II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von
Roland Petersen
aus Hamburg
2007

Lokale Temperaturen
auf
gekrümmten Raumzeiten

Die Diplomarbeit wurde von Roland Petersen angefertigt am
II. Institut für Theoretische Physik
unter der Betreuung von
Herrn Prof. Dr. K. Fredenhagen

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Thermodynamik gehört zu den mächtigsten "Methoden"der Physik vieler Freiheitsgrade. Besonderes Interesse gebührt den Gleichgewichtszuständen, schon allein weil die Erfahrung lehrt, dass diese häufig angenommen werden. Auch ergeben sich bei solchen Zuständen enorme Vereinfachungen in der Beschreibungsweise. Bei endlich vielen Freiheitsgraden sind die Gleichgewichtszustände im Allgemeinen durch Gibbs-Ensemble gegeben, im Limes unendlich vieler Freiheitsgrade verliert die gewöhnliche Beschreibung durch Dichtematrizen ihre Gültigkeit. Es zeigt sich, dass solche Grenzwerte ein Charakteristikum behalten, sie erfüllen die KMS-Bedingung. Es hat sich herausgestellt, dass die KMS-Bedingung nicht nur notwendig sondern auch hinreichend ist. So ist es möglich Gleichgewichtszustände von Systemen unendlich vieler Freiheitsgrade direkt zu identifizieren und konstruieren. All diese Betrachtungen setzen aber eine Art Zeitachse voraus und Gleichgewichtszustände sind zeitinvariant. Nun möchte man aber auch lokales Gleichgewicht definieren und verstehen. In Sonnenmodellen etwa ist das lokale Gleichgewicht eine notwendig Vereinfachung der Beschreibungsweise. Es ist aber nicht immer so klar, was lokales Gleichgewicht ist und auf gekrümmten Raumzeiten ist noch nicht einmal immer klar was Gleichgewicht bedeutet. Buchholz, Ojima und Roos haben in einem abstrakten quantenfeldtheoretischen Model auf dem Minkowski-Raum lokales Gleichgewicht definiert. Mit dem Prinzip der lokalen Kovarianz wird aktuell versucht, die Interpretation des lokalen Gleichgewichts auf gekrümmte Raumzeiten zu übertragen. Hierfür müssen nicht nur Zustände sondern auch geeignete Observablen gefunden werden. Zunächst werden in dieser Arbeit die lokal kovarianten Quantenfeldtheorien nach [2] eingeführt, wobei ein naheliegendes Theorem bewiesen wird, dass die Rolle der Zustandsräume als Theorie-Reduktion hervorhebt. Als nächstes werden Grundbegriffe der KMS-Theorie bereitgestellt und Ausschnitte der Überlegungen von Buchholz, Ojima und Roos bezüglich lokalem Gleichgewicht vorgestellt. Bevor auf das freie skalare Feld spezialisiert wird, wird kurz der Übertragungsmechanismus der lokalen thermischen Interpretation mittels lokal kovarianter Quantenfelder angegeben. In den letzten beiden Kapitel werden lokale thermische Zustände und die Observablen des Wickquadrats und des Energie-Impulstensors auf dem Rindlerkeil und dem de Sitter-Raum behandelt.

2 Observablen und Zustände

Wenn eine Theorie ein physikalisches System beschreiben will, dann sollte sie Messungen an diesem in Relation setzen. Insbesondere sollte sie einer Präparation (einer präparierenden Messung) und anschließender Messung ein Resultat zuordnen. So wird der Zustand des Systems durch die Präparationsvorschrift und die Observablen entsprechend durch die Messvorschrift dargestellt. Es kann der Fall eintreten, dass die Theorie nicht zwischen zwei (bestimmten) Vorschriften unterscheidet, sodass ein Zustand oder eine Observable eine ganze Äquivalenzklasse von Vorschriften repräsentieren kann. Obwohl Observablen und Zustände bis hierhin nichts notwendig unterscheidet, ist diese Vereinbarung nützlich. Wie gefordert, ist nun einer Messung a am (System im) Zustand ω ein Resultat (eine reelle Zahl) zuzuordnen, sodass ein Zustand ω auch als eine Abbildung von der Menge der Observablen in die reellen Zahlen aufgefasst werden kann; $\omega(a) \in \mathbb{R}$ ist nun das oben nicht weiter spezifizierte Resultat. Das Resultat wird aber (im Allgemeinen) nicht als Messwert einer Messung, sondern als Erwartungswert im Sinne eines Ensemblemittelwertes interpretiert.
Nach dieser kurzen Motivation des Zustand-Observable-Konzepts werden wir diese Betrachtungen wesentlich spezialisieren und annehmen, dass die Observablen selbstadjungierte Elemente einer unitalen involutiven Algebra $\mathfrak{A}$ uber $\mathbb{C}$ [1] sind, und die Zustände $\mathbb{C}$-lineare positive normierte Funktionale[2] auf $\mathfrak{A}$ sind. Teilsysteme werden als unitale involutive Unteralgebren aufgefasst. Beispielsweise wird das berühmte Teilchen auf der Geraden gewöhnlich so beschrieben (quantisiert), dass die Observablen selbstadjungierte Operatoren A auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$ sind und als Zustände ω normierte Wellenfunktionen[3]$f \in L^2(\mathbb{R})$ durch die Vorschrift $\omega(A) = (f, Af) = \int \bar{f} A f$ in Betracht gezogen werden. Die Möglichkeit der Darstellung der unitalen involutiven Algebra $\mathfrak{A}$ durch Hilbertraum-Operatoren besteht allgemein, wobei eine Darstellung

$$\mathfrak{A} \xrightarrow{\pi} \mathrm{End}(\mathfrak{D})$$

ein 1-erhaltender Algebrahomomorphismus von der Algebra $\mathfrak{A}$ in die Algebra der linearen Operatoren $\mathrm{End}(\mathfrak{D})$ eines dichten Teilraum $\mathfrak{D}$ eines Hilbertsraums $\mathfrak{H}$ ist. Wir fordern ausserdem

$$\pi(a^*) \subset \pi(a)^*$$

für alle $a \in \mathfrak{A}$ mit dem zu $\pi(a)$ adjungierten Operator $\pi(a)^*$ und schließen, dass $\pi(a)$ abschließbar ist. Jeder Zustand über der Algebra gibt Anlass zu einer Darstellung:

Theorem 1 (GNS-Konstruktion) *Die obigen Bezeichnungen benutzend sei ω ein Zustand auf der unitalen involutiven Algebra $\mathfrak{A}$, dann gibt es eine Darstellung*

$$\pi : \mathfrak{A} \longrightarrow End(\mathfrak{D}),$$

[1] d.h. es gibt ein Einselement $1 \in \mathfrak{A}$ mit $1a = a1 = a$ für alle $a \in \mathfrak{A}$ und eine antilineare Abbildung (die Involution) $\mathfrak{A} \ni a \mapsto a^* \in \mathfrak{A}$ mit $(ab)^* = b^*a^*$, a selbstadjungiert $\Leftrightarrow a = a^*$, a positiv $\Leftrightarrow$ für ein $b \in \mathfrak{A}$ gilt $a = bb^*$

[2] positiv und normiert heißt, dass positive Elemente auf positive Elemente und das Einselement auf das Einselement abgebildet wird. Involutive Morphismen, sie respektieren die Involution, (Algebren) werden auch *-Morphismen (*-Algebren) genannt.

[3] und Spurklasseoperatoren

wobei $\mathfrak{D} := \pi(\mathfrak{A})\Omega$ *dicht in* $\mathfrak{H}$ *ist und* Ω *folgendes leistet:*

$$(\Omega, \pi(A)\Omega) = \omega(A) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}.$$

Das Tripel $(\mathfrak{H}, \pi, \Omega)$ *ist durch diese Eigenschaften bis auf unitäre Aquivalenz eindeutig bestimmt, d.h., für jede Darstellung* $(\mathfrak{H}', \pi', \Omega')$ *mit den genannten Eigenschaften gibt es genau eine unitäre Abbildung*

$$\mathfrak{H} \xrightarrow{U} \mathfrak{H}' \quad \text{mit}$$

$$(\mathfrak{H}', \pi', \Omega') = (U\mathfrak{H}, a \mapsto U\pi(a)U^{-1}, U\Omega).$$

Die GNS-Darstellung des Zustands ω wird auch $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ genannt. Konkret kann man sich die Konstruktion so vorstellen, dass $\mathfrak{A}$ durch Linkswirkung auf dem Prähilbertraum

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{A}/\{a \in \mathfrak{A} | \omega(a^*a) = 0\}, (a, b) \mapsto \omega(a^*b))$$

dargestellt wird. Legt man nun den aus der Quantenmechanik bekannten Standard an, dass nur selbstadjungierte Operatoren observabel sind, so kommt man unter Umständen in Konflikt mit obiger Definition von observabel. Hier könnte man von der Darstellung fordern, selbstadjungierte Elemente auf wesentlich selbstadjungierte Operatoren abzubilden. Dann liefert der Spektralsatz für selbstadjungierte $a \in \mathfrak{A}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ mit

$$\int \mathrm{d}\mu(x)x^n = \omega(a^n), \; n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

und $\mu(\mathbb{R} \setminus \sigma(\pi(a))) = 0$, wobei $\sigma(\pi(a))$ das Spektrum[4] des Operators $\pi(a)$ bezeichnet; es gilt $\sigma(a) \subset \sigma(\pi(a))$. μ wird als Wahrscheinlichkeitsverteilung der Messwerte der Observablen a im Zustand ω interpretiert. Somit treten Messwerte ausserhalb des Spektrums nur mit verschwindender Wahrscheinlichkeit auf. Häufig werden nur Observablen beschränkten Spektrums betrachtet, dadurch begründet, dass (bestimmte) beschränkte Funktionen eines selbstadjungierten Operators den gleichen Informationsgehalt wie der Operator haben und sich die Analyse vereinfacht. Ein Großteil der Ergebnisse im älgebraischen Zugangïst wohl aus diesen Gründen für C*-Algebren[5] oder Von Neumann Algebren[6] formuliert.

[4]Für ein Element b aus der unitalen Algebra $\mathfrak{B}$ über $\mathbb{C}$ ist das Spektrum $\sigma(b)$ die Menge $\{x \in \mathbb{C} | b - x$ ist nicht invertierbar $\}$. Hier ist jedoch das Spektrum im Sinne dicht definierter Hilbertraum-Operatoren gemeint, also $x \in \sigma(\pi(a)) \Leftrightarrow \pi(a) - x : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{H}$ ist nicht bijektiv.

[5]$\mathfrak{A}$ ist C*-Algebra $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}$ ist involutive Algebra über $\mathbb{C}$ und Banachraum mit Norm $|\bullet|$, sodass $|ab| \leq |a||b|$ und $|aa^*| = |a|^2$ für alle $a, b \in \mathfrak{A}$ gilt.

[6]Eine Von Neumann Algebra $\mathfrak{A}$ ist eine schwach abgeschlossene *-Unteralgebra von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, der Algebra der beschränkten $\mathbb{C}$-linearen Operatoren eines komplexen Hilbertraums $\mathfrak{H}$.

3 Raumzeiten

Makroskopisch werden die Eigenschaften der Raumzeit gut durch die Allgemeine Relativitätstheorie beschrieben. In diesem Rahmen ist eine Raumzeit eine vierdimensionale Lorentzmannigfaltigkeit, deren Metrik sich entsprechend der Einsteinschen Feldgleichung mit der Materie arrangieren muss [13]. Wir wollen dieses Modell der Raumzeit den folgenden Überlegungen zugrunde legen, jedoch werden wir uns jetzt nicht für ein Materie-Modell entscheiden und müssen daher eine ganze Klasse von Raumzeiten in Betracht ziehen. Die Wahl fällt auf Obj($\mathfrak{Man}$); wegen der soliden Kausalstruktur sind hier viele theoriebildende Konstruktionen möglich.

Definition 1 *Es ist $M \in Obj(\mathfrak{Man})$ genau dann, wenn M*

1. orientierbar

2. zeitorientierbar und

3. global hyperbolisch ist.

Wir werden mit M sowohl das Paar (M, g_{ab}) aus Mannigfaltigkeit M und Metrik g_{ab} bezeichnen als auch die Mannigfaltigkeit selbst. Es wird zur Kennzeichnung des Tensortyps häufig die (abstrakte) Indexnotation verwendet.
Zu 3.: Eine Raumzeit ist genau dann global hyperbolisch, wenn sie eine abgeschlossene Teilmenge enthält, die von jeder nichtverlängerbaren kausalen Kurve genau einmal getroffen wird; eine solche Teilmenge heißt Cauchyfläche und ist notwendig eine raumartige Hyperfläche. Global hyperbolische Mannigfaltigkeiten sind topologisch äquivalent zu $\mathbb{R} \times S$ für eine Cauchyfläche S.
Wir definieren jetzt die kausale Zukunft (Vergangenheit) $J^{+(-)}(q)$ eines Punktes $q \in M$

Definition 2 *Es ist $p \in J^{+(-)}(q)$ genau dann, wenn es einen kausalen zukunftsgerichteten (vergangenheitsgerichteten) differenzierbaren Weg von q nach p gibt.*

Ein differenzierbarer Weg von p nach q ist eine Abbildung

$$[0,1] \xrightarrow{\gamma} M$$

mit $\gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q$, die eine differenzierbare Erweiterung auf einer offenen Menge, die $[0,1]$ enthält, hat.

Für die Definition der chronologischen Zukunft (Vergangenheit) $I^{+(-)}(q)$ von $q \in M$ ersetzen wir in obiger Definition kausal durch zeitartig.

4 Lokal kovariante Quantenfeldtheorie

Anstatt direkt eine Observablen-Algebra mit Ereignis-Observablen zu konstruieren, was ein schwieriges Problem aktueller Forschung ist, werden wir Obj($\mathfrak{Man}$) als Vorrat raumzeitlicher Hintergründe benutzen; etwa in dem Sinne wie der Minkowskiraum $\mathbb{M} := (\mathbb{R}^4, (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2)$ als Hintergrund der Quantenelektrodynamik bezeichnet wird. Die Theorie soll dann auf allen diesen Raumzeiten leben und wie noch zu definieren kovariant sein.

Zur Schreibweise: Die Klasse der Objekte (Morphismen) einer Kategorie A nennen wir $\mathrm{Obj}(A)$ ($\mathrm{Mor}(A)$). Die Quell-(Ziel-)Funktion bezeichnen wir mit dom (cod) und definieren

$$\mathrm{Mor}(A, a, b) := \mathrm{dom}^{-1}(a) \cap \mathrm{cod}^{-1}(b)$$

für $a, b \in \mathrm{Obj}(A)$. $\mathrm{Mor}(A, a, b)$ besteht also aus genau den Pfeilen $a \to b$. Damit sollte

$$a \xrightarrow{f} b \in A$$

verständlich sein. Gilt für die Kategorie A immer, dass $a \xrightarrow{f} b \in A$ eine Abbildung f von der Menge a in die Menge b ist, so nehmen wir als Komposition die Hintereinanderausführung von Abbildungen an. Die Identität ist dann notwendig durch die Identischen Abbildungen auf den entsprechenden Mengen gegeben. Für einen Funktor F vereinbaren wir, die Objekt-(Morphismen-)Abbildung als $F(\bullet)$ ($F_\bullet$) zu schreiben.

Wie vielleicht schon erwartet, wird zunächst die Kategorie $\mathfrak{Man}$ komplettiert und der Kategorie $\mathfrak{Alg}$ gegenübergestellt. Sodann wird die lokal kovariante Quantenfeldtheorie (LCQFT) im wesentlichen nach [2] definiert.

Definition 3 *Es ist $M \xrightarrow{f} N$ genau dann in der Kategorie $\mathfrak{Man}$, wenn $M, N \in$ Obj($\mathfrak{Man}$) (Definition 1) und wenn f eine orientierungs-und zeitorientierungserhaltende, isometrische Einbettung von M in N, sodass für je zwei Punkte $p, q \in f(M)$ mit $q \in J^+(p)$ folgt, dass $J^+(p) \cap J^-(q) \subset f(M)$[7] gilt.*

Definition 4 *$A \xrightarrow{T} B$ gehört genau dann zur Kategorie $\mathfrak{ALG}$, wenn A, B unitale involutive Algebren sind und wenn T ein unitaler *-Monomorphismus[8] von A nach B ist.*
Unter $\mathfrak{Alg}$ verstehen wir die Einschränkung von $\mathfrak{ALG}$ auf C-Algebren.*

In beiden Fällen kann man zeigen, dass die Komposition von Abbildungen die Morphismenstruktur erhält.

