

Optimierung der Quantenungleichungen

Lutz W. Osterbrink
II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg
Diplomarbeit

29. September 2004

Gutachter der Diplomarbeit

Prof. Dr. K. Fredenhagen

Prof. Dr. G. Mack

Abstract

Subject of this diploma thesis is a method to determine the infimum of the spectrum of a selfadjoint operator, which is bounded from below. For operators that are quadratic in the fields, the selfdual algebra, introduced by H. Araki, turns out to be an adequate tool. Since the smeared energy density belongs to this class of operators, we will give an expression, which describes, in some limit, the optimal quantum inequalities.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem das Infimum des Spektrums eines selbstadjungierten, von unten beschränkten Operators bestimmt werden kann. Für Operatoren, die quadratisch in den Feldern sind, stellt sich dabei die von H. Araki eingeführte selbstduale Algebra als geeignetes Werkzeug heraus. Da auch die verschmierte Energiedichte zu dieser Klasse von Operatoren gehört, wollen wir einen Ausdruck angeben, der in einem gewissen Grenzwert die optimalen Quantenungleichungen beschreibt.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Einführung | 1 |
| 1 Die selbstduale CCR-Algebra | 5 |
| 1.1 Die Weyl-Algebra | 5 |
| 1.2 Die CCR-Algebra und deren Fock-Cook-Darstellung | 8 |
| 1.3 Der Zusammenhang von CCR- und Weyl-Algebra | 9 |
| 1.4 Die selbstduale CCR-Algebra | 11 |
| 1.5 Quadratische Operatoren | 14 |
| 2 Der Energie-Impuls-Tensor | 25 |
| 2.1 Die gemittelte Energiedichte | 27 |
| 2.2 Die zeitgemittelte Energiedichte | 27 |
| 3 Das Infimum des Spektrums | 31 |
| 3.1 Ansatz zur Bestimmung des Infimums eines Spektrums | 31 |
| 3.2 Anwendung in der lokalen Quantenfeldtheorie | 36 |
| 4 Quantenungleichungen | 39 |
| 4.1 Einführung in die Quantenungleichungen | 39 |
| 4.2 Eigenschaften und Anwendung der Quantenungleichungen | 41 |
| 4.3 Optimierung der Quantenungleichungen | 43 |
| 4.4 Ausblick | 46 |
| A Anhang | 47 |
| A.1 Komplexe Strukturen | 47 |
| A.2 Operatoridentität | 49 |
| Literaturverzeichnis | 51 |

Einführung

Ein System der klassischen Mechanik ist im Allgemeinen dann stabil, wenn die Hamiltonfunktion eine untere Schranke besitzt. Da die Bewegungsgleichungen in diesem Zusammenhang über Differenziale definiert werden, ist diese nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt und kann deshalb immer positiv gewählt werden.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie fällt diese Freiheit jedoch weg, aufgrund der, schon in der speziellen Relativitätstheorie verlangten Lorentzinvarianz. Die Forderung, dass jeder Beobachter eine positive Energiedichte misst, formuliert man a priori als Bedingung an den Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$. Für alle zeitartigen und zukunftsgerichteten Tangentialvektoren u bedeutet dies,

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0.$$

Diese Bedingung¹ wird *Schwache Energiebedingung*² genannt. Zur klassischen Materie, wie beispielsweise Staub, findet man immer einen geeigneten Energie-Impuls-Tensor, der diese Bedingung erfüllt.

Doch wie H. Epstein, V. Glaser und A. Jaffe [1] im Jahre 1965 zeigten, ist die Schwache Energiebedingung für keine lokale Quantenfeldtheorie erfüllbar. Selbst das Verschmieren der Energiedichte in Raum und Zeit, mit einer nichtnegativen Testfunktion, bedingt keine Positivität aller Erwartungswerte.

Dreizehn Jahre später zeigte L.H. Ford [2], dass diese Verletzung nicht nur Probleme in der Allgemeinen Relativitätstheorie aufwirft, sondern auch eine Möglichkeit birgt, den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu verletzen. Er bemerkte, dass dieses nur dann verhindert wird, wenn man bestimmte Restriktionen an den Betrag der *negativen Energie* ΔE stellt. Ist Δt die Länge des Zeitintervalls, in dem die negative Energie auftritt, so wird der zweite Hauptsatz der Thermodynamik nicht verletzt, wenn die Ungleichung

$$\Delta E \Delta t \lesssim 1$$

erfüllt ist. Unter diesen Umständen wäre die negative Energie geringer als die *Energieunschärfe* in der entsprechenden Zeitskala. Etwas allgemeiner ist die Aussage, dass sich der Energiedichtefluss im d -dimensionalen Minkowskiraum antiproportional zur d -ten Potenz des entsprechenden Zeitintervalls verhalten muss, um den zweiten Hauptsatz der

¹Im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie gibt es noch weitere Bedingungen an den Energie-Impuls-Tensor, auf die wir jedoch an dieser Stelle nicht eingehen werden.

²WEC: Weak Energy Condition

Thermodynamik nicht zu verletzen.

Diese Art von Ungleichungen bekamen zunächst den Namen *Quantenungleichungen* und später die etwas präzisere Formulierung *Schwache Energie-Quantenbedingungen*³. Deren Form ist dadurch gegeben, dass man zu einer Testfunktion f und der damit lokal verschmierten Energiedichte T_f , immer ein reellwertiges Funktional ρ_f angibt, sodass

$$T_f \geq \rho_f \mathbb{1}$$

für eine hinreichend große Klasse von Zuständen gilt. Solche Funktionale wurden sowohl für unterschiedliche Dimensionen, als auch für verschiedene Arten von Feldern angegeben. Bisher ist es aber nur für den Fall der zweidimensionalen konformen Feldtheorie gelungen, eine *optimale untere Schranke* zu finden, also ein maximales Funktional ρ_f für das die Quantenungleichungen gelten.

Der bisher erfolgreichste Ansatz zur Bestimmung von allgemeinen Quantenungleichungen stammt ursprünglich von C. J. Fewster und S. P. Eveson. Das Grundprinzip besteht darin, die gemittelte Energiedichte T_f in eine Summe zweier Operatoren zu zerlegen, von denen per Konstruktion der eine positiv und der andere ein Vielfaches der Identität ist:

$$T_f = A^*A + \rho_f \mathbb{1} \geq \rho_f \mathbb{1}.$$

Jedoch kann mit diesem Verfahren nicht a priori die optimale untere Schranke bestimmt werden, da man dazu wissen muss, dass A^*A minimal positiv ist. Abgesehen vom masselosen Fall in der zweidimensionalen, konformen Feldtheorie gibt es also weder optimale untere Schranken, noch ein Ansatz, diese zu bestimmen.

In der vorliegenden Arbeit werden wir einen solchen Ansatz vorstellen. Da für einen von unten beschränkten Operator, die optimale untere Schranke durch das *Infimum des Spektrums*⁴ gegeben ist, besteht dieser im Wesentlichen aus einer Spektralanalyse der verschmierten Energiedichte. Die zentrale Idee dieses Ansatzes ist es, ein Funktional ρ_f anzugeben, das jeder Funktion f das Infimum des Spektrums von T_f zuordnet. Wir werden zeigen, dass dieses bei geeigneter Wahl eines Zustandes ω durch den Ausdruck

$$\rho_f = - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \ln \omega(e^{-\lambda T_f})$$

gegeben ist. Für den Fall in dem die gemittelte Energiedichte Element einer lokalen Algebra ist, stellt sich das Vakuum als ein geeigneter Zustand heraus. Zur Konkretisierung des Verfahrens berechnen wir zudem den Vakuumerwartungswert $\omega(e^T)$ für Operatoren, die quadratisch in den Feldern sind. Zu solchen gehört insbesondere die gemittelte Energiedichte T_f des freien Feldes. Es zeigt sich, dass beim Studium solcher Operatoren die von H. Araki eingeführte, sogenannte *selbstdualen Algebra* ein sehr nützliches Hilfsmittel darstellt.

³QWEI: Quantum Weak Energy Condition

⁴Da die Resolvente per Definition eine offene Menge ist, fällt das Infimum natürlich mit dem Minimum zusammen. Aus Gründen, die wir später diskutieren wollen, bevorzugen wir jedoch den Ausdruck Infimum des Spektrums.

Die Gliederung dieser Arbeit ist wie folgt:

Zuerst wird in Kapitel 1 eine kleine Einführung geben, die dem Leser die selbstduale Algebra und deren Kalkül nahelegt. Dazu wird insbesondere auf die Zusammenhänge mit der wohl bekannten Weyl- und der CCR-Algebra eingegangen. Abschließend werden die sogenannten *quadratischen Operatoren* definiert, mit deren Hilfe man Operatoren behandeln kann, die quadratisch in den Feldern sind. Insbesondere beschäftigen wir uns dabei mit bestimmten Vakuumerwartungswerten und der Renormierung im Sinne der Wickordnung. Eines der Hauptresultate dieses Kapitels wird ein Ausdruck für den Vakuumerwartungswert exponentierter quadratischer Operatoren sein.

Im darauf folgenden Kapitel wird der Energie-Impuls-Tensor des freien Feldes eingeführt. Besonders für den Fall der zeitgemittelten Energiedichte analysieren wir dessen Darstellung durch quadratische Operatoren.

Von zentraler Bedeutung in dieser Arbeit ist das Kapitel 3. Dort werden wir einen Ansatz vorgestellt, mit dem wir das Infimum des Spektrums bestimmen können. Nach einer Anwendung in Beispielen untersuchen wir, wann dieses Verfahren zum gewünschten Resultat führt. Insbesondere zeigen wir, dass dieser Ansatz für eine lokale Algebra immer das richtige Ergebnis liefert.

Im letzten Kapitel dieser Arbeit geben wir eine kurze Einführung, sowie einen Überblick zum Thema Quantenungleichungen. Schliesslich wenden wir unseren Ansatz auf die Quantenungleichungen an. Da es bislang noch nicht gelungen ist, einen konkreten Ausdruck für die Quantenungleichungen zu finden, wollen wir zunächst die Resultate von C.J. Fewster und S.P. Eveson reproduzieren und diskutieren.

Kapitel 1

Die selbstduale CCR-Algebra

In der nichtrelativistischen Quantenmechanik sind die Schrödinger- und die Heisenbergdarstellung äquivalente Formulierungen der selben Theorie. Doch ist es in vielen Fällen von Bedeutung, für welche Darstellung man sich entscheidet, um ein Problem möglichst kurz und elegant zu lösen. Auch in der Quantenfeldtheorie kann man äquivalente Algebren finden, in denen ein gegebenes Problem auf unterschiedliche Art und Weise behandelt werden kann.

In [3, 4] hat H. Araki die sogenannte *selbstduale CCR-Algebra* \mathcal{A}_{SD} eingeführt. Sie ist, wie der Name schon vermuten läßt, insbesondere isomorph zur CCR-Algebra¹ \mathcal{A}_{CCR} , definiert durch Auf- und Absteigeoperatoren. Doch im Gegensatz zu dieser sind in der selbstdualen Algebra solche Operatoren nicht a priori definiert. Dadurch ist insbesondere die Beschreibung von Bogoliubovtransformationen sehr elegant und es können verschiedene Probleme, wie beispielweise die Diagonalisierung von bestimmten Hamiltonoperatoren [5] relativ einfach und allgemein behandelt werden.

Es stellt sich heraus, dass auch die Klasse von Operatoren, zu denen die verschmierte Energiedichte gehört, in der selbstdualen Algebra besser behandelt werden kann als in der gewohnten CCR-Algebra. Der Einführung und dem Studium dieser Operatoren, den sogenannten *quadratischen Operatoren*, im Rahmen der selbstdualen Algebra, wollen wir uns in diesem Kapitel widmen. Einleitend rekapitulieren wir dazu den Begriff der Weyl-Algebra, als Ausgangspunkt für die unbeschränkten *- Algebren mit kanonischen Vertauschungsrelationen.

1.1 Die Weyl-Algebra

Schon in der klassischen Hamilton'schen Mechanik ist einer der grundlegenden Begriffe der des symplektischen Raumes. Auf diesem wird die Hamiltonfunktion definiert, welche die Bewegungsgleichungen des Systems liefern.

Auch in der Quantentheorie skalarer Felder ist der symplektische Raum von grundlegender Bedeutung. Er wird hierbei jedoch nicht, wie im klassischen Fall, als Phasenraum

¹Analog hat Araki auch die selbstduale CAR-Algebra eingeführt.

verstanden. Zunächst wollen wir eine Definition für den symplektischen Raum geben [6].

Definition 1.1. Ein symplektischer Raum \mathcal{S} ist ein \mathbb{R} -linearer Raum L mit einer antisymmetrischen, nichtentarteten Bilinearform σ auf L .

$$\begin{aligned}\sigma(f, g) &= -\sigma(g, f) \quad \forall f, g \in L \\ \sigma(f, g) &= 0 \quad \forall g \in L \Rightarrow f \equiv 0\end{aligned}$$

Die Bilinearform σ heißt symplektische Form von \mathcal{S} .

Bemerkung 1.2. Für einen endlichdimensionalen Raum L kann eine *symplektische Form* global nur definiert werden, wenn die Dimension von L gerade ist.

Der symplektische Raum ist per Definition \mathbb{R} -linear. Soweit wir für komplexe Vektorräume eine symplektische Form gefunden haben, müssen wir eine entsprechende Einschränkung vornehmen.

Das schon im einleitenden Text genannte Beispiel eines (endlichdimensionalen) symplektischen Raumes, ist der klassische Phasenraum.

Beispiel 1.3. Zu einer Mannigfaltigkeit M wird durch die Zweiform $\Omega = dp_i \wedge dq^i \in \Lambda^2(T^*M)$ eine symplektische Form auf dem Kotangentialbündel T^*M definiert. Man nennt ihn dann Phasenraum. Damit wird insbesondere der Phasenraum jeder linearen Mannigfaltigkeit zu einem symplektischen Raum.

Mit dem Begriff des symplektischen Raumes \mathcal{S} kann nun die Weyl-Algebra $\mathfrak{W}(\mathcal{S})$ über diesem eingeführt werden. Sie ist folgendermaßen definiert [7].

Definition 1.4. Sei $\mathcal{S} = (L, \sigma)$ ein symplektischer Raum, dann nennen wir die C^* -Algebra die von den Elementen $\{W(f) | f \in L\}$ erzeugt wird, eine Weyl-Algebra $\mathfrak{W}(\mathcal{S})$ über \mathcal{S} , wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllen:

$$W(f)^* = W(-f) \tag{1.1}$$

$$W(f)W(g) = W(f+g)e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)} \tag{1.2}$$

Insbesondere wird dabei (1.2) als *Weyl-Relation* bezeichnet. Drei wichtige Eigenschaften der Weyl-Algebra, die aus (1.1) und (1.2) folgen, sind durch

$$W(0) = \mathbb{1} \tag{1.3}$$

$$W(f) \text{ ist unitär} \tag{1.4}$$

$$\|W(f) - \mathbb{1}\| = 2 \quad \forall f \neq 0 \tag{1.5}$$

gegeben. Eine Darstellung der Weyl-Algebra kann durch Operatoren $W(f)$ auf einem unendlichdimensionalen Hilbertraum \mathcal{H} angegeben werden. Dazu betrachten wir zu jedem Element $x \in \mathcal{S}$ die unendlichdimensionalen Hilberträume \mathcal{H}_x und deren direkte Summe $\mathcal{H} = \bigoplus_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{H}_x$. Die Operatoren $W(f)$ auf \mathcal{H} , die sogenannten Weyl-Operatoren, können dann wie folgt definiert werden [8].

$$(W(f)F)(x) := e^{\frac{i}{2}\sigma(x,f)}F(x+f) \quad F \in \mathcal{H} \tag{1.6}$$

Während die Eigenschaft (1.1) offensichtlich ist, ergibt sich die Weyl-Relation (1.2) durch wiederholtes einsetzen der Definition (1.6):

$$\begin{aligned}
(W(f)W(g)F)(x) &= e^{\frac{i}{2}\sigma(x,g)}W(f)F(x+g) \\
&= e^{\frac{i}{2}\sigma(x,g)}e^{\frac{i}{2}\sigma(x+g,f)}F(x+g+f) \\
&= e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}e^{\frac{i}{2}\sigma(x,f+g)}F(x+g+f) \\
&= e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}(W(f+g)F)(x)
\end{aligned}$$

Dass es genügt, zu einem gegebenen symplektischen Raum nur eine bestimmte Weyl-Algebra zu betrachten, ist durch folgenden Satz gesichert [7].

