_l, x_{n+1}) \end{aligned}$$

Man beachte, daß die Felder einzeln ausgeschmiert werden. Daher ist das Normalprodukt eine wohldefinierte Distribution auf $\mathscr{H}$. Man führt die Schreibweise

$$:\phi(x_1)\cdots\phi(x_n): \;=\; :\phi^{\otimes n}:(x_1, \ldots, x_n)$$

ein. Für eine Definition neuer lokaler Felder benötigt man eine *Einschränkung auf die Diagonale*. Dies geschieht im Minkowski-Raum mit Hilfe der Dirac-δ Distribution. Hier wird jedoch eine allgemeinere „δ"-Distribution benötigt, die mit Δ bezeichnet wird. Es sei M eine Mannigfaltigkeit. $\Delta \in \mathscr{D}'(M^n \times M)$ sei eine Distribution, die für alle Test*dichten* der Form

$$f = f(x_1, \ldots, x_n; x)\, \mathrm{d}\mu_1 \cdots \mathrm{d}\mu_n\, \mathrm{d}\mu \in \mathscr{C}_0^\infty(M^n \times M, \Omega^{n+1})$$

die folgende Gestalt besitzt:

$$\Delta(f) = \int f(x, \ldots, x; x)\mathrm{d}\mu\ .$$

Dies ist ganz offensichtlich eine Verallgemeinerung der Dirac δ-Distribution, entsprechend leicht läßt sich die zugehörige Wellenfrontmenge angeben. Weiter sei noch eine verallgemeinerte δ-Folge angegeben: Es sei $\{\Delta_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<1}$ eine Familie glatter Operatoren von $\mathscr{C}_0^\infty(M, \Omega_1)$ nach $\mathscr{D}'(M^n)$ mit $\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta_\varepsilon = \Delta$ in $\mathscr{D}'(M^n \times M)$. Damit lassen sich die *approximativen Wick-Monome* definieren:

Definition 2.3.5 *Mit dem vorher gesagten sind die* ***approximativen*** *Wick-Monome als operatorwertige Distributionen*

$$:\phi_\varepsilon^n:(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \left(:\phi^{\otimes n}: \circ \Delta_\varepsilon\right)(f)$$

definiert, für alle $f \in \mathscr{C}_0^\infty(M, \Omega_1)$. Die Wick-Monome $:\phi^n:$ sind dann operatorwertige Distributionen auf $\mathscr{H}$, definiert durch den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\to 0} :\phi_\varepsilon^n:(f) = \ :\phi^n:(f)\ .$$

Es läßt sich zeigen, daß diese Wick-Monome folgende Eigenschaften besitzen:

1. Der Grenzwert $\varepsilon \to 0$ der m-Punkt Distributionen existiert im Sinne von Distributionen. Die Distributionskerne lauten

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m\to 0} &\left\langle \Omega, :\phi_{\varepsilon_1}^{n_1}:(x_1)\cdots :\phi_{\varepsilon_m}^{n_m}:(x_m)\Omega \right\rangle \\ &= \sum_{\substack{a_{i,j}\\ 1\le i<j\le m}} \left[\prod_{1\le i<j\le m} \frac{w^2(x_i,x_j)^{a_{i,j}}}{a_{i,j}!}\right] n_1!\cdots n_m! \\ &\equiv \mathscr{W}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}(x_1,\ldots,x_m)\ .\end{aligned}$$

   $a_{i,j}$ ist die Zahl der Paarungen zwischen Punkten x_i und x_j.

2. Die Hierarchie der m-Punkt Distributionen der Wick-Monome genügt der **Positivität**:

$$\sum \int \cdots \int \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_k \bar{f}_j(x_1,\ldots,x_j)\times \\ \times \mathscr{W}_{j+k}^{(m_j,\ldots,m_1,n_1,\ldots,n_k)}(x_j,\ldots,x_1,y_1,\ldots,y_k) f_k(y_1,\ldots,y_k) \geq 0$$

3. Die m-Punkt Distributionen genügen der **Lokalität**: Es seien

$$f_1,\ldots,f_m \in \mathscr{C}_0^\infty(M,\Omega_1)$$

wobei die Träger von f_i und f_{i+1} raumartig getrennt liegen. Dann gelte

$$\mathscr{W}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}(f_1\otimes\cdots\otimes f_i\otimes f_{i+1}\otimes\cdots\otimes f_m) \\ = \mathscr{W}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}(f_1\otimes\cdots\otimes f_{i+1}\otimes f_i\otimes\cdots\otimes f_m)$$

4. Die Wick-Monome bezüglich eines quasifreien Zustandes, welcher der mikrolokalen Spektrumsbedingung genügt, sind wohldefinierte Wightman-Felder auf dem GNS-Hilbertraum.

Einen Beweis findet man bei Brunetti, Fredenhagen und Köhler [4].

2.3.3 Der Skalenlimes Teil I

Im folgenden soll eine weitere Möglichkeit der Konstruktion von Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten angesprochen werden, die Methode des *Skalenlimes*. Diese Methode wird später zur Definition des Skalengrades benötigt, um die singuläre Ordnung von Distributionen zu bestimmen.

Wie der Name bereits suggeriert, analysiert der Skalenlimes das Kurzabstandsverhalten physikalischer Zustände. Damit besteht die Möglichkeit, die Theorie auf Berechnungen im Tangentialraum zu reduzieren, da dieser als Skalenlimes eines beliebigen Zustandes der allgemeinen Theorie aufgefaßt werden kann, womit man in den Genuß von Translationsinvarianz und (lokalen) Fouriertransformationen kommt. Einzelheiten und Beweise findet man in der Arbeit von K. Fredenhagen und R. Haag [17]. Man betrachte die Umgebung $\mathscr{O}$ eines Punktes x der Mannigfaltigkeit und ein Vektorfeld X, welches bei x verschwindet:

$$X^\mu(y) = y^\mu - x^\mu + O((x-y)^2)\ .$$

Hierbei kann y mit Hilfe eines Parameters λ so skaliert werden, daß für $\lambda \to 0$ das Vektorfeld verschwindet. Die Abhängigkeit von diesem Parameter wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \lambda^{-1} X(y(\lambda))$$

gegeben, wobei $y^\mu(1) = y \in \mathscr{O}$ und $\lambda \in [0,1]$. Diese Gleichung kann so aufgefaßt werden, daß sie die Umgebung $\mathscr{O}$ zum Punkt x kontrahiert. Die Lösungen definieren eine 1-Parameter Halbgruppe lokaler Diffeomorphismen $g^X(\lambda)y = y(\lambda)$. Es sei $\eta^X y$ der Tangentialvektor an der Stelle $\lambda = 0$ der Kurve $y(\lambda)$. η^X kann als Diffeomorphismus der Umgebung $\mathscr{O}$ in den Tangentialraum T_xM aufgefaßt werden. Es gilt:

$$\eta^X g^X(\lambda) = \lambda \eta^X$$

Es existiert ein Morphismus $\alpha(g^X(\lambda))$ der die Borchers-Uhlmann Algebra $\mathfrak{A}_U(\mathscr{O})$ auf $\mathfrak{A}_U(g^X(\lambda)\mathscr{O})$ abbildet. Ebenso ist $\alpha(\eta^X)$ ein Morphismus von $\mathfrak{A}_U(\mathscr{O})$ auf die Tensoralgebra $\widehat{\mathfrak{A}}_U$ der Testfunktionen auf dem Tangentialraum T_xM mit Träger $\widehat{\mathscr{O}} = \eta^X \mathscr{O}$. Für die Hierarchie der Testfunktionen $f^{(n)} \in \mathscr{D}(\mathscr{O}^n)$ gilt:

$$\left(\alpha(\eta^X) f^{(n)}\right)(z_1, \ldots, z_n) = f^{(n)}(y_1, \ldots, y_n) ,$$

wobei $z_i = \eta^X y_i$ die Koordinaten des Tangentialraumes T_xM seien. Die angesprochenen Morphismen können so zusammengesetzt werden. Eine hilfreiche Gleichung ist hierbei

$$\alpha(\eta^X)\alpha(g^X(\lambda))\alpha((\eta^x)^{-1}) = \hat{\alpha}(\lambda) = \alpha(\hat{D}(\lambda)) ,$$

wobei $\hat{D}(\lambda)$ die Dilation im Tangentialraum darstellt:

$$\left(\alpha(\hat{D}(\lambda))\hat{f}^{(n)}\right)(z_1, \ldots, z_n) = \hat{f}(\lambda^{-1} z_1, \ldots, \lambda^{-1} z_n) .$$

Mit diesen Vorbemerkungen kann jetzt der *Skalenlimes* definiert werden:

Definition 2.3.6 *Ein Zustand ω auf $\mathfrak{A}_U(\mathscr{O})$ besitzt einen Skalenlimes bezüglich eines kontrahierenden Vektorfeldes X, wenn eine positive, monotone Skalenfunktion $N(\lambda)$ existiert, so daß $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall f^{(n)} \in \mathscr{D}(\mathscr{O}^n)$ der Grenzwert $\lim_{\lambda \to 0} N(\lambda)^n \omega(\alpha((\eta^X)^{-1})\hat{\alpha}(\lambda)\hat{f}^{(n)})$ existiert (siehe Haag 93 [20]).*

Hierbei ist zu beachten, daß in diesem Konzept bis jetzt keine Metrik gewählt wurde, was später nachgeholt wird. Damit kann dann der Skalenlimes durch die Wahl eines bestimmten Diffeomorphismus η^X physikalisch ausgezeichnet werden. Praktikabel ist die Wahl der Exponentialabbildung. Mehr dazu an späterer Stelle.

Kapitel 3

Die Zweipunktfunktion

In den folgenden Kapiteln sollen störungstheoretische Aspekte zweiter Ordnung betrachtet werden, insbesondere die Renormierung von Einschleifen-Graphen. Hierfür sind explizite Darstellungen der Propagatoren (bzw. der Zweipunkt-Funktionen, diese reichen für die Renormierung aus) notwendig, die im folgenden konstruiert werden sollen. Bei der Renormierung ist das Kurzabstandsverhalten der Propagatoren entscheidend, daher reicht es aus, wie zuvor bereits erwähnt wurde, die Theorie in Tangentialräumen zu betrachten. Hierbei gibt es die Möglichkeit, daß die Geodäten der Mannigfaltigkeit auf Geraden im Tangentialraum abgebildet werden. Die so gewonnenen Ausdrücke sind gültig innerhalb einer konvexen Normalumgebung, man spricht von Normalkoordinaten. Dieses Konzept wurde bereits 1979 von Bunch und Parker [7] benutzt. Es wurde in dieser Arbeit zwar darauf hingewiesen, daß diese Konstruktion auch für Lorentz-Mannigfaltigkeiten richtig sei, die Konstruktion selbst jedoch bezog sich ausschließlich auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Darüber hinaus weist die Berechnung einige mathematische Schwachstellen auf, die bei der folgenden Konstruktion vermieden werden sollen.

3.1 Normalkoordinaten

Zur Darstellung der Klein-Gordon Gleichung auf Lorentzschen Mannigfaltigkeiten bieten sich, wie bereits gesagt, Riemannsche Normalkoordinaten an. Diese Darstellung folgt Nakahara [30]. Gegeben sei also eine Lorentzsche Mannigfaltigkeit (M, g) und eine Geodäte $c(t)$ auf (M, g) mit

$$c(0) = \overset{0}{x} \quad . \tag{3.1}$$

Der Tangentialvektor an diesem Punkt ist

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\overset{0}{x}} = X = X^\mu e_\mu \in T_{\overset{0}{x}} M \ , \tag{3.2}$$

wobei $\{e_\mu\}$ eine Koordinatenbasis im Punkt $\overset{0}{x}$ darstellt. Es sei U eine Umgebung von $\overset{0}{x}$ und $y \in U$. Dann existiert genau eine Geodäte c_y so, daß

$$c_y(1) = y \quad \text{und} \quad c_y(0) = \overset{0}{x} \ . \tag{3.3}$$

Es sei jetzt $X_y \in T_{\overset{0}{x}} M$ der Tangentialvektor an c_y im Punkt $\overset{0}{x}$. Dann existiert eine Abbildung

$$\varphi : y \longrightarrow X_y^\mu \quad \text{mit} \quad X_y \equiv X_y^\mu e_\mu \in T_{\overset{0}{x}} M \ , \tag{3.4}$$

die als Koordinatensystem mit der Basis $\{e_\mu\}$ dient. Man definiert weiter eine Abbildung

$$\mathrm{EXP} : T_p M \longrightarrow M \tag{3.5}$$

durch

$$\mathrm{EXP}(X_y) = y \quad \text{so daß} \quad \varphi(\mathrm{EXP}(X_y^\mu e_\mu)) = X_y^\mu \ . \tag{3.6}$$

Ein solches Koordinatensystem heißt **Riemannsches Normalkoordinatensystem**. Eine Geodäte $c(t)$ mit $c(0) = \overset{0}{x}$ und $c(1) = y$ hat die Riemannsche Normalkoordinatendarstellung

$$\varphi(c(t)) = X^\mu = X_y^\mu t \ , \tag{3.7}$$

d.h. Geodäten werden auf Geraden abgebildet. Für die Geodätengleichung gilt nun

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}^2 X^\mu}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(X_y^\kappa t) \frac{\mathrm{d}X^\nu}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}X^\lambda}{\mathrm{d}t} \\ &= \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(X_y^\kappa) X_y^\nu X_y^\lambda \qquad \forall\ X_y^\nu \in U \end{aligned} \tag{3.8}$$

wobei U eine Umgebung von $\overset{0}{x}$ ist. Daraus folgt nun

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(\overset{0}{x}) = 0 \ . \tag{3.9}$$

Man beachte, daß im allgemeinen $\partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda}(\overset{0}{x}) \neq 0$ gilt. Da der Tangentialraum einer Lorentzschen Mannigfaltigkeit isomorph zum Minkowski-Raum ist und die Basisvektoren des Tangentialraums als Koordinatenbasis des Riemannschen Koordinatensystems dienen, existiert bezüglich des Riemannschen Koordinatensystems eine Fourier-Darstellung (insbesondere gilt bei gleichmäßiger Konvergenz des Skalenlimes Translationsinvarianz).