Definition 5 (LCQFT) *Eine lokal kovariante Quantenfeldtheorie ist ein kovarianter Funktor*

$$\mathfrak{Man} \xrightarrow{Q} \mathfrak{ALG}.$$

[7]Diese Eigenschaft gewährleistet, dass die durch f von M nach $f(M)$ induzierte Kausalstruktur mit der Kausalstruktur von $f(M)$ in N übereinstimmt.

[8]ein injektiver Algebra-Homomorphismus, es gilt also

$$T(ab + \lambda c) = T(a)T(b) + \lambda T(c)\ \forall a, b, c \in \mathfrak{A},\ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

1. Wir nennen Q kausal, wenn für $M_{1,2} \xrightarrow{f_{1,2}} M \in \mathfrak{Man}$ mit kausal getrennten $f_1(M_1)$ und $f_2(M_2)$

$$[Q_{f_1}(Q(M_1)), Q_{f_2}(Q(M_2))] = \{0\}$$

mit dem Kommutator $(a,b) \mapsto [a,b] := ab - ba$ gilt.

2. Wir sagen Q erfüllt das Zeitschichtenaxiom, wenn für alle $M \xrightarrow{f} N \in \mathfrak{Man}$, deren Bild $f(M)$ eine Cauchyfläche von N enthält,

$$Q_f(Q(M)) = Q(N)$$

gilt.

Aus der Kovarianz folgt, dass für identifizierbare (isomorphe) Raumzeiten M, M', die entsprechenden Observablenalgebren $Q(M), Q(M')$ identifizierbar (isomorph) sind, wobei isomorph hier bedeutet, dass ein bijektiver Morphismus vermittelt. Diese Eigenschaft wird schon durch die allgemeine Relativitätstheorie nahegelegt, da sie nicht zwischen isometrischen Raumzeiten unterscheidet. Eigenschaft 1. drückt aus, dass kausal getrennte Teilsysteme unabhängig sind. Eigenschaft 2. wird passend auch Existenz einer kausalen Dynamik genannt; durch sie ist die Algebra auf der Raumzeit durch die Algebra in einer Umgebung einer Cauchyfläche gegeben, ähnlich wie beim sachgemäßen Cauchyproblem eine Lösung durch ihre Daten auf der Cauchyfläche und somit erstrecht durch ihr Verhalten in einer Umgebung der Cauchyfläche festgelegt ist.
Wegen der analytischen Struktur wurde in [2] eine LCQFT als Funktor

$$\mathfrak{Man} \xrightarrow{Q} \mathfrak{Alg}$$

definiert. Betrachten wir nun eine solche LCQFT Q auf einer festen Raumzeit M. Man kann nun jede offene Teilmenge O, mit der Eigenschaft, dass für je zwei Punkte $p, q \in O$ mit $q \in J^+(p)$ folgt, dass $J^+(p) \cap J^-(q)$ in O enthalten ist, trivial in M einbetten, wobei die Einbettung i_O ein Morphismus ist. Wir vereinbaren, dass Mengen mit dieser Eigenschaft, die zusätzlich relativ kompakt sind, die Menge $\mathcal{K}$ bilden. Dann definieren wir die Abbildung

$$\mathcal{A} : \mathcal{K} \ni O \mapsto Q_{i_O}(Q(O)) \subset Q(M). \tag{2}$$

Es gilt das folgende

Theorem 2 *Für eine LCQFT*

$$\mathfrak{Man} \xrightarrow{Q} \mathfrak{Alg}$$

hat die in 2 definierte Abbildung $\mathcal{A}$ folgende Eigenschaften:

1. Isotonie: aus $O \subset O'$ folgt $\mathcal{A}(O) \subset \mathcal{A}(O')$ für $O, O' \in \mathcal{K}$.

2. Für jede Automorphismen-Gruppe $G \subset Mor(\mathfrak{Man}, M, M)$ gibt es eine Darstellung

$$G \ni g \mapsto q_g \in Mor(\mathfrak{Alg}, Q(M), Q(M))$$

durch C-Algebra-Automorphismen $q_g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ bezeichnet hier die kleinste C*-Algebra, die alle $\mathcal{A}(O)$ für $O \in \mathcal{K}$ enthält.*

3. Ist Q kausal, dann gilt für kausal getrennte Gebiete $O, O' \in \mathcal{K}$

$$[\mathcal{A}(O), \mathcal{A}(O')] = \{0\}.$$

4.Erfüllt Q das Zeitschichtenaxiom und ist S eine offene zusammenhängende Teilmenge einer Cauchyfläche, dann gilt für jedes $O \in \mathcal{K}$ mit $S \subset O$

$$\mathcal{A}(S^{\perp\perp}) \subset \mathcal{A}(O).$$

Wobei $S^{\perp\perp}$ das doppelte kausale Komplement von S und $\mathcal{A}(S^{\perp\perp})$ die kleinste C-Algebra ist, die alle $\mathcal{A}(O')$ mit $O' \in \mathcal{K}$ und $O' \subset S^{\perp\perp}$ enthält.*

Den Beweis findet man in [2].
Das Theorem bedeutet im wesentllichen, dass eine kausale LCQFT, die das Zeitschichtenaxiom erfüllt, auf jeder Raumzeit eine Algebraische Quantenfeldtheorie (AQFT) definiert. Eine AQFT ordnet jeder offenen und beschränkten Teilmenge einer festen Raumzeit[9] $\mathcal{O}$ eine (C*-)Algebra $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ zu, die die lokal messbaren beschränkten Observablen enthält, wobei meist gefordert ist, dass für diese Zuordnung sinngemäß 1.-4. gilt:

Definition 6 (Haag-Kastler-Axiome)
1. Isotonie: $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \implies \mathfrak{A}(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$. $\mathfrak{A} := \cup_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ ist die Algebra aller lokalen Observablen.

2. Lokalität: Für $\mathcal{O}$ raumartig zu $\mathcal{O}'$ ist $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ von $\mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ unabhängig; insbesondere ist $[\mathfrak{A}(\mathcal{O}), \mathfrak{A}(\mathcal{O}')] = \{0\}$

3. Kovarianz: Die Symmetriegruppe G der Raumzeit wird durch Automorphismen von $\mathfrak{A}$ dargestellt

$$\alpha : G \ni g \mapsto \alpha_g \in Aut(\mathfrak{A}),$$

sodass $\alpha_g \alpha_{g'} = \alpha_{gg'}$ und $\alpha_g \mathfrak{A}(\mathcal{O}) = \mathfrak{A}(g\mathcal{O})$ für alle $g, g' \in G$ gilt.

4. Zeitschichtenaxiom: Wenn $\mathcal{O}$ eine Cauchyfläche der Raumzeit enthält ist, dann ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathcal{O})$.

4.1 Lokal kovariante Quantenfelder

Um Quantenfelder zu definieren, lassen wir uns von der Wightman-Axiomatik leiten. Nach dieser ist ein Quantenfeld ϕ eine (lineare) Abbildung

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \to \mathrm{End}(\mathcal{G}).$$

Bezeichnet man die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in der offenen Menge Ω mit $C_0^\infty(\Omega)$ und setzt für ein Kompaktum $K \subset \Omega$

$$C_{0,K}^\infty(\Omega) = \{f \in C_0^\infty(\Omega) | \mathrm{supp}(f) \subset K\},$$

[9] häufig der Minkowskiraum $\mathbb{M}$

so ist

$$\mathcal{D}(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega), \mathcal{T}),$$

wobei $\mathcal{T}$ die größte lokalkonvexe Topologie ist, sodass die Spurtopologien $\{t \cap C^\infty_{0,K}(\Omega) | t \in \mathcal{T}\}$ von den Halbnormen

$$f \mapsto \sup\{|X_1 \cdots X_n f(p)| \; |p \in K\}$$

erzeugt wird; $X_1, \ldots, X_n$ steht hier für eine endliche Auswahl von glatten Vektorfeldern. End($\mathcal{G}$) bezeichnet hier die Endomrphismen eines Prähilbertraums $\mathcal{G}$. Die Idee ist es, das Symbol $\mathcal{D}$ als (kovarianten) Funktor zwischen $\mathfrak{Man}$ und $\mathfrak{Test}$, der Kategorie der Testfunktionen, aufzufassen, wobei $\mathcal{D}(M)$ die ursprüngliche Bedeutung behält und für jedes $\rho \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{Man})$

$$\mathcal{D}_\rho := \rho_* := {\rho^{-1}}^*$$

gesetzt wird. Das Quantenfeld soll nun als natürliche Transformation zwischen $\mathcal{D}$ und einer LCQFT Q aufgefasst werden. Dazu werden zunächst $\mathcal{D}$ und Q als Funktoren nach $\mathfrak{Set}$, der Kategorie der Mengen mit Abbildungen als Morphismen angesehen.

Definition 7 *Ein lokal kovariantes Quantenfeld ϕ einer LCQFT Q ist eine natürliche Transformation zwischen $\mathcal{D}$ und Q.*
ϕ heißt kausal, wenn für $f, g \in \mathcal{D}(M)$ mit kausal getrennten Trägern der Kommutator von $\phi_M(f)$ und $\phi_M(g)$ verschwindet.

Es soll also

$$Q_\rho \circ \phi_M = \phi_N \circ \mathcal{D}_\rho \tag{3}$$

für alle $M \xrightarrow{\rho} N \in \mathfrak{Man}$ gelten. Aus Gleichung (3) folgt sofort

$$\phi_{(M,g)}(f) \in Q((M', g'))$$

für alle $(M', g') \in \mathfrak{Man}$ mit $\mathrm{supp}(f) \subset M' \subset M$ und $g' = g|_{M'}$. Ausserdem sind für kausale Q die lokal kovarianten Quantenfelder automatisch kausal, wegen

$$[\phi_M(f), \phi_M(g)] \in [Q_{i_1}(Q(M_1)), Q_{i_2}(Q(M_2)]$$

für geeignete $M_k \xrightarrow{i_k} M \in \mathfrak{Man},\; k = 1, 2$.

Es wird sich herausstellen, dass man sich im Wesentlichen auf Operator-Algebren auf Prähilberträumen beschränken kann, diese sind mit der starken Operator-Topologie ausgestattet. Bildet nun Q, wie $\mathcal{D}$, in die Kategorie lokal konvexer Vektorräume und stetiger linearer Abbildungen zwischen diesen ab und wird diese Kategorie als Ziel aufgefasst, dann scheinen Operator-wertige Distributionen natürliche Kandidaten für lokal kovariante Quantenfelder zu sein.

4.2 Zustandsräume

Im Sinne des 2. Kapitels wollen wir nun den Zustandsbegriff in die LCQFT integrieren. Anders als in der herkömmlichen Formulierung der Quantentheorie verlangen wir nicht, dass in jedem Zustand jede Observable messbar ist. Vielmehr sprechen wir jeder Algebra $Q(M)$ einer LCQFT Q mit $M \in \mathfrak{Man}$ eine Menge von Zuständen auf $Q(M)$ zu:

Definition 8 *Ein Zustandsraum einer LCQFT Q ist ein kontravarianter Funktor S, sodass $S(M)$ eine Menge von Zuständen auf $Q(M)$ ist für alle $M \in$ Obj($\mathfrak{Man}$) und auf der Morphismen-Seite für alle $\rho \in$ Mor($\mathfrak{Man}$)*

$$S_\rho := {Q_\rho}^*$$

gilt.

Der * kennzeichnet hier die Pullback-Konstruktion, die Kontravarianz ist schnell bewiesen. Nun gibt es (genau) einen größten Zustandsraum S_{Max}, jeder andere verkleinert die Theorie und genau das benutzt man, um Eigenschaften unter Beibehaltung algebraischer Strukturen zu implementieren. Bei geeigneter Wahl des Zustandsraums S, findet man zu Q einen kleineren an S angepassten Funktor R.

Theorem 3 *Für den Zustandsraum S der LCQFT Q gelte*

$$S(M) \neq \emptyset \; \forall \; M \in Obj(\mathfrak{Man}),$$

dann gibt es bis auf Aquivalenz höchstens eine LCQFT R, sodass gilt:
Es gibt eine Familie unitaler involutiver Epimorphismen[10]

$$(Q(M) \xrightarrow{\pi_M} R(M))_{M \in Obj(\mathfrak{Man})} \quad mit$$

$$R_f \circ \pi_M = \pi_N \circ Q_f \quad \forall \; M \xrightarrow{f} N \in \mathfrak{Man}, \tag{4}$$

sodass es zu jedem $\omega \in S(M)$ einen Zustand σ auf $R(M)$ gibt mit

$$\sigma(\pi_M(a)) = \omega(a) \; \forall \; a \in Q(M)$$

und die so definierten Zustände σ auf $R(M)$ die Punkte trennen.

Kausalität und die Gültigkeit des Zeitschichtenaxioms erbt R von Q.

Gilt für den Zustandsraum S ausserdem immer:

aus $\omega \in S(M)$ und $b \in Q(M)$ mit $\omega(b^*b) > 0$ folgt

$$(Q(M) \ni a \mapsto \omega(b^*ab)/\omega(b^*b)) \in S(M), \tag{5}$$

dann ist $R(M)$ durch eine unitale involutive Unteralgebra von End($\mathfrak{D}_M$) realisiert, wobei $\mathfrak{D}_M$ ein Prähilbertraum ist und die Involution durch Adjunktion (auf $\mathfrak{D}_M$) gegeben ist.

Zuerst beweisen wir die Eindeutigkeit, dazu folgern wir für den Kern von π_M

$$\ker(\pi_M) = \cap_{\omega \in S(M)} \ker(\omega),$$

dann ist aber

$$R(M) \cong Q(M) / \cap_{\omega \in S(M)} \ker(\omega)$$

bis auf Äquivalenz, also unitaler *-Isomorphie, eindeutig. Wegen der Epimorphie sind die $R_f,\; M \xrightarrow{f} N \in \mathfrak{Man}$ durch Gleichung (4) eindeutig festgelegt,

[10]Eine natürliche Transformation in einer größeren Kategorie.

somit ist R bis auf Aquivalenz eindeutig.

Für das Zeitschichtenaxiom und die Kausalität benutzen wir nur die Epimorphie. Sei Q_f ein Isomorphismus, dann ist es R_f wegen Gleichung (4) auch, woraus folgt, dass R das Zeitschichtenaxiom erbt. Ausserdem haben wir für $M_{1,2} \xrightarrow{f_{1,2}} M \in \mathfrak{Man}$

$$[R_{f_1}(R(M_1)), R_{f_2}(R(M_2))] = [R_{f_1} \circ \pi_{M_1}(Q(M_1)), R_{f_2} \circ \pi_{M_1}(Q(M_2))] =$$

$$[\pi_M \circ Q_{f_1}(Q(M_1)), \pi_M \circ Q_{f_2}(Q(M_2))] = \pi_M([Q_{f_1}(Q(M_1)), Q_{f_2}(Q(M_2))]),$$

sodass auch die Kausalität vererbt wird.

Für die Existenz benutzen wir die GNS-Konstruktion. Zu $\omega \in S(M)$ sei $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ die GNS-Darstellung und $\mathfrak{D}_\omega = \pi_\omega(Q(M))\Omega_\omega$, dann definieren wir

$$\mathfrak{D}_M = \{x \in \oplus_{\omega \in S(M)} \mathfrak{D}_\omega |\ x_\omega \neq 0 \text{ nur für endlich viele } \omega\}.$$

$\mathfrak{D}_M$ ist dicht in dem Hilbertraum $\oplus_{\omega \in S(M)} \mathfrak{H}_\omega$ und ein gemeinsamer stabiler Definitionsbereich für

$$\pi_M(a) := \oplus_{\omega \in S(M)} \pi_\omega(a),\ a \in Q(M).$$

Offenbar ist π_M eine Darstellung der Algebra $Q(M)$ durch $\mathfrak{D}_M$-Endomorphismen

$$Q(M) \xrightarrow{\pi_M} \pi_M(Q(M)).$$

Wir setzen

$$R(M) := \pi_M(Q(M)) \subset \mathrm{End}(\mathfrak{D}_M)$$

und müssen für $M \xrightarrow{f} N \in \mathfrak{Man}$ ein $R_f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{ALG})$ finden, sodass Gleichung (4) gilt. Dazu berechnet man den Kern von π_M, wir benutzen dafür die Abkürzung $\ker(\pi_M) =: \mathcal{N}_M$,

$$\mathcal{N}_M = \cap_{\omega \in S(M)} \{a \in Q(M) |\ \omega(a^* a) = 0\}$$

und für $a \in \mathcal{N}_M$ das Bild unter Q_f, dafür benutzen wir die Bedingung (5) und folgern

$$\omega'(b^* Q_f(a)^* Q_f(a) b) = 0\ \forall\ b \in Q(N),\ \forall\ \omega' \in S(N),$$

dann ist aber

$$Q_f(\mathcal{N}_M) \subset \mathcal{N}_N. \tag{6}$$

Nun identifizieren wir $R(M)$ mit $Q(M)/\mathcal{N}_M$, für N entsprechend, und definieren

$$R_f(a + \mathcal{N}_M) = Q_f(a) + \mathcal{N}_N. \tag{7}$$

Wegen Gleichung (6) ist R_f wohldefiniert und man rechnet leicht nach, dass $R_f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{ALG})$ ist. Mit oben genannter Identifikation bedeutet Gleichung (7), dass R_f Gleichung (4) erfüllt. Ausserdem transformiert R kovariant

$$R_g \circ R_f(a + \mathcal{N}_M) = R_g(Q_f(a) + \mathcal{N}_N) = Q_{g \circ f}(a) + \mathcal{N}_{\mathrm{cod}(g)} = R_{g \circ f}(a + \mathcal{N}_M).$$

Wir haben für jedes $\omega \in S(M)$ Vektorzustände $\tilde{\Omega}_\omega = (\Omega_\sigma \delta_{\sigma\omega})_{\sigma \in S(M)}$ mit dem Kroneckerdelta δ_{ik}, die das Gewünschte leisten, womit der Beweis abgeschlossen ist.