Satz 1.5. *Zu jedem symplektischen Raum \mathcal{S} existiert eine Weyl-Algebra $\mathfrak{W}(\mathcal{S})$, welche bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.*

In der Quantenfeldtheorie haben wir es meist mit Hilberträumen zu tun. Deshalb gehen wir hier kurz auf einen Zusammenhang zwischen diesen ein. Sei dazu \mathcal{H} ein komplexer (Prä-) Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$, dann ist auf dem \mathbb{R} -linearen Raum \mathcal{H} mit $\sigma(\cdot, \cdot) = \text{Im}(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ eine nichtentartete, symplektische Form definiert. Dieses folgt, da auch $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ nichtentartet ist und weiterhin

$$\sigma(f, g) = \text{Im}(f, g)_{\mathcal{H}} = \text{Im}(\overline{(g, f)_{\mathcal{H}}}) = -\text{Im}(g, f)_{\mathcal{H}} = -\sigma(g, f)$$

gilt. Offensichtlich spielt der Realteil des Skalarprodukts keine Rolle für die symplektische Form. Es zeigt sich, dass er ein reelles Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf dem \mathbb{R} -linearen Raum \mathcal{H} definiert. In diesem Fall kann man folglich das Skalarprodukt auf \mathcal{H} als

$$(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}} = \langle \cdot, \cdot \rangle + i\sigma(\cdot, \cdot) \quad (1.7)$$

schreiben. Ein weiterer Zusammenhang zwischen Skalarprodukt und symplektischer Form sei bemerkt. Letztere bestimmt nach dem Darstellungssatz von Riesz² [9], eindeutig einen linearen Operator E auf \mathcal{H} , der die Eigenschaft

$$(f, Eg)_{\mathcal{H}} = \sigma(f, g) \quad \forall f, g \in \mathcal{H}$$

erfüllt. Dieser Operator wird aus Gründen, die hier noch nicht ersichtlich sind, meist als Propagator bezeichnet. Aus der Definition der symplektischen Form folgen für ihn die beiden Eigenschaften

$$\text{Ker } E = \{0\} \text{ und } E^* = -E.$$

²Die so definierte symplektische Form σ ist eine stetige Bilinearform.

1.2 Die CCR-Algebra und deren Fock-Cook-Darstellung

In diesem Abschnitt führen wir die sogenannte CCR-Algebra \mathcal{A}_{CCR} ein³. Vorab wollen wir bemerken, dass dieser Begriff, in einigen Büchern [8, 7, 6] für die im vorhergehenden Abschnitt eingeführte Weyl-Algebra benutzt wird. Die Motivation dafür werden wir später noch sehen.

Definition 1.6. Sei \mathcal{H} ein komplexer (Prä-) Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$. Die CCR-Algebra $\mathcal{A}_{CCR}(\mathcal{H})$ ist der Quotient⁴ der freien *-Algebra die durch $a(g)$, mit $g \in \mathcal{H}$, seinem Adjungiertem und der Identität erzeugt wird, mit den Eigenschaften, dass

$$a(f)^* \quad \text{ist komplex linear in } f \quad (1.8)$$

$$a(f)^* = a^*(f) \quad (1.9)$$

$$[a(f), a(g)^*] = (f, g)_{\mathcal{H}} \mathbb{1} \quad (1.10)$$

$$[a(f), a(g)] = [a(f)^*, a(g)^*] = 0 \quad (1.11)$$

für alle $f, g \in \mathcal{H}$ gilt.

Durch die CCR-Algebra \mathcal{A}_{CCR} kann eine Teilcheninterpretation des bosonischen (skalaren) Feldes gegeben werden.

Eine Standarddarstellung hierzu ist die Fock-Cook-Darstellung. Sie ist die CCR-Algebra $\mathcal{A}_{CCR}(\mathcal{H})$ über dem Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, dessen Elemente als Operatoren auf einem symmetrischen Hilbertraum \mathfrak{H} realisiert sind. Bevor wir diesen Raum, den bosonischen Fockraum \mathfrak{H} angeben, definieren wir die sogenannten n-Teilchen-Räume \mathfrak{H}_n :

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_0 &= \mathbb{C} \\ \mathfrak{H}_n &= \left\{ \phi_n : L_s^2(\underbrace{\mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3}_{n \text{ mal}}, \mathbb{C}) \mid \|\phi_n\|_{\mathfrak{H}_n}^2 < \infty \right\} \end{aligned}$$

Der Index s , soll dabei ausdrücken, dass die Funktionen $\phi_n(p_1, \dots, p_n) \in L_s^2(\mathbb{R}^{3n}, \mathbb{C})$ symmetrisch in ihren Argumenten p_i sind. Die Norm $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}_n}$ auf \mathfrak{H}_n ist dabei durch

$$\begin{aligned} \|\phi_0\|_{\mathfrak{H}_0}^2 &= |\phi_0|_{\mathbb{C}}^2 \\ \|\phi_n\|_{\mathfrak{H}_n}^2 &= \int \frac{d^3 p_1}{2\omega(p_1)} \cdots \int \frac{d^3 p_n}{2\omega(p_n)} |\phi_n(p_1, \dots, p_n)|^2 \end{aligned}$$

definiert. Auch unabhängig von der Realisierung der n-Teilchenräume ist der bosonische Fockraum gegeben durch

$$\mathfrak{H} = \left\{ \phi \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n \mid \|\phi\|_{\mathfrak{H}}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \|\phi_n\|_{\mathfrak{H}_n}^2 < \infty \right\}.$$

³Im Wesentlichen richten wir uns dabei nach der Einführung von [10] und [11].

⁴Dieses ist so zu verstehen, dass beispielsweise Elemente der Form $a(f) + \lambda \mathbb{1}$ nicht zu $\mathcal{A}_{CCR}(\mathcal{H})$ gehören sollen, da $a(f)$ schon die gleichen Kommutationsrelationen erfüllt.

Aus Eigenschaft (1.10) der CCR-Algebra $\mathcal{A}_{CCR}(\mathcal{H})$ kann man nun schliessen, dass es keine Darstellung von $a(f)$ und seinem Adjungierten, als beschränkte Operatoren auf einem Hilbertraum gibt⁵. Aus diesem Grund definieren wir zunächst die Teilmenge

$$D(N^{\frac{1}{2}}) = \left\{ \phi \in \mathfrak{H} \mid \sum_{n=0}^{\infty} n \|\phi_n\|^2 < \infty \right\}.$$

des bosonischen Fockraums. Es gilt $D(N^{\frac{1}{2}}) \stackrel{\text{dicht}}{\subset} \mathfrak{H}$. Für $f \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ kann man nun eine Operatordarstellung von $\mathcal{A}_{CCR}(\mathcal{H})$ auf $D(N^{\frac{1}{2}})$ angeben. Wir wollen $a^*(f)$ und $a(f)$ mit ihren Darstellungen identifizieren:

$$\begin{aligned} (a^*(f)\phi)_n(p_1, \dots, p_n) &= n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n f(p_i) \phi_{n-1}(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n) \quad n \neq 0 \\ (a(f)\phi)_n(p_1, \dots, p_n) &= (n+1)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3p}{2\omega(p)} \bar{f}(p) \phi_{n+1}(p, p_1, \dots, p_n). \end{aligned}$$

Man bezeichnet $a^*(f)$ als Aufsteige- und $a(f)$ als Absteigeoperator. Die verlangten Relationen der CCR-Algebra werden erfüllt, wenn man das Skalarprodukt auf $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ durch

$$(f, g)_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} = \int \frac{d^3p}{2\omega(p)} \bar{f}(p) g(p) \text{ mit } f, g \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$$

definiert. Ein wichtiger Vektor im Fockraum ist der sogenannte Vakuumvektor Ω . Er wird durch

$$\Omega = (1, 0, 0, \dots)$$

definiert und besitzt die Eigenschaft $a(f)\Omega = 0$. Für spätere Betrachtungen ist es sinnvoll, den sogenannten Vakuumsektor \mathfrak{H}_Ω zu definieren:

$$\mathfrak{H}_\Omega = \text{lineare Hülle von } \{a^*(f_1) \dots a^*(f_n)\Omega \mid f_i \in \mathcal{H}\} \quad (1.12)$$

Er ist eine dichte Teilmenge des Fockraums \mathfrak{H} .

1.3 Der Zusammenhang von CCR- und Weyl-Algebra

In diesem Abschnitt wollen wir kurz auf den Zusammenhang zwischen den beiden eingeführten Algebren, der Weyl- und der CCR-Algebra eingehen. Dabei zeigen wir, wie durch die CCR-Algebra \mathcal{A}_{CCR} eine Weyl-Algebra \mathfrak{W} über dem selben Raum erzeugt wird. Auf die umgekehrte Relation werden wir an dieser Stelle nicht detailliert eingehen. Wir verweisen dazu auf die Standardliteratur [7, 12].

Sei zunächst ω ein Zustand auf der Weyl-Algebra $\mathfrak{W}(\mathcal{S})$, dann ist durch

$$\Phi_\omega(f) = \omega(W(f)) \quad f \in \mathcal{S},$$

⁵Satz von Wintner.

ein Funktional auf \mathcal{S} definiert. Dieses nennen wir das erzeugende Funktional des Zustands ω . Mit diesem ist es uns nun möglich, den Begriff des regulären Zustandes wie folgt zu definieren.

Definition 1.7. Ein Zustand ω auf einer Weyl-Algebra $\mathfrak{W}(\mathcal{S})$ wird als regulär bezeichnet, falls das erzeugende Funktional $\Phi_\omega(\lambda f)$, für alle $f \in \mathcal{S}$, eine stetige Funktion in $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

Wählen wir also ein GNS-Tripel $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ zum Zustand ω , dann ist die Darstellung der Weyl-Operatoren $\pi_\omega(W(\lambda f))$ genau dann stark stetig in $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn ω ein regulärer Zustand ist [8]. Folglich gibt es zu einem regulären Zustand ω nach dem Satz von Stone einen selbstadjungierten Operator $b_\omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ für den

$$\begin{aligned}\pi_\omega : \mathfrak{W}(\mathcal{S}) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega) \\ \pi_\omega(W(tf)) &= e^{itb_\omega(f)}\end{aligned}$$

. Die Operatoren b_ω nennen wir die bosonischen Feldoperatoren. Wie schon im einführenden Abschnitt über die Weyl-Algebra gesehen (1.5), sind die $W(f)$ nicht norm-stetig. Daraus folgt die Unbeschränktheit der bosonischen Feldoperatoren.

Die Vertauschungsrelationen der Feldoperatoren $b_\omega(f)$ kann man aus den Weyl-Relationen (1.2) ablesen:

$$[b_\omega(f), b_\omega(g)] = i\sigma(f, g) \mathbb{1}_{\mathcal{H}_\omega} \quad f, g \in \mathcal{S}.$$

Mit der Konstruktion solcher Operatoren, kommt man von einer CCR-Algebra $\mathcal{A}_{CCR}(\mathcal{H})$ zu einer Weyl-Algebra $\mathfrak{W}(\mathcal{H})$ über dem selben Raum. Dazu bilden wir die sogenannten Segal-Operatoren $\phi(f)$ der CCR-Algebra $\mathcal{A}_{CCR}(\mathcal{H})$:

$$\phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a(f) + a^*(f)) \quad f \in \mathcal{H}.$$

Das Interessante an diesen Operatoren, sind deren Vertauschungsrelationen. Diese folgen unmittelbar aus denen der CCR-Algebra $\mathcal{A}_{CCR}(\mathcal{H})$:

$$\begin{aligned}[\phi(f), \phi(g)] &= \frac{1}{2} ([a(f), a^*(g)] - [a(g), a^*(f)]) \\ &= \frac{1}{2} ((f, g) - (g, f)) \\ &= i\text{Im}(f, g).\end{aligned}\tag{1.13}$$

Wie wir schon in Abschnitt 1.1 über die Weyl-Algebra gezeigt haben (siehe 1.7), ist auf einem komplexen (Prä-) Hilbertraum durch $\sigma(f, g) = \text{Im}(f, g)$ eine nichtentartete, symplektische Form gegeben. Mit dieser wird der Hilbertraum \mathcal{H} zu einem symplektischen Raum. Betrachten wir nun die unitären Operatoren

$$W(f) = e^{i\overline{\phi(f)}},$$

die durch den Abschluss der Segal-Operatoren gegeben sind. Sie definieren Weyl-Operatoren über dem Hilbertraum \mathcal{H} . Dass diese Operatoren wirklich die Weylrelationen 1.2

erfüllen, ist nun offensichtlich, wenn man den Kommutator (1.13) in die BCH-Formel⁶ einsetzt:

$$W(f)W(g) = e^{i\overline{\phi(f)}}e^{i\overline{\phi(g)}} = e^{i\overline{\phi(f+g)}}e^{\frac{1}{2}[i\phi(f),i\phi(g)]} = W(f+g)e^{-\frac{i}{2}\text{Im}(f,g)} \quad f, g \in \mathcal{H}.$$

Somit haben wir aus der CCR-Algebra $\mathcal{A}_{CCR}(\mathcal{H})$ eine Weyl-Algebra $\mathfrak{W}(\mathcal{H})$ erzeugt. Die Konstruktion war in diesem Falle besonders einfach, da jeder komplexe Hilbertraum auf natürliche Weise auch als symplektischer Raum verstanden werden kann. Für die Umkehrung muss man jedoch aus einem symplektischen Raum \mathcal{S} einen komplexen Hilbertraum konstruieren. Da \mathcal{S} insbesondere ein \mathbb{R} -linearer Raum ist, muss man ihn zunächst komplexifizieren⁷ und anschließend dicht in einen geeigneten Hilbertraum einbetten. Diese Problematik ist explizit in [12] behandelt, wird uns aber weiterhin nicht interessieren, da wir im Folgenden immer schon von Hilberträumen ausgehen.

1.4 Die selbstduale CCR-Algebra

Bisher haben wir zeigen können, dass es eine Darstellung der Weyl-Algebra \mathfrak{W} durch die CCR-Algebra \mathcal{A}_{CCR} gibt. In ähnlicher Weise kann man eine Algebra finden, die sowohl die CCR- als auch die Weyl-Algebra reproduziert. Dieses ist die von Araki in [3, 4] eingeführte sogenannte selbstduale CCR-Algebra \mathcal{A}_{SD} .

Definition 1.8. Sei \mathcal{K} ein komplexer (Prä-) Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{K}}$ und einer antilinearen Involution Γ mit $\Gamma^2 = \mathbb{1}$ und $(\Gamma f, \Gamma g)_{\mathcal{K}} = (g, f)_{\mathcal{K}}, \forall f, g \in \mathcal{K}$. Gegeben sei ein selbstadjungierter Operator Θ auf \mathcal{K} , so dass $\gamma(\cdot, \cdot) = (\cdot, \Theta \cdot)_{\mathcal{K}}$ eine nichtentartete Hermite'sche Sesquilinearform beschreibt. Die selbstduale CCR-Algebra $\mathcal{A}_{SD}(\mathcal{K}, \Gamma, \gamma)$ über \mathcal{K} ist der Quotient der komplexen freien $*$ -Algebra erzeugt von $B(f), f \in \mathcal{K}$ und der Identität $\mathbb{1}$ mit den folgenden Relationen⁸

$$B(f)^* \quad \text{ist komplex linear in } f \quad (1.14)$$

$$B(f)^* = B(\Gamma f) \quad (1.15)$$

$$[B(f), B(g)^*] = \gamma(f, g)\mathbb{1}. \quad (1.16)$$

Soweit keine Verwirrungen auftreten können, schreiben wir kurz $\mathcal{A}_{SD}(\mathcal{K})$.

Jede lineare bijektive Abbildung U auf \mathcal{K} , für die $\gamma(Uf, Ug) = \gamma(f, g)$ und $\Gamma U = U\Gamma$ gilt, erhält die obigen Relationen. Deshalb existiert ein eindeutiger $*$ -Automorphismus auf $\mathcal{A}_{SD}(\mathcal{K})$, der als Bogoliubov Automorphismus bezeichnet wird. Die Abbildung U nennen wir Bogoliubov Transformation.

Einige Eigenschaften, die direkt aus der Definition der selbstdualen Algebra folgen und

⁶Sie ist durch $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$ gegeben, wenn $[A, B]$ im Zentrum der Algebra liegt.

⁷Siehe Anhang A.1.

⁸In [3, 4] benutzt Araki eine andere Konvention als wir, in der die $B(f)$ komplex linear in f sind.

in späteren Rechnungen Anwendung finden sind

$$B(f) \quad \text{ist komplex antilinear in } f \quad (1.17)$$

$$[B(f), B(g)] = \gamma(f, \Gamma g) \mathbb{1} = (f, \Theta \Gamma g)_{\mathcal{K}} \mathbb{1} \quad (1.18)$$

$$\gamma(\Gamma f, \Gamma g) = -\gamma(g, f) \quad (1.19)$$

$$\Gamma \Theta \Gamma = -\Theta. \quad (1.20)$$

Um einen Zusammenhang zwischen \mathcal{A}_{SD} und \mathcal{A}_{CCR} herzustellen, definieren wir zunächst die sogenannte Basisprojektion.

Definition 1.9. Ein linearer Operator P auf \mathcal{K} heißt Basisprojektion der selbstdualen Algebra $\mathcal{A}_{SD}(\mathcal{K})$, wenn er

$$P^2 = P \quad (1.21)$$

$$P^* \Theta = \Theta P > 0 \quad (1.22)$$

$$\Gamma P \Gamma = \mathbb{1} - P \quad (1.23)$$

erfüllt.