Es soll nun versucht werden, die Klein-Gordon Gleichung durch Riemannsche Normalkoordinaten auszudrücken. Zu diesem Zweck muß die Metrik nach diesen Koordinaten entwickelt werden (siehe auch Petrow [33]). Für einen beliebigen Tensor gilt:

$$T_{\alpha_1\cdots\alpha_n} = \overset{0}{T}_{\alpha_1\cdots\alpha_n} + \left.\frac{\partial T_{\alpha_1\cdots\alpha_n}}{\partial y^\nu}\right|_{\overset{0}{x}} y^\nu + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 T_{\alpha_1\cdots\alpha_n}}{\partial y^\mu \partial y^\nu}\right|_{\overset{0}{x}} y^\mu y^\nu + \ldots$$

mit $\overset{0}{T} = T(\overset{0}{x})$. in Riemannschen Normalkoordinaten ist

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(\overset{0}{x}) = 0 \quad , \quad \partial_{(\varrho}\Gamma^\mu_{\nu\lambda)}(\overset{0}{x}) = 0 \quad , \cdots , \quad \partial_{(\varrho_1\cdots\varrho_n}\Gamma^\mu_{\nu\lambda)}(\overset{0}{x}) = 0 \tag{3.10}$$

$$\partial_{(\varrho}\Gamma^\mu_{\nu)\lambda}(\overset{0}{x}) = \tfrac{1}{3}R^\mu{}_{(\varrho\nu)\lambda}(\overset{0}{x}) \quad , \quad \partial_{(\varrho\sigma}\Gamma^\mu_{\nu)\lambda}(\overset{0}{x}) = -\tfrac{1}{2}R^\mu{}_{\lambda(\varrho\sigma;\nu)}(\overset{0}{x}), \cdots \tag{3.11}$$

Jetzt können die partiellen Ableitungen durch die kovarianten ausgedrückt werden. Man erhält unter Verwendung der Beziehungen (3.10) und (3.11):

$$\begin{aligned} T_{\alpha_1\cdots\alpha_n} = {} & \overset{0}{T}_{\alpha_1\cdots\alpha_n} + \overset{0}{T}_{\alpha_1\cdots\alpha_n;\mu}\, y^\mu + \\ & + \tfrac{1}{2!}\left(\overset{0}{T}_{\alpha_1\cdots\alpha_n;\mu;\nu} - \tfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} R^\lambda{}_{\mu\alpha_k\nu}(\overset{0}{x})\, \overset{0}{T}_{\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}\lambda\alpha_{k+1}\cdots;\alpha_n} \right) y^\mu y^\nu + \\ & + \tfrac{1}{3!}\left(\overset{0}{T}_{\alpha_1\cdots\alpha_n;\mu;\nu;\sigma} - \sum_{k=1}^{n} R^\lambda{}_{\mu\alpha_k\nu}(\overset{0}{x})\, \overset{0}{T}_{\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}\lambda\alpha_{k+1}\cdots\alpha_n;\sigma} - \right. \\ & \left. - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} R^\lambda{}_{\mu\alpha_k\nu}(\overset{0}{x})\, \overset{0}{T}_{\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}\lambda\alpha_{k+1}\cdots\alpha_n} \right) y^\mu y^\nu y^\sigma + O(y^4) \end{aligned}$$

Damit folgt für die Komponenten des metrischen Tensors unter Berücksichtigung der Kompatibilität:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} = {} & \eta_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{3}R_{\alpha\mu\beta\lambda}(\overset{0}{x})y^\mu y^\lambda - \tfrac{1}{3!}R_{\alpha\gamma\beta\lambda;\mu}(\overset{0}{x})y^\lambda y^\mu y^\gamma + \\ & + \tfrac{1}{5!}\left(-6R_{\alpha\delta\beta\gamma;\lambda;\mu}(\overset{0}{x}) + \tfrac{16}{3}R_{\lambda\beta\mu}{}^{\varrho}(\overset{0}{x})R_{\gamma\alpha\delta\varrho}(\overset{0}{x})\right) y^\lambda y^\mu y^\gamma y^\delta + O(y^5) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Hiermit erhält man folgende noch benötigte Beziehungen (vgl. L. Parker '78

[32]):

$$g \equiv \det(g^{\mu\nu}) = 1 - \tfrac{1}{3}R_{\mu\lambda}(\overset{0}{x})y^\mu y^\lambda - \tfrac{1}{6}R_{\gamma\lambda;\mu}(\overset{0}{x})y^\lambda y^\gamma y^\mu - \\ - \tfrac{1}{24}\left(-\tfrac{4}{3}R_{\mu\lambda}(\overset{0}{x})R_{\sigma\varepsilon}(\overset{0}{x}) + \tfrac{4}{15}R_{\alpha\mu\lambda}{}^{\beta}(\overset{0}{x})R^{\alpha}{}_{\varepsilon\sigma\beta}(\overset{0}{x}) + \\ + \tfrac{6}{5}R_{\mu\lambda;\sigma;\varepsilon}(\overset{0}{x})\right) y^\mu y^\lambda y^\sigma y^\varepsilon + O(y^5) \tag{3.13}$$

$$\sqrt{-g} = 1 - \tfrac{1}{6}R_{\mu\lambda}(\overset{0}{x})y^\mu y^\lambda - \tfrac{1}{12}R_{\gamma\lambda;\mu}(\overset{0}{x})y^\lambda y^\gamma y^\mu - \\ - \tfrac{1}{48}\left(-\tfrac{4}{3}R_{\mu\lambda}(\overset{0}{x})R_{\sigma\varepsilon}(\overset{0}{x}) + \tfrac{4}{15}R_{\alpha\mu\lambda}{}^{\beta}(\overset{0}{x})R^{\alpha}{}_{\varepsilon\sigma\beta}(\overset{0}{x}) + \\ + \tfrac{6}{5}R_{\mu\lambda;\sigma;\varepsilon}(\overset{0}{x})\right) y^\mu y^\lambda y^\sigma y^\varepsilon + O(y^5) \tag{3.14}$$

$$(-g)^{-1/4} = 1 + \tfrac{1}{12}R_{\mu\lambda}(\overset{0}{x})y^\mu y^\lambda + \tfrac{1}{24}R_{\gamma\lambda;\mu}(\overset{0}{x})y^\lambda y^\gamma y^\mu + \\ + \tfrac{1}{96}\left(\tfrac{1}{3}R_{\mu\lambda}(\overset{0}{x})R_{\sigma\varepsilon}(\overset{0}{x}) + \tfrac{4}{15}R_{\alpha\mu\lambda}{}^{\beta}(\overset{0}{x})R^{\alpha}{}_{\varepsilon\sigma\beta}(\overset{0}{x}) + \\ + \tfrac{6}{5}R_{\mu\lambda;\sigma;\varepsilon}(\overset{0}{x})\right) y^\mu y^\lambda y^\sigma y^\varepsilon + O(y^5) \tag{3.15}$$

Es wird jetzt die Klein-Gordon Gleichung betrachtet:

$$\left(\nabla^\mu \nabla_\mu + m^2 + \zeta R\right) \Delta(x, x') = 0$$

wobei Δ die Fundamentallösung der Klein-Gordon Gleichung darstellt. Hierbei ist

$$\nabla^\mu \nabla_\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\right) \tag{3.16}$$

und

$$\Delta(x, x') \equiv -g^{-1/4}(x)\bar{\Delta}(x, x')g^{-1/4}(x')\ , \tag{3.17}$$

wobei zu beachten ist, daß $g^{-1/4}(\overset{0}{x}) = 1$ und $x' = \overset{0}{x}$ sowie $x = y$ ist. Damit ergibt sich

$$0 = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\bar{\Delta}(y, \overset{0}{x}) - \left[m^2 + \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right)R(\overset{0}{x})\right]\bar{\Delta}(y, \overset{0}{x}) - \\ - \tfrac{1}{3}R_\alpha{}^\nu(\overset{0}{x})y^\alpha\partial_\nu\bar{\Delta}(y, \overset{0}{x}) + \tfrac{1}{3}R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta(\overset{0}{x})y^\alpha y^\beta\partial_\mu\partial_\nu\bar{\Delta}(y, \overset{0}{x}) + O(y^3)\ . \tag{3.18}$$

Dieser Ausdruck kann weiter vereinfacht werden. Nach Parker und Bunch 1979 [7] verschwinden die Ausdrücke der Form

$$-\tfrac{1}{3}R_\alpha{}^\nu(\overset{0}{x})y^\alpha\partial_\nu\bar{\Delta}(y, \overset{0}{x}) + \tfrac{1}{3}R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta(\overset{0}{x})y^\alpha y^\beta\partial_\mu\partial_\nu\bar{\Delta}(y, \overset{0}{x})$$

aufgrund der Lorentzkovarianz der Δ-Funktion. Im folgenden wird zunächst der Operator

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2 - \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right) R(\overset{0}{x})$$

betrachtet. Es wird sich später zeigen, daß das Problem auf die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung zurückgeführt werden kann.

3.2 Fourierintegraloperatoren

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Differentialgleichung (3.18) *hyperbolisch* ist (Definition dieses Begriffs siehe unten). Die Lösungen der Differentialgleichungen dieses Typs können nicht mehr auf Pseudodifferentialoperatoren zurückgeführt werden, man benötigt hierfür die allgemeineren *Fourierintegraloperatoren*. Weiter wird die Fundamentallösung und somit die Zweipunktfunktion im nächsten Abschnitt explizit konstruiert. Die Darstellung folgt dem Buch von Trèves [41], Details findet man in den Arbeiten von Duistermaat und Hörmander [24] [15].

Man definiert zunächst folgende Schreibweise: Ein Differentialoperator ist gegeben durch

$$P(\mathrm{D}) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha, \qquad \alpha \text{ Multiindex}\ . \tag{3.19}$$

Der Operator

$$P_m(\mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha \tag{3.20}$$

soll *Hauptteil* des Operators P heißen.

DEFINITION 3.2.1 *Es sei $P(\mathrm{D}) \equiv \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha$ ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Das Polynom*

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \xi^\alpha \tag{3.21}$$

heißt das zu $P(\mathrm{D})$ zugehörige Symbol.

Um die Klein-Gordon Gleichung analysieren zu können, müssen Operatoren der Form

$$P(x,t,\mathrm{D}_x,\partial_t) = \partial_t^m + \sum_{j=1}^{m} P_j(x,t,\mathrm{D}_x)\partial_t^{m-j} \tag{3.22}$$

betrachtet werden. Die folgenden Definitionen und Analysen folgen dem Buch von Trevès. Die Analyse soll sich zunächst auf die Entwicklung bis zur dritten Ordnung in y beschränken. Um die bereits angesprochene Hyperbolizität präziser zu fassen, ist wegen der konstanten Koeffizienten die folgende Definition ausreichend:

Definition 3.2.2 *Ein Operator $P(\mathrm{D}_x, \partial_t)$ heißt streng hyperbolisch, wenn zu jedem festen $\xi \in \mathbb{R}, \xi \neq 0$, die Wurzeln des Polynoms $P_m(\xi, \tau)$ rein imaginär und verschieden sind* [41].

Es ist klar, daß der zu untersuchende Operator hyperbolisch ist: Es bezeichnen $\mathrm{i}\lambda(\xi)$ die Nullstellen des Polynoms $P_m(\xi, \tau)$. Dann ist

$$\mathrm{i}\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\xi^2} \tag{3.23}$$

für den Operator

$$P(\mathrm{D}_x\partial_t) = -\mathrm{D}_x^2 - \partial_t^2 + m^2 + \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right) R\,, \tag{3.24}$$

wobei der Kürze halber $\mathrm{D}_x \equiv -\mathrm{i}\partial_x$ und $R \equiv R(\overset{0}{x})$ gesetzt wurde. Desweiteren sind noch folgende Definitionen notwendig:

Definition 3.2.3 *Es seien $m, \varrho, \delta \in \mathbb{R}$ und $0 \leq \delta \leq 1, \quad 0 \leq \varrho \leq 1$. Dann heißt*

$$\begin{aligned} S^m_{\varrho,\delta}(X \times \mathbb{R}^n) = \\ \Big\{ a \in \mathscr{C}^\infty(X \times \mathbb{R}^n) \,\Big|\, |\mathrm{D}_x^\beta \mathrm{D}_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m-\varrho|\alpha|+\delta|\beta|} \\ \forall\, x \in K \subset\subset X, \xi \in \mathbb{R}^n \Big\} \end{aligned}$$

Die Menge der Symbole der Ordnung m vom Typ ϱ, δ [24].