Hier noch ein paar Bemerkungen. Wir können R als S-reduziert auffassen, in Bezug auf S ist R physikalisch äquivalent zu Q; suggestiv: $R = Q/S$. $S(M) \neq \emptyset \ \forall \ M$ ist in diesem Formalismus eine Minimalforderung, da man Erwartungswerte berechnen will. Ist aber diese Minimalforderung erfüllt, dann kann man Q S_{Max}-reduzieren und erhält eine zu Q physikalisch äquivalente LC-QFT, die durch Operatoralgebren realisiert ist. In diesem Sinn kann man sich auf Operatoralgebren beschränken, nur ist es für die konkrete Konstruktion nicht unbedingt hilfreich.

Aus dem Beweis ersieht man, dass die Forderung (5) in diesem Beweis gebraucht wird, um die Transformationseigenschaften mit den wahllos verklebten GNS-Darstellungen zu vereinbaren. Man könnte Zustandsräume, die mit jedem Zustand auch dessen Folium[11] enthalten, favorisieren. Die mikrolokale Spektrumsbedingung μSC, siehe [BFK, Theorem 4.5], hat diese Eigenschaft.

[11] Die Zustände, die durch Dichtematrizen auf dem entsprechenden GNS-Hilbertraum induziert werden. In der Darstellung π_M werden diese durch Vektorzustände approximiert, wenn (5) gilt.

5 Thermische Eigenschaften

Bei physikalischen Theorien drängt sich die Frage auf, wo sie wie nah (und in welchem Sinn) an der Thermodynamik sind; insbesondere werden Zustände gesucht, deren Erwartungswerte bezüglich einer Zeitentwicklung thermodynamische Variablen sind.

5.1 KMS-Zustände

Die Situation stellt sich also so dar, dass eine unitale involutive Algebra $\mathfrak{A}$ gegeben ist und ein Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\tau} Aut(\mathfrak{A}),$$

wobei wir hier mit $Aut(\mathfrak{A})$ die 1- und Involution-erhaltenden Algebraautomorphismen bezeichnen. τ wird im folgenden Zeitentwicklung genannt und trägt die Zeit t als Index τ_t. Als Gleichgewichtszustände haben sich die KMS-Zustände etabliert [12], sie verallgemeinern das Gibbs Ensemble und sind passiv und stabil.

Definition 9 (KMS-Bedingung) *Sei $\mathfrak{A}$ und τ wie oben, dann wird ein τ-invarianter Zustand ω (β, τ)-KMS-Zustand genannt, wenn es für jedes Paar $(a, b) \in \mathfrak{A}^2$ eine auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im(z) \leq \beta\}$ stetige und auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im(z) < \beta\}$ holomorphe Funktion*

$$\Im^{-1}([0, \beta]) \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

gibt mit

$$f(t) = \omega(a\tau_t(b)) \;\; und \;\; f(t + i\beta) = \omega(\tau_t(b)a).$$

Auf (β, τ)-KMS-Zustände kann man folgendes Theorem anwenden.

Theorem 4 *Der Zustand ω über der unitalen involutiven $\mathfrak{A}$ sei unter der Zeitentwicklung τ invariant, dann wird die Zeitentwicklung in der GNS-Darstellung $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ unitär implementiert, d.h., es gibt eine Einparametergruppe unitärer Operatoren $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ auf $\mathfrak{H}_\omega$ mit*

$$U_0 = 1,$$

$$U_t U_s = U_{t+s},$$

$$U_t \Omega_\omega = \Omega_\omega \;\; und$$

$$U_t \pi_\omega(a) U_{-t} = \pi_\omega(\tau_t(a)) \;\; f\ddot{u}r\ alle \;\; t \in \mathbb{R},\ a \in \mathfrak{A}.$$

Die Abbildung

$$t \mapsto U_t$$

ist genau dann stark stetig, wenn für alle $a \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{t\to 0} \Re(\omega(a^* \tau_t(a))) = \omega(a^* a)$$

ist und nur dann existiert ein selbstadjungierter Operator h mit

$$U_t = e^{-ith} \;\; f\ddot{u}r\ alle\ t \in \mathbb{R}.$$

Die $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ findet man mit den Darstellungen $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega \circ \tau_t, \Omega_\omega)_{t\in\mathbb{R}}$ und Theorem (1), die Bedingung für starke Stetigkeit ist nur in Termen der abstrakten Algebra umgeschrieben und der Rest ist eine direkte Anwendung des Theorems von Stone. Einem (β, τ)-KMS-Zustand wird die Temperatur $1/\beta$ zugeordnet. Für alle $\alpha \in Aut(\mathfrak{A})$ mit $[\alpha, \tau_x] = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt, dass mit ω auch $\omega \circ \alpha$ ein (β, τ)-KMS-Zustand ist. Unter der Annahme, dass es zu jedem β genau einen KMS-Zustand gibt, folgt die Invarianz des Zustandes unter der gesamten Gruppe

$$\{\alpha \in Aut(\mathfrak{A}) | [\alpha, \tau_x] = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Ein wichtiges Beispiel sind die Translationen auf dem Minkowski-Raum, die durch kommutierende Automorphimen dargestellt werden. Ein zur Temperatur $1/\beta$ eindeutig bestimmter KMS-Zustand bezüglich einer (Translations-)Ein-Parameter-Untergruppe ist demnach translationsinvariant.

5.2 Lokale thermische Eigenschaften

In der Arbeit [4] wurde eine Methode vorgestellt einem Zustand ω über der Algebra $\mathfrak{A}$ lokal thermische Eigenschaften zuzuweisen. Hierfür zeichnet man einen linearen Raum am "Punkt"messbarer Observablen aus; ein gegebener Zustand kann dann (unter Umständen) mit diesen Observablen darauf getestet werden, ob er, eingeschränkt auf diese, einem Gemisch von Gleichgewichtszuständen entspricht. Konkret wurde angenommen, $\mathfrak{A}$ werde erzeugt vom 1-Operator und von observablen Feld-Operatoren, generisch bezeichnet mit

$$\phi(f), \ f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4),$$

auf einem Hilbertraum mit gemeinsamen dichten stabilen Definitionsbereich. Ausserdem sei die Poincare-Gruppe $\mathcal{P}$ durch $\mathfrak{A}$-Automorphismen dargestellt und zu jeder zukunftsgerichten, zeitaritgen und geodätischen Translation und jeder positiven Temperatur gäbe es genau einen KMS-Zustand[12]. Die Menge der thermischen Vergleichzustände G besteht aus über Temperaturen und Translationsrichtungen geeignet gemittelten Gemischen[13] dieser KMS-Zustände. Für jedes $x \in \mathbb{R}^4$ wird in jener Arbeit eine Hierarchie von Observablen-Räumen, die sich u.a. nach ihrem Ultraviolett-verhalten klassifizieren lassen, angegeben. Diese Observablen sind im allgemeinen nur als Formen definiert. Je größer der Raum ist, bezüglich dessen ein Zustand[14] einem Vergleichzustand entspricht, desto näher wird er am thermischen Gleichgewicht angesehen. In der Arbeit [5] wurde angedacht diese Methode auf gekrümmte Raumzeiten fortzusetzen.

Zunächst ist der in [5] abgesteckte Rahmen zu beschreiben; es wird angnommen, dass auf allen $M \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{Man})$ Quantenfeldtheorien $O(M)$ realisiert sind. Weiter werden "master fields"$\phi = (\phi_M)_M$ mit $\phi_M \in O(M)$ betrachtet, von denen gefordert wird, dass ihre Einschränkungen auf isomorphen Raumzeiten auch algebraisch isomorph sind, ganz ähnlich den in (3) definierten lokal kovarianten Quantenfeldern. Es sei nun eine Auswahl S an master fields ausgezeichnet.

[12] In [4] wird die relativistische KMS-Bedingung benutzt.

[13] Wie in [4] erklärt, ist der Vorwärtslichtkegel mit der Menge der betrachteten KMS-Zustände identifizierbar, mit dieser Identifikation werden als Mischungsoperation alle auf dem Vorwärtslichkegel kompakt getragenen Maße zugelassen.

[14] Von solchen Zuständen wird eine geeignete Ënergiebeschränktheit"gefordert.

Vorgeschlagen wurde, dass S normalgeordnete Produkte (siehe unten) und balancierte Ableitungen (siehe [4]) der master fields enthält. Auf dem Minkowski-Raum $\mathbb{M}$ seien wie oben eine Menge homogener, thermischer Vergleichszustände G ausgewählt, dann wird ein Zustand ω auf M im Gleichgewicht am Punkt p bezüglich der Observablen in S genannt, wenn es ein $\sigma \in G$ gibt mit

$$\omega(\phi_M(x)) = \sigma(\phi_{\mathbb{M}}(0)) \quad \forall \quad \phi \in S.$$

Ausserdem wurde für das (masselose) Klein-Gordon-Feld das kovariant renormierte Wickquadrat als lokales Thermometer vorgeschlagen. Wir werden auf diesen Punkt zurückkommen, wenn die benötigten Begriffe bereitgestellt sind. Dann werden wir auch Zustände, die lokal eine thermische Interpretation haben, testen, ob sie bezüglich des Wickquadrats und des Energie-Impuls-Tensors in dieses Schema passen.

6 Das freie skalare Feld

Man wird sich vielleicht schon fragen, ob es LCQFTn gibt. Dieser Abschnitt wird diese Frage beantworten; für eine ausführliche Darstellung sei auf [2] verwiesen.

6.1 Die Feldalgebra

Auf der Suche nach Quantenfeldtheorien benutzt man häufig eine Spiegeltheorie, die schon wesentliche Charakteristika des (zu beschreibenden) Systems darstellt. So gehen wohl die meisten bekannten Quantenfeldtheorien aus klassischen Feldtheorien hervor. Wir werden entsprechend zunächst das klassische freie Klein-Gordon-Feld betrachten. Sei also $M \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{Man})$, dann ist das Feld eine unendlich oft differenzierbare Abbildung $\phi : M \to \mathbb{R}$, die die Klein-Gordon-Gleichung (KGGl) erfüllt:

$$(\nabla_a \nabla^a + m^2 + \xi R)\phi = 0. \tag{8}$$

Hier ist ∇ die kovariante Ableitung, $m^2, \xi \in \mathbb{R}$ und R die Skalarkrümmung. In Koordinaten x^a ergibt sich hier $\nabla_a \nabla^a = 1/G \partial_a g^{ab} G \partial_b$ mit $\partial_a := \partial / \partial x^a$, $G := \sqrt{-\det g_{ab}}$ und der Metrik g_{ab}. Ist $\xi = 0(1/6)$, so nennt man das Feld minimal (konform) gekoppelt. Die Charakteristika hier sind u.a. Verträglichkeit mit Einsteinkausalität(s.u.) und Masse m. Auf global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten ist das Cauchyproblem für Wellengleichungen und deswegen auch für die KGGl sachgemäß, siehe hierzu auch [CB]; zur Erläuterung die

Definition 10 (Cauchyproblem zur KGGl) *Gegeben sei eine global hyperbolische Mannigfaltigkeit (M, g_{ab}), eine Cauchyfläche $S \subset M$ und $u_0, u_1 \in C_0^\infty(S)$, genannt Cauchydaten. Dann ist gesucht ein $u \in C^\infty(M)$ mit $(\nabla_a \nabla^a + m^2 + \xi R)u = 0$ und $u|_S = u_0$ bzw. $Nu|_S = u_1$ mit dem zukunftsgerichteten Einheitsnormalenfeld N bezüglich S.*
Das Cauchyproblem heißt sachgemäß, wenn es genau eine Lösung u gibt und der Lösungsmonomorphismus: $(u_0, u_1) \mapsto u$ stetig ist.

Der Lösungsraum ist also mit $C_0^\infty(S) \times C_0^\infty(S)$ für jede Cauchyfläche S identifizierbar. Diese Identifikation wird häufig benutzt, analog dazu werden im gewissermaßen entarteten Fall punktmechanischer Systeme Trajektorien durch Anfangsort und Anfangsimpuls dargestellt.
Wesentlich für die folgenden Konstruktionen sind die Fundamentallösungen

$$E^\pm : C_0^\infty(M) \to C^\infty(M) \tag{9}$$

mit

$$(\nabla_a \nabla^a + m^2 + \xi R)E^\pm f = E^\pm(\nabla_a \nabla^a + m^2 + \xi R)f = f \quad \forall\, f \in C_0^\infty(M) \tag{10}$$

und $\mathrm{supp}(E^\pm f) \subset \mathrm{supp}(J^\pm(f))$. Durch diese Trägereigenschaften sind $E^\pm$ eindeutig bestimmt. Der kausale Propagator ist nun

$$E = E^- - E^+.$$

Für den Kern, als $\ker E$ notiert, und das Bild gilt

$$\ker(E) = (\nabla_a \nabla^a + m^2 + \xi R)C_0^\infty(M) \quad \text{und} \tag{11}$$

$E(C_0^\infty(M)) = \{$glatte, räumlich kompakt getragene Lösungen der KGGl$\}$;

für spätere Zwecke definieren wir

$$\mathcal{R}(M) := E(C_0^\infty(M)). \tag{12}$$

Auf dem Lösungsraum ist eine kanonische symplektische Form gegeben durch

$$\Omega(f,g) = \int_S \mathrm{d}S \; n^a \nabla_a f g - f n^a \nabla g, \;\; f,g \in \mathcal{R}(M),$$

wobei S eine beliebige Cauchyfläche und n^a das zukunftsgerichtete Einheitsnormalenfeld auf S ist; sie erfüllt

$$\Omega(Ef, Eg) = (f, Eg) := \int \mathrm{d}\mu f E g \;\forall\; f,g \in \mathcal{D}(M) \tag{13}$$

mit dem kanonischen Maß μ.

Ein Weg, aus diesen Informationen eine LCQFT zu machen, ist die Konstruktion von Weylalgebren über den $\mathcal{R}(M)$, $M \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{Man})$. Eine Weylalgebra $\mathfrak{W}(X)$ über dem reellen symplektischen Raum (X,Ω) ist eine von sogenannten Weylelementen $W(x)$, $x \in X$, erzeugte C*-Algebra, wobei die Weylelemente die Weylrelationen erfüllen:

$$W(-x) = W(x)^*,$$
$$W(x)W(y) = \mathrm{e}^{-i\Omega(x,y)/2} W(x+y) \;\;\forall\; x,y \in X \tag{14}$$

Wichtig ist, dass es zwischen 2 Weylalgebren über (X,Ω) genau einen *-Isomorphismus, der Weylelemente auf Weylelemente gleichen Arguments abbildet. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{W}$ ein Funktor zwischen der Kategorie der symplektischen Räume $\mathfrak{Symp}$ mit den symplektischen Monomorphismen (symplektische Form erhaltend, $\mathbb{R}$-linear, injektiv) als Morphismen und $\mathfrak{Alg}$ ist, da es zu jedem symplektischen Monomorphismus genau einen C*-Monomorphismus[15] gibt, sodass Kovarianz gilt. Nach [Dimock] ist nun aber $\mathcal{R}$ aus Gleichung (12) als Funktor zwischen $\mathfrak{Man}$ und $\mathfrak{Symp}$ aufzufassen, es ist lediglich $\mathcal{R}_\rho := \rho_* := {\rho^{-1}}^*$ für $\rho \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{Man})$ zu setzen. Die LCQFT des Klein-Gordon-Feldes wird nun definiert als

$$\mathfrak{W} \circ \mathcal{R}. \tag{15}$$

Die Morpismen sind konkret gegeben durch

$$\mathfrak{W} \circ \mathcal{R}_\rho(W(f)) = W(\rho_* f).$$

Die Weylalgebra "vertritt"die Feldalgebra mit kanonischen Vertauschungsrelationen (CCR), diese wird erzeugt von Elementen $\phi(f)$ mit

$$\begin{aligned} [\phi(f), \phi(g)] &= i(f, Eg), \\ \phi(\lambda f + g) &= \lambda\phi(f) + \phi(g), \\ \phi((\nabla_a \nabla^a + m^2 + \xi R) f) &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

[15] Das ist eine einfache Erweiterung, der Aussage, jede kanonische Transformation induziert eine Bogoliubov-Transformation

für alle $\lambda \in \mathbb{C}; f, g \in \mathcal{D}(M)$. Diese werden häufig an den Anfang der Konstruktion gestellt und stellen gewissermaßen die infinitisimale Version der Weylrelationen dar. Der Nachteil an der CCR ist, dass sie in keine normierte, unitale involutive Algebra passt. Es gibt Darstellungen der Weylalgebra, in denen die Weylelemente durch Operatoren ïnfinitisimalërzeugt werden, die die CCR[16] darstellen.