Da die beiden Operatoren P und Θ , a priori nicht kommutieren, ist eine Basisprojektion nicht zwingend selbstadjungiert, also durch einen Projektionsoperator auf \mathcal{K} gegeben.

Ein veranschaulichendes Beispiel für eine Basisprojektion ist das Folgende:

Beispiel 1.10. Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$, $\overline{\mathcal{H}}$ der zu ihm konjugierte Raum und \mathcal{K} definiert durch $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$. Weiterhin seien die Operatoren Γ und Θ für $f = (f_1, \bar{f}_2)$ definiert durch $\Gamma(f_1, \bar{f}_2) = (f_2, \bar{f}_1)$ und $\Theta(f_1, f_2) = (f_1, -f_2)$. Das Skalarprodukt sei gegeben durch $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{K}} = (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}} + (\cdot, \cdot)_{\overline{\mathcal{H}}}$. Dann ist durch den linearen Operator P , mit $P(f_1, f_2) = (f_1, 0)$, eine Basisprojektion gegeben, denn offensichtlich folgt die Eigenschaft

$$\Gamma P \Gamma f = \Gamma P \Gamma (f_1, \bar{f}_2) = \Gamma P (f_2, \bar{f}_1) = \Gamma (f_2, 0) = (0, \bar{f}_2) = (\mathbb{1} - P) f$$

per Konstruktion.

Im folgenden werden wir für das Skalarprodukt auf \mathcal{K} , soweit keine Verwirrungen auftreten können, immer (\cdot, \cdot) statt $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{K}}$ schreiben.

Durch die Definition der Basisprojektion kann nun ein Zusammenhang zwischen den beiden Algebren $\mathcal{A}_{SD}(\mathcal{K})$ und $\mathcal{A}_{CCR}(\mathcal{K})$ erstellt werden. Sei dazu P eine Basisprojektion auf \mathcal{K} und α_P eine Abbildung von \mathcal{A}_{CCR} nach \mathcal{A}_{SD} die durch

$$\alpha_P(B(f_1) \dots B(f_n)) = \alpha_P(B(f_1)) \dots \alpha_P(B(f_n)) \quad (1.24)$$

$$\alpha_P(B(f)) = a(Pf) + a^*(P\Gamma f) \quad (1.25)$$

definiert ist. Diese Abbildung ist ein *-Isomorphismus zwischen den beiden Algebren, da

$$\alpha_P(B(f)^*) = \alpha_P(B(\Gamma f)) = a(P\Gamma f) + a^*(Pf) = \alpha_P(B(f))^*$$

und α_P injektiv ist, was man aus (1.25) ablesen kann. Des weiteren sieht man, dass

$$\begin{aligned}\alpha_P([B(f), B(g)^*]) &= a(Pf)a^*(Pg) - a^*(Pg)a(Pf) \\ &\quad + a^*(P\Gamma f)a(P\Gamma g) - a(P\Gamma g)a^*(P\Gamma f) \\ &= (Pf, Pg)\mathbb{1} - (\Gamma(\mathbb{1} - P)g, \Gamma(\mathbb{1} - P)f)\mathbb{1} = (f, (2P - \mathbb{1})g)\mathbb{1}.\end{aligned}$$

Die kanonischen Vertauschungsrelationen der beiden Algebren werden also durch den Isomorphismus α_P miteinander identifiziert. Es folgt insbesondere, dass

$$\Theta = 2P - \mathbb{1}.$$

ist und damit die Basisprojektion zu einem Projektionsoperator auf \mathcal{K} wird, da nun $P = P^*$.

Proposition 1.11. *Für ein GNS Tripel $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ der Algebra \mathcal{O}_{CCR} und fixierter Basisprojektion P , liefert die Abbildung $\pi_P = \pi \circ \alpha_P$ eine Darstellung von \mathcal{O}_{SD} .*

Wir werden im Folgenden immer davon ausgehen, dass diese durch die Fock-Cook-Darstellung (siehe Abschnitt 1.2) gegeben ist.

Da auf dem Unterraum $P\mathcal{K} = \{f \in \mathcal{K} | Pf = f\}$, die Identität $\alpha_P(B(f)) = a(f)$ gilt, vernichtet $\alpha_P(B(f))$ für $f \in P\mathcal{K}$, vermöge α_P , das Vakuum Ω im Fockraum \mathfrak{H} :

$$\alpha_P(B(Pf))\Omega = 0. \quad (1.26)$$

Um den Zusammenhang mit der Weyl-Algebra $\mathfrak{W}(\mathcal{K})$ zu sehen, geben wir die folgende Proposition an.

Proposition 1.12. *Auf dem Unterraum $\mathfrak{RK} = \{f \in \mathcal{K} | \Gamma f = f\}$ ist durch $\sigma_{\mathfrak{RK}}(f, g) = i\gamma(f, g)$ eine nichtentartete, symplektische Form gegeben.*

Dieses kann durch einfaches Einsetzen der Eigenschaft (1.19) gezeigt werden.

$$\sigma_{\mathfrak{RK}}(f, g) = i\gamma(f, g) = -i\gamma(\Gamma g, \Gamma f) = -i\gamma(g, f) = -\sigma_{\mathfrak{RK}}(g, f)$$

Dabei entsprechen per Definition den Symplektomorphismen⁹ U der symplektischen Form γ gerade die Bogoliubov Transformationen auf \mathcal{O}_{SD} .

Man kann eine Weyl-Algebra $\mathfrak{W}(\mathfrak{RK})$ über dem Raum \mathfrak{RK} wie folgt definieren:

$$W(f)W(g) = W(f + g) e^{\frac{1}{2}\gamma(f, g)} = W(f + g) e^{-\frac{i}{2}\sigma_{\mathfrak{RK}}(f, g)}.$$

Araki zeigte in [3], dass die Elemente dieser Weyl-Algebra durch Elemente aus $\mathcal{O}_{SD}(\mathcal{K})$ reproduziert werden können. Sie sind dabei durch

$$W(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} B(f)^n = e^{iB(f)} \quad f \in \mathfrak{RK}$$

⁹Also die Abbildungen U in \mathcal{K} mit $\gamma(Uf, Ug) = \gamma(f, g), \forall f, g \in \mathcal{K}$.

gegeben.

Die Besonderheit der selbstdualen Algebra ist, den Unterschied zwischen Auf- und Absteigeoperatoren von der Algebra $\mathcal{A}_{SD}(\mathcal{K})$ auf den Raum \mathcal{K} zu "verschieben".

Dieses rechtfertigt den Namen selbstduale Algebra, da vermöge der Relation (1.15), man zu jedem $B(f) \in \mathcal{A}_{SD}(\mathcal{K})$, ein $B(g) \in \mathcal{A}_{SD}(\mathcal{K})$ findet, sodass $B(f)$ und $B(g)$ dual zueinander sind¹⁰.

1.5 Quadratische Operatoren

Die selbstduale Algebra \mathcal{A}_{SD} erweist sich als ein besonders hilfreiches Instrument im Studium von Operatoren, die durch Polynome vom Grad zwei in Auf- und Absteigeoperatoren dargestellt sind. In der selbstdualen Algebra entsprechen diesen Objekten die sogenannten Quadratischen Operatoren. Im Folgenden wollen wir diese genauer definieren und charakterisieren.

Eine besondere Klasse von Operatoren auf einem Hilbertraum \mathcal{K} sind die Spurklasse-Operatoren $\mathcal{T}_1(\mathcal{K})$ und die Hilbert-Schmidt-Operatoren $\mathcal{T}_2(\mathcal{K})$. Sie sind von grundlegender Bedeutung in folgender Definition.

Definition 1.13. Sei \mathcal{K} ein komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) . Sei weiterhin $\mathcal{A}_{SD}(\mathcal{K})$ eine selbstduale Algebra über diesem, mit einer Basisprojektion P . Den Operator H nennen wir einen *Kern eines quadratischen Operators*, wenn

$$PHP, (\mathbb{1} - P)H(\mathbb{1} - P) \in \mathcal{T}_1(\mathcal{K}) \quad (1.27)$$

$$(\mathbb{1} - P)HP, PH(\mathbb{1} - P) \in \mathcal{T}_2(\mathcal{K}). \quad (1.28)$$

Die Menge dieser Operatoren wollen wir mit $\mathcal{Q}(\mathcal{K})$ bezeichnen.

Soweit keine Verwirrungen auftauchen können, wollen wir solch einen Operator immer durch

$$Hf = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(h_i, f) \quad (1.29)$$

und dessen adjungierten Operator durch

$$H^\dagger f = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(f_i, f). \quad (1.30)$$

beschreiben.

Definition 1.14. Ein *Quadratischer Operator* $\frac{1}{2}B^*HB \in \mathcal{A}_{SD}(\mathcal{K})$ mit $H \in \mathcal{Q}(\mathcal{K})$, ist definiert durch

$$\frac{1}{2}B^*HB = s - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N B(f_i)^* B(h_i). \quad (1.31)$$

¹⁰Das gilt offensichtlich für $g = \Gamma f$.

Satz 1.15. Sei $\mathcal{O}_{SD}(\mathcal{K})$ eine selbstduale Algebra mit Basisprojektion P . Sei weiterhin α_P der durch (1.24) definierte $*$ -Isomorphismus α_P zwischen der selbstdualen Algebra $\mathcal{O}_{SD}(\mathcal{K})$ und der CCR-Algebra $\mathcal{O}_{CCR}(\mathcal{K})$ mit Darstellung im Fockraum \mathfrak{H} . Dann konvergiert

$$\alpha_P\left(\frac{1}{2}B^*HB\right) = s - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \alpha_P(B(f_i)^*B(h_i)) \text{ für } H \in \mathcal{Q}(\mathcal{K})$$

auf dem Vakuumsektor $\mathfrak{H}_\Omega \stackrel{\text{dicht}}{\subset} \mathfrak{H}$.

Für den recht umfangreichen Beweis verweisen wir auf [13]. Der Übersichtlichkeit halber wollen wir in dieser Arbeit die quadratischen Operatoren verkürzt durch

$$\frac{1}{2}B^*HB = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} B(f_i)^*B(h_i) \quad (1.32)$$

darstellen. Einige Eigenschaften dieser Operatoren fassen wir in einem Lemma zusammen.

Lemma 1.16. Für quadratische Operatoren mit Kernen $H, G \in \mathcal{Q}(\mathcal{K})$, gilt

$$\frac{1}{2}B^*(\beta H)B = \beta \frac{1}{2}B^*HB \quad \beta \in \mathbb{C} \quad (1.33)$$

$$\left[\frac{1}{2}B^*HB, B(f)^*\right] = B(\iota(H)\Theta f)^* \quad (1.34)$$

$$\left[\frac{1}{2}B^*HB, \frac{1}{2}B^*GB\right] = \frac{1}{2}B^*[\iota(H)\Theta G - G\Theta\iota(H)]B \quad (1.35)$$

$$\frac{1}{2}(B^*HB)^* = \frac{1}{2}B^*H^\dagger B, \quad (1.36)$$

wobei die Abbildung ι definiert ist durch

$$\iota(H) = \frac{H + \Gamma H^\dagger \Gamma}{2}. \quad (1.37)$$

Da H auf dem Unterraum $(\mathbb{1} - P)\mathcal{K}$ ein Spurklasseoperator ist, folgt

$$\omega\left(\frac{1}{2}B^*HB\right) = \frac{1}{2}\text{tr}_{\mathbb{1}-P}H, \quad (1.38)$$

wobei hier ω der Vakuumzustand vermöge α_P und $\text{tr}_{\mathbb{1}-P}$ die Spur eingeschränkt auf den Unterraum $(\mathbb{1} - P)\mathcal{K}$ sein soll.

Beweis. Die komplexe Linearität (1.33) der quadratischen Operatoren folgt aus der Linearität der $B(f_i)^*$.

Die zweite Eigenschaft (1.34) folgt, da

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[B^*HB, B(f)^*] &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} [B(f_i)^*B(h_i), B(f)^*] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} B(f_i)^*(h_i, \Theta f) + (\Gamma f_i, \Theta f)B(h_i) \\
&= \frac{1}{2}B(H\Theta f + \Gamma H^\dagger \Gamma \Theta f)^* \\
&= B(\iota(H)\Theta f)^*,
\end{aligned}$$

wobei wir genutzt haben, dass

$$\begin{aligned}
(\Gamma f_i, \Theta f)B(h_i) &= B(h_i(\overline{\Gamma f_i, \Theta f})) \\
&= B(h_i(f_i, \Gamma \Theta f)) \\
&= B(H^\dagger \Gamma \Theta f) \\
&= B(\Gamma H^\dagger \Gamma \Theta f)^*
\end{aligned}$$

Bevor wir nun (1.35) beweisen wollen, bemerken wir, dass (1.36) unmittelbar aus der Definition der Quadratischen Operatoren folgt.

$$\left(\frac{1}{2}B^*HB\right)^* = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} B(h_i)^*B(f_i) = \frac{1}{2}B^*H^\dagger B \quad (1.39)$$

Mit diesem Ergebniss und den leicht zu überprüfenden Identitäten

$$\iota(H)\Gamma = \Gamma\iota(H^\dagger) \quad (1.40)$$

$$\iota(H^\dagger) = \iota(H)^\dagger, \quad (1.41)$$

folgt nun (1.35). Seien dazu die Operatoren H und G gegeben durch

$$Hf = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(h_i, f) \quad \text{und} \quad Ge = \sum_{i=0}^{\infty} e_i(g_i, e) \quad e, f \in K, H, G \in \mathcal{Q}(\mathcal{K}),$$

dann folgt

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2}B^*HB, \frac{1}{2}B^*GB\right] &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2}B^*HB, B(e_i)^*\right]B(g_i) + B(e_i)^* \left[\frac{1}{2}B^*HB, B(\Gamma g_i)^*\right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} B(\iota(H)\Theta e_i)^*B(g_i) + B(e_i)^*B(\Gamma\iota(H)\Theta\Gamma g_i) \\
&= \frac{1}{2}B^*\iota(H)\Theta GB + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (B(\Gamma\iota(H)\Theta\Gamma g_i)^*B(e_i))^* \\
&= \frac{1}{2}B^*\iota(H)\Theta GB + \left(\frac{1}{2}B^*\Gamma\iota(H)\Theta\Gamma G^\dagger B\right)^* \\
&= \frac{1}{2}B^*\iota(H)\Theta GB - \frac{1}{2}B^*G\Theta\iota(H)B. \quad (1.42)
\end{aligned}$$

Im letzten Ausdruck haben wir ausgenutzt, dass $\Gamma\Theta\Gamma = -\Theta$. Nun kommen wir zum letzten Ausdruck von Lemma 1.16. Dazu wählen wir ein GNS-Tripel $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ und eine Basisprojektion P . Mit Hilfe der Abbildung $\pi_P = \pi \circ \alpha_P$ bekommen wir den Vakuumerwartungswert

$$\begin{aligned}
\omega\left(\frac{1}{2}B^*HB\right) &= \frac{1}{2}(\Omega, \pi_P(B^*HB)\Omega) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}(\pi_P(B(f_i))\Omega, \pi_P(B(h_i))\Omega) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}(\pi_P(B((\mathbb{1}-P)f_i))\Omega, \pi_P(B((\mathbb{1}-P)h_i))\Omega) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}(\Omega, \pi_P(B((\mathbb{1}-P)f_i)^*B((\mathbb{1}-P)h_i))\Omega) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}(\Omega, \pi_P([B((\mathbb{1}-P)h_i), B((\mathbb{1}-P)f_i)^*])\Omega) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}((\mathbb{1}-P)h_i, \Theta(\mathbb{1}-P)f_i) \\
&= \frac{1}{2}\text{tr}_{\mathbb{1}-P}H.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir dabei ausgenutzt, dass $\Theta(\mathbb{1}-P) = -(\mathbb{1}-P)$. \square

Im letzten Teil des Beweises haben wir gesehen, wie wir, vermöge π_P quadratische Operatoren auf Fockraum-Vektoren anwenden, dazu ein weiteres Beispiel:

Beispiel 1.17. Sei nun $(\mathcal{H}, \pi_P, \Omega)$ eine Darstellung der Algebra \mathcal{A}_{SD} und $H \in \mathcal{Q}(\mathcal{K})$, dann vernichtet $\frac{1}{2}B^*HPB = \frac{1}{2}B^*(HP)B$ das Vakuum. Dies wollen wir kurz vorrechnen um einen Einblick in diesen Kalkül zu bekommen. Es ist

$$\begin{aligned}
\pi_P\left(\frac{1}{2}B^*HPB\right)\Omega &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\pi_P(B(f_i)^*B(Ph_i))\Omega \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\pi_P(B(f_i)^*)\pi(a(Ph_i))\Omega = 0.
\end{aligned}$$

Man kann an Lemma 1.16 sehen, dass das Rechnen mit quadratischen Operatoren für verschiedene Kerne H identische Ergebnisse liefert. Um dies zu untersuchen, wollen wir eine spezielle Klasse von Operatoren auf \mathcal{K} einführen.