Darüberhinaus wird noch der Begriff der Phasenfunktion benötigt:

Definition 3.2.4 *Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion ϕ heißt reelle Phasenfunktion, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:*

1. $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$
2. *ϕ ist positiv-homogen vom Grad 1 bezüglich der Kovariable.*
3. *$\mathrm{d}_{x,\theta}\phi$ und $\mathrm{d}_{y,\theta}\phi$ sind Differentiale von ϕ bezüglich (x, θ) und (y, θ), die nirgends auf $(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ verschwinden.*

Die folgende Konstruktion führt auf sogenannte Fourier-Integraloperatoren. Diese werden folgendermaßen definiert:

DEFINITION 3.2.5 *Operatoren der Form*

$$Fu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \left[\int e^{i\phi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta) u(y) dy \right] d\theta \tag{3.25}$$

heißen Fourierintegraloperatoren [41], [24].

Mit Hilfe der oben angegebenen Definitionen läßt sich nun eine Lösung des folgenden Problems konstruieren.

3.2.1 Konstruktion der Δ-Funktion

Um zu zeigen, daß sich die Lösung der Klein-Gordon Gleichung als Fourier-Integraloperator schreiben läßt, betrachten wir zunächst das Cauchy-Problem (ab jetzt wird der Strich über dem Δ fortgelassen).

$$\begin{aligned} P(\xi, \partial_t)\hat{u} &= \hat{f} \quad , \quad T_0 < t < T_1 \\ \partial_t^j \hat{u}\Big|_{t=0} &= \hat{u}_j \quad , \quad j = 0, \ldots, m-1 \ . \end{aligned} \tag{3.26}$$

Eine Lösung dieses Problems ist nun ganz allgemein gegeben durch

$$\hat{u}(\xi, t) = \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{E}_j(\xi, t)\hat{u}_j(\xi) + \int_0^t \tilde{E}_{m-1}(\xi, t-t')\hat{f}(\xi, t')dt' \ , \tag{3.27}$$

wobei $\tilde{E}_j$ eine Lösung des homogenen Problems

$$\begin{aligned} P(\xi, \partial_t)\tilde{E}_j(\xi, t) &= 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \\ \partial_t^k \tilde{E}_j(\xi, t)\Big|_{t=0} &= \begin{cases} 1 & \text{für} \quad j = k \\ 0 & \text{für} \quad j \neq k \end{cases} \end{aligned} \tag{3.28}$$

mit $j = 0, \ldots, m-1$ und $k = 1, \ldots, m$ darstellt. Das vorliegende Problem reduziert sich jedoch auf $f = 0$ und $m = 2$. Es seien nun τ_k die m paarweise verschiedenen Wurzeln des Polynoms $P(\xi, \tau)$ in τ. Damit ist eine Lösung des Cauchy-Problems (3.26) für $f = 0$ gegeben durch

$$h_k(\xi, t) = e^{i\tau_k(\xi)t} \quad , \quad \hat{u}_j = \tau_k^j \ . \tag{3.29}$$

Ferner folgt für diesen Fall aus (3.28)

$$h_k(\xi, t) = \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{E}_j(\xi, \tau)\tau_k^j(\xi) \ . \tag{3.30}$$

Eingesetzt in (3.29) ergibt sich ein Gleichungssystem, aus dem $\tilde{E}_j$ bestimmt werden kann. Es gilt im vorliegenden Fall (und auch ganz allgemein), daß sich immer ein $c_0 > 0$ finden läßt, so daß für linear unabhängige Fundamentallösungen gilt

$$c_0\,|\xi| \leq |\lambda_j - \lambda_k| \quad \text{für} \quad j \neq k, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\ . \tag{3.31}$$

Damit lassen sich die Wurzeln τ folgendermaßen in eine Reihe entwickeln:

$$\tau_k(\xi) = \mathrm{i}\lambda_k(\xi) + \sum_{l=0}^{\infty} \tau_{kl}(\xi)\ ,$$

wobei die τ_{kl} homogene Funktionen vom Grad $-l$ sind, d.h. die Reihe divergiert in einer Umgebung der Null. Man wählt daher ein $\varepsilon > |\xi|$ für das (3.29), (3.30) stets lösbar ist (die Forderung $|\xi| > 0$ reicht für gleichmäßige Konvergenz nicht mehr aus). Formal läßt sich für die Lösung schreiben:

$$\tilde{E}_j(\xi, t) = \sum_{k=1}^{m} c_{j,k}(\xi)\mathrm{e}^{t(\tau_k - \mathrm{i}\lambda_k)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k t} \equiv \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(\xi, t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k t}\ . \tag{3.32}$$

Man definiert jetzt einen linearen Operator der Form

$$E_j(t)u(y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\xi}\tilde{E}_j(\xi, t)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad u \in \mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)\ . \tag{3.33}$$

Mit den obigen Ergebnissen folgt

$$\begin{aligned} E_j(t)u(y) = {} & \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k=1}^{m}\int_{|\xi|>\varepsilon} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y\xi + t\lambda_k(\xi))}a_{jk}(\xi, t)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\xi|<\varepsilon} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\tilde{E}_j(\xi, t)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi\ . \end{aligned} \tag{3.34}$$

Offensichtlich läßt sich die Lösung von (3.28) als Summe von Spezialfällen von Fourier-Integraloperatoren (modulo eines Pseudodifferentialoperators) darstellen. Die Phasenfunktion lautet somit

$$\phi(y, t, \xi) = y\xi \pm \sqrt{\xi^2}t\ . \tag{3.35}$$

Damit sind die Eigenschaften 1.) und 2.) erfüllt. Da nun λ eine Lösung des Polynoms $P_m(\xi, \tau)$ ist, kann ϕ als Lösung der charakteristischen Gleichung aufgefaßt werden:

$$P_m(\partial_y\phi, \mathrm{i}\partial_t\phi) = 0$$

Als nächstes müssen die Symbole a bestimmt werden. Wendet man auf (3.34) den Differentialoperator an, ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \left[-\xi^2 - \partial_t^2 + m^2 + \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right) R\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k t} a_{jk}(\xi, t) \\ &= \left[-\xi^2 + m^2 + \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right) R\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k t} a_{jk}(\xi, t) - \partial_t^2 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k t} a_{jk}(\xi, t)\right) \\ &= \left[-\xi^2 + m^2 + \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right) R\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k t} a_{jk}(\xi, t) - \\ &\quad - \left(-\lambda_k^2 \mathrm{e}^{i\lambda_k t} a_{jk}(\xi, t) + 2\mathrm{i}\lambda_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k t} \partial_t a_{jk}(\xi, t) + \mathrm{e}^{i\lambda_k t} \partial_t^2 a_{jk}(\xi, t)\right) \ . \end{aligned}$$

Oder etwas vereinfacht

$$\ddot{a}_{jk}(\xi, t) + 2\mathrm{i}\lambda_k \dot{a}_{jk}(\xi, t) - \left[\xi^2 - \lambda_k^2 - m^2 - \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right) R\right] a_k(\xi, t) = 0 \ . \tag{3.36}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist fast trivial:

$$a_{jk}(\xi, t) = A_{jk}(\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[\lambda_k - \sqrt{\xi^2 - m^2 - \left(\zeta - \frac{1}{6}\right) R}\right] t} + B_{jk}(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\lambda_k - \sqrt{\xi^2 - m^2 - \left(\zeta - \frac{1}{6}\right) R}\right] t} \ . \tag{3.37}$$

Die Koeffizienten A und B lassen sich aus den Cauchy-Daten von (3.28) gewinnen:

$$A_{j1}(\xi) = B_{j1}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + m^2 + \left(\zeta - \frac{1}{6}\right) R}} \ . \tag{3.38}$$

Da j nur bis 1 läuft und k bis 2, ist klar, daß aus (3.28) folgt:

$$A_{j2}(\xi) = B_{j2}(\xi) = 0 \ . \tag{3.39}$$

Damit gehört a der Symbolklasse S^0 an. Die obige Lösung ist offensichtlich eine Verallgemeinerung des aus der herkömmlichen (Minkowskischen) Quantenfeldtheorie bekannten Ergebnisses. Dieses Ergebnis soll jetzt auf beliebige Ordnungen der Entwicklung nach Normalkoordinaten verallgemeinert werden. Dazu schreibt man für den gefundenen Differentialoperator

$$P(y, t, \mathrm{D}_y, \partial_t) = -\mathrm{D}_y^2 - \partial_t^2 + m^2 + \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right) R + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(R) \mathfrak{P}^n(t, y) \ , \tag{3.40}$$

wobei $\mathfrak{P}^n(t, y)$ ein Polynom vom Grad n in t und y ist. Die $K_n(R)$ sind Konstanten, die von der Krümmung an der Stelle $\overset{0}{x}$ abhängen und sich aus der Entwicklung nach Normalkoordinaten berechnen lassen.

DEFINITION 3.2.6 *Ein Operator $P(y, t, D_x, \partial_t)$ heißt streng hyperbolisch in $\Omega \times]T_0, T_1[$, wenn für jeden Punkt (x_0, t_0) dieser Menge ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $P(x_0, t_0, D_x, \partial_t)$ existiert, der streng hyperbolisch in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist* [41].

Wie zuvor wird eine Lösung des Problems

$$P(y,t,\mathrm{D}_y,\partial_t)u = f \quad \text{in } \Omega \times]T_0,T_1[\quad \text{mit} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \text{offen} \tag{3.41}$$

$$\partial_t^j u\big|_{t=0} = u_j \quad , \quad j = 0,\ldots,m-1 \quad \text{in} \quad \Omega\ . \tag{3.42}$$

Dieses läßt sich wieder reduzieren auf

$$P(y,t,\mathrm{D}_y,\partial_t)E_j(t,t') = 0 \quad \text{mit} \quad T_0 < t < T_1 \tag{3.43}$$

$$\partial_t^k E_j(t,t')\big|_{t=t'} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k \neq j \\ 1 & \text{für} \quad k = j \end{cases} \quad , \quad k = 0,\ldots,m-1 \tag{3.44}$$

wobei sich die Lösung von (3.41) schreiben läßt als

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{m-1} E_j(t)u_j(x) + \int_0^t E_{m-1}(t,t')f(y,t')\mathrm{d}t\ . \tag{3.45}$$

Die Lösung des homogenen Problems soll, wie zuvor auch, die Form haben

$$E_j(t)u(y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k=1}^{m}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_k(y,t,\xi)}a_{jk}(y,t,\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi + R_j(t)u(y)\ , \tag{3.46}$$

wobei R ein regularisierender Operator ist. Auch hier hat man

$$P_m(\partial_y\phi, \mathrm{i}\partial_t\phi) = 0 \Longrightarrow \phi(y,t,\xi) = y\xi \pm \mathrm{i}\sqrt{\xi^2}t\ . \tag{3.47}$$

Die Anwendung des Differentialoperators (3.40) auf Gleichung (3.46) ergibt:

$$E_j(t)u(y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k=1}^{m}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\xi}\left[-\xi^2 - \partial_t^2 + m^2 + \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right)R + \mathfrak{P}^n(t,y)\right] \times \\ \times\, a_{jk}(y,t,\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k t}\,\mathrm{d}\xi$$

Die Symbole werden jetzt in eine Reihe homogener Funktionen in y entwickelt, wobei der Homogenitätsgrad $+l$ sei:

$$a_{jk} = \sum_{l=0}^{\infty} a_{jkl}\ .$$

Die Differentialgleichung (3.43) muß für jeden Homogenitätsgrad separat erfüllt werden. Da die Multiplikation mit y den Homogenitätsgrad um 1 erhöht, ergibt entsprechendes Sortieren nach Homogenitätsgraden

$$\begin{aligned} \left[-\xi^2 - \partial_t^2 + m^2 + \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right)R\right] a_{jk0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k t} &= 0 \\ \left[-\xi^2 - \partial_t^2 + m^2 + \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right)R\right] a_{jk1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k t} &= K_1(R)\mathfrak{P}^1(t,y)a_{jk0} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.48}$$

und so fort. Damit kann das Problem rekursiv gelöst werden. Daß Differentialgleichungen vom Typ (3.48) immer gelöst werden können, ist schon aus Lehrbüchern bekannt (z.B. Forster). Nach partieller Integration lassen diese sich auf eine Form bringen, daß der folgende Satz angewandt werden kann:

Satz 3.2.1 *Sei $P(\tau) = \tau^n + c_{n-1}\tau^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[\tau]$ und $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion der Gestalt*

$$b(t) = f(t)\mathrm{e}^{\mu t} ,$$

wobei f ein Polynom in t mit komplexen Koeffizienten vom Grad m ist. Die Zahl $\mu \in \mathbb{C}$ sei Nullstelle k-ter Ordnung ($k \geq 0$) des Polynoms P. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$P(\partial_t)a = f(t)\mathrm{e}^{\mu t}$$

eine spezielle Lösung $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ der Gestalt

$$\varphi(t) = h(t)\mathrm{e}^{\mu t}$$

wobei h ein Polynom vom Grad $m + k$ ist.