6.2 Zustände auf der Weyl-Algebra

Ein Zustand ω auf der Weyl-Algebra $\mathfrak{W} \circ \mathcal{R}(M), M \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{Man})$ wird durch das Funktional

$$t : \mathcal{D}(M) \ni f \mapsto \omega(W(Ef)) \in \mathbb{C}$$

eindeutig festgelegt. t hat folgende Eigenschaften:

1. $t((\nabla_a \nabla^a + m^2 + \xi R)f) = 1$ für alle $f \in \mathcal{D}(M)$

2. $\sum_{ik} c_k \bar{c}_i t(f_k - f_i) \mathrm{e}^{-i(f_k, Ef_i)/2} \geq 0$ für alle $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ und $f_1, ..., f_n \in \mathcal{D}(M)$.

Gilt ausserdem

3. $t(xf + g) \to t(g)$ für $x \to 0$ und $f, g \in \mathcal{D}(M)$,

so heißt ω regulär. Umgekehrt definiert jedes Funktional mit den Eigenschaften 1.-3. einen regulären Zustand auf der Weyl-Algebra, indem man Testfunktionen identifiziert, die sich nur um einen Term der Form $(\nabla_a \nabla^a + m^2 + \xi R)f, f \in \mathcal{D}(M)$ unterscheiden. Besonders handlich sind die quasifreien Zustände, sie werden erzeugt durch Funktionale der Form $f \mapsto \mathrm{e}^{-s(f,f)/2}$ mit einer positiven symmetrischen $\mathbb{R}$-bilinearen Form s auf $\mathcal{D}(M)$, die

$$|(f, Eg)|^2 \leq 4s(f, f)s(g, g) \quad \text{und} \tag{17}$$

$$s((\nabla_a \nabla^a + m^2 + \xi R)f, g) = 0 \quad \forall\, f, g \in \mathcal{D}(M)$$

erfüllt. Wir werden annehmen, dass s Distribution in jedem Eintrag ist. Nach dem Schwartzschen Kerntheorem hat ω_2 dann eine eindeutige stetige Fortstetzung auf $\mathcal{D}(M^2)$. In der GNS-Darstellung π eines quasifreien Zustandes ω bzw. t sind die unitären Ein-Parameter-Gruppen

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \pi(W(xEf)), f \in \mathcal{D}(M)$$

stark stetig[17], sodass der Satz von Stone selbstadjungierte Erzeuger $\phi(f)$ liefert, die Felder oder auch Feldoperatoren genannt werden. Es gibt einen dichten stabilen Unterraum, auf dem die Felder die Gleichungen (16) erfüllen. Ausserdem sind die Operatoren $\phi(f) + i\phi(g)$ abgeschlossen und es existieren die sogenannten n-Punkt-Funktionen

$$\omega_n : (f_1, ..., f_n) \mapsto \omega(\phi(f_1), ..., \phi(f_n));$$

[16] In obiger Formulierung muss den infinitisimalen Erzeugern noch der Propagator vorgeschaltet werden.

[17] Es ist sogar $\mathcal{D}(M) \ni f \mapsto \pi(W(f))$ stark stetig.

sie errechnen sich nach

$$\omega_n(f_1, ..., f_n) = (-i)^n \partial_1|_0 \cdots \partial_n|_0 \omega(W(x_1 E f_1) \cdots W(x_n E f_n)) =$$
$$= (-i)^n \partial_1|_0 \cdots \partial_n|_0 t(x_1 f_1 + ... + x_n f_n) \mathrm{e}^{-i/2 \sum_{j<k} x_j x_k (f_j, E f_k)}.$$

Für ungerades n verschwinden sie und für gerades $n = 2m$ ergibt sich:

$$\omega_n(f_1, ..., f_n) = \sum_{u^1, ..., u^m} \prod_k \omega_2(f_{u_1^k}, f_{u_2^k}),$$

mit $\{u_1^1, ..., u_2^m\} = \{1, ..., n\}$, $u_1^k < u_2^k$ und

$$\omega_2(f, g) = s(f, g) + \frac{i}{2}(f, Eg).$$

Sie verschwindet, wenn ein Eintrag von der Form $(\nabla_a \nabla^a + m^2 + \xi R) f$ ist. Es ist jetzt praktisch zu komplexwertigen Testfunktionen überzugehen, dazu setze man die Feldoperatoren so $\phi(f) := \phi(\Re f) + i\phi(\Im f)$ fort, dadurch wird für ω_2 eine Fortsetzung induziert. Wegen (17) ist

$$\omega_2(\bar{f}, f) = s(\Re f, \Re f) + s(\Im f, \Im f) + (\Re f, E \Im f) =$$
$$(\sqrt{s(\Re f, \Re f)} - \sqrt{s(\Im f, \Im f)})^2 + 2\sqrt{s(\Re f, \Re f) s(\Im f, \Im f)} + (\Re f, E \Im f) \geq 0,$$

Man kann zeigen, dass ω_2 auf dem symmetrischen Fockraum zu $\mathcal{D}(M)$, jetzt als komplexwertige Testfunktionen zu lesen, in kanonischer Weise eine degenerierte Prähilbertraumstruktur definiert. Mit einem Standardverfahren erhält man eine Fockraumdarstellung, unter Umständen bis auf Irreduzibilität, die äquivalent zur GNS-Darstellung von ω ist, wobei die Weylelemente nur reelle Argumente haben.

Welche Zustände sind physikalisch sinnvoll? Auf Raumzeiten mit nicht trivialer Symmetriegruppe sind invariante Zustände ausgezeichnet. Wenn die Raumzeit die Form $M = (\mathbb{R} \times S, 1 \times (-h_{ab}))$ hat, wobei (S, h_{ab}) eine 3-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit ist, dann können KMS-Zustände bezüglich Translationen in 0-Richtung definiert werden. Die KGGl ergibt sich hier zu

$$(\partial_0^2 - \Delta_S + m^2 + \xi R)\phi = 0,$$

mit dem Laplace-Operator $\Delta_S = 1/H \partial_i H h^{ik} \partial_k$ auf S und $H = \sqrt{\det h_{ab}}$. Mit den eben eingeführten Bezeichnungen gilt [Kay]

Theorem 5 *M global hyperbolisch $\Longleftrightarrow$ S als metrischer Raum vollständig $\Longleftrightarrow$ S als Riemannscher Raum geodätisch vollständig. Für global hyperbolische Raumzeiten dieses Typs ist $-\Delta_S + m^2$ auf $\mathcal{D}(S)$ wesentlich selbstadjungiert und sein Abschluss ist ein selbstadjungierter positiver Operator auf $L^2(S, H d^3x)$*[18]

Dieser Satz bleibt für die konform gekoppelte KGGl richtig, wenn ξR nur eine kleine Störung für $\overline{-\Delta_S}$ [19] und größer $-m^2$ ist, was wir annehmen wollen. Wir kürzen fürs folgende ab

$$B := \overline{-\Delta_S + m^2 + \xi R}^{1/2}.$$

[18]Das ist natürlich der Hilbertraum der bezüglich der Maßes $H\mathrm{d}^3x$ über S quadratintegrierbaren "Funktionen".

[19]Der Strich bezeichnet den Abschluß des Operators.

Nun können Propagator E, Grundzustand ω_2^∞ und KMS-Zustände ω_2^β zu positiven Temperaturen $1/\beta$ mit Hilfe des Spektralsatzes konstruiert werden, wobei der Integralkern eines Operators A auf $\mathrm{L}^2(S, H(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x})$ mit $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$ bezeichnet wird[20][1]:

$$E(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y}) = -\frac{\sin B(t-s)}{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{18}$$

$$\omega_2^\infty(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y}) = \frac{1}{2B}\mathrm{e}^{-iB(t-s)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{19}$$

$$\omega_2^\beta(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y}) = \frac{1}{2B}[\frac{\mathrm{e}^{-iB(t-s)}}{1-\mathrm{e}^{-\beta B}} - \frac{\mathrm{e}^{iB(t-s)}}{1-\mathrm{e}^{\beta B}}](\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{20}$$

Für spätere Zwecke führen wir hier die Differenz von KMS-Zustand ω_2^β und Grundzustand ω_2^∞ auf:

$$(\omega_2^\beta - \omega_2^\infty)(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y}) = \cos(B(t-s))(B(\mathrm{e}^{\beta B}-1))^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{21}$$

Ohne genügend große Symmetriegruppe bleibt die Klassifizierung der Zustände nach lokalen Daten. Als physikalisch sinnvoll werden die Hadamard-Zustände angenommen. Ein Hadamard-Zustand hat für kleine geodätische Abstände $\sqrt{\sigma(x,y)}$ zwischen den Punkten x und y die Form

$$\omega_2(x,y) = \frac{u(x,y)}{\sigma(x,y)} + v(x,y)\ln\sigma(x,y) + w(x,y) \tag{22}$$

mit

$$u(x,y) \propto (G(x)G(y))^{-1/4}|\det\frac{\partial}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial y^b}\sigma(x,y)|,$$

G wie bei Gleichung (8) und glatten Funktionen v, w, wobei v eine Funktion σ und vom Zustand unabhängig ist. Zwei Hadamard-Zustände unterscheiden sich also nur um eine glatte Funktion. Dieses Faktum wird zur Definition des Wickquadrats benutzt. Das Verhalten des Minkowski-Vakuums für kleine geodätische Abstände kann als Motivation für Gleichung (22) angesehen werden. Nach Radzikowski charakterisiert man die Hadamard-Zustände durch Festlegung der Wellenfrontmenge (WF) der 2-Punktfunktion in eleganter und äquivalenter Weise. Für die Bezeichnungen sei auf [18] verwiesen. Dazu betrachten wir 2 Punkte $p, q \in (M, g_{ab}) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{Man})$, bezeichnen mit $\mathcal{W}_{p,q}$ die Menge aller zukunftsgerichteten lichtartigen geodätischen Wege von p nach q und definieren

$$\mathcal{H}_{p,q} = \{(\dot\gamma(0)^a, -\dot\gamma(1)^b)|\gamma \in \mathcal{W}_{p,q}\}.$$

Definition 11 (Hadamard-Zutände nach Radzikowski)

Unter Benutzung obiger Bezeichnungen ist ein quasifreier Zustand dann und nur dann ein Hadamard-Zustand, wenn die 2-Punktfunktion ω_2

$$\Sigma_{(p,q)}(\omega_2) = \{\alpha(\eta_a,\ \zeta_b)|(g_p^{ac}\eta_c,\ g_q^{bc}\zeta_c) \in \mathcal{H}_{p,q},\ \alpha > 0\}$$

für alle $p, q \in (M, g_{ab})$ erfüllt.

In [3] wurde Definition (11) zur mikrolokalen Spektrumsbedingung (μSC) verallgemeinert. μSC erfasst auch nicht quasifreie Zustände und wie schon zitiert mit einem Zustand sein Folium.

[20] Die entsprechende Form ist formal dann

$$(f,g) \mapsto \int \mathrm{d}(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y})H(\mathbf{x})H(\mathbf{y})A(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y})f(t,\mathbf{x})g(s,\mathbf{y}).$$

6.3 Normalgeordnete Produkte

Die Feldalgebra enthält nun aber nicht alle gewünschten Observablen. Ein Schritt zur Erweiterung ist die Einführung von normalgeordneten Produkten, die in Bezug auf einen Zustand ω renormiert sind

$$:\mathrm{e}^{i\phi(f)}:_\omega \quad \omega(\mathrm{e}^{i\phi(f)}) = \mathrm{e}^{i\phi(f)}. \tag{23}$$

Für Hadamard-Zustände definiert man in verträglicher Weise

$$:1:_\omega = 1,$$

$$:\phi(f):_\omega = \phi(f),$$

$$:\prod_{0\le k\le n}\phi(f_k):_\omega = \phi(f_0):\prod_{1\le k\le n}\phi(f_k):_\omega - \sum_{1\le k\le n}\omega_2(f_0,f_k):\prod_{1\le j\le n; j\neq k}\phi(f_j):_\omega .$$

Diese Operation ist natürlich auf der abstrakten CCR-Algebra definiert; das normalgeordnete Exponential in Gleichung (23) kann als Erzeugendes Funktional angesehen werden. In der GNS-Darstellung eines Hadamardzustands können die normalgeordneten Produkte als Operator-wertige Distributionen auf die Diagonale eingeschränkt [3] und dadurch Wickpotenzen definiert werden,

$$:\phi^n:_\omega(f).$$

Eine Modifikation dieser hier nur angedeuteten Konstruktion führt zu lokal kovarianten Quantenfeldern [9]. Man ersetzt in der Definition der Wickpotenzen die willkürlich gewählten Zustände durch die lokal definierte Hadamard-Parametrix H, ihre Konstruktion ist mit Gleichung (22) verknüpft, siehe hierfür [16]. Wir interessieren uns für das Wickquadrat. Der Erwartungswert $:\phi(f)\phi(g):_H$ im Hadamard-Zustand ω' ist wegen der Hadamardbedingung eine reguläre Distribution

$$(f,g)\mapsto \int \mathrm{d}\mu\mathrm{d}\mu' F(x,x')f(x)g(x').$$

In diesem Sinn definieren wir

$$\omega'(:\phi(x)\phi(x'):_H) = F(x,x'). \tag{24}$$

und erhalten

$$\omega'(:\phi^2:_H(x)) = \lim_{x'\to x}\omega'(:\phi(x)\phi(x'):_H).$$

6.4 Der Energie-Impuls-Tensor T_{ab}

Wir nehmen hier mit $\xi = 0$ den minimal gekoppelten Fall an. Der Energie-Impuls-Tensor des klassischen Klein-Gordon-Feldes ϕ ist definiert als

$$T_{ab}(x) = \nabla_a\phi(x)\nabla_b\phi(x) - \frac{1}{2}g_{ab}(x)(\nabla_c\phi(x)\nabla^c\phi(x) - m^2\phi(x)^2)$$

Da ϕ glatt ist, kann man hierfür auch

$$T_{ab}(x) = \lim_{x'\to x}(\nabla_a\nabla'_b - \frac{1}{2}g_{ab}(x)(\nabla_c\nabla'^c - m^2)\phi(x)\phi(x') \tag{25}$$

schreiben. Gleichung (25) motiviert folgende Definition. Für x' nahe x setzen wir

$$D_{ab}f(x,x') := (\nabla_a \nabla'_b - \frac{1}{2} g_{ab}(x)(\nabla_c \nabla'^c - m^2))f(x,x') \tag{26}$$

und definieren den Energie-Impuls-Tensor

$$T_{ab}(x)_H := \lim_{x' \to x} D_{ab} :\phi(x)\phi(x'):_H, \tag{27}$$

Für einen Hadamardzustand ω' erhalten wir

$$\omega'(T_{ab}(x)_H) = \lim_{x' \to x} D_{ab}F(x,x'),$$

wobei F die reguläre Distribution $\omega'_2 - H$ ist.

Für eine Behandlung des Energie-Impuls-Tensors und insbesondere der Konstruktion der Hadamard-Parametrix sei wieder auf [16] verwiesen. Dort wird auch gezeigt, dass Energie-Impuls-Tensor, Wickprodukte und Felder in einer vergrösserten Algebra liegen.