Definition 1.18. Die Teilmenge $\mathcal{S}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{Q}(\mathcal{K})$, die invariant unter ι ist, nennen wir ι -symmetrische Operatoren:

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}) = \{S \in \mathcal{Q}(\mathcal{K}) \mid S = \iota(S)\}$$

Für die Analyse von quadratischen Operatoren genügt es, sich auf ι -symmetrische zu beschränken, da sie die gleichen Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$[\frac{1}{2}B^*(H - \iota(H))B, B(f)^*] = 0.$$

Proposition 1.19. *Für einen Operator $H \in \mathcal{Q}(\mathcal{K})$, folgt insbesondere $\iota(H) \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$.*

Es genügt zu zeigen, dass $\iota^2 = \iota$:

$$\begin{aligned} \iota^2(H) &= \frac{1}{2} \left(\iota(H) + \Gamma \iota(H)^\dagger \Gamma \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(H + \Gamma H^\dagger \Gamma + \Gamma H^\dagger \Gamma + \Gamma^2 H \Gamma^2 \right) \\ &= \iota(H) \end{aligned}$$

Zusammenfassend können wir für die ι -symmetrischen Operatoren die aus Lemma 1.16 folgende Proposition formulieren.

Proposition 1.20. *Für quadratische Operatoren mit Kernen $H, G \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$, gilt*

$$[\frac{1}{2}B^*HB, B(f)^*] = B(H\Theta f)^* \quad (1.43)$$

$$[\frac{1}{2}B^*HB, \frac{1}{2}B^*GB] = B^*[H\Theta, G\Theta]\Theta B \quad (1.44)$$

$$\frac{1}{2}(B^*HB)^* = \frac{1}{2}B^*H^\dagger B \quad (1.45)$$

$$\text{tr}_{\mathbb{1}-P}H = \text{tr}_P H^\dagger. \quad (1.46)$$

Ist H außerdem ein selbstadjungierter Operatoren, so folgt

$$\omega(\frac{1}{2}B^*HB) = \frac{1}{2}\text{tr}_P H. \quad (1.47)$$

Das folgende Lemma wird im darauf folgenden Satz eine wichtige Rolle spielen.

Lemma 1.21. *Sei $S \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$ ein selbstadjungierter Operator. Der quadratische Operator $\frac{1}{2}B^*SB$ ist Generator eines Automorphismus¹¹ auf $\mathcal{A}_{SD}(\mathcal{K})$*

$$\tau_S(A) = e^{\frac{1}{2}B^*SB} A e^{-\frac{1}{2}B^*SB}. \quad (1.48)$$

Er induziert folgende Transformationen auf \mathcal{K} :

$$\tau_S(B(f)^*) = B(e^{S\Theta} f)^* \text{ und } \tau_S(B(f)) = B(e^{-S\Theta} f). \quad (1.49)$$

Auf Konvergenzfragen der Exponentialfunktion wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen und sie als formale Potenzreihe betrachten.

¹¹Da $\frac{1}{2}B^*SB$ ein selbstadjungierter Operator ist, definiert τ_S keinen *-Automorphismus

Beweis. Es ist offensichtlich, dass τ_S die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \tau_S(A) & \quad \text{ist komplex linear in } A \\ \tau_S(A)\tau_S(B) & = \tau_S(AB) \\ \tau_S(\mathbb{1}) & = \mathbb{1} \end{aligned}$$

erfüllt. Damit folgt insbesondere, dass

$$[\tau_S(B(f)), \tau_S(B(g)^*)] = \tau_S([B(f), B(f)^*]) = (f, \Theta g)\mathbb{1}$$

und damit ist τ_S ein Automorphismus auf $\mathcal{A}_{SD}(\mathcal{K})$. Weiterhin folgt mit der Entwicklung

$$e^X Y e^{-X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ad}_X^n(Y),$$

unter Verwendung der Kommutationsrelationen für quadratische Operatoren,

$$\tau_S(B(f)^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B((S\Theta)^n f)^* = B(e^{S\Theta} f)^*.$$

Aus $\Gamma\Theta = -\Theta\Gamma$ folgt $e^{S\Theta}\Gamma = \Gamma e^{-S\Theta}$ und somit

$$\tau_S(B(f)) = \tau(B(\Gamma f)^*) = B(e^{-S\Theta} f).$$

□

Mit dem bisher Erreichten sind die Grundlagen für den folgenden Satz gegeben.

Satz 1.22. *Sei $H \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$, ein selbstadjungierter Operator und sei P eine Basisprojektion, dann ist*

$$(\Omega, \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB} \right) \Omega) = \det_P(P e^{tH\Theta} P)^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.50)$$

wobei \det_P die Determinante auf dem Unterraum $P\mathcal{K}$ ist und der Zweig der Wurzel durch die Stetigkeit in t gegeben ist .

Bevor wir diesen Satz beweisen werden, wollen wir der Übersichtlichkeit halber die Funktion f durch

$$f(t) = (\Omega, \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB} \right) \Omega) \quad (1.51)$$

definieren.

Beweis von Satz 1.22. Sei der Operator H auf \mathcal{K} gegeben durch $Hf = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(h_i, f)$, dann ergibt sich für die Ableitung der Funktion f nach t folgender Ausdruck

$$\begin{aligned}
-2 \frac{d}{dt} f(t) &= \left(\Omega, \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB} \right) \pi_P (B^*HB) \Omega \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\Omega, \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB} \right) \pi_P (B(f_i)^*) \pi_P (B(h_i)) \Omega \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\left(\Omega, \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB} \right) \pi_P (B(P_1 f_i)^*) \pi_P (B(h_i)) \Omega \right)}_{(*)} \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\left(\Omega, \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB} \right) \pi_P (B(P_2 f_i)^*) \pi_P (B(h_i)) \Omega \right)}_{(**)}, \quad (1.52)
\end{aligned}$$

mit den zwei Operatoren P_1 und P_2 , bestimmt durch

$$P_2 = \mathbb{1} - P_1 \quad (1.53)$$

$$(\mathbb{1} - P)e^{-tH\Theta} P_1 = 0 \quad (1.54)$$

$$PP_2 = 0, \quad (1.55)$$

wobei P hier der gewählten Basisprojektion entspricht. Diese beiden Operatoren wollen wir zunächst angeben¹².

Dazu sei A ein invertierbarer Operator auf \mathcal{K} , dann wollen wir $(PAP)^{-1}$, das Inverse zu A , eingeschränkt auf den Unterraum PK definieren durch

$$(PAP)^{-1}(PAP) = (PAP)(PAP)^{-1} = P, \quad (1.56)$$

woraus direkt folgt, dass $(PAP)^{-1}P = P(PAP)^{-1}$. Damit können wir

$$P_1 = e^{tH\Theta}(Pe^{tH\Theta}P)^{-1}P \quad \text{und} \quad P_2 = \mathbb{1} - P_1 \quad (1.57)$$

angeben, da per Definition die erste Identität (1.53) gilt und die zweite (1.54) aus

$$(\mathbb{1} - P)e^{-tH\Theta} P_1 = (\mathbb{1} - P)(Pe^{tH\Theta}P)^{-1}P = (\mathbb{1} - P)P(Pe^{tH\Theta}P)^{-1} = 0$$

folgt. Die Eigenschaft (1.55) wird erfüllt, da

$$PP_2 = P - Pe^{tH\Theta}(Pe^{tH\Theta}P)^{-1}P = P - Pe^{tH\Theta}P(Pe^{tH\Theta}P)^{-1} = P - P = 0.$$

Mit den Eigenschaften der Operatoren P_1 und P_2 wollen wir uns die Ausdrücke (*) und (**) in Gleichung (1.52) anschauen.

Betrachten wir unter Verwendung der Eigenschaften von P_1 zuerst den Ausdruck (*). Aus Lemma (1.21) wissen wir, dass

$$\tau_{-tH}(B(P_1 f_i)^*) = B(e^{-tH\Theta} f_i)^*$$

¹²Ein ähnlicher Beweisansatz ist in [4] zu finden

woraus

$$e^{-\frac{1}{2}tB^*HB}B(P_1f_i)^* = B(e^{-tH\Theta}P_1f_i)^*e^{-\frac{1}{2}tB^*HB} \quad (1.58)$$

folgt. Damit verschwindet (*), da

$$\begin{aligned} \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB}B(P_1f_i)^* \right)^* \Omega &\stackrel{1.58}{=} \pi_P \left(B^*(e^{-tH\Theta}P_1f_i)e^{-\frac{1}{2}tB^*HB} \right)^* \Omega \\ &= \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB}B(e^{-tH\Theta}P_1f_i) \right) \Omega \\ &= \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB} \right) \pi_P \left(B(\underbrace{(\mathbb{1} - P)e^{-tH\Theta}P_1}_{=0 \text{ per definition von } P_1} f_i) \right) \Omega \\ &\quad + \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB} \right) \underbrace{\pi_P \left(B((Pe^{-tH\Theta}P_1f_i)) \right)}_{\text{vernichtet das Vakuum (Gl. 1.26)}} \Omega \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Nun wollen wir uns den verbleibenden Term (**) aus Gleichung (1.52) anschauen. Dazu stellen wir fest, dass, wie im unmittelbar Vorhergehenden, folgender Ausdruck verschwindet:

$$\begin{aligned} \pi_P (B(P_2f_i)^*) \Omega &= \pi_P \underbrace{(B(PP_2f_i)^*)}_{=0} \Omega + \underbrace{\pi_P (B((\mathbb{1} - P)P_2f_i)^*)}_{\text{vernichtet ebenfalls das Vakuum}} \Omega \\ &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir dieses Resultat in (**) ein, so bekommen wir

$$\begin{aligned} (**) &= \left(\Omega, \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB}B(P_2f_i)^*B(h_i) \right) \Omega \right) \\ &= \left(\Omega, \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB} \right) \pi_P ([B(P_2f_i)^*, B(h_i)]) \Omega \right) \\ &= -(h_i, \Theta P_2f_i) \underbrace{\left(\Omega, \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB} \right) \Omega \right)}_{f(t)}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Es verbleibt noch, die Summation aus Gleichung (1.52) mit einzubeziehen. Aus der Definition der Spur folgt somit

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dt} f(t) &= f(t) \sum_{i=0}^{\infty} (h_i, \Theta P_2f_i) \\ &= f(t) \text{tr} H \Theta P_2 \\ &= f(t) \left(\underbrace{\text{tr} H \Theta}_{=0} - \text{tr} H \Theta e^{tH\Theta} (P e^{tH\Theta} P)^{-1} P \right). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Dabei verschwindet die Spur $\text{tr} H \Theta$ auf \mathcal{K} für selbstadjungierte Operatoren aus $\mathcal{S}(\mathcal{K})$, da

$$\text{tr} H \Theta = \text{tr} \Gamma H \Gamma \Theta = \text{tr} H \Gamma \Theta \Gamma = -\text{tr} H \Theta.$$

Mit der Formel¹³ $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{tr} \ln A(t) = \operatorname{tr} \frac{\partial A(t)}{\partial t} A(t)^{-1}$ wird Gleichung 1.61 in

$$\frac{d}{dt} f(t) = -\frac{1}{2} f(t) \frac{d}{dt} \operatorname{tr}_P \ln(Pe^{tH\Theta}P)$$

umgeformt.

Aus der Normiertheit des Vakuums folgt, dass $f(0) = 1$ und damit das gewünschte Resultat

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{tr}_P \ln(Pe^{tH\Theta}P)\right) = \det_P (Pe^{tH\Theta}P)^{-\frac{1}{2}}.$$

□

Bemerkung 1.23. Aus dem vorhergehenden Beweis folgt ebenfalls

$$-\frac{1}{t} \ln f(t) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_P \ln (Pe^{tH\Theta}P)^{\frac{1}{t}}. \quad (1.62)$$

Der Operator $Pe^{tH\Theta}P$ ist selbstadjungiert, da aus $\Theta^2 = \mathbb{1}$ und $P = P\Theta = \Theta P$ folgt, dass

$$Pe^{tH\Theta}P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P\Theta^2(H\Theta)^n P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P\Theta(\Theta H)^n \Theta P = Pe^{t\Theta H}P = (Pe^{tH\Theta}P)^*.$$

Damit ist also insbesondere $(Pe^{tH\Theta}P)^2$ ein positiver Operator.

In vielen Fällen möchte man jedoch einen renormierten, quadratischen Operator $\frac{1}{2}B^*H^{ren}B$ betrachten, wobei die Renormierung durch die Wickordnung gegeben ist. Der aus dem Fockraum übertragene Ausdruck ist

$$\alpha_P\left(\frac{1}{2}B^*H^{ren}B\right) = \alpha_P\left(:\frac{1}{2}B^*HB:\right) = \alpha_P\left(\frac{1}{2}B^*HB\right) - \omega\left(\frac{1}{2}B^*HB\right)\mathbb{1}. \quad (1.63)$$

Hier ist ω der Vakuumzustand auf \mathcal{O}_{SD} . Problematisch ist jedoch, dass die $\mathbb{1}$ nicht durch quadratische Operatoren in \mathcal{O}_{SD} darstellbar ist. Aus Eigenschaft (1.38) wissen wir, dass eine notwendige Bedingung für H^{ren} ist, dass

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr}_{(\mathbb{1}-P)} H^{ren} = 0. \quad (1.64)$$

Man kann sich davon überzeugen, dass für $H^{ren} \in \mathcal{Q}(\mathcal{K})$ aus der Selbstadjungiertheit von H^{ren} auch $\frac{1}{2} \operatorname{tr}_P H^{ren} = 0$ folgt. Da dies im Allgemeinen nicht wünschenswert ist¹⁴, können wir nicht mehr fordern, dass $H^{ren} \in \mathcal{Q}(\mathcal{K})$. Um einen hinreichenden Ausdruck für H^{ren} zu finden, müssen wir uns nochmals an den Ausdruck (1.34) erinnern, der durch

$$\left[\frac{1}{2}B^*HB, B(f)^*\right] = B(\iota(H)\Theta f)^* \quad (1.65)$$

¹³siehe Anhang B

¹⁴Die äquivalente Aussage in der Fockraumdarstellung wäre beispielsweise, dass der teilchenzahlerhaltende Term wegfällt.

gegeben ist. Da es zwingend ist, dass sowohl H als auch H^{ren} den gleichen Kommutator (1.65) liefern, muss $\iota(H - H^{ren}) \equiv 0$ gelten. Zusammen mit der Forderung des verschwindenden Vakuumerwartungswerts (1.38) kann man sehen, dass H^{ren} eindeutig bestimmt ist durch

$$\begin{aligned} H^{ren} &= H - (\mathbb{1} - P)H(\mathbb{1} - P) + PHP \\ &= PH + HP \\ &= H + \frac{1}{2}(H\Theta + \Theta H). \end{aligned} \tag{1.66}$$

Nun zu einem weiteren Ergebnis, dass in den folgenden Kapiteln Verwendung finden wird.

Proposition 1.24. *Sei $H \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$, ein selbstadjungierter Operator auf \mathcal{K} und sei P eine Basisprojektion, dann ist*

$$f^{ren}(t) = (\Omega_P, \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*H_{ren}B} \right) \Omega_P) = \det_P(Pe^{tH\Theta}Pe^{-tPH\Theta}P)^{-\frac{1}{2}},$$

wobei \det_P die Determinante auf dem Unterraum $P\mathcal{K}$ ist und der Zweig der Wurzel gegeben ist durch die Stetigkeit von f .

Beweis. Aus dem vorhergehenden Satz 1.22 wissen wir, dass

$$f(t) = (\Omega, \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB} \right) \Omega) = \det_P(Pe^{tH\Theta}P)^{-\frac{1}{2}}.$$

Für den renormierten quadratischen Operator gilt

$$\frac{1}{2}B^*H^{ren}B = \frac{1}{2}B^*HB - \omega\left(\frac{1}{2}B^*HB\right) = \frac{1}{2}B^*HB - \frac{1}{2}\mathrm{tr}_P H,$$

woraus

$$\begin{aligned} f^{ren}(t) &= (\Omega, \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*H_{ren}B} \right) \Omega) \\ &= (\Omega, \pi_P \left(e^{-\frac{1}{2}tB^*HB} \right) \Omega) e^{\frac{1}{2}t \mathrm{tr}_P H} \\ &= \det_P(Pe^{tH\Theta}P)^{-\frac{1}{2}} \det_P(e^{-tPH\Theta}P)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \det_P(Pe^{tH\Theta}Pe^{-tPH\Theta}P)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

folgt. Mit der Identität $P = \Theta P$ ist der Satz bewiesen. \square

Bemerkung 1.25. Da $H \in \mathcal{Q}(\mathcal{K})$ ist $PHP \in \mathcal{T}_1(\mathcal{K})$. Daher wissen wir, dass

$$f_{ren}(t) = \det_P(Pe^{tH\Theta}Pe^{-tPH\Theta}P)^{-\frac{1}{2}}$$

wohldefiniert ist.