Einen Beweis findet man in besagten Lehrbüchern. Für die Δ-Funktion kann daher geschrieben werden

$$\Delta(x, y) = \Delta_1(x, y) + \Delta_2(x, y) + \ldots$$

Der untere Index soll im folgenden als „Ordnung der Entwicklung der Fundamentallösung nach Normalkoordinaten“ bezeichnet werden. Es wird sich ferner zeigen, daß die Singularitätsstruktur ausschließlich vom Term niedrigster Ordnung herrührt. An dieser Stelle soll auf die expliziten Formen der einzelnen Terme nicht weiter eingegangen werden, da sie für die Renormierung nicht benötigt werden.

3.2.2 Konstruktion der Parametrices

Aus der Kenntnis der Zweipunktfunktion lassen sich auch die Parametrices bestimmen, in der Quantenfeldtheorie sind diese unter der Bezeichnung *Feynman-Propagatoren*[1] bekannt. Hier soll zunächst die herkömmliche Konstruktion angegeben werden, wie sie sich in fast allen Lehrbüchern über Quantenfeldtheorie finden läßt, und auf den Term niedrigster Ordnung beschränkt

[1] Diese Aussage ist nicht ganz korrekt, die Parametrices und der Feynman-Propagator stimmen bis auf einen $\mathscr{C}^\infty$-Teil überein.

werden. Es zeigt sich, daß sich die Klein-Gordon Gleichung schreiben läßt als

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\Delta(y) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\xi}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi y+\omega_\xi t)} - \mathrm{e}^{+\mathrm{i}(\xi y+\omega_\xi t)}}{2\sqrt{\xi^2+m^2+\left(\frac{1}{6}-\zeta\right)R}} \\
&\equiv \mathrm{i}\Delta^{(+)}(y) + \mathrm{i}\Delta^{(-)}(y)
\end{aligned}$$

mit $\omega_\xi = \sqrt{\xi^2+m^2+\left(\frac{1}{6}-\zeta\right)R}$. Man definiert als Greensche Funktion (oder „Feynman-Propagator")

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F}}(\overset{0}{x}-y) &= \mathrm{i}\Delta^{(+)}(\overset{0}{x}-y) \qquad \text{für} \quad \overset{0}{x}_0 > y_0 \\
\mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F}}(\overset{0}{x}-y) &= -\mathrm{i}\Delta^{(-)}(\overset{0}{x}-y) \quad \text{für} \quad \overset{0}{x}_0 < y_0
\end{aligned}$$

Der Kürze halber soll jetzt $\overset{0}{x} \equiv x$ gesetzt werden. Man erhält damit wie im Minkowski-Raum

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F}}(x-y) &= \Theta(x_0-y_0)\mathrm{i}\Delta^{(+)}(x-y) - \Theta(y_0-x_0)\mathrm{i}\Delta^{(-)}(x-y) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\xi}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(x-y)} \frac{1}{2\omega_\xi} \Big[\Theta(x_0-y_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\xi(x_0-y_0)} + \\
&\qquad\qquad + \Theta(y_0-x_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\xi(x_0-y_0)}\Big] \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}^3\xi}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(x-y)} \int_{\mathscr{C}} \frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau(x_0-y_0)}}{(\tau-\omega_\xi)(\tau+\omega_\xi)}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde im zweiten Summanden $\xi \to -\xi$ gesetzt und der Inhalt der eckigen Klammer als Residuum über den Integranden in der letzten Zeile aufgefaßt. Es zeigt sich, daß das Problem auf die positiven bzw. negativen Frequenzlösungen reduziert werden kann. Weiterhin zeigt sich, daß die Potenzen des Feynman-Propagators *nicht* existieren. Anhand der Wellenfrontmengen (siehe nächster Abschnitt) zeigt sich, daß das Produkt $\Delta^{(+)}\Delta^{(-)}$ nicht definiert ist, unabhängig davon, daß das Produkt der Sprungfunktionen Null ergibt (ein unbestimmter Ausdruck mit Null multipliziert bleibt unbestimmt). Der Grund hierfür liegt darin, daß die Feynman-Propagatoren *keine* Fourierintegral-Operatoren darstellen.

3.3 Wellenfrontmengen

Es soll jetzt gezeigt werden, daß alle Potenzen der Zweipunktfunktionen existieren und daß das Distributivgesetz auf die Reihenentwicklung angewendet werden darf. Diese Analyse folgt [38], wobei die Definition der Wellenfrontmenge in Kapitel 2 (Definition 2.3.1) zu finden ist.

Mit Hilfe dieser Wellenfrontmengen kann gezeigt werden, daß Produkte von Distributionen existieren. Dies geschieht mit dem folgenden Satz:

SATZ 3.3.1 *Es seien S und T Distributionen. Unter der Voraussetzung, daß*

$$\mathrm{WF}(T) \oplus \mathrm{WF}(S) \equiv \{(x, k_1 + k_2) \mid (x, k_1) \in \mathrm{WF}(T); (x, k_2) \in \mathrm{WF}(S)\} \tag{3.49}$$

kein Element der Form $(x, 0)$ enthält, existiert das Produkt TS mit der Wellenfrontmenge

$$\mathrm{WF}(TS) \subset \mathrm{WF}(T) \cup \mathrm{WF}(S) \cup [\mathrm{WF}(T) \oplus \mathrm{WF}(S)] \tag{3.50}$$

Für einen Beweis siehe [38]. Es genügt, wie bereits gezeigt wurde, die Wellenfrontmenge der positiven und negativen Frequenzlösungen $\Delta^{(+)}$ und $\Delta^{(-)}$ zu berechnen. Hierzu folgende Definition:

DEFINITION 3.3.1 ***(Mannigfaltigkeit stationärer Phase)**: Es sei $\phi(x, \xi)$ eine Phasenfunktion auf $\Omega \times \mathbb{R}^s$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und es sei*

$$\mathrm{M}_\phi = \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid (\nabla_\xi \phi)(x, \xi) = 0\} . \tag{3.51}$$

Die Menge

$$\Sigma_\phi = \{(x, (\nabla_x \phi))(x, \xi) \mid (x, \xi) \in \mathrm{M}_\phi\} \subset \Omega \times \mathbb{R}^n \tag{3.52}$$

heißt Mannigfaltigkeit stationärer Phase.

Zur Berechnung von Wellenfrontmengen wird noch folgender Satz benötigt:

SATZ 3.3.2 *Für ein oszillatorisches Integral*

$$I = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(x,\xi)} a(x, \xi) \mathrm{d}\xi$$

ist die Wellenfrontmenge

$$\mathrm{WF}(I) \subset \Sigma_\phi \tag{3.53}$$

Für einen Beweis siehe ebenfalls [38]. Man beachte, daß bei der sukzessiven Konstruktion der Fundamentallösung die Phasenfunktion auch bei Termen höherer Ordnung nicht verändert wird (es ändert sich lediglich das Symbol). Es genügt also, die Wellenfrontmenge für den Term niedrigster Ordnung der Entwicklung nach Normalkoordinaten zu berechnen. Diese Rechnung ist wohlbekannt und soll hier der Vollständigkeit halber angegeben werden. Im vorliegenden Fall ist für $\Delta^{(+)}$:

$$\phi(y,\xi) = -t\,|\xi| + \vec{y}\cdot\vec{\xi}\,, \tag{3.54}$$

d.h.

$$\nabla_\xi \phi = -t\frac{\vec{\xi}}{|\xi|} + \vec{y}\,. \tag{3.55}$$

Man erhält also

$$\mathrm{M}_\phi = \{(y,\xi) \mid y = 0\} \cup \left\{(y,\xi) \,\middle|\, |\vec{y}| = |t| \neq 0,\ \vec{\xi} = \lambda\vec{y}t^{-1}, \lambda > 0\right\}. \tag{3.56}$$

Da nun $\nabla_x\phi = (-\,|\xi|\,, \vec{\xi})$ ist, folgt

$$\Sigma_\phi = \left\{(0,0;-|\xi|,\vec{\xi}) \,\middle|\, \vec{\xi}\in\mathbb{R}^3\right\} \cup \left\{(\pm|\vec{y}|,\vec{y};-\lambda|\vec{y}|,\mp\vec{y}) \,\middle|\, \vec{y}\in\mathbb{R}^3, \vec{y}\neq\vec{0}, \lambda>0\right\} \tag{3.57}$$

Die Mannigfaltigkeit stationärer Phase ist somit die Familie der Tangentialvektoren des Lichtkegels. Wie bereits erwähnt, gilt $\mathrm{WF}(\Delta^{(+)}) \subset \Sigma_\phi$. Es ist

$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{(0,0;-|\xi|,\vec{\xi}) \,\middle|\, \vec{\xi}\in\mathbb{R}^3\right\} \\ S_\pm &= \left\{(\pm|\vec{y}|,\vec{y};-\lambda|\vec{y}|,\mp\vec{y}) \,\middle|\, \vec{y}\in\mathbb{R}^3, \vec{y}\neq\vec{0}, \lambda>0\right\} \end{aligned}$$

Da $\Delta^{(+)}$ Lorentz-invariant ist, ist entweder S_+ von $\mathrm{WF}(\Delta^{(+)})$ oder S_- von $\mathrm{WF}(\Delta^{(+)})$ disjunkt. Falls S_+ von $\mathrm{WF}(\Delta^{(+)})$ disjunkt ist, muß $\Delta^{(+)}$ eine $\mathscr{C}^\infty$ Distribution sein. Die Fouriertransformierte von $\Delta^{(+)}$ ist jedoch nicht L^1, daher ist $S_+ \subset \mathrm{WF}(\Delta^{(+)})$. Da nun $\Delta^{(+)}(-x) = \overline{\Delta^{(-)}(x)}$ ist, gilt auch $S_- \subset \mathrm{WF}(\Delta^{(+)})$. Weiterhin ist $S_0 \subset \bar{S}_+$. Da $\mathrm{WF}(\Delta^{(+)})$ abgeschlossen ist, gilt $S_0 \subset \mathrm{WF}(\Delta^{(+)})$. Daraus folgt

$$\mathrm{WF}(\Delta^{(+)}) = \Sigma_\phi \tag{3.58}$$

Die Wellenfunktion der θ-Funktion ist gegeben durch

$$\mathrm{WF}(\theta) = \left\{(0,\vec{x};\pm\lambda,0) \,\middle|\, \vec{x}\in\mathbb{R}^3, \lambda\in\mathbb{R}_+\right\}. \tag{3.59}$$

Daher existiert das Produkt $\theta(y_0)\Delta^{(+)}(y)$ mit der Wellenfrontmenge

$$\mathrm{WF}(\theta(y_0)\Delta^{(+)}(y)) = \mathrm{WF}(\theta) \cup \mathrm{WF}(\Delta^{(+)}) \cup \left[\mathrm{WF}(\theta) \oplus \mathrm{WF}(\Delta^{(+)})\right]$$

Da, wie bereits erwähnt, bei der sukzessiven Bestimmung der Reihenglieder von $\Delta^{(+)}$ die Phasenfunktion nicht verändert wird, besitzen alle Reihenglieder dieselbe Wellenfrontmenge, d.h. bei der Produktbildung der Zweipunktfunktionen darf das Distributivgesetz trotz der auf dem ganzen Lichtkegel vorhandenen Singularitäten angewendet werden.

Kapitel 4

Störungstheorie

Im folgenden werden die störungstheoretischen Aspekte wie Renormierung behandelt. Hierbei wird wegen seiner formalen Eleganz vor allem das Epstein-Glaser Verfahren benutzt. Es existieren aber selbstverständlich bekanntere Verfahren, die mathematisch äquivalent sind, z.B. das Pauli-Villars Verfahren. Weiter soll kurz auf eine Verallgemeinerung auf gekrümmte Raumzeiten eingegangen werden. Berechnet werden sollen Einschleifen-Graphen, sowie deren minimale Subtraktion.