7 Auf dem Minkowski-Raum

Wir möchten hier nur die Resultate bereitstellen, die im weiteren Verlauf benötigt werden. Mit Gleichungen (18), (20) und (21) erhält man für den Propagator Δ und die KMS-Zustände Δ_β

$$\Delta(x-y) = -(2\pi)^{-3} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{P_0} \sin P(x-y) \tag{28}$$

$$\Delta_\beta(x-y) = (2\pi)^{-3} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2P_0} [\frac{\mathrm{e}^{-iP(x-y)}}{1-\mathrm{e}^{-\beta P_0}} - \frac{\mathrm{e}^{iP(x-y)}}{1-\mathrm{e}^{\beta P_0}}] \tag{29}$$

$$(\Delta_\beta - \Delta_\infty)(x-y) = (2\pi)^{-3} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{P_0} \frac{\cos P(x-y)}{\mathrm{e}^{\beta P_0}-1} \tag{30}$$

Mit Gleichung (30) berechnet man das Wickquadrat

$$\Delta_\beta(:\phi^2:_{\Delta_\infty}(x)) = (2\pi)^{-3} \int \mathrm{d}^3 p \; P_0^{-1} (\mathrm{e}^{\beta P_0} - 1)^{-1}. \tag{31}$$

Der Erwartungswert ist offensichtlich positiv und in β streng monoton fallend. Für verschwindende Masse findet man

$$\Delta_\beta(:\phi^2:_{\Delta_\infty}(x)) = \frac{1}{12\beta^2} \;, \tag{32}$$

sodass man hier geneigt ist, $12 :\phi^2:_{\Delta_\infty}$ als die Observable des lokalen Temperaturquadrates zu definieren.

Für den Energie-Impuls-Tensor findet man mit Gleichung (30)

$$\Delta_\beta(T_{ab\Delta_\infty}) = (2\pi)^{-3} \int \mathrm{d}^3 p \; P_0^{-1} (\mathrm{e}^{\beta P_0} - 1)^{-1} ((m^2 + 4/3p^2)\delta_{0a}\delta_{0b} - \eta_{ab} p^2/3),$$

wobei δ_{ik} das Kroneckerdelta bezeichnet. In einem anderen Lorentz-System ergibt sich

$$\Delta_\beta(T_{ab\Delta_\infty}) = (2\pi)^{-3} \int \mathrm{d}^3 p \; P_0^{-1} (\mathrm{e}^{\beta P_0} - 1)^{-1} ((m^2 + 4/3p^2) e_a e_b - \eta_{ab} p^2/3). \tag{33}$$

e^a ist der normierte Vektor in Richtung der Zeitachse, bezüglich derer der KMS-Zustand präpariert ist. Für das masselose Feld ergibt sich

$$\Delta_\beta(T_{ab\Delta_\infty}) = \frac{\pi^2}{90\beta^4}(4e_a e_b - \eta_{ab}). \tag{34}$$

Für einen Zustand ω auf einer Raumzeit M, der sich nach [5] am Punkt $p \in M$ im Gleichgewicht bezüglich Wickquadrat oder Energie-Impuls-Tensor befindet, müssen $\omega(:\phi^2:(p))$ bzw. $\omega(T_{ab})$ durch konvexe Kombinationen der Terme (31) bzw. (33)[21] dargestellt werden können.

[21] Hier ist der Tensorcharakter von T_{ab} zu berücksichtigen.

8 Auf dem Rindlerkeil

In diesem Kapitel wird das massive KG-Feld auf dem Rindlerkeil (RK) betrachtet. Das Ziel ist es Erwartungswerte des Wickquadrats und des Energie-Impuls-Tensors in KMS-Zuständen zu berechnen. Es stellt sich heraus, dass es einen geeigneten Operator $\sqrt{A}$ gibt, mit dem wie in Gleichung (21) die Zustände berechnet werden können. Der RK kann als Teilmenge des Minkowski-Raums $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ aufgefasst werden:

$$(\mathrm{RK}, g_{ab}) = (\{x \in \mathbb{R}^4 |\ x^1 > |x^0|\}, \eta_{ab}|_{\mathrm{RK}}).$$

Nach dem (globalen) Koordinatenwechsel

$$x = (\mathrm{e}^\lambda \sinh t, \mathrm{e}^\lambda \cosh t, y, z)$$

erscheint der RK in der Gestalt:

$$(\mathbb{R}^4, \mathrm{e}^{2\lambda}(\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\lambda^2) - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2).$$

Translationen in t-Richtung um s bedeuten Boosts in x^1-Richtung mit Rapidität s, die Kurven $t \mapsto (t, \lambda_0, y_0, z_0)$ werden als gleichmäßig beschleunigte Trajektorien angesehen. Der RK hat die Eigenschaft alle zeitartigen geodätischen Beobachter zu verlieren, diese verlassen ihn in endlicher Eigenzeit durch die Hyperfläche $\lambda = -\infty,\ t > 0$ oder in den alten Koordinaten $x^1 = x^0$; entsprechend treten durch $x^1 = -x^0$ neue Beobachter in den RK ein. Die Hyperläche $\lambda = -\infty$ heißt Rindler-Horizont. Die KGGl. lautet

$$(\mathrm{e}^{-2\lambda}(\partial_t^2 - \partial_\lambda^2) - \partial_y^2 - \partial_z^2 + m^2)\phi = 0.$$

Mit dem Operator

$$A = -\partial_\lambda^2 - \mathrm{e}^{2\lambda}(\partial_y^2 + \partial_z^2 - m^2)$$

auf $L^2(\mathbb{R}^3)$ können sinngemäß wie in Gleichungen (19), (20) Grundzustand und KMS-Zustände konstruiert werden, da dieser auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ wesentlich selbstadjungiert ist [1]. Man bezieht sich somit auf das Maß $\mathrm{d}(t, \lambda, y, z)$[22] was bei der Berechnung von Integralkernen beachtet werden muss. Wir werden als erstes für A eine Multiplikatordarstellung konstruieren, als zweites aus dieser ableiten, dass durch Gleichungen (19), (20) Grundzustand und KMS-Zustände definiert sind[23] und als drittes den Erwartungswert des Wickquadrats und des Energie-Impuls-Tensors in KMS-Zuständen berechnen. Wir werden die Bezeichnung $q = (y, z)$ benutzen.

8.1 Eine Multiplikatordarstellung für $-\partial_\lambda^2 - \mathrm{e}^{2\lambda}(\partial_y^2 + \partial_z^2 - m^2)$

Wenn man den Separationsansatz $\phi(\lambda, q) = f(\mu \mathrm{e}^\lambda)\mathrm{e}^{ipq}$, $\mu > 0$ in die Eigenwertgleichung $A\phi = u^2\phi$ einsetzt, ergibt sich

$$s^2 f''(s) + sf'(s) + (u^2 - s^2(p^2 + m^2)\mu^{-2})f(s) = 0.$$

[22] Auf statischen Raumzeiten $(\mathbb{R} \times S, a\mathrm{d}t^2 - h)$ mit $\partial_t a = 0$ und einer t-unabhängigen riemannschen Metrik h auf der Cauchyfläche S ist die KGGL äquivalent zu $(\partial_t^2 + \tilde{A})f = 0$, $\tilde{A} = -a/G\partial_i h^{ik} G\partial_k + a(m^2 + \xi R)$. Wenn nun die Konstruktionen (18), (19), (20) sinngemäß mit $\tilde{A}$ auf $L^2(S, (G/a)(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x})$ gelingen, dann muss diesen noch die Abbildung $(f, g) \mapsto (af, ag)$ vorgeschaltet werden, um Zustände zu bekommen.

[23] Positivität und KMS-Bedingung können leicht aus (19) und (20) hergeleitet werden.

Für $\mu^2 = p^2 + m^2$ erkennen wir die modifizierte Bessel-Gleichung, für die ein geeignetes (uneigentliches) Orthonormalsystem bekannt ist. Es handelt sich um die modifizierten Besselfunktionen 2. Gattung imaginärer Ordnung $(K_{iu})_{u\geq 0}$. Die modifizierten Besselfunktinen 2. Gattung können als holomorphe Abbildung

$$\mathbb{C} \times (\mathbb{C} - 0) \ni (z', z) \mapsto K_{z'}(z) \in \mathbb{C}$$

aufgefasst werden. Ihre für das Folgende wichtigen Eigenschaften sind[24]

$$K_{z'}(z) \overset{|z|\to\infty}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, \mathrm{e}^{-z}(1 + O(z^{-1})),$$

$$K_0(z) \overset{z\to 0}{=} O(\ln z),$$

$$K_{z'}(z) \overset{z\to 0}{=} O(z^{-\Re z'}),$$

$$|K_{iu+v}(z)| \leq \mathrm{e}^{-\alpha u} K_v(\Re z \cos\alpha),\ u, v \in \mathbb{R},\ \Re z > 0,\ -\pi/2 < \alpha < \pi/2 \qquad (35)$$

Ungleichung (35) sieht man mit der für $\Re z > 0$ gültigen Integraldarstellung

$$2K_{z'}(z) = \int \mathrm{d}t \exp(-z \cosh t + z't); \qquad (36)$$

der Integrand ist offensichtlich holomorph in t. Man kann jetzt den Integrationsweg $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R} + i\alpha$ mit $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ verschieben ohne den Wert des Integrals zu ändern und erhält so

$$|2K_{iu+v}(z)| = |\int \mathrm{d}t \exp(-\Re z \cos\alpha \cosh t - vt - \alpha u + if(t))|$$

mit einer reellen stetigen Funktion f, woraus (35) folgt. Ausserdem benötigen wir das folgende (siehe [8])

Theorem 6 (Kontorovich-Lebedev-Transformation (KL)) *Die Vorschrift*

$$KLf(x) := \int_0^\infty du\ K_{iu}(x) f(u)$$

definiert einen unitären Operator

$$L^2(\mathbb{R}_+, \frac{\pi^2 d\ln(u)}{2\sinh(\pi u)}) \xrightarrow{KL} L^2(\mathbb{R}_+, d\ln(x))$$

Die Inverse ist

$$KL^{-1}g(u) = \frac{2}{\pi^2} u \sinh(\pi u) \int_0^\infty d\ln(x) K_{iu}(x) g(x) \quad .$$

Hierbei ist die Vorschrift in der L^2-Norm von einem dichten Unterraum fortgesetzt zu verstehen und $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Wir werden jetzt KL schrittweise an das Problem anpassen. Dazu vereinbaren wir für eine Funktion g den Multiplikationsoperator

$$f \mapsto gf,$$

[24] O ist das Landausymbol.

für $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ und $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$, $\check{g}$ zu nennen[25]. Zunächst betrachten wir den unitären Operator I, definiert durch

$$L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x) \xrightarrow{\ln^*} L^2(\mathbb{R}_+, \mathrm{d}\ln(x)) \xrightarrow{KL^{-1}} L^2(\mathbb{R}_+, \frac{\pi^2 \mathrm{d}\ln(x)}{2\sinh(\pi x)}) \xrightarrow{\sqrt{\pi^2/(2\bullet\sinh(\pi\bullet))}^{\vee}} L^2(\mathbb{R}_+, \mathrm{d}x).$$

Für Testfunktionen $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ finden wir die Formel

$$If(u) = (2u\sinh(\pi u)/\pi^2)^{1/2} \int \mathrm{d}x K_{iu}(\mathrm{e}^x) f(x).$$

Für positives μ dürfen wir I noch die Translation um $\ln\mu$ vorschalten und erhalten so den unitären Operator I_μ mit

$$I_\mu f(u) = (2u\sinh(\pi u)/\pi^2)^{1/2} \int \mathrm{d}x K_{iu}(\mu\mathrm{e}^x) f(x)\ \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Mit der 2-dimensionalen Fouriertransformation $\mathcal{F}_2$,

$$\mathcal{F}_2 g(p) = (2\pi)^{-1} \int \mathrm{d}^2 q\ \mathrm{e}^{-ipq} g(q)\ \forall g \in L^1(\mathbb{R}^2),$$

haben wir einen unitären Operator

$$L^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{I_\mu \otimes \mathcal{F}_2} L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2),$$

und schließlich definieren wir die Vorschrift J durch

$$Jf(u,p) = I_{\mu(p)} \otimes \mathcal{F}_2 f(u,p)\ \forall\ p:\ p^2 \neq -m^2,$$

mit $\mu(p) = (m^2 + p^2)^{1/2}$ und hoffen, dass er A diagonalisiert. Auf $\{p^2 = -m^2\}$ muss der Wert nicht definiert werden, da es eine Nullmenge ist. Im Folgenden schreiben wir wieder μ für $\mu(p)$. Konkret findet man

$$Jf(u,p) = (u\sinh(\pi u)/2\pi^4)^{1/2} \int \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}^2 q K_{iu}(\mu\mathrm{e}^\lambda)\mathrm{e}^{-iqp} f(\lambda, q) = \tag{37}$$

$$(2u\sinh\pi u/\pi^2)^{-1/2} KL^{-1}(\mathcal{F}_2 f(\ln(\bullet/\mu), p))(u)\quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

Seien jetzt ϵ, K gegeben mit $0 < \epsilon < K < \infty$, dann ist obiger Integrand auf dem Bereich $\epsilon < \mu < K$ in u, p unendlich oft differenzierbar mit Ableitungen, deren Träger für $\epsilon < \mu < K$ alle in ein Kompaktum passen. Daraus folgt, dass

$$Jf \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^2 - \{p^2 = -m^2\}))$$

ist und unter dem Integral differenziert werden darf. Als nächstes wollen wir genauer klären, wohin J abbildet, dazu testen wir auf Quadratintegrierbarkeit. Für festes $p : p^2 \neq -m^2$ ist $\mathcal{F}_2 f(\ln(\bullet/\mu), p)) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, sodass wir mit Theorem (6)

$$\int_{u\geq 0} \mathrm{d}(p,u)|Jf|^2 = \int \mathrm{d}p \int_{u \geq 0} \mathrm{d}u |Jf|^2 =$$

[25]Für komplexwertige Funkionen ist das natürlich wohldefiniert.

$$\int \mathrm{d}p \int_{u\geq 0} \mathrm{d}u(2u\sinh\pi u/\pi^2)^{-1}|KL^{-1}(\mathcal{F}_2 f(\ln(\bullet/\mu),p))(u)|^2 =$$

$$\int \mathrm{d}p \int_{x\geq 0} \mathrm{d}x x^{-1}|\mathcal{F}_2 f(\ln(x/\mu),p))|^2 =$$

$$\int \mathrm{d}p \int \mathrm{d}x|\mathcal{F}_2 f(x,p)|^2 = \int \mathrm{d}(\lambda,q)|f(\lambda,q)|^2$$

bekommen; also ist J eine Isometrie. Als Kandidat für die Umkehrabbildung haben wir H, definiert durch

$$Hf(\lambda,q) = \bar{\mathcal{F}}_2(\int_{u\geq 0} \mathrm{d}u(2u\sinh\pi u/\pi^2)^{1/2}K_{iu}(\mu \mathrm{e}^{\lambda})f(u,\bullet))(q),$$

wobei $\bar{\mathcal{F}}_2 = \mathcal{F}_2^{-1}$ ist. Bezüglich der L^2-Norm ist $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^2 - \{p^2 = -m^2\}))$ dicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$, hieraus folgt, dass H dicht definiert ist. Wie bei J kann man zeigen, dass H isometrisch ist. Nun probieren wir $Jf, f \in D(\mathbb{R}^3)$ in H einzusetzen, zunächst

$$\int_{u\geq 0} \mathrm{d}u(2u\sinh\pi u/\pi^2)^{1/2}K_{iu}(\mu \mathrm{e}^{\lambda})(2u\sinh\pi u/\pi^2)^{-1/2}KL^{-1}(\mathcal{F}_2 f(\ln(\bullet/\mu),p))(u) =$$

$$KL(KL^{-1}(\mathcal{F}_2 f(\ln(\bullet/\mu),p)))(\mu \mathrm{e}^{\lambda}) = \mathcal{F}_2 f(\lambda,p)$$

und damit ist klar, dass H eine dicht definierte isometrische Links-Inverse zu J ist. Hieraus folgt auch, dass die Fortsetzung von H und auch die Fortsetzung von J, die wir wieder mit J bezeichnen, unitär sind.