Kapitel 2

Der Energie-Impuls-Tensor

Aus dem Noether'schen Theorem folgt für jede stetige Symmetrie, welche die Wirkung invariant läßt, eine Erhaltungsgröße. Die "natürlichsten" stetigen Symmetrien sind Translationen in Raum und Zeit. Da man in der klassischen Physik davon ausgeht, dass der Raum und die Zeit nicht diskret sind, ergibt sich also jeweils eine Erhaltungsgröße. Im Falle der Zeittranslations-Invarianz wird sie Energie genannt.

Nun macht es aber in der relativistischen Physik keinen Sinn, Raum und Zeit als separierte Objekte zu betrachten, stattdessen fasst man sie zu einer so genannten Raumzeit zusammen. Dieentsprechende Symmetrie ist nun die unter Raumzeit-Translation und die resultierende Erhaltungsgröße wird Energie-Impulstensor genannt.

Schauen wir uns zunächst ganz allgemein das Wirkungsfunktional S eines skalaren Feldes ϕ auf einer $n + 1$ -dimensionalen, global hyperbolischen Raumzeit (\mathcal{M}, g) mit Signatur $+ - - \dots$ an. Es ist gegeben durch das räumliche Integral über die Lagrangedichte \mathcal{L} des Feldes [14]:

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^{n+1}x \mathcal{L}. \quad (2.1)$$

Für den Fall des massiven, skalaren Feldes ist die Lagrangedichte wie folgt gegeben:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{g(x)} \left(g^{\alpha\beta}(x) \nabla_{\mu} \phi(x) \nabla_{\nu} \phi(x) - m^2 \phi(x)^2 - \xi R(x) \phi(x) \right) \quad (2.2)$$

Hierbei ist $g(x)$ der Betrag der Determinante des metrischen Tensors $g^{\alpha\beta}(x)$. Weiterhin ist R die entsprechende Skalarkrümmung, m die Masse und ξ eine dimensionslose Konstante [14], auf die wir nicht weiter eingehen werden.

Ein Feld, das durch diese Lagrangedichte beschrieben wird, erfüllt die sogenannte kovariante Klein-Gordon-Gleichung¹:

$$(\square + m^2 + \xi R)\phi = 0. \quad (2.3)$$

Der Operator \square ist definiert durch $\square = g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta}$ und heißt (kovarianter) D'Alembert Operator.

¹Bewegungsgleichung des Klein-Gordon Feldes

Der Energie-Impuls-Tensor ergibt sich aus Variation der Wirkung S nach der Metrik $g^{\mu\nu}$, zu

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}(x)}.$$

Da in dieser Arbeit nur der $(n+1)$ -dimensionale Minkowskiraum mit metrischem Tensor η betrachtet wird, wollen wir uns im Weiteren auf diesen Fall beschränken. Im flachen Raum geht (2.3) in

$$(\square + m^2)\phi \equiv (\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta + m^2)\phi = 0 \quad (2.4)$$

über. Damit finden wir den folgenden Ausdruck für den Energie-Impulstensor² [14]:

$$T_{\alpha\beta} = \phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\lambda\delta}\phi_{,\lambda}\phi_{,\delta} + \frac{1}{2}m^2\phi^2\eta_{\alpha\beta} \quad (2.5)$$

Die jeweiligen Erhaltungsgrößen ergeben sich nun durch Integration der entsprechenden Komponenten über den Raum. Insbesondere der Hamiltonoperator und der Impulsoperator des Feldes ϕ sind dann gegeben durch

$$H(t) = \int d^n x T_{00}(t, x) \quad (2.6)$$

$$P_i(t) = \int d^n x T_{0i}(t, x). \quad (2.7)$$

Mit dem oben angegebenen Energie-Impuls-Tensor geht man zur quantisierten Theorie über. Dazu ersetzt man in (2.5) das skalare, klassische Feld ϕ durch das skalare Quantenfeld Φ , welches in der Fockraumdarstellung durch

$$\Phi(t, x) = a(t, x) + a^*(t, x) = \int d\mu(p) \left(a(p)e^{-i(\omega(p)t - px)} + a^*(p)e^{i(\omega(p)t - px)} \right) \quad (2.8)$$

definiert ist. Hierbei haben wir die Abkürzungen

$$d\mu(p) = (2\pi)^{-n} \frac{d^n p}{2\omega(p)} \text{ und } \omega(p) = \sqrt{\|p\|^2 + m^2} \quad (2.9)$$

eingeführt. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren erfüllen dabei die Vertauschungsrelationen

$$[a(p), a(q)] = [a^\dagger(p), a^\dagger(q)] = 0 \text{ sowie } [a(p), a^\dagger(q)] = 2(2\pi)^n \omega(p) \delta(p - q). \quad (2.10)$$

Der hier angegebene Prozess der Quantisierung ist jedoch nur dann "vernünftig", wenn der Energie-Impuls-Tensor auf dem Vakuum verschwindet³. Dies wird durch die sogenannte Normal- oder Wickordnung erreicht. Anwendung der Normalordnung bestimmt den sogenannten renormierten Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}^{ren}$.

²Bei gewähltem Koordinatensystem (x^β) ist $\phi_{,\beta}$ die Kurzschreibweise für $\phi_{,\beta} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}$

³Durch von Null verschiedener Energiedichte, wäre die Gesamtenergie aufgrund der Translationsinvarianz des Vakuums nicht endlich.

2.1 Die gemittelte Energiedichte

Dieser Abschnitt wir eine kurze Einführung in das sein, was man unter einer gemittelten Energiedichte versteht. Aus der Definition (2.5) des Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$, ergibt sich die Energiedichte T_{00} für das klassische Feld durch

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}_{,0}^2 + \sum_{i=1}^n \phi_{,i}^2 + m^2 \phi^2 \right).$$

Dieser Ausdruck ist eine positive Größe, da er sich aus einer Summe von quadratischen (reellen) Termen zusammensetzt. Diese Positivität bleibt, im Sinne der operatorwertigen Distributionen, nach der Quantisierung des Feldes erhalten, da die Felder selbstadjungiert sind. Insbesondere ist die mit einer nicht-negativen Testfunktion verschmierte Energiedichte dann positiv.

Der Vakuumerwartungswert der verschmierten Energiedichte ist jedoch von Null verschieden und hängt von der gewählten Testfunktion ab. Verschmiert man jedoch die renormierte Energiedichte $T_{00}^{ren}(t, x) = :T_{00}:(t, x)$ folgt aus

$$\langle \Omega | T_{00}^{ren}(t, x) | \Omega \rangle = 0,$$

dass insbesondere die Differenz der beiden verschmierten Energiedichten von der Testfunktion abhängt. Dieses Eigenschaft ist essentiell für das Phänomen negativer Energie. Wir betrachten in dieser Arbeit nur Energiedichten, die über einem beschränktem Gebiet \mathcal{O} verschmiert sind.

2.2 Die zeitgemittelte Energiedichte

Wir wollen uns die zeitlich gemittelte Energiedichte anschauen. Das bedeutet, wir verschmieren zeitlich, an einem fixierten Punkt im Raum. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir dazu den räumlichen Ursprung. Aus der Definition (2.8) des Quantenfeldes geht hervor, dass dies eine erhebliche Vereinfachung mit sich bringt. Den damit stark verkürzten Ausdruck für die Energiedichte wollen wir nun angeben.

$$\begin{aligned} T_{00}^{ren}(t, 0) = & \frac{1}{2} \int d\mu(p) d\mu(q) (m^2 - \omega(p)\omega(q) - pq) e^{-it(\omega(p)+\omega(q))} a(p)a(q) \\ & + (m^2 + \omega(p)\omega(q) + pq) e^{it(\omega(p)-\omega(q))} a^\dagger(p)a(q) + h.c. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Hierbei ist *h.c.* das Hermite'sch Konjugierte der anderen Summanden.

Wie schon im Vorhergehenden bemerkt, ist die Energiedichte eine operatorwertige Distribution, was aus der Tatsache folgt, dass auch das Quantenfeld eine solche ist. Operatorwertige Distributionen ordnen jedem Element des Raumes der Testfunktionen \mathcal{C}_0^∞ einen Operator zu. In unserem Fall sind es Operatoren auf einem Hilbertraum, dem Fockraum.

Für das zeitliche Verschmieren einer observablen Größe, benötigt man eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ aus dem Raum der Testfunktionen $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Diese bestimmt dann einen

Operator T_f , der die Energiedichte in einem kompakten Gebiet $\text{supp}f \in \mathcal{M}_{\text{Mink}}^{n+1}$ mit der Gewichtung f beschreibt:

$$T_f = \int_{-\infty}^{\infty} dt T_{00}(t, 0) f(t) \quad \text{und} \quad T_f^{\text{ren}} = \int_{-\infty}^{\infty} dt T_{00}^{\text{ren}}(t, 0) f(t)$$

Man sieht, dass in der verschmierten Energiedichte, vermöge der Exponentialfunktion in (2.11), die Fouriertransformierte der Testfunktion f auftaucht. In dieser Arbeit wählen wir für diese die Konvention

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}.$$

Es macht offensichtlich Sinn die beiden Funktionen $R, Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ einzuführen:

$$\begin{aligned} R(p, q) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) R_t(p, q) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) (m^2 - \omega(p)\omega(q) - pq) e^{-it(\omega(p)+\omega(q))} \\ &= (m^2 - \omega(p)\omega(q) - pq) \hat{f}(\omega(p) + \omega(q)) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} Q(p, q) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) Q_t(p, q) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) (m^2 + \omega(p)\omega(q) + pq) e^{it(\omega(p)-\omega(q))} \\ &= (m^2 + \omega(p)\omega(q) + pq) \hat{f}(\omega(q) - \omega(p)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Benutzt man diese beiden Funktionen um die zeitgemittelte und renormierte Energiedichte anzugeben, ergibt sich der Ausdruck:

$$T_f^{\text{ren}} = \frac{1}{2} \int d\mu(p) d\mu(q) a^*(p) \bar{R}(p, q) a^*(q) + 2a^*(p) Q(p, q) a(q) + a(p) R(p, q) a(q).$$

Verkürzt wollen wir

$$T_f^{\text{ren}} = \frac{1}{2} (a^* \bar{R} a^* + 2a^* Q a + a R a) \quad (2.14)$$

schreiben. Es sei bemerkt, dass die beiden Funktionen $R(p, q)$ und $Q(p, q)$ dann als Integralkerne der Operatoren R und Q verstanden werden. Um diese in Abhängigkeit der Testfunktion f zu analysieren, werden wir zunächst die beiden Funktionen $R(p, q)$ und $Q(p, q)$ untersuchen, um später Aussagen über die beiden Operatoren machen zu können.

Da jede Funktion f eindeutig in eine gerade Funktion f^+ , mit $f^+(t) = f^+(-t)$ und eine ungerade Funktion f^- , mit $f^-(t) = -f^-(-t)$ zerlegt werden kann, sodass $f = f^+ + f^-$, wollen wir die jeweiligen Fälle ”+” und ”-” separat untersuchen.

Lemma 2.1. *Es gibt eine eindeutige Zerlegung von $R(p, q)$ und $Q(p, q)$, sodass*

$$\begin{aligned} R(p, q) &= R^+(p, q) + iR^-(p, q) \\ Q(p, q) &= Q^+(p, q) + iR^-(p, q). \end{aligned}$$

Dabei sind $R^\pm(p, q)$ und $Q^\pm(p, q)$ rein reell und hängen nur von f^\pm ab.

Beweis. Da f eine reelle Funktion ist, gilt für ihre Fouriertransformierte $\hat{f}(\omega)$,

$$\overline{\hat{f}(\omega)} = \hat{f}(-\omega).$$

Mit f^+ ist auch $\hat{f}^+(\omega)$ eine gerade Funktion und es gilt

$$\overline{\hat{f}^+(\omega)} = \hat{f}^+(\omega),$$

also

$$\overline{R^+(p, q)} = R^+(p, q) \text{ und } \overline{Q^+(p, q)} = Q^+(p, q).$$

Analog folgt für f^- , dass

$$\overline{iR^-(p, q)} = -iR^-(p, q) \text{ und } \overline{iQ^-(p, q)} = -iQ^-(p, q).$$

□

Übertragen wir diese Resultate auf die Eigenschaften der Operatoren R und Q , so folgt für die Energiedichte:

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \overline{R} \\ R & \overline{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^+ + iQ^- & R^+ - iR^- \\ R^+ + iR^- & Q^+ - iQ^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Zusammenfassend wollen wir die Operatoren H und H_{ren} angeben, welche die Kerne der quadratische Operatoren sind, die der verschmierten Energiedichte entsprechen.

$$H = \begin{pmatrix} Q & \overline{R} \\ R & \overline{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^+ + iQ^- & R^+ - iR^- \\ R^+ + iR^- & Q^+ - iQ^- \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

und

$$H_{ren} = \begin{pmatrix} 2Q & \overline{R} \\ R & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(Q^+ + iQ^-) & R^+ - iR^- \\ R^+ + iR^- & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Weiterhin wollen wir uns anschauen, was mit H , respektive H_{ren} passiert, wenn f gegen die konstante 1-Funktion geht.

Lemma 2.2. *Konvergiert die Funktion f adiabatisch gegen die konstante 1-Funktion, so verschwinden die nebendiagonalen von H und H^{ren} . Es gilt insbesondere*

$$\lim_{f(t) \rightarrow 1} H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix} \text{ und } \lim_{f(t) \rightarrow 1} H^{ren} = \begin{pmatrix} 2E_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Mit einem nichttrivialen Operator E_0 .

Beweis. Diese erste Aussage ist identisch mit der Aussage, dass R und damit $R(p, q)$ verschwinden. Für $m > 0$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \lim_{f(t) \rightarrow 1} R(p, q) &= \lim_{f(t) \rightarrow 1} R^+(p, q) = (m^2 - \omega(p)\omega(q) - pq) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-it(\omega(p) + \omega(q))} \\ &= 2\pi\delta(\underbrace{\omega(p) + \omega(q)}_{>0}) (m^2 - \omega(p)\omega(q) - pq) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dem letzten Term kann man ansehen, dass $R(p, q)$ im masselosen Fall verschwindet. In analoger Weise folgt für den Integralkern von Q ,

$$\begin{aligned} \lim_{f(t) \rightarrow 1} Q(p, q) &= \lim_{f(t) \rightarrow 1} Q^+(p, q) = (m^2 + \omega(p)\omega(q) + pq) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-it(\omega(p) - \omega(q))} \\ &= 4\pi\delta(\omega(p) - \omega(q)) (m^2 + \omega(p)^2 + pq) \\ &=: E_0(p, q), \end{aligned} \tag{2.19}$$

Wobei $E_0(p, q)$ dann den Integralkern von E_0 definiert. □

Kapitel 3

Das Infimum des Spektrums

In diesem Kapitel bearbeiten wir die Kernaussage der vorliegenden Arbeit. Dazu wählen wir die Sprache der Algebraischen Quantenfeldtheorie [15, 16].

Ohne auf die Quantenungleichungen einzugehen, werden wir ganz allgemein diskutieren, wie man das Infimum eines Spektrums, soweit es existiert, bestimmen kann. Dazu definieren wir den folgenden Begriff:

Definition 3.1. Sei T ein selbstadjungiertes Element einer $*$ -Algebra. Existiert der Wert

$$\rho_T := \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \in \sigma(T)\},$$

so nennen wir ihn die optimale untere Schranke von $\sigma(T)$.

Existiert eine optimale untere Schranke, so sagt man T , respektive $\sigma(T)$, sei von unten beschränkt.

Wir betrachten der Einfachheit halber im Folgenden immer eine unital $*$ -Algebra \mathcal{A}

3.1 Ansatz zur Bestimmung des Infimums eines Spektrums

Um das Infimum ρ_T eines gegebenen Spektrums $\sigma(T)$ zu bestimmen, schauen wir uns zuerst an, wie die Zustände \mathcal{Z} auf \mathcal{A} mit dieser Größe zusammenhängen.

Sei dazu $\omega \in \mathcal{Z}$ ein Zustand auf der $*$ -Algebra \mathcal{A} . Die Definition der optimalen unteren Schranke impliziert dann, dass

$$\omega(T) = \int \lambda d\mu_{\omega,T}(\lambda) \geq \inf_{\omega \in \mathcal{Z}} \sup \mu_{\omega,T} = \rho_T. \quad (3.1)$$

Es gibt insbesondere Operatoren, für die man keine Zustände findet, die Gleichheit in 3.1 liefern. Dazu sei hier ein Beispiel angegeben.

Beispiel 3.2. Wir betrachten ein Teilchen mit einem Freiheitsgrad in der Hilbertraumdarstellung $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und dem quadrierten Impulsoperator. Dieser ist in der Ortsdarstellung durch $\hat{p}^2 = -\frac{\partial}{\partial x}$ gegeben. Aus dem Spektrum $\sigma(\hat{p}) = \mathbb{R}$ können wir sofort bestimmen, dass $\sigma(\hat{p}^2) = [0, \infty)$. Offensichtlich haben die verallgemeinerten Eigenzustände¹ die

¹Sie sind nicht aus $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Form $\psi(x) \propto e^{ipx}$. Durch Kombinationen dieser kann man nur Zustände mit $p^2 \in (0, \infty)$ konstruieren. Der Grundzustand zu \hat{p}^2 müsste die Form $\psi_0 \propto ax + b \notin L^2(\mathbb{R})$ haben, die aber nicht normierbar ist.