4.1 Das Epstein-Glaser Verfahren

Nachdem gezeigt wurde, daß die Produktbildung der Zweipunktfunktion bis auf den Nullpunkt unproblematisch ist, soll dieses Produkt in den Nullpunkt fortgesetzt („renormiert“) werden. Dies geschieht in sehr eleganter Weise mit dem Epstein-Glaser Verfahren. Im Gegensatz zu herkömmlichen störungstheoretischen Behandlungen quantenfeldtheoretischer Probleme treten hier keine UV-Divergenzen in der S-Matrix auf. Hierzu betrachte man die folgende formale Störungsreihe:

$$S(g) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n \, T_n(x_1, \ldots, x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) \, ,$$

wobei die $g(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ c-Zahlwertige Testfunktionen sind, deren Aufgabe es ist, anschaulich gesprochen, die Wechselwirkung zu einem bestimmten Zeitpunkt ein- bzw. auszuschalten. Die zeitgeordneten Produkte T_n^k, $k \leq 4$, besitzen folgende Eigenschaften (wir beschränken uns hier auf die

Minkowski-Raum Darstellung des Epstein-Glaser Formalismus ([16], [39]), da in Normalkoordinaten im Tangentialraum gerechnet wird, der isomorph zum Minkowski-Raum ist. Über eine Verallgemeinerung wird an anderer Stelle referiert):

1. $T_1^k(x) = :\varphi^k(x):$
2. $T_n^{k_1\cdots k_n}(x_1,\ldots,x_n)$ ist symmetrisch unter Permutation der Indices.
3. Falls keiner der Punkte $x_1,\ldots,x_l$, $1 \le l \le n$ in der Vergangenheit der Punkte $x_{l+1},\ldots,x_n$ liegt, faktorisiert das zeitgeordnete Produkt:

$$
\begin{aligned}
T_n^{k_1\cdots k_n}(x_1,\ldots,x_n) &= T_l^{k_1\cdots k_l}(x_1,\ldots,x_l)T_{n-l}^{k_{l+1}\cdots k_n}(x_{l+1},\ldots,x_n)\\
T_n^{k_1\cdots k_n}(x_1,\ldots,x_n) &= \sum t_n^{l_1\cdots l_n}(x_1,\ldots,x_n) :\varphi^{k_1-l_1}(x_1)\cdots\varphi^{k_n-l_n}(x_n):
\end{aligned}
$$

Die T_n lassen sich bis auf den Nullpunkt induktiv konstruieren. Im Epstein-Glaser Formalismus auf flacher Raumzeit definiert man nach Epstein und Glaser [16]

$$
\begin{aligned}
R'_n(x_1,\ldots,x_n) &= -T_1(x_1)T_{n-1}(x_2,\ldots,x_n)\\
A'_n(x_1,\ldots,x_n) &= -T_{n-1}(x_2,\ldots,x_n)T_1(x_1)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
R_n(x_1,\ldots,x_n) &= R'_n(x_1,\ldots,x_n) + T_n(x_1,\ldots,x_n)\\
A_n(x_1,\ldots,x_n) &= A'_n(x_1,\ldots,x_n) + T_n(x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned}
$$

Es gilt hierbei eine Distribution so zu finden, daß gilt

$$
\begin{aligned}
D_n(x_1,\ldots,x_n) &= R_n(x_1,\ldots,x_n) - A_n(x_1,\ldots,x_n)\\
&= R'_n(x_1,\ldots,x_n) - A'_n(x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned}
$$

mit den kausalen Trägereigenschaften

$$\operatorname{supp} R_n \subseteq \Gamma^+_{n-1}(x_n) \quad , \quad \operatorname{supp} A_n \subseteq \Gamma^-_{n-1}(x_n)$$

$$\Gamma^\pm_n(x) = \left\{ (x_1,\ldots,x_n) | \, x_j \in \bar{V}^\pm, \quad \forall\, j = 1,\ldots,n \right\}$$

Um das Fortsetzungsproblem zu lösen, schreibt man

$$D_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_k :\prod_l \varphi(x_l) d_n^k(x_1,\ldots,x_n) \prod_m \varphi(x_m):$$

mit $d_n^k(x) = r_n(x) - a_n(x)$ und $\operatorname{supp} r_n \subseteq \Gamma^+_{n-1}(x_n)$ sowie $\operatorname{supp} a_n \subseteq \Gamma^-_{n-1}(x_n)$. Man beachte, daß im Epstein-Glaser Verfahren die Translationsinvarianz eine zentrale Rolle spielt. Auf gekrümmten Raumzeiten muß diese Eigenschaft durch eine allgemeinere ersetzt werden, da die Translation bekanntlich kein Killing-Vektor(feld) ist und daher der Impuls nach dem Noether-Theorem nicht erhalten bleibt. Eine solche Erweiterung wurde von Brunetti und Fredenhagen vorgenommen [3]. Anstatt Translationsinvarianz fordert man hierbei

$$\mathrm{WF}(t_n) \subset \Gamma_n^{t_0} ,$$

wobei $\Gamma_n^{t_0}$ die Menge aller $(x_1, k_1; \ldots; x_n, k_n) \in T^*M^n \setminus \{0\}$ ist, für die ein Graph G existiert mit Vertices $\{1, \ldots, n\}$ und einer Zuordnung von Linien l von Vertex $i = s(l)$ zu $j = r(l)$ und von G zur zukunftsgerichteten Geodäte γ_l, die x_i und x_j verbindet sowie ein kovariant konstantes Kovektorfeld $k_l \in \bar{V}_+$ auf γ_l koparallel zu $\dot{\gamma}_l$, so daß

$$k_i = \sum_{m:s(m)=i} k_m(x_i) - \sum_{n:r(n)=i} k_n(x_i) .$$

Weiter zeigen Brunetti und Fredenhagen in Zusammenarbeit mit Köhler [4] die Existenz der Wick-Produkte auf gekrümmten Raumzeiten, worauf an früherer Stelle bereits eingegangen wurde.

Epstein und Glaser [16] [39] führen an dieser Stelle den Begriff der **singulären Ordnung** ein:

DEFINITION 4.1.1 *Eine Distribution $d(x)$ heißt singulär der Ordnung ω bei $x = 0$, wenn ganze Zahlen $M \geq 0,\ N \geq 0$ und für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ eine Konstante $K(\varepsilon) > 0$ so existieren, daß*

$$|\langle d, \phi\rangle| \leq K(\varepsilon) \sum_{|\alpha| \leq M} \sup_x (1 + |x|)^N \, |x|^L \, |D^\alpha \phi(x)|$$

$$\forall \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad L = \max(0, |\alpha| - \omega - \varepsilon) .$$

Auf gekrümmten Raumzeiten ist diese Definition etwas schwierig zu handhaben. Man verwendet daher stattdessen den Begriff des **Skalengrades** [3]. Zuvor wird jedoch noch der Begriff der *Konvergenz im Sinne der Hörmander Pseudotopologie* [24], [15], [3] benötigt:

DEFINITION 4.1.2 *Gegeben sei eine Folge von Distributionen*

$$u_i \in \mathscr{D}'_\Gamma(M) = \{v \in \mathscr{D}(M) \mid \mathrm{WF}(v) \subset \Gamma\} .$$

Für dem Fall, daß $u_i \to u$ schwach konvergiert und ein Pseudodifferentialoperator A mit $\mathrm{WF}(A) \cap \Gamma = \varnothing$ existiert, für den $Au_i \to Au$ gilt, heißt u_i ***konvergent im Sinne der Hörmander Pseudotopologie*** [3].

Hierbei ist Γ eine konische Teilmenge des Kotangentialbündels, die im folgenden genauer definiert wird.

DEFINITION 4.1.3 *Eine Distribution $d \in \mathscr{D}'(U)$ besitzt an der Stelle x den mikrolokalen Skalengrad ω bezüglich eines geschlossenen Kegels $\Gamma_x \subset T^*_x U \setminus \{0\}$ wenn gilt:*

1. *Es existiert eine geschlossene konische Menge $\Gamma \subset T^*U \setminus \{0\}$ mit $\Gamma \cap T^*_x U \subset \Gamma_x$ so daß $\mathrm{WF}(d)_\lambda \subset \Gamma$ für hinreichend kleine λ.*

2. *ω ist die kleinste ganze Zahl, so daß $\forall \omega' > \omega$ gilt*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{\omega'} d_\lambda = 0$$

im Sinne der Hörmander-Pseudotopologie auf $\mathscr{D}'_\Gamma(U)$ [3].

Für den vorliegenden Fall genügt jedoch eine schwächere Definition. Es sei $d \in \mathscr{D}'(U)$. Eine skalierte Distribution $d_\lambda \in \mathscr{D}'(U)$ ist dann definiert durch

$$d_\lambda \circ \alpha(k) = d \circ \alpha(\lambda k) \qquad k \in V \ , \quad 1 \geq \lambda \geq 0 \ .$$

d besitzt den Skalengrad $\omega \in \mathbb{R}$ an der Stelle x, wenn ω die kleinste ganze Zahl ist, für die mit $\omega' > \omega$

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{\omega'} d_\lambda(\varphi) = 0$$

gilt. Dieses Verfahren wurde von Brunetti und Fredenhagen entwickelt (siehe [3]), um die Renormierbarkeit der $\lambda\varphi^4$-Theorie in voller Allgemeinheit zu zeigen. Man unterscheidet jetzt zwei Fälle [39]:

1. $\omega \leq -1$. Hier ist $L > 0$ und es ist

$$r_n(x) = \prod_{j=1}^{n-1} \Theta(x_j^0 - x_n^0) d_n^k(x)$$

eine Lösung des Spaltungsproblems.

2. $\omega \geq 0$. Hier ist $L > 0$ für $|\alpha| \geq \omega + 1$. Um eine Lösung des Spaltungsproblems zu erhalten, konstruiert man Testfunktionen mit

$$\mathrm{D}^\alpha \phi(0) = 0 \quad \forall\, |\alpha| \leq \omega \; .$$

Hierzu führt man eine äußere Funktion $w(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ein, mit

$$w(0) = 1, \quad \mathrm{D}^\alpha w(0) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq |\alpha| \leq \omega$$

und definiert

$$(W\phi)(x) = \phi(x) - w(x) \sum_{|\alpha|=0}^{\omega} \frac{x^\alpha}{\alpha!} (\mathrm{D}^\alpha \phi)(0)$$

Mit dieser Testfunktion ist eine Spaltung von Distributionen wie oben möglich.

Wir wollen jetzt die singuläre Ordnung bzw. den Skalengrad der Zweipunktfunktion auf gekrümmten Raumzeiten berechnen. Dazu wird die Entwicklung der Klein-Gordon Gleichung nach Normalkoordinaten benutzt. Die Lösung des führenden Terms entspricht der Lösung im Minkowski-Raum mit einer skalierten Masse:

$$\Delta^{(+)}(y,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[y\mathbf{p} - \sqrt{\mathbf{p}^2 - M^2}\, t\right]}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 - M^2}} \,\mathrm{d}^3\mathbf{p} \; .$$

Mit $M^2 = m^2 - (\zeta - \frac{1}{6})R$, wobei R an der Stelle x, also dem fixierten Punkt des Normalkoordinatensystems, ausgewertet wird. Weiterhin wurde $\xi = \mathbf{p}$ gesetzt. Die Skalierung bezieht sich zunächst auf y und t:

$$\Delta^{(+)}(\lambda y,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\lambda y\mathbf{p} - \sqrt{\mathbf{p}^2 - M^2}\, \lambda t\right]}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 - M^2}} \mathrm{d}^3\mathbf{p} \; .$$

Die Skala λ wird nun auf den Impuls und die Masse übertragen:

$$\Delta^{(+)}(\lambda y,t) = \lambda^{-2} \Delta^{(+)}(x, \lambda M) \; .$$

Für kleine Skalen geht $\Delta^{(+)}(x,\lambda M)$ gegen die Zweipunktfunktion für den masselosen Fall. Es ergibt sich also für den Skalengrad $\omega = 2$. Später wird der Einloop-Graph diskutiert, d.h. es wird $\Delta^{(+)}(y,t)^2$ benötigt. Unter Berücksichtigung der Dimension $d = 4$ hat man dann $\omega = 0$. Wie sieht die Singuläre Ordnung der anderen Terme der Zweipunktfunktion aus? Nach (3.48) ist

$$\begin{aligned}
&\left[-\mathbf{p}^2 - \partial_t^2 + m^2 + \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right) R\right] a_{jk0} \mathrm{e}^{i\lambda_k t} = 0 \\
&\left[-\mathbf{p}^2 - \partial_t^2 + m^2 + \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right) R\right] a_{jk1} \mathrm{e}^{i\lambda_k t} = K_1(R) \mathfrak{P}^1(t,y) a_{jk0} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Man beachte, daß auf der rechten Seite der zweiten Zeile mit y, t multipliziert wird. Dadurch wird der Skalengrad um Eins erniedrigt. Auf der linken Seite taucht $\sqrt{-\mathbf{p}^2 + M^2}$ auf, d.h. bei der „Umwälzung“ der Skalierung auf den Impuls wird der Skalengrad nochmals erniedrigt. Insgesamt wird demnach der Skalengrad immer $\omega < -1$ sein, das zugehörige Spaltungsproblem ist also trivial. Dieses Ergebnis ist auch intuitiv klar: Die Singularität taucht ja erst bei zusammenfallenden Punkten auf. In diesem Fall verschwindet jedoch die Krümmung. Da die besagten Terme aber gerade von der Krümmung herrühren, können diese nicht zur Singularität beitragen. Damit ist auch ein weiterer Punkt erledigt: Die Transformation in den Ortsraum ergibt damit sofort die gewünschte Hadamard-Form der Zweipunktfunktion.