Wir berechnen jetzt

$$J^{-1} \circ \check{u}^2 \circ J$$

für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, dazu betrachten wir

$$\check{u}^2 \circ Jf(u,p) = (u\sinh(\pi u)/2\pi^4)^{1/2}u^2 \int \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}^2 q K_{iu}(\mu \mathrm{e}^{\lambda})\mathrm{e}^{-iqp}f(\lambda,q) =$$

$$(u\sinh(\pi u)/2\pi^4)^{1/2} \int \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}^2 q A(K_{iu}(\mu \mathrm{e}^{\lambda})\mathrm{e}^{-iqp})f(\lambda,q) =$$

$$(u\sinh(\pi u)/2\pi^4)^{1/2} \int \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}^2 q K_{iu}(\mu \mathrm{e}^{\lambda})\mathrm{e}^{-iqp}Af(\lambda,q) = J \circ Af(u,p),$$

dann ist aber

$$A \subset J^{-1} \circ \check{u}^2 \circ J$$

und wegen der wesentlichen Selbstadjugiertheit auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ die eindeutige selbstadjungierte Erweiterung und Multiplikatordarstellung gefunden.

8.2 Existenz von KMS-Zuständen auf RK

Ein Matrixelement von $W(A)$ mit einer auf $\mathbb{R}_+$ Lebesgue-meßbaren Funktion W berechnet sich nach

$$(f, W(A)g) = (Jf, W(\check{u}^2)Jg) = \int_{u\geq 0} \mathrm{d}u W(u^2) \underbrace{\int \mathrm{d}^2 p\, \overline{Jf(u,p)}Jg(u,p)}_{f;g(u)}, \quad (38)$$

$f;g$ ist für alle $f,g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ über $\mathbb{R}_+$ integrierbar. Damit durch Gleichungen (19) und (20) Grundzustand und KMS-Zustände konstruiert werden können, reicht es zu zeigen, dass $f;g\ \forall\ f,g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ in einer offenen Umgebung der 0 stetig ist und

$$\lim_{u\to 0} |f;g(u)u^{-2}| < \infty\ \forall\ f,g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \tag{39}$$

gilt. Hierfür werden wir $f;g$ für $f,g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ umformen, mit der Abkürzung $f_2(\lambda,p) = \mathcal{F}_2 f(\lambda,p)$ ergibt sich

$$f;g(u) = (2u\sinh(\pi u)/\pi^2)\int \mathrm{d}^2p\ \int \mathrm{d}\lambda K_{iu}(\mu \mathrm{e}^{\lambda})\bar{f}_2(\lambda,p)\cdot$$
$$\cdot\int \mathrm{d}\lambda' K_{iu}(\mu\mathrm{e}^{\lambda'})g_2(\lambda',p).$$

Mit der Formel

$$K_{iu}(\mu\mathrm{e}^{\lambda})K_{iu}(\mu\mathrm{e}^{\lambda'}) = \frac{1}{2}\int_{v\geq 0}\mathrm{d}v\ v^{-1}K_{iu}(v)\exp(-v\cosh(\lambda-\lambda') - \mu^2\mathrm{e}^{\lambda+\lambda'}/2v)$$

erhalten wir

$$f;g(u) = (u\sinh(\pi u)/\pi^2)\int \mathrm{d}^2p\ \int\mathrm{d}\lambda\int\mathrm{d}\lambda'\int_{v\geq 0}\mathrm{d}v\ v^{-1}K_{iu}(v)\cdot$$
$$\cdot\exp(-v\cosh(\lambda-\lambda') - \mu^2\mathrm{e}^{\lambda+\lambda'}/2v)\bar{f}_2(\lambda,p)g_2(\lambda',p).$$

Man sieht leicht, dass für $p^2 \neq -m^2$ in obiger Formel $\int\mathrm{d}\lambda\int\mathrm{d}\lambda'\int_{v\geq 0}\mathrm{d}v$ durch $\int_{v>0}\mathrm{d}(\lambda,\lambda',v)$ ersetzt werden darf und da $\{p^2 = -m^2\}$ eine Nullmenge ist, gilt es ohne Einschränkung. Die auf $v > 0$ stetige Fuktion K_{iu} erfüllt

$$K_{iu}(z) \overset{z\to 0}{=} O(1)$$

(der Fall $u = 0$ muss nicht betrachtet werden), damit folgt

$$\int_{v>0}\mathrm{d}(\lambda,\lambda',v)v^{-1}|K_{iu}(v)|\exp(-v\cosh(\lambda-\lambda'))\cdot$$
$$\cdot\int\mathrm{d}^2p\ \exp(-\mu^2\mathrm{e}^{\lambda+\lambda'}/2v)|\bar{f}_2(\lambda,p)f_2(\lambda',p)| \leq$$
$$C\int_{v>0}\mathrm{d}(\lambda,\lambda',v)v^{-1}|K_{iu}(v)|\exp(-v\cosh(\lambda-\lambda'))\cdot$$
$$\cdot\theta(R-|\lambda|)\theta(R-|\lambda'|)v\mathrm{e}^{-\lambda-\lambda'} < \infty,$$

für geeigetes $C, R > 0$ und der Heavisidefunktion θ. Für $f:g$ bekommen wir so

$$u\sinh(\pi u)/\pi^2\int_{v>0}\mathrm{d}(\lambda,\lambda',p,v)v^{-1}K_{iu}(v)\cdot$$
$$\cdot\exp(-v\cosh(\lambda-\lambda') - \mu^2\mathrm{e}^{\lambda+\lambda'}/2v)\bar{f}_2(\lambda,p)g_2(\lambda',p) =$$
$$u\sinh(\pi u)/(2\pi^3)\int_{v>0}\mathrm{d}(\lambda,q,\lambda',q',v)\mathrm{e}^{-\lambda-\lambda'}K_{iu}(v)\cdot$$

$$\cdot \exp(-v(\cosh(\lambda-\lambda') + \mathrm{e}^{-\lambda-\lambda'}(q-q')^2/2) - \mathrm{e}^{\lambda+\lambda'}m^2/2v)\bar{f}(\lambda,q)f(\lambda',q').$$

Mit der Integraldarstellung (36) kann das Integral noch umgeformt werden, man erhält

$$f;g(u) = \int \mathrm{d}(\lambda,q,\lambda',q')\xi(u,\lambda,q,\lambda',q')\bar{f}(\lambda,q)g(\lambda',q')$$

mit dem Integralkern ξ

$$\xi(u,\lambda,q,\lambda',q') = u\sinh(\pi u)/(2\pi^3)\int_{v>0} \mathrm{d}v\mathrm{e}^{-\lambda-\lambda'}K_{iu}(v)\cdot$$

$$\cdot \exp(-v(\cosh(\lambda-\lambda') + \mathrm{e}^{-\lambda-\lambda'}(q-q')^2/2) - \mathrm{e}^{\lambda+\lambda'}m^2/2v).$$

Für $m^2 > 0$ folgt

$$\xi(u,\lambda,q,\lambda',q') = \frac{m^2}{2\pi^3}u\sinh(\pi u)\int \mathrm{d}w\ \mathrm{e}^{iuw}K_1(\gamma(w,\lambda,q,\lambda',q'))/\gamma(w,\lambda,q,\lambda',q')$$

mit

$$\gamma(w,\lambda,q,\lambda',q') = m(2\cosh(w)\mathrm{e}^{\lambda+\lambda'} + \mathrm{e}^{2\lambda} + \mathrm{e}^{2\lambda'} + (q-q')^2)^{1/2}.$$

Im Fall $m^2 = 0$ ergibt sich

$$\xi(u,\lambda,q,\lambda',q') = u\sinh(\pi u)/(2\pi^3)\int \mathrm{d}w\ \mathrm{e}^{iuw}(2\cosh(w)\mathrm{e}^{\lambda+\lambda'}+\mathrm{e}^{2\lambda}+\mathrm{e}^{2\lambda'}+(q-q')^2)^{-1}. \tag{40}$$

Hieraus kann man leicht erkennen, dass $f;g$ stetig ist und (39) erfüllt. Die Konsequenz ist, dass durch (19) und (20) Grundzustand ω^∞ und KMS-Zustände $\omega^\beta,\ \beta > 0$, definiert sind.

8.3 Berechnung von $\omega^\beta(:\phi^2:(t,\lambda,q))$ und $\omega^\beta(T_{ab}(t,\lambda,q))$

Um den Erwartungswert des Wickquadrats und des Energie-Impuls-Tensors zu berechnen, verschaffen wir uns die Funktion

$$\omega^\beta(:\phi(t,\lambda,q)\phi(t',\lambda',q'):_\infty) =: F(t-t',\lambda,\lambda',q-q') \quad \text{mit}$$

$$:\phi(f)\phi(g):_\gamma\ :=\ :\phi(f)\phi(g):_{\omega^\gamma}\ .$$

Mit Gleichung (21) ergibt sich für $f,g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$

$$\omega^\beta(:\phi(f)\phi(g):_\infty) = \int \mathrm{d}(t,t')\int_{u\geq 0}\mathrm{d}u\int \mathrm{d}^2p\int \mathrm{d}\lambda\int \mathrm{d}\lambda'\int \mathrm{d}q\int \mathrm{d}q'\cos(u(t-t'))\cdot$$

$$\cdot(2\pi^4)^{-1}(\mathrm{e}^{\beta u}-1)^{-1}\sinh(\pi u)K_{iu}(\mu\mathrm{e}^\lambda)K_{iu}(\mu\mathrm{e}^{\lambda'})\mathrm{e}^{ip(q-q')}\mathrm{e}^{2\lambda}f(t,\lambda,q)\mathrm{e}^{2\lambda'}g(t',\lambda',q').$$

Der Integrand ist fast überall stetig und mit Gleichung (35) findet man die fast überall stetige Majorante

$$C(\mathrm{e}^{\beta u}-1)^{-1}\sinh(\pi u)\mathrm{e}^{-2\alpha u}K_0^2(\cos\alpha|p|\mathrm{e}^{-R})\theta(R-|(t,\lambda,q)|)\theta(R-|(t',\lambda',q')|)\mathrm{e}^{4R}$$

mit geeigneten $C, R > 0$. Für $\beta \leq \pi$ wählen wir $\alpha = \pi/2 - \beta/3$ und sonst $\alpha = 0$. Bei dieser Wahl von α ergeben sich integrierbare Majoranten, es folgt

$$F(t, \lambda, \lambda', q) = (2\pi^4)^{-1} \int_{u \geq 0} \mathrm{d}(u, p) \frac{\cos(ut)}{\mathrm{e}^{\beta u} - 1} \cdot \tag{41}$$

$$\cdot \sinh(\pi u) K_{iu}(\mu \mathrm{e}^{\lambda}) K_{iu}(\mu \mathrm{e}^{\lambda'}) \mathrm{e}^{ipq}.$$

Für $p^2 \neq -m^2$ ist der Integrand glatt und mit der Formel

$$-2\partial_z K_{z'}(z) = K_{z'-1}(z) + K_{z'+1}(z)$$

und Gleichung (35) kann man zeigen, dass für jedes $R > 0$ beliebige Ableitungen des Integranden von Termen der Form

$$C(\mathrm{e}^{\beta u} - 1)^{-1} \sinh(\pi u) \mathrm{e}^{-2\alpha u} K_i(\cos(\alpha)\mu \mathrm{e}^{-R}) K_k(\cos(\alpha)\mu \mathrm{e}^{-R}) (\mu \mathrm{e}^{R})^{i+k} \mu^m$$

mit geeigneten $C > 0,\ i, k, m \in \mathbb{N}$ für alle $\lambda, \lambda' \in [-R, R]$ majorisiert werden. Hieraus folgt, dass $F(t, \lambda, \lambda', q)$ glatt ist und unter dem Integral differenziert werden darf.

Der Erwartungswert des Wickquadrats ist gegeben durch

$$F(0, \lambda, \lambda, 0) = (2\pi^4)^{-1} \int_{u \geq 0} \mathrm{d}(u, p) \frac{\sinh(\pi u)}{\mathrm{e}^{\beta u} - 1} K_{iu}(\mu \mathrm{e}^{\lambda})^2 = \tag{42}$$

$$\pi^{-3} \mathrm{e}^{-2\lambda} \int_{u \geq 0} \mathrm{d}u \frac{\sinh(\pi u)}{\mathrm{e}^{\beta u} - 1} \int_{\eta \geq m \mathrm{e}^{\lambda}} \mathrm{d}\eta \ \eta K_{iu}(\eta)^2.$$

Man erkennt den qualitativen Verlauf des Erwartungswerts auch in den Parametern β und m. Mit Gleichung (40) berechnet man für das masselose Feld

$$F(0, \lambda, \lambda, 0) = (12\beta^2 \mathrm{e}^{2\lambda})^{-1}.$$

Ein Beobachter

$$c_{\lambda,q} : s \mapsto (\mathrm{e}^{-\lambda} s, \lambda, q)$$

würde seinen Messungen die Eigenzeit s zu Grunde legen, sodass er dem Zustand ω^β die inverse Temperatur $1/\tilde{T} = \tilde{\beta} = \beta \mathrm{e}^{\lambda}$ zuordnen würde. Und so kann man ω^β als Präparationsvorschrift auffassen, die relativ zum Beobachterfeld

$$(\lambda, q) \mapsto c_{\lambda,q}$$

variierende Temperatur liefert. Der Beobachter kann durch Messung des Wickquadrats $:\phi^2:_\infty$ die Temperatur von Zuständen, die er als Gleichgewichtszustände ansieht, berechnen. Durch eine Änderung der Renormierung finden wir die lokal kovariante Fortsetzung des in Gleichung (31) betrachteten Wickquadrats auf $\mathbb{M}$. Es ist bekannt, dass die Einschränkung von Δ_∞ auf den RK der KMS-Zustand $\omega^{2\pi}$ bezüglich der eben betrachteten Boosts auf dem RK ist. Hieraus folgt, dass

$$:\phi^2_{RK}:_{2\pi}$$

das Wickquadrat

$$:\phi^2_{\mathbb{M}}:_\infty$$

lokal kovariant fortsetzt. Wir erhalten für $m = 0$

$$\omega^\beta(:\phi^2_{RK}:_{2\pi}(t,\lambda,q)) = (12\mathrm{e}^{2\lambda})^{-1}(\beta^{-2} - (2\pi)^{-2}). \tag{43}$$

Man erkennt, dass ω^β nur für $\beta < 2\pi$ nach [5] bezüglich des Wickquadrats[26] eine thermische Interpretation besitzt. Dies bleibt für das massive Feld richtig, einfach weil (42) positiv ist und in β streng monoton fällt. Beachtet man jetzt noch die Beschleunigung des Beobachters,

$$a = \mathrm{e}^{-\lambda},$$

so ergibt sich für das masselose Feld

$$12\omega^\beta(:\phi^2_{RK}:_{2\pi}(t,\lambda,q)) = \tilde{\beta}^{-2} - a^2/(4\pi^2).$$

Wir werden auf dem de Sitter-Raum die gleiche Formel finden.

Wir werden den Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors darstellen in der Form

$$\omega^\beta(T_{ab}(\lambda)_\infty) = \pi^{-3}\mathrm{e}^{-2\lambda}\int_{u\geq 0}\mathrm{d}u\frac{\sinh(\pi u)}{(\mathrm{e}^{\beta u}-1)}\int_{\eta\geq m\mathrm{e}^\lambda}\mathrm{d}\eta\ \eta\ t_{ab}(\lambda,\eta,u) \tag{44}$$

für die Renormierung mit dem Rindlergrundzustand, oder für die kovariariante Renormierung

$$\omega^\beta(T_{ab}(\lambda)_{2\pi}) = (2\pi^3)^{-1}\mathrm{e}^{-2\lambda}\int_{u\geq 0}\mathrm{d}u\frac{\sinh((\pi-\beta/2)u)}{\sinh(u\beta/2)}\int_{\eta\geq m\mathrm{e}^\lambda}\mathrm{d}\eta\ \eta\ t_{ab}(\lambda,\eta,u). \tag{45}$$

Es ergibt sich:

$$t_{tt}(\lambda,\eta,u) = \frac{1}{2}(u^2+\eta^2)K^2_{iu}(\eta) + \frac{\eta^2}{8}\ (K_{iu+1}(\eta)+K_{iu-1}(\eta))^2 \tag{46}$$

$$t_{\lambda\lambda}(\lambda,\eta,u) = t_{tt}(\lambda,\eta,u) - \eta^2K^2_{iu}(\eta) \tag{47}$$

$$t_{yy}(\lambda,\eta,u) = \mathrm{e}^{-2\lambda}(\frac{1}{2}(u^2 - m^2\mathrm{e}^{2\lambda})K^2_{iu}(\eta) - \frac{\eta^2}{8}\ (K_{iu+1}(\eta)+K_{iu-1}(\eta))^2) \tag{48}$$

$$t_{yy}(\lambda,\eta,u) = t_{zz}(\lambda,\eta,u) \tag{49}$$

$$v^av^bt_{ab}(\lambda,\eta,u) \geq \mathrm{e}^{-2\lambda}\eta^2(4K^2_{iu}(\eta)/2 + (K_{iu+1}(\eta)+K_{iu-1}(\eta))^2/8)\ v^av^bg_{ab}(\lambda) \tag{50}$$

$$\nabla^a t_{ab}(\lambda,\eta\ \mathrm{e}^\lambda,u) = 0. \tag{51}$$

Die nicht aufgeführten t_{ab} verschwinden. Mit Gleichungen (44) und (51) erkennt man, dass der Erwartungswert des Energie-Impulstensors erhalten ist, wie es auch sein muss. Aus Gleichung (50) folgt, dass $\omega^\beta(T_{ab}(\lambda)_\infty)$, als quadratische Form, auf den kausalen Vektoren nichtnegativ und auf den zeitartigen Vektoren positiv ist. Das bedeutet, dass jeder Beobachter eine positive Energiedichte misst und überdies fällt diese in β und λ streng monoton von ∞ auf 0, wie man an Gleichung (44) erkennt. In der kovarianten Renormierung erfüllen dann natürlich nur Zustände mit $\beta < 2\pi$ die Bedingung

$$\omega^\beta(T_{ab}(\lambda)_{2\pi}))v^av^b > 0\ \ \forall\ v^a:\ v^av_a > 0.$$

[26]Eine andere ÄusgangsRenormierung auf $\mathbb{M}$ würde daran nichts ändern.