Nun wollen wir zunächst versuchen, das Infimum aus Definition 3.1 für nur einen Zustand ω zu finden.

Definition 3.3. Das Teilspektrum von T bezüglich ω ist durch

$$\sigma|_{\omega}(T) = \text{supp } \mu_{\omega, T}$$

definiert. Das Infimum von $\sigma|_{\omega}(T)$ sei durch $\rho_T|_{\omega}$ gegeben.

Eines der zentralen Ergebnisse in dieser Arbeit, ist der folgende Satz:

Satz 3.4. Sei $T \in \mathcal{O}$ ein selbstadjungiertes Element der unitalen $*$ -Algebra \mathcal{O} , dessen Spektrum von unten beschränkt ist. Für einen Zustand ω auf \mathcal{O} gilt

$$\rho_T|_{\omega} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln \omega \left(e^{-\beta T} \right). \quad (3.2)$$

Die Konsequenzen, die sich nachher in der Bestimmung von ρ_T , durch diese Einschränkung auf $\sigma(T)|_{\omega}$ ergeben, wollen wir später diskutieren. Zuvor zum Beweis des Satzes.

Beweis von Satz 3.4. Wir werden diesen Satz in zwei Schritten beweisen. Zuerst zeigen wir, dass der rechte Ausdruck von (3.4) wohldefiniert ist, wenn es ein endliches $\rho_T|_{\omega}$ gibt. In einem zweiten Schritt zeigen wir dessen Konvergenz gegen $\rho_T|_{\omega}$.

Aus der Normiertheit des Spektralmaßes folgt, dass es zu jedem $1 > \epsilon > 0$ ein $\zeta \geq \rho_T|_{\omega}$ geben muss mit

$$\int_{\rho_T|_{\omega}}^{\zeta} d\mu_{\omega, T}(\lambda) \geq \epsilon.$$

Dann gibt es insbesondere ein β_0 , sodass

$$\beta \geq \beta_0 \Rightarrow \int_{\rho_T|_{\omega}}^{\zeta} d\mu_{\omega, T}(\lambda) \geq \frac{1}{\beta}$$

folgt. Nun wissen wir, dass damit für $\beta > \beta_0$

$$\begin{aligned}
\int_{\rho_T|\omega}^{\infty} e^{-\beta\lambda} d\mu_{\omega,T}(\lambda) &= \int_{\rho_T|\omega}^{\zeta} e^{-\beta\lambda} d\mu_{\omega,T}(\lambda) + \underbrace{\int_{\zeta}^{\infty} e^{-\beta\lambda} d\mu_{\omega,T}(\lambda)}_{\geq 0} \\
&\geq \int_{\rho_T|\omega}^{\zeta} e^{-\beta\lambda} d\mu_{\omega,T}(\lambda) \\
&= e^{-\beta\zeta} \int_{\rho_T|\omega}^{\zeta} \underbrace{e^{-\beta(\lambda-\zeta)}}_{\geq 1} d\mu_{\omega,T}(\lambda) \\
&\geq e^{-\beta\zeta} \int_{\rho_T|\omega}^{\zeta} d\mu_{\omega,T}(\lambda) \\
&\geq \frac{1}{\beta} e^{-\beta\zeta}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Andererseits ist für ein $\rho < \rho_T$

$$\int_{\rho_T|\omega}^{\infty} e^{-\beta\lambda} d\mu_{(\omega,T)}(\lambda) \leq \int_{\rho}^{\infty} e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\beta} e^{-\beta\rho}.$$

Insgesamt haben wir damit die folgende Einschließung gezeigt:

$$\frac{1}{\beta} e^{-\beta\zeta} \leq \int_{\sigma(T)} e^{-\beta\lambda} d\mu_{(\omega,T)}(\lambda) \leq \frac{1}{\beta} e^{-\beta\rho} \text{ für } \beta > \beta_0.$$

Damit ist insbesondere der Ausdruck

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln \omega(e^{-\beta T}) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln \int_{\sigma(T)} e^{-\beta\lambda} d\mu_{(\omega,T)}(\lambda). \tag{3.4}$$

wohldefiniert. Im Grenzwert für $\beta \rightarrow \infty$ erhalten wir²:

$$\rho \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln \omega(e^{-\beta T}) \leq \zeta.$$

Womit der erste Teil unseres Beweises abgeschlossen ist. Nun bleibt noch zu zeigen, dass der gegebene Ausdruck wirklich gegen $\rho_T|\omega$ konvergiert.

Dazu erinnern wir uns zunächst an die Definition der p-Norm $\|\cdot\|_{p,\mu}$, bezüglich eines Maßes μ . Mit dieser können wir schreiben

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln \omega(e^{-\beta T}) &= -\ln \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\int_{\sigma(T)} |e^{-\lambda}|^{\beta} d\mu_{(\omega,T)}(\lambda) \right]^{\frac{1}{\beta}} \\
&= -\ln \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\| e^{-\lambda} \right\|_{\beta, \mu_{(\omega,T)}}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

²Wir wollen dazu anmerken, dass $\lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{\beta} = -\ln 1 = 0$ ist.

Nun kann man zeigen³, dass für einen endlichen Maß-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, für eine \mathcal{A} -messbare, reel- oder komplexwertige Funktion f auf Ω gilt:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{p, \mu} = \|f\|_{\infty, \mu}. \quad (3.6)$$

Daraus folgt dann insbesondere mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion,

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln \omega \left(e^{-\beta T} \right) &= -\ln \left\| e^{-\lambda} \right\|_{\infty, \mu(\omega, T)} \\ &= -\ln \sup \{ e^{-\lambda} \mid \lambda \in \text{supp } d\mu_{\omega, T} \} \\ &= \rho_T | \omega. \end{aligned}$$

Womit der Beweis abgeschlossen ist. \square

Bemerkung 3.5. Dieser Satz kann analog für ein von oben beschränktes Spektrum $\sigma(T)$ benutzt werden. Dazu muss lediglich der Grenzwert für $\beta \rightarrow -\infty$ betrachtet werden.

Um einen Einblick zu bekommen, wie wir dieses Verfahren anwenden, geben wir ein Beispiel aus der Quantenmechanik.

Beispiel 3.6. Wir wollen den niedrigsten Eigenwert des Harmonischen Oszillators bestimmen. Dazu nutzen wir die Standarddarstellung. Es seien also $|n\rangle$ die Eigenkets des Anzahloperators $N = a^\dagger a$. Sei weiterhin $|\psi\rangle = \sum_{n \in I} a_n |n\rangle$ ein normierter Vektor, es gilt also $\sum_{n \in I} |a_n|^2 = 1$. Zudem fordern wir, dass I minimal ist, es also kein $n \in I \subset \mathbb{N}$ gibt mit $a_n = 0$. Der Hamiltonoperator für den quantenmechanischen Oszillator ist gegeben durch $H = N + \frac{1}{2}$. Man kann ablesen, dass

$$\sigma(H)|_\psi = \left\{ i + \frac{1}{2} \mid i \in I \right\}.$$

Damit berechnen wir den Erwartungswert von $e^{-\beta H}$ wie folgt.

$$\begin{aligned} \langle \psi | e^{-\beta H} | \psi \rangle &= \sum_{i, k \in I} \bar{a}_i a_k \langle i | e^{-\beta(N + \frac{1}{2})} | k \rangle \\ &= e^{-\frac{\beta}{2}} \sum_{i, k \in I} \bar{a}_i a_k \langle i | e^{-\beta k} | k \rangle \\ &= e^{-\frac{\beta}{2}} \underbrace{\sum_{k \in I} |a_k|^2 e^{-\beta k}}_{\in (0, 1] \text{ für } \beta > 0} \end{aligned}$$

Der Wert 0 wird von der Summe aufgrund der Normierungsbedingung von $|\psi\rangle$ nicht angenommen und sie nimmt genau dann den maximalen Wert 1 an, wenn $|\psi\rangle = |0\rangle$ ist.

³Siehe dazu [17].

Mit dem oben bestimmten Erwartungswert kann man nun Satz 3.4 anwenden und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \rho_H|_\psi &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln(\psi, e^{-\beta H} \psi) \\
 &= \frac{1}{2} + \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln \sum_{k \in I} |a_k|^2 e^{-\beta k} \\
 &= \frac{1}{2} - \ln \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \in I} |a_k|^2 e^{-\beta k} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
 &= \frac{1}{2} - \ln \sup_{k \in I} e^{-k} = \frac{1}{2} + \inf_{k \in I} k,
 \end{aligned}$$

wie man auch erwartet hätte.

An diesem Beispiel sieht man, dass unser Verfahren sicherlich zum Erfolg führt, wenn es einen Grundzustand⁴ $|0\rangle$ gibt und der gewählten Zustand $|\psi\rangle$, nicht orthogonal zu diesem ist, also $\langle \psi|0\rangle \neq 0$ gilt.

Beispielsweise die *kohärenten Zustände* $|\alpha\rangle$, durch

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^*} |0\rangle.$$

definiert, erfüllen diese Eigenschaft immer. Dass Satz 3.4 auch für Beispiel 3.2 zum richtigen Ergebniss führt, wollen wir hier kurz berechnen.

Beispiel 3.7. Der Einfachheit halber betrachten wir dieses Beispiel im Impulsraum. Es sei $\psi(p) = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2}p^2}$, mit einer geeigneten Normierungskonstanten \mathcal{N} . Dann ist der Erwartungswert von $e^{-\beta p^2}$ durch

$$\langle \psi | e^{-\beta p^2} \psi \rangle = \mathcal{N}^2 \int dp e^{-p^2(1+\beta)} = \frac{\mathcal{N}^2}{(1+\beta)^{\frac{1}{2}}} \int dp e^{-p^2} = (1+\beta)^{-\frac{1}{2}}$$

gegeben. Also folgt aus Satz 3.4 für die untere Schranke des Spektrums von \hat{p}^2 , dass

$$\rho_T|_\omega = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln \langle \psi | e^{-\beta p^2} \psi \rangle = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\beta} \ln(1+\beta) = 0.$$

Damit ist der gegebene Zustand ψ für die Bestimmung der optimalen unteren Schranke auf ganz $\sigma(\hat{p}^2)$ hinreichend gewesen. Wie allerdings in Beispiel 3.2 gezeigt, gibt es keinen Zustand in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ zu diesem Spektralwert.

Wir haben bisher gesehen, dass die Wahl des Zustandes für den wir Satz 3.4 anwenden, entscheidend dafür ist, dass unser Verfahren zum Erfolg führt.

⁴In unserem Beispiel existiert er.

3.2 Anwendung in der lokalen Quantenfeldtheorie

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass der Vakuumzustand in der lokalen Quantenfeldtheorie geeignet ist, um mit Satz 3.4 die optimale untere Schranke eines Spektrums zu bestimmen. Sei dazu $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}$ eine mit dem beschränkten Raumzeit-Gebiet \mathcal{O} assoziierte von Neumann-Algebra lokaler Observablen.

Nun ist aber beispielsweise die verschmierte Energiedichte, ein unbeschränkter Operator. Solche können aber insbesondere nicht Element einer von Neumann Algebra sein. Dennoch gibt es eine Möglichkeit, solch einen Operator an eine von Neumann Algebra anzugliedern [7, 8].

Definition 3.8. Sei \mathcal{N} eine von Neumann-Algebra über einem Hilbertraum \mathcal{H} . Einen abgeschlossenen Operator T auf \mathcal{H} nennen wir *affiliert* zu \mathcal{N} , kurz $T\eta\mathcal{N}$, wenn

$$N'D(T) \subseteq D(T) \text{ und } N'T \subseteq TN' \quad \forall N' \in \mathcal{N}'.$$

Von zentraler Bedeutung für den Zusammenhang einer von Neumann Algebra (lokaler Observablen) und eines dazu affilierten unbeschränkten Operators ist das folgende Lemma [18].

Lemma 3.9. *Sei T ein abgeschlossener Operator auf dem Hilbertraum \mathcal{H} , mit Polarzerlegung $T = U|T|$ und \mathcal{N} eine von Neumann-Algebra über \mathcal{H} . Aus $T\eta\mathcal{N}$ folgt dann, dass sowohl U als auch die Spektralprojektoren $E_{|T|}(\Delta)$ von $|T|$ in \mathcal{N} liegen.*

Sei Δ_{ρ_T} ein offenes Intervall aus \mathbb{R} mit $\rho_T \in \Delta_{\rho_T}$. Für einen positiven Operator T , kann man mit Hilfe des Spektralprojektors⁵ $E_T(\Delta_{\rho_T})$, die folgende Aussage machen:

Lemma 3.10. *Sei T der selbstadjungierte Abschluss eines positiven Operators auf einem Hilbertraum \mathcal{H} . Ist T affiliert zu einer von Neumann-Algebra $\mathcal{N}(\mathcal{H})$, so ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen einem Zustand ω auf $\mathcal{N}(\mathcal{H})$, sowie den Spektralwerten $\rho_T, \rho_T|_{\omega}$:*

$$\omega(E_T(\Delta_{\rho_T})) > 0 \Rightarrow \rho_T|_{\omega} = \rho_T \tag{3.7}$$

Beweis. Aus $\omega(E_T(\Delta_{\rho_T})) > 0$ für ein beliebiges, offenes Δ_{ρ_T} , folgt

$$\rho_T = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \in \sigma(T)\} \in \sigma|_{\omega}(T)$$

Da aber per Definition $\sigma|_{\omega}(T) \subset \sigma(T)$ ist, folgt $\rho_T|_{\omega} = \rho_T$. □

Dies bedeutet also, dass Satz 3.4 für einen Zustand ω , der die linke Seite von (3.7) erfüllt, das Infimum des gesamten Spektrums $\sigma(T)$ liefert.

Dass solch ein Zustand für Operatoren einer lokalen von Neumann-Algebra durch das Vakuum gegeben ist, wollen wir mithilfe eines Satzes von Reeh und Schlieder zeigen [19].

⁵Es ist $E_T(\mathbb{R}/(\Delta_{\rho_T} \cap \sigma(T))) = 0$.

Satz 3.11 (Reeh-Schlieder). *Das Vakuum $\Omega \in \mathcal{H}$ ist ein separierender Vektor für die von Neumann-Algebra $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(\mathcal{H})$.*

Also sind insbesondere alle Vakuumerwartungswerte der Projektionsoperatoren $E_T(\Delta_{\rho_T})$ von Null verschieden:

$$\omega_{\Omega}(E_T(\Delta_{\rho_T})) > 0.$$

Zusammenfassend formulieren wir den folgenden Satz.

Satz 3.12. *Sei $T \in \mathcal{Q}$ ein positiver, selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum \mathcal{H} . Dann existiert für den Vakuumzustand ω der Grenzwert*

$$\rho_T = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln \omega \left(e^{-\beta T} \right)$$

und beschreibt die optimale untere Schranke des Spektrums von T .

Beweis. Folgt aus dem Vorhergehenden. □

Insbesondere gilt dies natürlich für die auf einem beschränkten Gebiet \mathcal{O} verschmierte Energiedichte.

Bemerkung 3.13. Für den Fall, dass T einem (lokalen) Hamiltonoperator entspricht, kann dieser Ausdruck als *freie Energie* des Systems, bei verschwindender Temperatur, betrachtet werden.

Kapitel 4

Quantenungleichungen

4.1 Einführung in die Quantenungleichungen

Wie schon in der Einleitung bemerkt, ist der Begriff Quantenungleichungen im Jahre 1978 durch die Arbeit von L. H. Ford [2] entstanden. Ausgangspunkt dieser, ist die von H. Epstein, V. Glaser und A. Jaffe [1] aufgezeigte Möglichkeit des Auftretens lokaler, negativer Energiedichte in der Theorie quantisierter Felder. Es wurde gezeigt, dass sowohl die punktweise, als auch die mit einer Testfunktion verschmierte Energiedichte keine positive Größe ist. Ford argumentierte in seiner Arbeit zunächst mit einem negativen Energiefluss. Das bedeutet, dass sich die Energie entgegen der Ausbreitungsrichtung der entsprechenden Welle bewegt¹. Eines der Standardbeispiele für die Produktion eines solchen Flusses, ist der sogenannte *moving mirror* in der zweidimensionalen Raumzeit. Es wurde von S.A. Fulling und P.C.W. Davies gezeigt [20, 21], dass ein Spiegel dessen Beschleunigung zunimmt, einen negativen Energiefluss abstrahlt. Jedoch ist die Gesamtenergie, die abgestrahlt wurde wieder positiv, wenn der Spiegel sich in Vergangenheit und Zukunft mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Ford diskutierte in seiner oben angesprochenen Arbeit 'Quantum coherence effects and the second law of thermodynamics' die Möglichkeit, solch einen negativen Energiefluss zu nutzen um einem Körper Wärme zu entziehen. Dazu müsse man lediglich den Strahl negativer Energie auf ihn richten. Folglich würde der Körper sowohl Energie als auch Entropie verlieren, was aber einer Verletzung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik gleich käme. Makroskopisch jedoch, würde er nicht verletzt werden, wenn der Fluss F an negativer Energie, der Ungleichung

$$|F| \lesssim \tau^{-2} \tag{4.1}$$

unterliegt. Dabei ist τ die charakteristische Zeitskala, in der die negative Energie absorbiert wird. Ford argumentierte wie folgt: Die übertragene Menge negativer Energie ist von der Größenordnung $\Delta E \approx |F| \tau$. Obliegt der Fluss F jedoch der Ungleichung

¹Ein ähnliches Phänomen ist der sogenannte *probability backflow*, bei dem ein Teilchen sich mit einem bestimmten Impuls in eine Richtung bewegt, die dem "Fluss der Aufenthaltswahrscheinlichkeit" entgegengesetzt ist.