4.2 Der Ein-Loop Graph

Bei der Berechnung des Matrixelements in zweiter Ordnung ist folgendes zeitgeordnetes Produkt mit Hilfe des Wickschen Theorems auszuwerten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}\big(:\phi^4(x)::\phi^4(y):\big) = \\
&:\phi^4(x)\phi^4(y): \\
&+ 4^2\left[\Delta^{(+)}(x,y) - \Delta^{(-)}(x,y)\right] :\phi^3(x)\phi^3(y): \\
&+ \frac{4^2\cdot 3^2}{2!}\left[\left(\Delta^{(+)}(x,y)\right)^2 - \left(\Delta^{(-)}(x,y)\right)^2\right] :\phi^2(x)\phi^2(y): \\
&+ \frac{4^2\cdot 3^2\cdot 2^2}{3!}\left[\left(\Delta^{(+)}(x,y)\right)^3 - \left(\Delta^{(-)}(x,y)\right)^3\right] :\phi(x)\phi(y): \\
&+ \frac{4^2\cdot 3^2\cdot 2^2}{4!}\left[\left(\Delta^{(+)}(x,y)\right)^4 - \left(\Delta^{(-)}(x,y)\right)^4\right] .
\end{aligned}$$

Der für die Renormierung der Kopplungskonstanten wichtige Graph ist der sogenannte „Fisch“, sein Beitrag ist gegeben durch

$$D_2^{(3)}(x,y) = \left[\left(\Delta^{(+)}(x,y)\right)^2 - \left(\Delta^{(-)}(x,y)\right)^2\right] :\phi^2(x)\phi^2(y): \ .$$

Mit Hilfe des Epstein-Glaser Verfahrens errechnet man für den führenden Term in der Entwicklung nach Normalkoordinaten dieses Ausdrucks (für explizite Rechnungen siehe Anhang):

$$\hat{\Pi}(k) = \frac{\mathrm{i}}{32\pi^6}\int_0^1 \ln\left[k^2 x(1-x) - M^2 + \mathrm{i}\varepsilon\right] \ .$$

Hierbei ist $\hat{t}(k_0) = \hat{r}(k_0) - \hat{r}'(k_0)$ und $\hat{t}(k) = \hat{\Pi}(k)$. Dieser Ausdruck stimmt bis auf $M^2 = m^2 + (\zeta - \frac{1}{6})R$ mit dem Minkowski-Raum Ausdruck überein. Für eine verschwindende Krümmung sind alle Terme höherer Ordnung in der Entwicklung nach Normalkoordinaten Null und $M^2 = m^2$, so daß man, wie erwartet, den üblichen Ausdruck für die Minkowski-Raumzeit erhält.

4.3 Andere Regularisierungsverfahren

Das angewendete Epstein-Glaser Verfahren besticht durch seine formale Eleganz und seine mathematische Exaktheit. Allerdings ist es recht aufwendig, so daß sich die Frage nach Alternativen stellt, die von der Durchführung her einfacher sind bzw. sich auf Lehrbuchergebnisse zurückführen lassen. Eines dieser Regularisierungsverfahren ist die Regularisierung nach Pauli-Villars [35]. Dieses ist ebenso mathematisch exakt wie das Epstein-Glaser Verfahren. Alle Invarianten bleiben hier erhalten.

Wir betrachten zunächst die zeitgeordneten Distributionen ([16], französische Fassung):

$$T^{r_1 \cdots r_n}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mathrm{P}} \Theta(x^0_{\mathrm{P}_1} - x^0_{\mathrm{P}_2}) \cdots \Theta(x^0_{\mathrm{P}_{n-1}} - x^0_{\mathrm{P}_n}) \mathscr{L}^{(r_1)}(x_1) \cdots \mathscr{L}^{(r_n)}(x_n) \ ,$$

wobei

$$\mathscr{L}^{(r)}(x) = \frac{\nu!}{(\nu - r)!} : A(x)^{\nu - r} : \ ,$$

mit freien (skalaren) Feldern $A(x)$ ist. Im Pauli-Villars Verfahren werden die Felder $A(x)$ durch geeignete Felder $B(x)$ ersetzt. Um dies zu erreichen, faßt man den Fockraum $\mathscr{F}$ der freien Felder $A(x)$ als einen Teilraum des Fockraumes $\mathscr{H}$ der Felder $V_1(x), \ldots, V_n(x)$ auf. Die zu diesen Feldern gehörenden Massen seien $M_1, \ldots, M_n$, so daß $A(x) \equiv V_0(x)$ und $M_0 \equiv m$. Dann gilt

$$[V_j(x), V_k(y)] = \delta_{jk} \varepsilon_j \frac{1}{\mathrm{i}} \Delta(x, y; M_j), \qquad \varepsilon_j = 1, -1 \ .$$

Weiterhin gilt

$$\langle \Omega, V_j(x) V_k(y) \Omega \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j \frac{1}{\mathrm{i}} \Delta^{(+)}(x, y; M_j) \ .$$

Die Felder $B(x)$ sind nun definiert durch

$$B(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j V_j$$

mit $c_0 = 1$, wobei

$$\langle\Omega, B(x)B(y)\Omega\rangle = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon_j c_j^2 \Delta^{(+)}(x, y; M_j) \ .$$

In der Tat, für $M_j \to \infty$ mit $1 \leq j \leq N$ geht dieser Ausdruck gegen $\langle\Omega, A(x)A(y)\Omega\rangle$ im Sinne temperierter Distributionen. Man beachte, daß hier mit Ausdrücken operiert wird, die für $M \to \infty$ singulär werden. Es handelt sich hier lediglich um eine Regularisierung, nicht Renormierung! Die auftretenden singulären Terme müssen in der Lagrangedichte, z.B. im Falle des Ein-Loop Graphs, in der Kopplungskonstante absorbiert werden. Dies geschieht durch die Einführung der Gegenterme (*Counterterme*). Die numerischen Ergebnisse sind selbstverständlich identisch mit denen aus dem Epstein-Glaser Verfahren gewonnenen Ausdrücken (siehe u.a. [10], [25], [45]). Anzumerken ist noch, daß sich die Rechnung auch mit Hilfe des Feynman-Propagators durchführen läßt. Die Regularisierung sorgt in diesem Fall für die Existenz der entsprechenden Produkte. Die Ergebnisse sind selbstverständlich auch in diesem Fall mit den oben genannten identisch.

Kapitel 5

Renormierung

5.1 Minimale Subtraktion

Die kausale Spaltung von Distributionen im Epstein-Glaser Formalismus ist nicht eindeutig, sie hängt von der Wahl der Funktion $w(x)$ ab. Es sei $\tilde{w}(x)$ eine zweite Funktion mit den erforderlichen Eigenschaften. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle r_m - \tilde{r}_m, \varphi\rangle &= \int \mathrm{d}x\, d(x)\chi(x)[\tilde{w}(x) - w(x)] \sum_{|\alpha|=0}^{\omega} \frac{x^\alpha}{\alpha!}(\mathrm{D}^\alpha\varphi)(0) \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^{\omega} c_\alpha(\mathrm{D}^\alpha\varphi)(0)\end{aligned}$$

d.h.

$$r_m - \tilde{r}_m = \sum_{|\alpha|=0}^{\omega} c_\alpha \mathrm{D}^\alpha\delta(x)\ .$$

Die Konstanten c_α sollen nun fixiert werden. Darüber hinaus müssen noch vorhandene Masse-null Singularitäten beseitigt werden. Wir wählen die Funktion $w(x) \to w(\mu x) = w_\mu(x)$ und $\tilde{w}(x) \to w(\mu' x) = w_{\mu'}(x)$, das sind gleichzeitig die neuen Renormierungsbedingungen (D. Prange benutzt in seiner Arbeit ebenfalls diese Renormierungsbedingungen [34]). Dann ist unter Berücksichtigung des Skalengrades

$$\int \Delta_{\mathrm{F}}^2(x)\,(w(\mu x) - w(\mu' x))\,\mathrm{d}x = c(\mu', \mu)$$

bzw.

$$\Delta_{\mathrm{F}}^2(x)_{\mu'} = \Delta_{\mathrm{F}}^2(x)_\mu + c(\mu', \mu)\delta(x)\ . \tag{5.1}$$

Die Konstante $c(\mu',\mu)$ läßt sich aus (5.1) ermitteln:

$$\Delta_{\mathrm{F}}^2(k)\big|_{\mu'^{-1}} - \Delta_{\mathrm{F}}^2(k)\big|_{\mu^{-1}} = c(\mu',\mu)\ .$$

Man erhält damit

$$c(\mu,\mu') = \frac{i}{32\pi^6}\int_0^1 \mathrm{d}\xi\ \ln\left[\frac{k^2\mu'^{-2} - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}{k^2\mu^{-2} - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\right]\ :$$

Für kleine Skalen, d.h. für $\mu' \to 0$ und $\mu \to 0$ erhält man schlie?lich

$$c(\mu,\mu') = \frac{\mathrm{i}}{32\pi^6}\ln\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^2$$

Wie nicht anders zu erwarten, in Übereinstimmung mit [34]. Die Beiträge aller anderen Entwicklungsterme verschwinden. Dieses Ergebnis ist klar, denn bei zusammenfallenden Punkten (bzw. unendlich großen Impulsen) verschwindet die Raumkrümmung.

5.2 Die Callan-Symanzik Gleichung

In diesem Abschnitt soll versucht werden, die Callan-Symanzik Gleichung auf gekrümmten Raumzeiten zu formulieren. Im Minkowski-Raum betrachtet man für gewöhnlich das Skalenverhalten der amputierten zusammenhängenden n-Punkt Green-Funktion, bezeichnet durch

$$\Gamma^{(n)}(p_1,\ldots,p_n,g,m)\ ,$$

wobei die äußeren Impulse wie oben skaliert werden. Für eine Formulierung auf gekrümmten Raumzeiten ist jedoch eine Ortsraumdarstellung in diesem Fall geeigneter. Man erhält für die skalierte Greensche Funktion

$$\Gamma^{(n)}(\mu x_1,\ldots,\mu x_n,g,m)\ .$$

Leitet man diesen Austruck nach μ ab und setzt $\mu = 1$, erhält man

$$\left[\sum_{i=1}^{n} x_n^\nu \frac{\partial}{\partial x_n^\nu} - (1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m} + \beta\frac{\partial}{\partial g} + \frac{n}{2}\gamma\right]\Gamma^{(n)} = 0\ .$$

Der Term $x_n^\nu \frac{\partial}{\partial x_n^\nu}$ läßt sich nicht auf gekrümmte Raumzeiten übertragen [31]. Einige Autoren ersetzen daher die Skalierung der Koordinaten (bzw. des Impulses) durch eine Skalierung der Metrik [31],[6] der Form $g_{\mu\nu} \to \mu^{-2}g_{\mu\nu}$. Für

$\mu \to \infty$ schrumpfen die geodätischen Abstände zusammen. Betrachtet man jedoch die Krümmung, so erhält man für diese Skalierung [6]

$$R^2 \to \mu^4 R^2, \qquad R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \to \mu^4 R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu\kappa\varrho}R^{\mu\nu\kappa\varrho} \to \mu^4 R_{\mu\nu\kappa\varrho}R^{\mu\nu\kappa\varrho} \ .$$

Das heißt, daß der Limes $\mu \to \infty$ physikalisch dem Fall sehr starker (genaugenommen unendlich starker) Gravitationsfelder entspricht. Dieser Fall ist jedoch physikalisch schwierig zu handhaben, so daß sich die Frage stellt, ob nicht eine alternative, mathematisch präzise Formulierung gefunden werden kann.

5.2.1 Der Skalenlimes Teil II

In Kapitel 2 wurde der Begriff des Skalenlimes eingeführt. In diesem Abschnitt sollen weitere Eigenschaften des Skalenlimes besprochen werden, mit deren Hilfe die Callan-Symanzik Gleichung reformuliert werden kann. Alle Bezeichnungen seien wie in Teil I.

Wie wir in Teil I gesehen haben, ist $\widehat{\mathfrak{A}}_U$ die Tensoralgebra der Testfunktionen im Tangentialraum. Der Skalenlimes kann nun, da $\alpha(\eta^X)$ eine lineare Abbildung ist, als ein Zustand auf dieser Algebra dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_X(\hat{f}^{(n)}) &= \lim_{\mu\to 0} N(\mu)^n \omega(g^X(\mu))\alpha\big(((\eta^X)^{-1})\hat{f}^{(n)}\big)\\ &= \lim_{\mu\to 0} N(\mu)^n \omega(\alpha(\eta^X)^{-1})\hat{\alpha}\big((\mu)\hat{f}^{(n)}\big) \ .\end{aligned}$$

Dieser Zustand besitzt folgende Eigenschaften (Theorem 3.2.2 in [20]):

1. Der Grenzzustand hängt ausschließlich vom Basispunkt ab. Diese Abhängigkeit ist durch die kovariante Ableitung gegeben.