Diese Bedingung ist aber notwendig für eine lokale thermische Interpretation nach [5], dies folgt aus Gleichung (33).

Für $m = 0$ kann man die Integrationen ausführen

$$\omega^{\beta}(T_{tt}(\lambda)_{\infty}) = \frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}}{60}(2\pi^2\beta^{-4} + 5\beta^{-2}) \tag{52}$$

$$\omega^{\beta}(T_{\lambda\lambda}(\lambda)_{\infty}) = \frac{1}{3}\omega^{\beta}(T_{tt}(\lambda)_{\infty}) \tag{53}$$

$$\omega^{\beta}(T_{yy}(\lambda)_{\infty}) = \omega^{\beta}(T_{zz}(\lambda)_{\infty}) = \frac{\mathrm{e}^{-4\lambda}}{90}(\pi^2\beta^{-4} - 5\beta^{-2}) \tag{54}$$

$$g^{ab}(\lambda)\omega^{\beta}(T_{ab}(\lambda)_{\infty}) = \frac{\mathrm{e}^{-4\lambda}}{6\beta^2} \tag{55}$$

$$v^a v^b \omega^{\beta}(T_{ab}(\lambda)_{\infty}) \geq \frac{\mathrm{e}^{-4\lambda}}{18}\ \beta^{-2}\ v^a v^b g_{ab}(\lambda). \tag{56}$$

Ein momentaner Beobachter v^a kann sich mit diesen Gleichungen seine kalorische Zustandsgleichung zusammenstellen

$$E(\beta,\lambda) = (v^t v^t + v^{\lambda} v^{\lambda}/3)\frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}}{60}(2\pi^2\beta^{-4} + 5\beta^{-2}) + (v^y v^y + v^z v^z)\frac{\mathrm{e}^{-4\lambda}}{90}(\pi^2\beta^{-4} - 5\beta^{-2}). \tag{57}$$

Der Beobachter $c_{\lambda,q}$ hat hierfür eine thermodynamische Interpretation, so wird er beispielsweise dem Zustand ω^{β} die Entropie

$$\tilde{S} = 2\pi^2\tilde{T}^3/(45a^2) + \tilde{T}/12$$

zuordnen. Man erkennt an Gleichung (55), dass die Spur in kovarianter Renormierung nur für $\beta = 2\pi$ verschwindet. Für $\beta \neq 2\pi$ kann ω^{β} bezüglich T_{ab} keine thermische Interpretation nach [5] besitzen. Aus Gleichung (34) folgt nämlich, dass dazu eine verschwindende Spur notwendig ist.

Durch Gleichung (54) ist die "Temperatur" $\beta_{\infty} = (\pi^2/5)^{1/2}$ für diese bzw. $\beta_{2\pi} = (4\pi^2/19)^{1/2}$ für die kovariante Renormierung ausgezeichnet. Bei diesen Werten ist der Feldimpuls tangential zur (t,λ)-Fläche. Sei nun $\beta \in (\beta_{2\pi}, 2\pi)$, dann gilt

$$\omega^{\beta}(T_{yy}(\lambda)_{2\pi}) < 0 \tag{58}$$

und man erkennt an Gleichung (45) und (48), dass Gleichung (58) auch noch für eine genügend kleine Masse $m_0 > 0$ erhalten bleibt. Ausserdem sieht man, dass für festes β und $m_0 > 0$ das Vorzeichen der linken Seite von Gleichung (58) nur von $\mathrm{e}^{\lambda}m_0$ abhängen kann. Für das massive Feld folgern wir daraus, dass für $\beta \in (\beta_{2\pi}, 2\pi)$ und genügend kleine λ Gleichung (58) gilt. Wenn aber Gleichung (58) gilt, kann es keine thermische Interpretation nach [5] bezüglich T_{ab} geben, wie man an Gleichung (33) erkennen kann. Für $(4\pi^2/19)^{1/2} \leq \beta \leq 2\pi$ besitzt ω^{β} in einer Umgebung des Rindler-Horizontes bezüglich T_{ab} keine thermische Interpretation nach [5] und man kann erwarten, dass dies auch für kleinere β gilt, da die Masse in Richtung Rindler-Horizont immer unwichtiger wird.

9 Auf dem de Sitter-Raum

Der de Sitter-Raum (dS) ist eine Untermannigfaltigkeit des 5-dimensionalen Minkowski-Raums $(\mathbb{R}^5, \eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$. Kartesische Koordinaten in $\mathbb{R}^5$ bezeichnen wir mit $X^\nu, Y^\nu, ..$ und setzen $X_\nu := \eta_{\nu\mu} X^\mu$. Mit der Funktion

$$\kappa(X) := X_\nu X^\nu + 1$$

fassen wir dS als $\kappa^{-1}(0)$ auf; die Metrik auf dem Tangentialbündel wird durch η induziert und so ergibt sich eine global hyperbolische Lorentzmannigfalltigkeit, die Lösung der Einsteinschen Vakuum-Feldgleichung mit Kosmologischer Konstante 3 ist. Die Symmetriegruppe wirkt transitiv auf dem dS und ist isomorph zur 5-dimensionalen Lorentzgruppe $O(4, 1)$, der Isormorphismus ist einfach die Einschränkung auf dS. Die kausale Struktur des dS wird am klarsten in den "Koordinaten":

$$X^0 = \tan \tau,$$

$$X^i = \sec \tau \; Q^i;$$

$$(\tau, Q^1, Q^2, Q^3, Q^4) \in (-\pi/2,\ \pi/2) \times S^3.$$

Man erhält dS $\cong ((-\pi/2, \pi/2) \times S^3,\ \sec^2\tau(\mathrm{d}\tau^2 - \mathrm{d}\Omega^2))$ mit der 3-Sphäre S^3 und ihrer durch den umgebenden $\mathbb{R}^4$ induzierten Metrik $\mathrm{d}\Omega^2$. Wir schreiben $Q = (Q^1, Q^2, Q^3, Q^4)$ und benutzen die etwas unsaubere Abkürzung

$$G := -X^\nu Y_\nu = \frac{\cos\gamma - \sin\tau(X)\sin\tau(Y)}{\cos\tau(X)\cos\tau(Y)}$$

im Sinne von $G(X, Y)$, wobei $\cos\gamma = \sum Q^k(X)Q^k(Y)$ ist. In obigen Koordinaten ergibt sich

$G = 1 \Leftrightarrow X$ und Y sind lichtartig getrennt und

$G > 1 \Leftrightarrow X$ und Y sind zeitartig getrennt.

9.1 Der Propagator

Hier wollen wir das konform gekoppelte Feld betrachten. Die konstante Skalarkrümmung $R = 12$ wirkt sich effektiv wie eine Translation des Massenquadrats $m^2 \mapsto 2 + m^2$ aus. Diese Verschiebung der "Massenskalaïst günstig, da bekannt ist, dass sich (klassische) Felder mit $m^2 + \xi R < 2$ tachyonisch verhalten. Wir werden die Konstruktionsvorschrift für KMS-Zustände aus [7] benutzen, um die Integral-Kerne der KMS-Zustände ω^β bezüglich eines zeitartigen Killingvektorfeldes auf einem Teil des dS zu berechnen. Man betrachtet für Testfunktionen auf der reellen Achse f, g die Abbildungen

$$V : t \mapsto \omega^\beta(f, g_t) \quad \text{und}$$

$$W : t \mapsto E(f, g_t).$$

Im Distributionssinn findet man zwischen V und W folgende Beziehung

$$(1 - \mathrm{e}^{-\beta\nu})\tilde{V}(\nu) = i\tilde{W}(\nu), \tag{59}$$

wobei ˜ die Fouriertransformierte bezeichnet. In [7] wurde gezeigt, dass die (im Ursprung reguläre) Lösung von Gleichung (59) einen KMS-Zustand (nach Rücktransformation) definiert. Als weitere Zutat benutzen wir die Kommutatorfunktion aus [14]; wir werden hier dieses Ergebnis mit anderen Methoden kurz nachvollziehen, wobei wir den massiven Fall auf den masselosen wegen der hohen Symmetrie gewissermaßen zurückführen können. Zunächst betrachten wir den Fall $m = 0$. Die retardierte bzw avancierte Fundamentallösung schreibt sich

$$E^{\pm}(X,Y) = \frac{1}{4\pi}\,\theta(\pm(X^0 - Y^0))\delta(G-1).$$

Diese Formel macht ohne weiteres für $X \neq Y$ Sinn, wie man aus einer Analyse der Wellenfrontmenge erfährt, denn einerseits ist der Pullback der Delta-Distribution δ unter der Abbildung $G-1$ sicher für $X \neq Y$ definiert und andererseits treffen sich die sinulären Träger von $\theta(\pm(X^0 - Y^0))$ und $\delta(G-1)$ für $X \neq Y$ nicht, sodass sie multplizierbar sind. $E^{\pm}$ ist offensichtlich $O(1,4)^{+}$-invariant, wobei $+$ wie üblich die orthochrome Untergruppe kennzeichnet, und hat die richtigen Trägereigenschaften. Auf $((-\pi/2,\pi/2)\times S^3,\ \sec^2\tau(\mathrm{d}\tau^2 - \mathrm{d}\Omega^2))$ sehen wir schnell, dass obige Formel auch für $X = Y$ eine Distribution definiert, wir beschränken uns auf E^+, benutzen die kanonische Volumenform $\mathrm{d}S^3$ auf S^3 und erhalten

$$E^+ f(\tau,Q) = \frac{\cos(\tau)}{4\pi}\int \mathrm{d}S^3(Q')(\sin(\gamma)\cos^3(\tau-\gamma))^{-1} f(\tau-\gamma,Q') \tag{60}$$

mit dem geodätischen Abstand γ zwischen Q und Q' auf S^3. Der $\csc(\gamma)$-Faktor ist auf S^3 integrierbar, wie man in geeigneten Koordinaten sieht und der Multiplikator $\sec^3(t)$ bildet Testfunktion auf Testfunktionen ab, sodass das Integral existiert. Mit den orthogonalen Matrizen

$$T(q)_{1\le i,k\le 4} = \delta_{ik} + (Q^4-1)\delta_{4i}\delta_{4k} - (1+Q^4)^{-1}(1\mp\delta_{i4})Q^i(1\mp\delta_{k4})Q^k \pm Q^i\delta_{4k} \mp Q^k\delta_{4i}$$

und der Invarianz von E^+ kann man die X-Abhängigkeit in glatter Weise auf die Testfunktion f überwälzen und sieht so, dass $E^+ f$ glatt ist. Wenn man $(\tau,Q) \notin \mathrm{supp}(f)$ annimmt, ergibt die Anwendung des Klein-Gordon-Operators K

$$KE^+ f(\tau,Q) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}S^3(Q')(\cos^4(\tau)\partial_\tau \cos^{-2}(\tau)\partial_\tau + 2 - \cos^2(\tau)(\partial_\gamma{}^2 + 2\cot(\gamma)\partial_\gamma)$$

$$\cos(\tau)(\sin(\gamma)\cos^3(\tau-\gamma))^{-1} f(\tau-\gamma,Q') = 0.$$

Also ist

$$\mathrm{supp}(KE^+(\cdot)(\tau,Q)) \subset \{(\tau,Q)\}$$

(im Distributionssinn), ausserdem ist $KE^+(\cdot)(\tau,Q)$ höchstens von zweiter Differentiationsordnung und mit der Invarianz folgt

$$KE^+(f)(\tau,Q) = C_1(K-2)f(\tau,Q) + C_2 f(\tau,Q),$$

wobei C_1, C_2 Konstanten sind. Durch den Test mit

$$(\tau,Q) \mapsto \cos^3(\tau)f(\tau),\ \mathrm{supp}(f) \subset (-\pi/2,\pi/2)$$

findet man $C_1 = 0,\ C_2 = 1$, also die Lösungseigenschaft.

Im Fall $m^2 \neq 0$ schreiben wir die retardierte Fundamentallösung folgendermaßen

$$E^+ = \frac{1}{4\pi}\,(\theta(X^0 - Y^0)\delta(G-1) + F),$$

wobei

$$\mathrm{supp}(F) \subset \{X^0 \geq Y^0\} \cap \{G \geq 1\}$$

sein muss. Da F $O(4,1)^+$-invariant sein muss, erhalten wir unter Ausnutzung der Feldgleichung

$$(\nabla_a \nabla^a + m^2 + 2)F = -m^2\theta(X^0 - Y^0)\delta(G-1)$$

ein effektiv 2-dimensionales Problem im (τ, G)-Raum

$$((G^2-1){\partial_G}^2 + 4G\partial_G + 2G\cos\tau\sin\tau\partial_G\partial_\tau + \sin 2\tau\partial_\tau + \cos^2\tau{\partial_\tau}^2 + m^2 + 2)F =$$

$$-m^2\theta(\tau - \tau(Y))\delta(G-1);$$

wegen der Invarianz reicht es hier den Fall $\tau(Y) = 0$ zu betrachten. Anwendung des Klein-Gordon-Operators auf den Ansatz $F = \theta(\tau)\theta(G-1)u(G)$ ergibt

$$2\theta(\tau)\delta(G-1)u(1) + \theta(G-1)\delta'(\tau)u(G) + \theta(\tau)\theta(G-1)((G^2-1){\partial_G}^2 + 4G\partial_G + m^2 + 2)u(G).$$

Der mittlere Term verschwindet, da $G \leq 1$ für $\tau = 0$ ist. u muss also den rechten Term zum Verschwinden bringen und bei $G = 1$ den Wert $-m^2/2$ haben. Die eindeutige Lösung

$$u = P'_\nu$$

ist durch die Ableitung der Legendrefunktion erster Ordnung mit

$$\nu(\nu+1) = -m^2$$

gegeben. Die retardierte, avancierte Fundamentallösung bzw. der kausale Propagator ist also

$$E^\pm(X,Y) = \frac{1}{4\pi}\,\theta(\pm(X^0 - Y^0))\partial_G(\theta(G-1)P_\nu(G)),$$

$$E(X,Y) = -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{sign}(X^0 - Y^0))\partial_G(\theta(G-1)P_\nu(G)),$$

mit der Vorzeichenfunktion sign.