(4.1), so ist die negative Energie durch das entsprechende Zeitintervall beschränkt und es gilt $\Delta E \lesssim t^{-1}$. Dieses ist jedoch weniger als die Energieunschärfe $\Delta E \gtrsim t^{-1}$ in dieser Zeitskala zuläßt. Damit findet also weder eine makroskopische Energie- noch Entropieabnahme statt.

Etwas präzisere Quantenungleichungen wurden zunächst für den Energiefluss formuliert [22] und konnten später von Ford und Roman für die Energiedichte von skalarem und elektromagnetischem Feld angegeben werden [23, 24]. Dabei betrachtet man die, mit einer normierten Testfunktion f verschmierte Energiedichte T_f . Die Quantenungleichungen sind dann gegeben durch eine untere Schranke der Erwartungswerte für eine bestimmte Klasse von Zuständen. Die zuerst analysierte Gewichtsfunktion war durch die (normierte) Lorentz'sche Funktion L gegeben:

$$L(t) = \frac{\tau}{\pi(\tau^2 + t^2)} \quad \tau > 0.$$

Dabei ist τ die entsprechende Zeitskala. Es wurde gezeigt [25], dass mit dieser Funktion, für das massive, skalare Feld im vierdimensionalen Minkowskiraum die folgende Quantenungleichung für eine Große Klasse von Zuständen ψ gilt:

$$\langle T_L \rangle_\psi \geq -\frac{3}{32\pi^2\tau^4} G(2m\tau).$$

Die Funktion G ist dabei unabhängig vom Zustand ψ , positiv, auf \mathbb{R}^+ strikt abfallend und stetig mit $G(0) = 1$.

Von Interesse sind aber viel allgemeinere und genauere Quantenungleichungen. Gemeint ist damit, dass sie nicht nur für eine große Klasse von Zuständen gelten sollten, sondern auch für eine große Klasse von Gewichtsfunktionen und in beliebigen Dimensionen. Im Besonderen will man natürlich die *optimalen* Quantenungleichungen bestimmen, also solche, bei denen auch Zustände existieren, deren Erwartungswert der optimalen unteren Schranke beliebig nahe kommen. Ein erster Schritt in diese Richtung wurde von E.E. Flanagan [26, 27] mit Erfolg für das masselose konforme skalare Feld gemacht. Er konnte für diesen Fall die Quantenungleichungen sowohl für eine große Klasse von Testfunktionen formulieren, als auch die optimale untere Schranke angeben. Die zentrale Idee in seinem Ansatz ist, den gemittelten Energie-Impuls-Tensor durch eine Bogoliubov-Transformation von einer quadratischen Form in eine normalgeordnete Form zu bringen. Der Vakuumerwartungswert stellt dann die optimale untere Schranke ρ_{T_f} für die mit f verschmierte Energiedichte, dar. Sie wurde von Flanagan durch den Ausdruck

$$\langle T_f \rangle_\psi \stackrel{\text{optimal}}{\geq} \rho_{T_f} = -\frac{1}{24\pi} \int_{\text{supp } f} dt \frac{(f'(t))^2}{f(t)}.$$

angegeben. Für diese Quantenungleichung kann f eine beliebige, glatte und positive Funktion sein, für die das obige Integral existiert. Leider ist es nicht möglich den Ansatz von Flanagan auf den massiven Fall oder andere Dimensionen zu verallgemeinern, da er sehr von den konformen Eigenschaften der Theorie abhängt.

Den bisher erfolgreichsten Ansatz um Quantenungleichungen in beliebigen Dimensionen

und für eine große Klasse von Zuständen und Gewichtsfunktionen zu gewinnen, fanden C.J. Fewster und S.P. Eveson [28]. Sie zeigten, dass für das massive, skalare Feld im $n + 1$ -dimensionalen Minkowskiraum, die Quantenungleichung

$$\rho_{T_f} \geq -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \int \frac{d^n(p)}{(2\pi)^n} \omega(p) \left| \widehat{f^{1/2}}(\omega(p) + \omega) \right|^2 \quad (4.2)$$

für die mit der Funktion $f(t)$ verschmierten Energiedichte gilt. Allerdings ist bekannt, dass dieser Ausdruck nicht die optimale untere Schranke beschreibt. Im Grenzwert verschwindender Masse gibt der Vergleich mit dem Resultat von Flanagan eine um den Faktor $\frac{3}{2}$ schlechtere untere Schranke. Dennoch findet der von Fewster und Eveson benutzte Ansatz sehr viel Verwendung und konnte auf allgemeinere Fälle, als das massive skalare Feld im $n + 1$ -dimensionalen Minkowskiraum, angewandt werden. Dazu gehören beispielsweise die Verallgemeinerung auf statische Raumzeiten [29] oder für den Elektromagnetismus [30].

Bemerkung 4.1. Wir wollen an dieser Stelle noch bemerken, dass es Quantenfeldtheorien gibt, welche keine Energie-Quantenungleichungen erfüllen. Eine kurze Diskussion und Referenzen dazu findet man am Ende des Abschnittes 3 von [31].

4.2 Eigenschaften und Anwendung der Quantenungleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir einige Eigenschaften der Quantenungleichungen, respektive der optimalen unteren Schranke diskutieren.

Aus der Tatsache, dass der Vakuumerwartungswert der renormierten Energiedichte per Definition in jedem Punkt verschwindet, können wir eine "lokale" Aussage über die optimale untere Schranke machen. Sie muß eine nicht-positive Größe sein, da sonst ein Widerspruch zu oben Genanntem besteht. Würde die Energiedichte mit einer Testfunktion verschmiert, die einen kompakten Träger besitzt, wissen wir sogar, dass die optimale untere Schranke negativ sein muss. Dies folgt aus dem Satz von Reeh und Schlieder.

Auch wenn in den betrachteten Quantenfeldtheorien, die gemittelte Energiedichte nicht unbedingt eine positive Größe sein muss, so ist die Gesamtenergie jedoch eine nicht-negative Größe. Das bedeutet, dass jede optimale untere Schranke ρ_{T_f} im adiabatischen Limes $f \rightarrow 1$, identisch Null sein muss.

$$\lim_{f \rightarrow 1} \rho_{T_f} = 0 \quad (4.3)$$

Diese Eigenschaft wird als Gemittelte Schwache Energie-Quantenungleichung bezeichnet [23]. Um möglichst allgemeine Quantenungleichungen zu betrachten, ist es weiterhin von Nöten, darüber nachzudenken, für welche Klasse von Glättungsfunktionen diese gelten. In der vorliegenden Arbeit gehen wir der Einfachheit halber immer von glatten Testfunktionen mit kompaktem Träger aus. Diese Bedingung kann in gewisser Weise abgeschwächt werden. In der Arbeit von Fewster und Eveson beispielsweise wurden Resultate angegeben, die für schnellfallende Funktionen gelten. Auch die Eigenschaft

der Funktionen unendlich oft differenzierbar zu sein, kann bis zu einem gewissen Grad abgeschwächt werden. Doch ist auch bekannt, dass beispielsweise die charakteristische Funktion eines kompakten Intervalls, also insbesondere eine unstetige Funktion, keine Quantenungleichungen erlaubt. Eine weitere Forderung neben der Stetigkeit ist die Eigenschaft der Glättungsfunktionen, hinreichend schnellfallend zu sein. Zudem zu beachten ist der Bereich in dem man die Energiedichte verschmiert. Während für die zeitartige Verschmierung, Quantenungleichungen in einer gewissen Allgemeinheit angegeben werden können, ist dies in der raumartigen Mittelung in analoger Form nicht möglich. L.H. Ford, A.D. Helfer und T.A. Roman konnten im vierdimensionalen Minkowskiraum ein explizites Gegenbeispiel dafür konstruieren, dass Quantenungleichungen für eine raumartig verschmierte Energiedichte existiert [32].

Nachdem wir nun umrissen haben welche Eigenschaften den Quantenungleichungen zugrunde liegen, gehen wir nun kurz darauf ein, inwiefern sie das Phänomen der negativen Energie beschreiben. Im letzten Abschnitt hatten wir bereits besprochen, dass der Betrag an negativer Energie ΔE durch das charakteristische Zeitintervall τ begrenzt ist. Im Allgemeinen haben die Quantenungleichungen für die mit g verschmierte Energiedichte ρ_g in einer d -dimensionalen Raumzeit die Form

$$\rho_g \geq -\frac{C}{\tau^d}, \quad (4.4)$$

mit einer positiven Konstante C , die sowohl von der Funktion g , als auch von der Dimension d abhängt. Darauf aufbauend, konnten Ford und Roman zeigen [33], dass ein Impuls negativer Energie, nach einer charakteristischen Zeitskala, nicht nur kompensiert, sondern überkompensiert wird. Dieses, als Quantenzins bezeichnete Phänomen ist aus folgenden Gründen ersichtlich. Sei die Energiedichte $\rho(t)$ gegeben durch einen Puls an negativer, gefolgt von einem Puls positiver Energie. Letzterer muss wenigstens einen Ausgleich der Energiebilanz sichern. Solch eine Energiedichte ist durch

$$\rho(t) = B[-\delta(t) + (1 + \epsilon)\delta(t - T)], \quad \epsilon > 0$$

gegeben, wobei T nun ein bestimmter Zeitparameter ist. Es wurde von Ford und Roman unter Anderem gezeigt, dass für $\epsilon \rightarrow 0$ auch $B \rightarrow 0$ gehen muss, also das Auftauchen negative Energie immer eine Überkompensation mit sich zieht. Dieser Quantenzins, gegeben durch ϵ , steigt mit Dauer und Stärke der negativen Energie.

Anwendung finden die Quantenungleichungen natürlich bei allen Phänomenen, die auf negativer Energie beruhen. Neben den Zusammenhängen mit der Thermodynamik, die von C.J. Fewster und R. Verch weiter vertieft wurden [34], konnten auch ganz andere Phänomene in Betracht gezogen werden. So hat beispielsweise P. Marecki gezeigt [35], wie die Quantenungleichungen in der Quantenoptik angewandt werden können. Er zeigte, dass den Fluktuationen der elektrischen Feldstärke, durch die Quantenungleichungen, gewisse Grenzen gegeben sind. Zustände wie die sogenannten 'Squeezed States', können also nicht in beliebiger Willkür erzeugt werden.

Weiterhin findet negative Energie sehr viel Anwendung in den sogenannten "Designer Raumzeiten". Ford und Roman haben beispielweise zeigen können [36], dass die Existenz makroskopischer, durchquerbarer "Wurmlöcher" extrem unwahrscheinlich ist.

Auch Untersuchungen hinsichtlich des von M. Alcubierre vorgeschlagenen "Warpantriebs" [37] wurden getätigt. Doch auch in diesem Fall konnte von M.J. Pfenning gezeigt werden [38], dass die Konstruktion eines solchen extrem schwierig ist. Zudem würde die Reise mit einer "Warpblase" in der Größe eines Menschen, schon in Geschwindigkeiten unterhalb der Lichtgeschwindigkeit, undenkbar viel Energie verbrauchen.

4.3 Optimierung der Quantenungleichungen

In diesem Abschnitt werden wir unsere Ergebnisse auf die verschmierte Energiedichte anwenden. Dazu besprechen wir im Wesentlichen zwei Punkte. Zuerst schauen wir uns an, was auf der Basis der bisher gewonnenen Kenntnisse über verschmierte Energiedichten und deren Quantenungleichungen ausgesagt werden kann und inwiefern das von uns vorgestellte Verfahren zum Erfolg führt.

In einem weiteren Schritt werden wir uns speziell die zeitgemittelte Energiedichten anschauen und diese Resultate in einem letzten Schritt mit denen von Fewster und Eveson vergleichen.

Aus Kapitel 3 ist bekannt, dass wir mit Satz 3.4 dann die optimale untere Schranke des Spektrums finden, wenn der untersuchte Operator aus einer lokalen Algebra ist. Dieses ist insbesondere der Fall, wenn wir die Energiedichte mit einer Testfunktion $f \in C_0^\infty$ verschmieren.

Proposition 4.2. *Sei T_f^{ren} die mit der Testfunktion $f \in C_0^\infty$ in der Raumzeit verschmierte, renormierte Energiedichte. Ist T_f^{ren} von unten beschränkt, so ist*

$$\rho_{T_f^{ren}} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln \omega \left(e^{-\beta T_f^{ren}} \right)$$

wohldefiniert und beschreibt das Infimum des Spektrums von T_f^{ren} .

Diese Aussage, dass es die optimale untere Schranke ist, beruht auf einem Satz von Reeh und Schlieder. Für den Fall einer Testfunktion mit nichtkompaktem Träger², ist die Aussage eingeschränkt und man kann nur eine obere Schranke der optimalen unteren Schranke angeben.

Proposition 4.3. *Sei T_f^{ren} die mit der Testfunktion $f \in \mathcal{S}/C_0^\infty$ in der Raumzeit verschmierte Energiedichte. Ist T_f^{ren} von unten beschränkt, so ist*

$$0 \geq \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln \omega \left(e^{-\beta T_f^{ren}} \right) \geq \rho_{T_f^{ren}},$$

mit $\rho_{T_f^{ren}}$, dem Infimum des Spektrums von T_f^{ren} .

Diese Ergebnisse können wir mithilfe der eingeführten selbstdualen Algebra in etwas konkretere Form bringen. In den Kapiteln 1 und 2 hatten wir gesehen, dass die verschmierte Energiedichte durch einen quadratischen Operator einer selbstdualen Algebra

²Raum der Schwartz Funktion \mathcal{S} .

\mathcal{A}_{SD} dargestellt werden kann. Vermöge des Isomorphismus α_P wollen wir diese beiden Objekte miteinander identifizieren. Wir schreiben also

$$T_f^{ren} = \alpha_P\left(\frac{1}{2}B^*H^{ren}B\right).$$

Nun wissen wir aus Proposition 1.24 in Kapitel 1, dass unter diesen Umständen Proposition 4.2 äquivalent zu folgender Aussage ist.

Proposition 4.4. *Sei $T_f = \alpha_P(\frac{1}{2}B^*HB)$, die mit der Funktion $f \in \mathcal{C}_0^\infty$ in der Raumzeit verschmierte "nicht-renormierte" Energiedichte. Ist T_f^{ren} von unten beschränkt und hat f einen kompakten Träger, dann ist der Grenzwert*

$$\rho_{T_f^{ren}} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr}_P \ln \left(P e^{tH\Theta} P e^{-tPH\Theta P} P \right)^{\frac{1}{t}} \quad (4.5)$$

wohldefiniert und beschreibt das Infimum des Spektrums von T_f^{ren} .

Gleichfalls gibt es zu dieser, eine zu Proposition 4.3 analoge Formulierung.

Der Ausdruck 4.5 kann zudem in einer etwas anderen Formulierung angegeben werden. Dazu nutzen wir die Dyson-Reihe [39, 40], genauer gesagt die Dyson-Reihe der euklidische Quantenfeldtheorie.

Für einen Operator

$$A = A_0 + B$$

ist die Dyson-Reihe durch

$$e^{-tA} = T_t e^{\int_0^t dt' B(t')} e^{-tA_0} \quad \text{mit} \quad B(t) = e^{tA_0} B e^{-tA_0}$$

gegeben. Dabei ist T_t der Zeitornungsoperator bezüglich des Parameters t . Nimmt man im Rahmen der selbstdualen Algebra ein Zerlegung von $H\Theta$ vor, sodass A_0 mit P kommutiert, bekommen wir den Ausdruck

$$P e^{tH\Theta} P e^{-tH\Theta} P = P e^{tA_0+B} P e^{-PA_0P} = P T_t e^{\int_0^t dt' B(t)} e^{tA_0} P e^{-tA_0} P = P T_t e^{\int_0^t dt' B(t)} P,$$

als eine weitere, alternative Formulierung von Proposition 4.4:

Proposition 4.5. *Sei $T_f = \alpha_P(\frac{1}{2}B^*HB)$, die mit der Funktion f in der Raumzeit verschmierte nicht-normierte Energiedichte. Sei T_f^{ren} von unten beschränkt, mit $f \in \mathcal{C}_0^\infty$. Wähle $H\Theta = A_0 + B$ mit $PA_0 = A_0P$. Dann ist der durch die zeitgeordnete Dyson-Reihe gegebene Ausdruck*

$$\rho_{\omega, T_f^{ren}} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr}_P \ln P T_t e^{\int_0^t dt' B(t')} P$$

mit

$$B(t) = e^{tA_0} B e^{-tA_0}$$

wohldefiniert und beschreibt das Infimum des Spektrums von T_f .