2. Für die Skalenfunktion N gilt

$$\lim_{\mu'\to 0} \frac{N(\mu'\mu)}{N(\mu')} = \mu^\alpha \ .$$

3. Der Grenzzustand besitzt das Skalenverhalten

$$\hat{\omega}(\hat{\alpha}(\mu)\hat{f}^{(n)}) = \mu^{-n\alpha}\hat{\omega}(f^{(n)}) \ .$$

4. Wenn der Skalenlimes für $x \in \mathscr{O}$ gleichmäßig konvergiert, ist der Grenzzustand translationsinvariant.

Aufgrund dieser Eigenschaften ist es naheliegend, die Callan-Symanzik Gleichung auf gekrümmter Raumzeit durch eine Skalenlimesbildung auszudrükken, da der Skalenlimes alle Informationen bezügl. des Kurzabstandsverhaltens beinhaltet. Die Greensche Funktion kann aufgefaßt werden als eine Summe von Zuständen. Es liegt daher der folgende Ansatz für die Callan-Symanzik-Gleichung auf gekrümmten Raumzeiten nahe:

$$N(\mu^{-1})^{\alpha}\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + (1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m} + \right.$$
$$\left. +\gamma_\zeta\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} + \beta\frac{\partial}{\partial g} + \frac{n}{2}\gamma\right] \Gamma^{(n)}(\alpha((\eta^X)^{-1})\hat{\alpha}(\mu^{-1})\hat{f}^{(n)}) = 0 \ ,$$

denn mit Hilfe dieser Gleichung wird das Kurzabstandsverhalten analysiert, und für diese Aussagen ist der Skalenlimes ausreichend. Die Ergebnisse können dann unter Verwendung des affinen Zusammenhangs auf alle Punkte der Raumzeit übertragen werden. Man beachte, daß in der Klein-Gordon Gleichung neben der Masse der Term $R\zeta$ auftaucht („konforme Kopplung“). Dieser führt in obiger Gleichung auf den Term $\gamma_\zeta\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}$. In der Einschleifen-Näherung trägt dieser jedoch nicht bei.

Ein weiteres Problem hierbei ist, daß der Limes $\mu \to 0$ nicht fixiert ist. Das liegt daran, daß in dem ursprünglichen Konzept des Skalenlimes von Fredenhagen und Haag *keine* Metrik gewählt wurde. In den bereits angesprochenen Fällen hat man jedoch eine bestimme Metrik gewählt, daher kann ein Limes durch eine bestimmte Wahl des Diffeomorphismus η^X physikalisch ausgezeichnet werden. Im vorliegenden Fall ist die Wahl

$$\eta^X = \mathrm{EXP}$$

naheliegend. Damit können die bisher gewonnenen Ergebnisse für weitere Rechnungen herangezogen werden.

5.2.2 Die Beta-Funktion

Im folgenden soll die oben angesprochene Beta-Funktion berechnet werden. Hier wird allerdings der Zugang über die Callan-Symanzik Gleichung benutzt. Wir betrachten zunächst die skalierte Störungsreihe bis zur folgenden Ordnung:

$$S^{(4)} = \int :\phi(x)^4: g_{\mu'}(x)\mathrm{d}x + \int :\phi(x)^2\phi(y)^2: \Delta_{\mathrm{F}}^2(x,y)_{\mu'} g_{\mu'}(x) g_{\mu'}(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ .$$

Hierbei ist wie oben $\int \Delta_{\mathrm{F}}^2(x)(w(\mu x) - w(\mu' x))\mathrm{d}x = c(\mu', \mu)$. $\Delta_{\mathrm{F}}(x,y)_\mu$ bezeichnet den skalierten Feynman-Propagator. Setzt man jetzt

$$\Delta_{\mathrm{F}}^2(x)_{\mu'} = \Delta_{\mathrm{F}}^2(x)_\mu + c(\mu',\mu)\delta(x)$$

in obigen Ausdruck ein, erhält man

$$S^{(4)} = \int \boldsymbol{:}\, \phi(x)^4 \,\boldsymbol{:} \left[g_{\mu'}(x) + c(\mu',\mu) g_{\mu'}(x)^2\right] \mathrm{d}x + \int \cdots \Delta_{\mathrm{F}}^2(x,y)_\mu \cdots ,$$

so daß

$$g_\mu = g_{\mu'}(x) + c(\mu',\mu) g_{\mu'}(x)^2 \tag{5.2}$$

Die Konstante $c(\mu',\mu)$ läßt sich,wie zuvor, aus (5.1) ermitteln:

$$\Delta_{\mathrm{F}}^2(k)\big|_{\mu'} - \Delta_{\mathrm{F}}^2(k)\big|_{\mu} = c(\mu',\mu) \ .$$

Die Differentiation von (5.2) nach μ liefert

$$\frac{\mathrm{d}g_\mu}{\mathrm{d}\mu} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} c(\mu',\mu)\right] g_{\mu'}(x)^2$$

bzw.

$$\mu \frac{\mathrm{d}g_\mu}{\mathrm{d}\mu} = \left[\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} c(\mu',\mu)\right] g_{\mu'}(x)^2 \equiv \beta(g) \ .$$

Der Bequemlichkeit halber kann $g_\mu = G(g_{\mu'}, \frac{\mu}{\mu'}, \frac{m}{\mu'})$ geschrieben werden (vgl. [45]). Dann ist mit $z = \mu/\mu'$

$$\beta(g_{\mu'}, m/\mu') = \frac{\partial}{\partial z} G(g_{\mu'}, z, m/\mu')\bigg|_{z=1}$$

Dieser Ausdruck ist frei von Masse-Null Singularitäten. Die Koeffizienten der β-Funktion sollen jetzt explizit berechnet werden. In analoger Weise wird der dritte Term verarbeitet, d.h. wegen des Skalengrades $\omega < -1$ verschwinden all diese Terme und man erhält

$$\beta = 3$$

wie im Minkowski-Raum. Eine explizite Berechnung, auch der Terme höherer Ordnung in der Entwicklung nach Normalkoordinaten, findet sich im Anhang.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die ϕ^4 Theorie explizit in der Einschleifen-Näherung renormiert. Es wurde ein Ausdruck für die Zweipunkt-Funktion und für den Feynman-Propagator hergeleitet, der in einer offenen Normalumgebung gültig ist, bei der Herleitung wurde auf hohe mathematische Prazision Wert gelegt. Weiter wurde die Callan-Symanzik Gleichung auf gekrümmte Raumzeiten verallgemeinert, und zwar so, daß sie zumindest in erster Ordnung der Störungstheorie mathematisch wohldefiniert ist. Darüber hinaus wurde der Betafunktionskoeffizient in niedrigster Ordnung berechnet. Es soll hier nochmals darauf hingewiesen werden, das alle Ausdrücke auf Lorentzschen Mannigfaltigkeiten wohldefiniert sind, es ist kein Umweg über einen Euklidischen Zugang notwendig.

6.2 Ausblick

Wie bereits angesprochen, sind die gefundenen Ausdrücke nur in einer Normalumgebung gültig. Dies ist zwar für Renormierungszwecke ausreichend, jedoch wären globale Ausdrücke wünschenswert, um Effekte wie z.B. Lamb-Shift, etc. berechnen zu können. Weiter ist eine Berechnung höherer Loop-Graphen prinzipiell möglich, jedoch im Epstein-Glaser Formalismus recht aufwendig. Interessant in diesem Zusammenhang wären die Vakuumgraphen, da Bunch hier Schwierigkeiten vermutet [9]. Darüber hinaus muß noch gezeigt werden, daß der Ansatz für die Callan-Symanzik Gleichung auf gekrümmter Raumzeit für alle Ordnungen der Störungsreihe sinnvoll ist.

6.3 Danksagung

In erster Linie möchte ich Herrn Prof. Dr. K. Fredenhagen für die Bereitstellung eines interessanten Themas und die unermüdliche und geduldige Betreuung danken. Danken möchte ich auch den Herrn Dr. W. Junker und Dr. M. Köhler sowie den Diplomanden K.-H. Peters, D. Prange und M. Wellmann für die hilfreichen Diskussionen und Verbesserungsvorschläge.

Anhang A

Explizite Berechnungen

A.1 Der Ein-Loop Graph

Wir untersuchen zunächst den Term niedrigster Ordnung in der Entwicklung nach Normalkoordinaten, d.h. den singulären Term dieser Reihe. Dieser ist, wie bereits gezeigt wurde, gegeben durch

$$\begin{aligned}\left(\Delta^{(+)}(x,y)\right)^2 &\equiv d_1(y)\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^2}\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}py}\Theta(p_0)\delta(p^2-m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qy}\Theta(q_0)\delta(q^2-m^2)\end{aligned}$$

Die Fouriertransformation ist lokal in einem Normalkoordinatensystem möglich. Man beachte, daß x hierbei der Punkt ist, um den die Normalumgebung definiert wurde. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}d_1(k) &= \int d_1(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\int \mathrm{d}^4q\int \mathrm{d}y\,\Theta(p_0)\delta(p^2-m^2)\Theta(q_0)\delta(q^2-m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-p-q)y}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\int \mathrm{d}^4q\,\Theta(p_0)\delta(p^2-m^2)\Theta(q_0)\delta(q^2-m^2)\delta(p+q-k)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\,\Theta(p_0)\delta(p^2-m^2)\Theta(k_0-p_0)\delta((k-p)^2-m^2)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\,\Theta(p_0)\delta(p^2-m^2)\Theta(k_0-p_0)\delta(k^2-2kp)\ .\end{aligned}$$

Berücksichtigt man jetzt, daß $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ und wählt das Normalkoordinatensystem so, daß die räumlichen Komponenten von k verschwinden, erhält man

$$d_1(k_0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2E} \delta(k_0^2 - 2kE)\Theta(k_0 - E) \; .$$

Die Transformation in Kugelkoordinaten liefert nach Integration über die Winkel

$$\begin{aligned} d_1(k_0) &= \frac{1}{(2\pi)^4} 4\pi \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}|\vec{p}|}{E} \vec{p}^2 \delta\left(2k_0\left(\frac{k_0}{2} - E\right)\right)\Theta(k_0 - E) \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \int_m^\infty \mathrm{d}E |\vec{p}| \frac{\delta\left(E - \frac{k_0}{2}\right)}{2k_0} \Theta(k_0 - E) \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k_0^2}}\; \Theta(k_0)\Theta(k_0^2 - 4m^2) \; , \end{aligned}$$

wobei die zweite Sprungfunktion in der letzten Gleichung daher rührt, daß die Integration von m bis ∞ anstatt von $-\infty$ bis $+\infty$ geführt wurde. Die analytische Fortsetzung ergibt

$$d_1(k) = \frac{1}{8\pi^3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}\; \Theta(k_0)\Theta(k^2 - 4m^2) \; .$$

Skaliert man den Impuls wie zuvor gefordert, ergibt sich für die singuläre Ordnung $\omega = 0$, die Spaltung ist somit nichttrivial. Für alle anderen Terme der Entwicklung nach Normalkoordinaten ist die singuläre Ordnung offensichtlich $\omega < -1$, deren Spaltung ist also trivial. Es gilt weiterhin:

$$\left(\Delta^{(-)}(x,y)\right)^2 = d_1(-y)$$

d.h.

$$d(k) = d_1(k) - d_1(-k) = \frac{1}{8\pi^3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \Theta(k^2 - 4m^2)\operatorname{sgn}(k_0) \; ,$$

wegen $\Theta(x) - \Theta(-x) = \operatorname{sgn}(x)$. Die Distribution ist, wie bereits angesprochen, zu spalten gemäß

$$d_n^k(x) = r_n(x) - a_n(x) \; .$$

Im Impulsraum gilt für r [39]:

$$\hat{r}(p_0) = \frac{i}{2\pi} p_0^{\omega+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_0 \, \frac{d(k_0)}{(k_0 - \mathrm{i}\varepsilon)^{\omega+1}(p_0 + k_0 + \mathrm{i}\varepsilon)} \; .$$

Im vorliegenden Fall hat man

$$
\begin{aligned}
\hat{r}(k_0) &= c\mathrm{i}k_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_0' \sqrt{1-\frac{4m^2}{k_0'^2}}\, \Theta(k_0'^2-4m^2)\, \frac{\mathrm{sgn}(k_0)}{(k_0'+i\varepsilon)(k_0-k_0'+\mathrm{i}\varepsilon)} \\
&= c\mathrm{i}k_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_0' \sqrt{1-\frac{4m^2}{k_0'^2}} \left[\frac{\Theta(k_0'^2-4m^2)}{(k_0'+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0-k_0'+\mathrm{i}\varepsilon)} - \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{\Theta(k_0'^2-4m^2)}{(-k_0'+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+k_0'+\mathrm{i}\varepsilon)}\right] \\
&= c\mathrm{i}k_0 \int\limits_{0}^{+\infty} \mathrm{d}k_0' \frac{\sqrt{1-\frac{4m^2}{k_0'^2}}}{k_0'\left[(k_0+\mathrm{i}\varepsilon)^2-k_0'^2\right]}\, \Theta(k_0'^2-4m^2)
\end{aligned}
$$

Man substituiert nun $s = k_0'^2 \Rightarrow \mathrm{d}k_0' = \frac{\mathrm{d}s}{2k_0'}$. Damit ergibt sich

$$
\hat{r}(k_0) = c\mathrm{i}\frac{k_0^2}{2} \int\limits_{4m^2}^{\infty} \mathrm{d}s\, \frac{\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}}{s(k_0^2-s+\mathrm{i}k_0\varepsilon)}\ .
$$