9.2 Berechnung der thermalen Integral-Kerne $\omega^\beta(t, P, t', P')$

Als nächstes betrachten wir ein zeitartiges Killing-Feld, wieder wegen der Symmetrie reicht es ein Killing-Feld ζ mit

$$\zeta(0,1,0,0,0) = (1,0,0,0,0)^T \tag{61}$$

zu betrachten[27]. Wir werden nun sehen, dass der zugehörige Fluss ψ das Matrix-Produkt eines Lorentz-Boosts in 1-Richtung und einer gleichmäßigen Rotation auf den kartesischen Koordinaten 2,3 und 4 ist. Wir haben nämlich

$$\psi_t(X) = \exp(tA)X$$

[27] A^T ist der zu A transponierte Operator, andere Normierungen lassen sich auch auf (61) zurückführen.

mit einem A aus der Lie-Algebra der $O(4,1)$, das

$$A = -\eta A^T \eta$$

erfüllt. Mit Gleichung (61) folgert man

$$A_{0,\nu} = A_{\nu,0} = (0,1,0,0,0),$$

$$(A^2)_{22} = 1 - A_{32}^2 - A_{42}^2 - A_{52}^2 = 1$$

und ebenso verschwinden die $A_{2,i=3,4,5}$. Wenn man nun $\exp(tA)$ bildet, erhält man die Behauptung. Berechnet man nun noch

$$g(\partial_t \psi_t(X), \partial_t \psi_t(X)) = (X^1)^2 - (X^0)^2,$$

so kann man zusammenfassend behaupten, dass ein zeitartiges Killing-Feld mit maximal zusammenhängenden Definitionsbereich bis auf einen isometrischen Push Forward eine Matrix A, wie die oben behandelten, mit

$$\mathrm{dom}(A) = \mathrm{dS} \cap \{X^1 > |X^0|\}$$

ist. Wir können uns also auf diesen Fall beschränken und fassen $\mathrm{dom}(A)$ als die zugrundeliegende Raumzeit auf. Mit dem Diffeomorphismus

$$X^0 = \sinh(t)q$$

$$X^1 = \cosh(t)q$$

$$(X^2, X^3, X^4) = Q$$

finden wir

$$\mathrm{dS} \cap \{X^1 > |X^0|\} \cong (\mathbb{R} \times S^3{}_+,\ q^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\Omega^2),$$

wobei $P = (q, Q)$ auf der offenen Halbsphäre $S^3{}_+ := S^3 \cap \{q > 0\}$ lebt und $\mathrm{d}\Omega^2$ das kanonische Maß auf der Halbsphäre ist[28]. Boosts in 1-Richtung sind hier Translationen in t-Richtung. Bei der Zeitentwicklung beschränken wir uns auf reine Boosts, diese haben die größte Eichgruppe. Wir definieren als Zeitentwicklung $\tau_s f(t,P) := f(t-s,P)$; als *-Automorphismus auf den Testfunktionen läßt sich τ_s problemlos auf die Feldalgebra vermöge $\check{\tau}_s \phi(f) = \phi(f_s)$ mit $f_s := \tau_s f$ liften. Um fortzufahren, muss der Propagator analysiert werden, wir beschränken uns auf den masselosen Fall. In den neuen Koordinaten ergibt sich mit der Abkürzung $v = \operatorname{arccosh}((1 - QQ')/qq')$ folgende Gestalt

$$E^{\pm} f(t,P) = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}S^{3\prime} \frac{q'\ f(t \mp v, P')}{\sqrt{(1-QQ')^2 - (qq')^2}}.$$

Für zwei Testfunktionen f, g findet man ein $R > 0$, sodass $f(t,P) = g(t,P) = 0$ für alle $|t| > R$ und $P \in S^3_+$. Wir bemerken ausserdem, dass

$$C := \sup\{|v(P,P')|\ |(t,P,t',P') \in \mathrm{supp}(f) \times \mathrm{supp}(g)\}$$

endlich ist. Für $|s| > 2R + 2C$ gilt

$$g(t,P) E^{\pm} f(t-s,P) = 0\ \forall\ (t,P)$$

[28] Offenbar bezeichnet Q nun eine andere Größe.

und hieraus folgt, dass $s \mapsto (g, Ef_s)$ eine Testfunktion ist. Für $\nu \neq 0$ ist (59) also eine Beziehung zwischen Funktionen. Um den Charakter bei $\nu = 0$ zu erkennen, bemerken wir zunächst, dass

$$F(P) := \int \mathrm{d}S^{3\prime} \frac{q'}{\sqrt{(1-QQ')^2-(qq')^2}} \int \mathrm{d}s |f(s, P')|$$

und auch

$$\int \mathrm{d}t \ \mathrm{d}S^3 \ q \ |g(t, P)| \ F(P)$$

existiert und folgern mit der Abkürzung $f(\nu, P) = \int \mathrm{d}s \ \mathrm{e}^{-i\nu s} f(s, P)$

$$\int \mathrm{d}s \ \mathrm{e}^{i\nu s} E^{\pm} f(t-s, P) = \mathrm{e}^{i\nu t} E^{\pm} f(\nu, P) = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}S^{3\prime} \frac{q' \ f(\nu, P')}{\sqrt{(1-QQ')^2-(qq')^2}} \ \mathrm{e}^{i\nu(t\mp v)}$$

Wir erhalten weiter

$$\int \mathrm{d}s \ \mathrm{e}^{i\nu s} (g, Ef_s) = \int \mathrm{d}\mu \ g(t, P) \frac{-i}{2\pi} \ \mathrm{e}^{i\nu t} \int \mathrm{d}S^{3\prime} \frac{q' \ f(\nu, P')}{\sqrt{(1-QQ')^2-(qq')^2}} \ \sin(\nu v) =$$

$$-i/(2\pi) \int \mathrm{d}S^3 \mathrm{d}S^{3\prime} g(-\nu, P) \frac{qq'}{\sqrt{(1-QQ')^2-(qq')^2}} f(\nu, P') \sin(\nu v)$$

und erkennen, dass dieser Ausdruck bei $\nu = 0$ in glatter Weise verschwindet. Mit

$$\tilde{V}(\nu) = i(1 - \mathrm{e}^{-\beta\nu})^{-1} \tilde{W}(\nu)$$

hat man die im Ursprung reguläre Lösung von Gleichung (59) gefunden. Die Rücktransformation liefert nun den KMS-Zustand. Zu diesem Zweck betrachten wir für eine Abbildung $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}L^1(\mathbb{R})$, sodass $\tilde{f}'(0)$ existiert, das Integral

$$I(f) := (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \mathrm{d}x (1 - \mathrm{e}^x)^{-1} \tilde{f}(x) + (1 - \mathrm{e}^{-x})^{-1} \tilde{f}(-x).$$

Mit $\tilde{}$ und $\mathcal{F}$ bezeichnen wir Fouriertransformation und mit f' die Ableitung von f. Wir zerlegen $I(f)$ in zwei Summanden

$$II(f) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \mathrm{d}x (1 - \mathrm{e}^x)^{-1} (\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)) \ \text{ und}$$

$$III(f) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \mathrm{d}x \tilde{f}(-x).$$

Bei beiden Summanden ist eine Integration ausführbar:

$$II(f) = -i/\pi \int \mathrm{d}p f(p) \int_0^\infty \mathrm{d}x (1 - \mathrm{e}^x)^{-1} \sin(px) =$$

$$i/(2\pi) \int \mathrm{d}p f(p) (\pi \coth(\pi p) - 1/p),$$

$$III(f) = i/(2\pi) \int \mathrm{d}p f(p) (p + i0)^{-1}.$$

$+i0$ bezeichnet die übliche $\lim_{\epsilon\searrow 0}$-Vorschrift. Wir finden also den Integral-Kern

$$I(x) = i/(2\pi)((\pi\coth(\pi x) - 1/x + 1/(x+i0)).$$

Dieses Ergebnis hilft uns insoweit, als das für die Zweipunktfunktion des KMS-Zustandes ω^β

$$\omega^\beta(f,g) = I(F_\beta)$$

gilt, mit

$$F_\beta(t) = iE(f, g_{\beta t}).$$

Wir definieren $\tau = \pi/\beta$ und

$$A(t) = (\tau\coth(\tau t) - 1/t + 1/(t+i0))/(2\pi), \tag{62}$$

sodass wir

$$\omega^\beta(f,g) = \int \mathrm{d}t A(t)E(g, f_t)$$

bekommen. $A(t)$ ist aber beschränkt und man kann leicht erkennen, dass der Integralkern gegeben ist durch

$$\omega^\beta(t,P,t',P') = \frac{1}{4\pi\sqrt{(1-QQ')^2-(qq')^2}}(A(t'-t+v) - A(t'-t-v)).$$

Mit

$$\sqrt{(1-QQ')^2-(qq')^2} = qq'\sinh v = (1-QQ')\tanh v$$

lässt sich der Kern noch umformen

$$\omega^\beta(t,P,t',P') = \frac{1}{4\pi(1-QQ')}\coth v(A(t'-t+v) - A(t'-t-v)).$$

Für $|t-t'| \neq v$ und $v \neq 0$, also für nicht lichtartig getrennte und verschiedene Ereignisse (t,P) und (t',P'), erhält man

$$\omega^\beta(t,P,t',P') = \frac{\tau}{4\pi^2(1-QQ')}\frac{\coth v\sinh(2\tau v)}{\cosh(2\tau v) - \cosh(2\tau(t-t'))}. \tag{63}$$

Wir sehen, dass ω^β in diesem Bereich analytisch ist.

9.3 Berechnung von $\omega^\beta(:\phi:_H)$

Um das Wickquadrat zu berechnen, entwickeln $\omega^\beta(t,P,t,P')$ in eine Laurentreihe. Wir benutzen dafür die Formeln

$$1 - QQ' = qq' - (G-1),$$

$$\cosh v = 1 - (G-1)/(qq')$$

und merken an, dass $G \leq 1$ ist, da $t = t'$ gesetzt ist. Es ergibt sich bis zur ersten Ordnung in $G-1$

$$\omega^\beta(t,P,t,P') = \frac{1}{qq'}(\frac{\tau^2}{12\pi^2} - \frac{1}{48\pi^2}) - \frac{1}{8\pi^2(G-1)} + \frac{G-1}{q^2q'^2\pi^2}(\frac{1}{576} + \frac{\tau^2}{36} + \frac{\tau^4}{90}).$$

Nun können wir den in [5] angegebenen Anteil der Hadamard-Parametrix H benutzen, um lokal kovariant zu renormieren. Wir haben

$$H = \frac{-1}{8\pi^2(G-1)} + \text{const},$$

sodass wir mit

$$\tau = \pi/\beta$$

für das Wickquadrat

$$\omega^\beta(:\phi^2:_H(q)) = \frac{1}{12q^2}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{4\pi^2}\right) + \text{const} \tag{64}$$

erhalten. Aus Gleichung (64) erhält man analog zum Rindlerkeil sofort den Erwartungswert von $:\phi^2:_\beta$:.Dieses Ergebnis stimmt mit dem in [5] überein, wobei wir etwaige Renormierungskonstanten nicht diskutieren, siehe hierfür [5]. Zunächst merken wir an, dass die Zustände im wesentlichen analog zu den Rindler KMS-Zuständen zu interpretieren sind, deswegen werden wir hier die Betrachtungen zum Beobachter-Feld auslassen. Und analog zu Rindlerkeil findet man auch hier mit der lokalen Beschleunigung a und der lokalen Temperatur $\tilde{T}$ die Formel

$$12\omega^\beta(:\phi^2:_H(q)) = \tilde{T}^2 - \frac{a^2}{4\pi^2} + \text{const}. \tag{65}$$

Der Verdacht scheint sich zu erhärten, dass das lokal kovariante Wickquadrat eine lokale Temperatur-Observable ist. Wie Gleichung (65) im Zusammenhang mit dem Unruh-Effekt interpretiert werden kann, kann in [5] nachgelesen werden. Dort findet man auch ein Argument, dass in Richtung der Fläche $q = 0$ die thermische Interpretation dieser Zustände zusammenbricht.

10 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden auf dem Rindlerkeil lokale thermische Zustände mit räumlich variierender Temperatur konstruiert und mit dem Wickquadrat und dem Energie-Impuls-Tensor getestet. Es wurde gezeigt, dass eine thermische Interpretation im masselosen Fall für den Energie-Impuls-Tensor unmöglich ist und für das Wickquadrat höchstens für Temperaturen größer $2\pi^{-1}$. Für das massive Feld konnte daraus für die gleichen Temperaturbereiche abgeleitet werden, dass eine thermische Interpretation nahe dem Rindler-Horizont zusammenbricht. Auf dem de Sitter-Raum wurde der thermale Integral-Kern berechnet und daraus das Wickquadrat im Einklang mit [5] abgeleitet. Das Wickquadrat hat sich weiter etabliert, thermodynamische Observable zu sein, wobei man sich vielleicht nicht nur auf das Temperaturquadrat beschränken sollte. Mit Gleichung (64) bekommt das Wickquadrat eine Interpretation in der durchaus auch negative Erwartungswerte thermodynamischen Sinn machen. Zudem wurde noch ein natürliches hinreichendes Kriterium für Zustandsräume abgeleitet, nach welchem ein Zustandsraum in kovarianter Weise eine Art Darstellung der lokal kovarianten Quantenfeldtheorie induziert.

11 Ausblick

Auf dem Rindlerkeil bleibt zu untersuchen, ob die Schranke $\beta_{2\pi}$ nicht Null gesetzt werden kann. Mit einer verfeinerten Abschätzung sollte dies möglich sein. Weiter sind die Betrachtungen des masselosen Feldes auf dS mit der angegebenen Kommutatorfunktion auf den massiven Fall zu verallgemeinern. Mit $\omega^\beta(t, P, t', P')$ liegt nun ein einfacher Integral-Kern vor, mit dem unter anderem auch der Energie-Impuls-Tensor berechnet werden kann. Die benötigten Gegen-Terme sind bis zur benötigten Ordnung geschlossen berechenbar, aus Zeitgründen fand diese Berechnung nicht in dieser Arbeit statt. Es bleiben auch andere Zugänge zu lokal thermischer Interpretation interessant. So kann man zum Beispiel für lokal kovariante Quantenfeldtheorien die relative Cauchy-Evolution benutzen, um Zustände zu vergleichen. Ausserdem scheinen Diffeomorphismen induzierte Verbindungen zwischen lokalen Algebren in diesem Kontext nützlich zu sein.

12 Danksagung

Ich möchte mich bei Professor Fredenhagen für die Themenauswahl bedanken. Meinen Eltern gebührt der größte Dank für die Unterstützung. Ein Dank und ein Gruß geht an das gesammte Gebäude 66.

13 Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen verfasst zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Literatur

[1] K. Fredenhagen: Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit, Vorlesungsskript Sommersemester 1999

[2] R. Brunetti, K. Fredenhagen, R. Verch: The Generally Covariant Locality Principle-A New Paradigm for Local Quantum Field Theory, Commun. Math. Phys. 237, 31-68 (2003)

[3] R. Brunetti, K. Fredenhagen, M. Köhler: The Microlocal Spectrum Condition and Wick Polynomials of Free Fields on Curved Spacetime, Commun. Math. Phys. 180, 633-652 (1996)

[4] D. Buchholz, I. Ojima, H. Roos: Thermodynamic Properties of Non-equilibrium States in Quantum Field Theory, Annals of Physics 297, 219-242 (2002)

[5] D. Buchholz, J. Schlemmer: Local Tempereture in Curved Spacetime, arXiv:gr-qc/0608133v2 9 Mar 2007

[6] B.S. Kay, R. M. Wald: Theorems on the uniquness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate Killing horizon, Physics Reports Review Section of Physics Letters 207, No.2 199149-136 North-Holland

[7] J. Schlemmer: Gleichgewichtszustände auf der de Sitter-Raumzeit, Diplomarbeit angefertigt im Institut für Theoretische Physik der Georg-August-Universität zu Göttingen

[8] S. B. Yakubovich: The Kontorovich-Lebedev Transformation on Sobolev type Spaces, Sarajevo Journal of Mathematics Vol. 1 (14) (2005), 211-234

[9] S. Hollands, R. M. Wald: Local Wick Polynomials and Time Ordered Products of Quantum Fields in Curved Spacetime, arXiv:gr-qc/0103074v2 22 Jun 2001

[10] J. Dimock: Algebras of Local Observables on a Manifold, Commun. Math. Phys. 77, 219-228 (1980)

[11] T. Saffary: KMS-Zustände, Diplomarbeit angefertigt am Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg (2001)

[12] O. Bratteli, D. W. Robinson: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1 2, ISBN 3-540-17093-6 2nd Edition Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

[13] R. M. Wald: General Relativity, ISBN 0-226-87033-2 The University of Chicago Press

[14] E. A. Tagirov: Consequences of Field Quantization in De Sitter Type Cosmological Models, Annals Of Physics: 76, 561-579 (1973)

[15] J. C. Baez, I. E. Segal, Z. Zhou: Introduction to Algebraic and Constructive Quantum Field Theory, Princeton Unerversity Press

[16] V. Moretti: Comments on the Stress-Energy Tensor Operator in Curved Spacetime, preprint-UTM 601

[17] J. Samson: Untersuchung thermischer Observablen auf Robertson-Walker-Raumzeiten, Diplomarbei angefertigt am 2. Institut für Theoretische Physik Universität Hamburg

[18] G. Friedlander, M. Joshi: The Theory of Distributions, 2nd Edition Cambridge University Press

[19] http://functions.wolfram.com

[20] Abramowitz and Stegun. Handbook of Mathematical Functions. http://www.math.sfu.ca/ cbm/aands/toc.htm