Dieser Ausdruck wird nun folgendermaßen in Real- und Imaginärteil aufgespalten. Ganz allgemein gilt die Beziehung:

$$
\frac{1}{x+\mathrm{i}c\varepsilon} = \mathscr{P}\frac{1}{x} - \mathrm{sgn}(c)\mathrm{i}\pi\delta(x)\ .
$$

Hierbei bedeuten $\mathscr{P}$ der Hauptwert und c eine Konstante. Die obige Beziehung erhält damit folgende Form:

$$
\begin{aligned}
\hat{r}(k_0) &= c\mathrm{i}\, \frac{k_0^2}{2} \left[\frac{1}{k_0^2}\mathscr{P}\int\limits_{4m^2}^{\infty} \mathrm{d}s\, \sqrt{1-\frac{4m^2}{s}} \left(\frac{1}{s}+\frac{1}{k_0^2-s}\right) - \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \mathrm{i}\pi\ \mathrm{sgn}(k_0) \int\limits_{4m^2}^{\infty} \mathrm{d}s\ \frac{\delta(s-k_0^2)}{s}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\right] \\
&= c\mathrm{i}\, \frac{k_0^2}{2} \left[\frac{1}{k_0^2}\mathscr{P}\int\limits_{4m^2}^{\infty} \mathrm{d}s\, \sqrt{1-\frac{4m^2}{s}} \left(\frac{1}{s}+\frac{1}{k_0^2-s}\right) - \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \mathrm{i}\pi\frac{\Theta(k_0)-\Theta(-k_0)}{k_0^2}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\ \Theta(k_0^2-4m^2)\right]
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck kann mit der retardierten Funktion kombiniert werden. Diese ist gegeben durch

$$\hat{r}'(k_0) = d_1(-k_0) = \frac{1}{8\pi^3}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\;\Theta(-k_0)\Theta(k_0^2-4m^2)\;.$$

Für die zeitgeordnete Distribution erhält man jetzt

$$\begin{aligned}
\hat{t}(k_0) &= \hat{r}(k_0) - \hat{r}'(k_0) \\
&= c\mathrm{i}\,\frac{k_0^2}{2}\left[\frac{1}{k_0^2}\mathscr{P}\int\limits_{4m^2}^{\infty} \mathrm{d}s\,\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{k_0^2-s}\right) - \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \,\mathrm{i}\pi\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\;\Theta(k_0^2-4m^2)\right] \\
&= c\mathrm{i}k_0 \int\limits_{4m^2}^{\infty} \mathrm{d}s\,\frac{\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}}{s(k_0^2-s+\mathrm{i}\varepsilon)}\;,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, daß

$$-\Theta(-x) - \frac{\Theta(x)-\Theta(-x)}{2} = -\frac{\Theta(x)+\Theta(-x)}{2} = \frac{1}{2}\;.$$

Die analytische Fortsetzung ergibt dann den gesuchten Ausdruck

$$\hat{t}(k) \equiv \hat{\varPi}(k) = \frac{\mathrm{i}k^2}{32\pi^6}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\mathrm{d}s\,\frac{\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}}{s(k^2-s+i\varepsilon)}\;.$$

Den in der Literatur üblichen Ausdruck erhält man mit der Substitution $M^2 = \frac{4m^2}{1-x^2}$, $M^2 = s$:

$$\hat{\varPi}(k) = \frac{\mathrm{i}}{32\pi^6}\int\limits_0^1 \ln\left[k^2x(1-x) - m^2 + i\varepsilon\right]$$

(siehe auch [10]). Alle anderen Entwicklungsterme besitzen einen Skalengrad $\omega < -1$, die Spaltung dieser Distributionen ist daher trivial.

A.2 Die Beta Funktion (Restterme)

Wir setzen nun den Ausdruck für den „Fisch-Graphen“ auf gekrümmter Raumzeit ein. Der erste Term ist klar, er liefert denselben Wert wie auf flacher Raumzeit. Der zweite Term liefert

$$\begin{aligned} G_2 &= \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right) \overset{0}{R} \int_0^1 \mathrm{d}\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} \mathrm{d}\xi_2 \left[\frac{1}{(\xi_2+\xi_2^2)\mu^2 - M^2 + \mathrm{i}\varepsilon} - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{1}{(\xi_2+\xi_2^2)\mu'^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\right] \\ &= \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right) \overset{0}{R} \int_0^1 \mathrm{d}\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} \mathrm{d}\xi_2 \frac{(\xi_2+\xi_2^2)(1-z^2)}{\left[(\xi_2+\xi_2^2) - \frac{M^2}{\mu^2} + \mathrm{i}\varepsilon\right]\left[(\xi_2+\xi_2^2)z^2 - \frac{M^2}{\mu^2} + \mathrm{i}\varepsilon\right]} \end{aligned}$$

Die Differentiation nach z liefert

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right) \overset{0}{R} \times \\ &\times \int_0^1 \mathrm{d}\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} \mathrm{d}\xi_2 \left(\frac{2(\xi_2+\xi_2^2)^2 z(1-z^2)}{\left[(\xi_2+\xi_2^2) - \frac{M^2}{\mu^2} + \mathrm{i}\varepsilon\right]^2} \frac{1}{\left[(\xi_2+\xi_2^2)z^2 - \frac{M^2}{\mu^2} + \mathrm{i}\varepsilon\right]^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2z(\xi_2+\xi_2^2)^2 \left[(\xi_2+\xi_2^2) - \frac{M^2}{\mu^2} + \mathrm{i}\varepsilon\right]\left[(\xi_2+\xi_2^2)z^2 - \frac{M^2}{\mu^2} + \mathrm{i}\varepsilon\right]}{\left[(\xi_2+\xi_2^2) - \frac{M^2}{\mu^2} + \mathrm{i}\varepsilon\right]^2 \left[(\xi_2+\xi_2^2)z^2 - \frac{M^2}{\mu^2} + \mathrm{i}\varepsilon\right]^2}\right) . \end{aligned}$$

Für $z \longrightarrow 1$ vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\beta_2 = \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right) \overset{0}{R} \int_0^1 \mathrm{d}\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} \mathrm{d}\xi_2 \frac{2(\xi_2+\xi_2^2)^2}{\left[(\xi_2+\xi_2^2) - \frac{M^2}{\mu^2} + \mathrm{i}\varepsilon\right]^2 \mu} .$$

Für $\mu \gg m$ erhält man schließlich

$$\beta_2 = \left(\zeta - \tfrac{1}{6}\right) \overset{0}{R} \int_0^1 \mathrm{d}\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} \mathrm{d}\xi_2 \frac{2(\xi_2+\xi_2^2)^2}{\left[(\xi_2+\xi_2^2) + \mathrm{i}\varepsilon\right]^2 \mu} = 0 .$$

Literaturverzeichnis

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun: *Pocketbook of Mathematical Functions*, Harri Deutsch 1984

[2] J. M. Bardeen, B. Carter, S. W. Hawking: The Four Laws of Black Hole Mechanics. Commun. math. Phys. **31**, 161 (1973)

[3] R. Brunetti, K. Fredenhagen: Interacting Quantum Fields in Curved Space: Renormalizability of ϕ^4. DESY Preprint 97-005, gr-qc/9701048, 1997

[4] R. Brunetti, K. Fredenhagen, M. Köhler: The Microlocal Spectrum Condition and Wick Polynomials of free Fields on Curved Spacetimes. Comm. math. Phys. **180**, 312 (1996)

[5] H.-J. Borchers: On Structure of the Algebra of Field Operators, Nuovo Cim. **24**, 214 (1962)

[6] I. L. Bukhbinder, S. D. Odintsov, I. L. Shapiro: Renormalization Group Approach to Quantum Field Theory in Curved Spacetime. Rev Nouvo Cim. **12**, 1 (1989)

[7] T. S. Bunch, L. Parker: Feyman Propagator in Curved Spacetime: A Momentum Space Representation, Phys. Rev. D **20**, 2499 (1979)

[8] T. S. Bunch, P. Panagaden, L. Parker: On Renormalization of $\lambda\phi^4$ Field Theory in Curved Space-Time I, J. Phys. A, **13**, 901 (1980)

[9] T. S. Bunch, P. Panagaden, L. Parker: On Renormalization of $\lambda\phi^4$ Field Theory in Curved Space-Time II, J. Phys. A, **13**, 919 (1980)

[10] N. N. Bogoljubow, D. W. Schirkow: Probleme der Quantenfeldtheorie, Fortschr. d. Phys. **4**, 438 (1956)

[11] T. S. Bunch: BPHZ-Renormalization of $\lambda\phi^4$ Field Theory in Curved Spacetime, Ann. Phys. **131**, 118 (1980)

[12] S. M. Christensen: Vacuum Expectation Value of the Stress Tensor in an Arbitrary Curved Background: The Covariant Point-Separation Method, Phys. Rev. D **14**, 2490 (1976)

[13] S. M. Christensen: Regularization, Renormalization and Covariant Geodesic Point Separation, Phys. Rev. D **17**, 946 (1978)

[14] B. S. DeWitt, R. W. Brehme: Radiation Damping in a Gravitational Field, Ann. Phys. **9**, 220 (1960)

[15] J. J. Duistermaat, L. Hörmander: Fourier Integral Operators II, Acta Math. **128**, 183 (1972)

[16] H. Epstein, V. Glaser: Le rôle de la localité dans la renormalisation pertubative en théorie quantique des champs (franz.), Les Houches Lectures 1970, engl.: The role of locality in pertubation Theory, Ann. Inst. H. Poincaré **XIX**, 211 (1973)

[17] K. Fredenhagen, R. Haag: Generally Covariant Quantum Field Theory and Scaling Limits. Comm. math. Phys. **108**, 91 (1987)

[18] W. Fischer, I. Lieb: *Funktionentheorie,* Vieweg 1988

[19] S. A. Fulling: *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime*, Cambridge University Press 1989

[20] R. Haag: *Local Quantum Physics*, Springer 1993

[21] S. Hawking: Particle Creation by Black Holes. Commun. math. Phys. **43**, 199 (1975)

[22] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis: *The Large Scale Structure of Spacetime,* Cambridge University Press 1973

[23] K. Hepp: Proof of the Bogoliubov-Parasiuk Theorem on Renormalization, Comm. math. Phys. **2**, 301 (1966)

[24] L. Hörmander: Fourier Integral Operators I, Acta Math. **127**, 79 (1971)(1972)

[25] C. Itzykson, J.-B. Zuber: *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980

[26] N. Jacob: *Lineare partielle Differentialgleichungen*, Akademie Verlag, 1995

[27] W. Junker: Adiabatic Vacua and Hadamard States for Scalar Quantum Field Theories on Curved Spacetime, Dissertation Universität Hamburg, 1995

[28] M. Köhler: The Stress Energy Tensor of a Locally Supersymmetric Quantum Field Theory on Curved Spacetime, Dissertation Universität Hamburg, 1995

[29] M. Lüscher: Dimensional Regularisation in the Presence of Large Background Fields, Ann. Phys. **142**, 359 (1982)

[30] M. Nakahara: *Geometry, Topology and Physics*, Adam Hilger 1990

[31] B. L. Nelson, P. Panagaden: Scaling Behavior of Interacting Quantum Fields in Curved Spacetime. Phys. Rev. D **25**, 1019 (1981)

[32] L. Parker: Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time: Effective Action and Einstein-Momentum Tensor. Recent Developments in Gravitation, Cargèse 1978

[33] A. Z. Petrov: *Einstein Spaces*. Pergamon Press, 1969

[34] D. Prange: Kausale Störungstheorie und Differentielle Renormierung. Diplomarbeit Universität Hamburg, 1997

[35] W. Pauli, F. Villars: On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory, Rev. Mod. Phys. **21,** 434 (1949)

[36] M. J. Radzikowski: The Hadamard Condition and Kay's Conjecture in (Axiomatic) Quantum Field Theory on Curved Space-Time, Ph.-D. Thesis, Princeton University 1992

[37] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics Vol.I: Functional Analysis* Academic Press 1980

[38] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. II: Fourier Anasysis, Self-Adjointness*, Academic Press 1975

[39] G. Scharf: *Finite Quantum Electrodynamics*, Springer 1989

[40] R. U. Sexl, H. K. Urbantke: *Gravitation und Kosmologie*, Bibliographisches Institut, 1987

[41] F. Trèves: *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, Plenum Press, 1980

[42] R. M. Wald: *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, University of Chikago Press 1994

[43] S. Weinberg: *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, 1972

[44] S. Weinberg: *The Quantum Theory of Fields Vol. I*, Cambridge University Press, 1995

[45] S. Weinberg: *The Quantum Theory of Fields Vol. II*, Cambridge University Press, 1995

[46] A. S. Wightman: Quantum Field Theory in Terms of Vacuum Expectation Value, Phys. Rev **101**, 860 (1955)

[47] W. Zimmermann: Convergence of Bogoliubov's Method of Renormalization in Momentum Space, Comm. math. Phys. **15**, 208 (1969)

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig und ausschließ lich unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

September 1997

Tim Pfitzenreiter