Diese Darstellung hat einen Besonderen Aspekt, auf den wir hier kurz eingehen wollen. Der Operator A_0 , welcher im Sinne der eigentlichen Verwendung der Dyson-Reihe, die Rolle des freien Hamilton-Operators spielt, ist auch in dieser Theorie der "freie" Operator. Gemeint ist damit, dass der Effekt der negativen Energie eben nicht durch die Diagonalelemente³ der verschmierten Energiedichte erzeugt wird, sondern durch die

³Diagonal bedeutet in diesem Zusammenhang, dass der Operator mit P kommutiert.

nebendiagonalen Elemente. Diese wirken immer zwischen Zuständen verschiedener Teilchenzahl.

Abschließend wollen wir eine etwas konkretere Rechnung machen um die Resultate von Fewster und Eveson zu bekommen. Aus Kapitel 2 wissen wir, dass in diesem Fall der zeitgemittelten Energiedichte ein Operator der Form

$$H = \begin{pmatrix} Q & R \\ R & Q \end{pmatrix}$$

Wie wir aber bereits im Vorhergehenden bemerkt hatten ist die nicht-renormierte, zeitgemittelte Energiedichte ein positiver Operator. Damit ist insbesondere

$$\det_P (Pe^{tH\Theta}P) > 1, \quad (4.6)$$

da für die verschmierte Energiedichte dann $\omega(e^{Tf}) > 1$ ist. Damit bekommen wir mit der Monotonie der Logarithmusfunktion

$$\begin{aligned} \rho_{\omega, T_f^{ren}} &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr}_P \ln (Pe^{tH\Theta}Pe^{-tPH\Theta}P)^{\frac{1}{t}} \\ &\geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \det_P (Pe^{-tPH\Theta}P) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr}_P \ln (Pe^{-tPH\Theta}P)^{\frac{1}{t}} \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} Q \end{aligned}$$

Dass dieses Resultat bereits dem Ergebniss von Fewster entspricht können wir nun unter Verwendung der Definition von Q aus Kapitel 2 und den, bereits in [28, 29] verwendeten Tricks zeigen⁴

$$\begin{aligned} \rho_{\omega, T_f^{ren}} &\geq -\frac{1}{2} \int d\mu(p)d\mu(q) (m^2 + \omega(p)\omega(q) + pq) 2(2\pi)^n \omega(p) \delta(p-q) \int dt f(t) e^{it(\omega(q)-\omega(p))} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \omega(p) \delta(p-q) \int dt dt' e^{it\omega(q)-it'\omega(p)} f^{1/2}(t) f^{1/2}(t') \delta(t-t') \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \omega(p) \delta(p-q) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int dt dt' e^{it\omega(q)-it'\omega(p)} f^{1/2}(t) f^{1/2}(t') e^{i\omega(t-t')} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \omega(p) \delta(p-q) \int_0^{\infty} d\omega \widehat{f^{1/2}}(\omega(q) + \omega) \overline{\widehat{f^{1/2}}(\omega(p) + \omega)} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \int_0^{\infty} d\omega \left| \widehat{f^{1/2}}(\omega(p) + \omega) \right|. \end{aligned}$$

Dieses Ergebniss ist identisch mit 4.2, also dem in [28] gezeigten.

An letzter Stelle werden wir noch zeigen, dass unsere Ansatz das richtige Verhalten im adiabatischen Limes der Testfunktion liefert.

⁴Da f positiv ist, sei $f^{1/2}$ die punktweise Quadratwurzel von f .

Proposition 4.6. *Im adiabatischen Limes $f \rightarrow 1$ gilt*

$$\lim_{f \rightarrow 1} \rho_{T_f}^{ren} = 0$$

Dieses Ergebnis folgt direkt aus dem Ergebnis (2.18) in Kapitel 2, das für den Kern von T_f besagt, dass

$$\lim_{f \rightarrow 1} H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix}.$$

Da in diesem Zusammenhang die Basisprojektion durch

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, sieht man, dass $HP = PH$. Setzen wir dieses Ergebnis in Proposition 4.4 ein, so bekommen wir das Ergebnis 4.6

$$\lim_{f \rightarrow 1} \rho_{T_f}^{ren} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{tr}_P \ln (P e^{t\mathbb{1}\Theta} P e^{-tP\mathbb{1}\Theta} P)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{tr}_P \ln P \mathbb{1} P = 0.$$

Dieses Ergebnis ist genau das erwartete, da die globale Energiedichte eine nichtnegative Größe ist und das berechnete Minimum vom Vakuum angenommen wird.

4.4 Ausblick

In dieser Arbeit konnten wir einen Ansatz präsentieren, der es ermöglicht, die optimale unter Schranke eines von unten beschränkten Operators zu bestimmen. Diesen jedoch auszuwerten und einen expliziten Ausdruck zu finden ist ein Problem, das im Rahmen dieser Arbeit nicht gelöst werden konnte. Dieses mag daran liegen, dass die gefundenen Ausdrücke, wenn sie auch recht simpel erscheinen, von sehr komplexer Natur sind.

Es wäre daher sinnvoll, den Ausdruck

$$\omega(e^{-\beta T_f}),$$

auch mit anderen Methoden zu behandeln. Insbesondere zu nennen wären die funktional-analytische Methoden. Zu beachten ist dabei, dass, wie auch in dem von uns gewählten Zugang, perturbative Entwicklungen im Allgemeinen keinen geeigneten Ansatz darstellen

Anhang A

Anhang

A.1 Komplexe Strukturen

In diesem Anhang werden wir den Begriff der komplexen Struktur einführen.

Definition A.1. Ein linearer Endomorphismus J heißt komplexe Struktur, wenn

$$J^2 = -\mathbb{1}. \quad (\text{A.1})$$

Die Einführung einer komplexen Struktur nennt man Komplexifizierung.

Beispiel A.2. Wir betrachten den $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. Durch

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

ist auf ihm eine komplexe Struktur gegeben.

Führt man solch einen Endomorphismus auf einem symplektischen Raum ein, so gibt es eine durch die symplektische Form ausgezeichnete komplexe Strukturen.

Definition A.3. Eine komplexe Struktur J auf einem symplektischen Raum $\mathcal{S} = (L, \sigma)$ heißt mit σ verträglich, wenn folgende Eigenschaften gelten.

$$\begin{aligned} \sigma(Jf, g) &= -\sigma(f, Jg) & \forall f, g \in \mathcal{S} \\ \sigma(f, Jf) &> 0 & f \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Satz A.4. *Jeder symplektische Raum $\mathcal{S} = (L, \sigma)$ besitzt eine mit σ verträgliche komplexe Struktur.*

Bei einer gegebenen komplexen Struktur kann man den symplektischen Raum als komplexen Vektorraum betrachten in dem man die Notation

$$(t + is)f = tf + sJf$$

einführt. Die Komplexifizierung eines symplektischen Vektorraums \mathcal{S} mit der komplexen Struktur J wollen wir durch $\mathcal{S}^{\mathbb{C}} = (\mathcal{S}, J)$ kennzeichnen.

In analoger Weise, wie man einen symplektischen Raum dicht in einen \mathbb{R} -linearen Hilbertraum einbettet, so ist es möglich einen komplexifizierten symplektischen Vektorraum in einen komplexen Hilbertraum dicht einzubetten.

Satz A.5. ¹ *Zu einem symplektischen Raum $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ gibt es einen Hilbertraum \mathcal{H} und eine Abbildung $K : \mathcal{S}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{H}$, Projektions-Abbildung genannt, sodass $K\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ dicht in \mathcal{H} liegt. Diese Abbildung ist nicht eindeutig.*

Dies wird durch folgende Konstruktion ersichtlich. Seien für $f, g \in \mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ die Hilbertraumelemente $\tilde{f} = Kf$ und $\tilde{g} = Kg$ definiert. Sei weiterhin J die mit dem symplektischen Raum $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ verträglichen Struktur, dann ist durch

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \sigma(f, Jg) + i\sigma(f, g)$$

eine positive sesquilinear Form gegeben, mit der Eigenschaften, dass

$$\sigma(f, g) = \operatorname{Im} \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle$$

gilt. Vervollständigung dieses Raumes ergibt dann einen Hilbertraum.

¹Zu finden in [12].

A.2 Operatoridentität

In diesem Anhang wollen wir die Identität herleiten, die zur Umformung von Gleichung 1.61 benutzt wurde. Um den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{tr} \ln A(t) = \operatorname{tr} \frac{\partial A(t)}{\partial t} A(t)^{-1}$$

herzuleiten, betrachten wir zunächst den Fall, in dem $\|A(t)\| \leq 1$ gilt. Diese ermöglicht es uns den Logarithmus als Potenzreihe zu schreiben.

$$\ln A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(A - \mathbb{1})^n}{n}$$

Sei weiterhin $A(t)$ ein normstetiger Spurklasseoperator. Zusammen mit der Linearität und der Zyklizität der Spur bekommen wir dann den Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{tr} \ln A(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{tr} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(A(t) - \mathbb{1})^n}{n} \\ &= \operatorname{tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{i=1}^n (A(t) - \mathbb{1})^{i-1} \frac{\partial A(t)}{\partial t} (A(t) - \mathbb{1})^{n-i} \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial A(t)}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} n (A(t) - \mathbb{1})^{n-1} \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial A(t)}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbb{1} - A(t))^{n-1} \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial A(t)}{\partial t} A(t)^{-1} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Im letzten Schritt haben wir dabei die von Neumann-Reihe [18]

$$(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

benutzt. Nach Voraussetzung konvergiert gilt dieser Ausdruck zunächst für $\|A(t)\| \leq 1$. Sollte diese Bedingung nicht überall erfüllt sein, so ersetzen wir $A(t)$ durch

$$A'(t) = \frac{1}{c} A(t).$$

Wobei c so zu wählen ist, dass die Konvergenzbedingung $\|A'(t)\| \leq 1$ erfüllt ist, sodass gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{tr} \ln A(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{tr} (\ln A'(t) + \ln c \mathbb{1}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{tr} \ln A'(t) \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial A'(t)}{\partial t} A'(t)^{-1} \\ &= \operatorname{tr} \frac{\partial A(t)}{\partial t} A(t)^{-1}\end{aligned}$$

Damit ist die gewünschte Identität gezeigt.

Literaturverzeichnis

- [1] V Epstein, H Glaser and A Jaffe. Nonpositivity of the energy density in quantized filed theories. *Nuovo Cim.*, 36:1016, 1965.
- [2] L.H. Ford. Quantum coherence effects and the second law of thermodynamics. *Proc. R. Soc. Lond.*, A364:227–236, 1978.
- [3] H Araki and M Shiraishi. On quasifree states of the canonical commutation relation (I). *RIMS*, 7:105–120, 1971/72.
- [4] H Araki. On quasifree states of the canonical commutation relation (II). *RIMS*, 7:121–152, 1971/72.
- [5] H Araki. On the diagonalization of abbilinear hamiltonian by a bogoliubov transformation. *RIMS*, 4:387–412, 1968.
- [6] D. Petz. An invitation to the algebra of canonical commutation relations. Leuven, Belgium: Univ. Pr. (1990) 104 p. (Leuven notes in mathematical and theoretical physics, A2).
- [7] O. Bratteli and D. W. Robinson. Operator algebras and quantum statistical mechanics. vol. 2: Equilibrium states. models in quantum statistical mechanics. Berlin, Germany: Springer (1996) 517 p.
- [8] H. Baumgaertel and M. Wollenberg. Causal nets of operator algebras: Mathematical aspects of algebraic quantum field theory. Berlin, Germany: Akademie-Verlag (1992) 460 p. (Mathematische Lehrbuecher und Monographien, Abt. 2: Mathematische Monographien, 80).
- [9] M. Reed and B. Simon. Methods of modern mathematical physics. I. functional analysis. New York 1972.
- [10] K. Fredenhagen. Quantenfeldtheorie 1. *e-script: <http://www.desy.de/unith/lqp/psfiles/Quantenfeldtheorie.ps.gz>*, 2000/2001.
- [11] G. Roepstorff. Mathematische Methoden der Quantenfeldtheorie. *e-script: <http://bibsrv.physik.rwth-aachen.de/Skripte/Roepstorff/MMFT/mmft.ps.gz>*, 2000.

- [12] R. M. Wald. Quantum field theory in curved space-time and black hole thermodynamics. Chicago, USA: Univ. Pr. (1994) 205 p.
- [13] F. Hiroshima and K.R. Ito. Local exponents and infinitesimal generators of canonical transformations on boson fock spaces. 2003.
- [14] S. A. Fulling. Aspects of quantum field theory in curved space-time. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1989) 315 P. (London Mathematical Society Student Texts, 17).
- [15] K. Fredenhagen. Algebraic quantum field theory. *e-script: <http://www.desy.de/uni-th/lqp/psfiles/AQFT.ps.gz>*, 2004. (sowie eigene Mitschrift).
- [16] R. Haag. Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras. New York, USA: Springer-Verlag (1996) 390 p.(Texts and Monographs In Physics).
- [17] Donald L. Cohn. Measure theory. Stuttgart: Birkhaeuser, 1980.
- [18] O. Bratteli and D. W. Robinson. Operator algebras and quantum statistical mechanics. vol. 1: C^* and W^* algebras, symmetry groups, decomposition of states. New York, USA: Springer-Verlag(1979) 500 p.(Texts and Monographs In Physics).
- [19] M. Redhead. More ado about nothing. *Found. Phys.*, 25:123–137, 1995.
- [20] P. C. W. Davies and S. A. Fulling. Radiation from a moving mirror in two-dimensional space - time conformal anomaly. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A348:393–414, 1976.
- [21] P. C. W. Davies and S. A. Fulling. Radiation from moving mirrors and from black holes. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A356:237, 1977.
- [22] L. H. Ford. Constraints on negative energy fluxes. *Phys. Rev.*, D43:3972–3978, 1991.
- [23] L. H. Ford and Thomas A. Roman. Averaged energy conditions and quantum inequalities. *Phys. Rev.*, D51:4277–4286, 1995.
- [24] L. H. Ford and Thomas A. Roman. Averaged energy conditions and evaporating black holes. *Phys. Rev.*, D53:1988–2000, 1996.
- [25] L. H. Ford and Thomas A. Roman. Restrictions on negative energy density in flat spacetime. *Phys. Rev.*, D55:2082–2089, 1997.
- [26] Eanna E. Flanagan. Quantum inequalities in two dimensional minkowski spacetime. *Phys. Rev.*, D56:4922–4926, 1997.
- [27] Eanna E. Flanagan. Quantum inequalities in two dimensional curved spacetimes. *Phys. Rev.*, D66:104007, 2002.
- [28] C. J. Fewster and S. P. Eveson. Bounds on negative energy densities in flat spacetime. *Phys. Rev.*, D58:084010, 1998.

- [29] Christopher J. Fewster and Edward Teo. Bounds on negative energy densities in static space-times. *Phys. Rev.*, D59:104016, 1999.
- [30] Michael J. Pfenning. Quantum inequalities for the electromagnetic field. *Phys. Rev.*, D65:024009, 2002.
- [31] C.J. Fewster. Energy inequalities in quantum field theory. *To appear in the Proceedings of ICMP2003 (To be found on his homepage): <http://www.york.ac.uk/depts/maths/physics/QEIs.ps>*, 2003.
- [32] L. H. Ford, Adam D. Helfer, and Thomas A. Roman. Spatially averaged quantum inequalities do not exist in four-dimensional spacetime. *Phys. Rev.*, D66:124012, 2002.
- [33] L. H. Ford and Thomas A. Roman. The quantum interest conjecture. *Phys. Rev.*, D60:104018, 1999.
- [34] Christopher J. Fewster and Rainer Verch. Stability of quantum systems at three scales: Passivity, quantum weak energy inequalities and the microlocal spectrum condition. *Commun. Math. Phys.*, 240:329–375, 2003.
- [35] Piotr Marecki. Application of quantum inequalities to quantum optics. *Phys. Rev.*, A66:053801, 2002.
- [36] L. H. Ford and Thomas A. Roman. Quantum field theory constrains traversable wormhole geometries. *Phys. Rev.*, D53:5496–5507, 1996.
- [37] Miguel Alcubierre. The warp drive: hyper-fast travel within general relativity. *Class. Quant. Grav.*, 11:L73–L77, 1994.
- [38] Michael J. Pfenning and L. H. Ford. The unphysical nature of *warp drive*. *Class. Quant. Grav.*, 14:1743–1751, 1997.
- [39] M. Reed and B. Simon. Methods of modern mathematical physics. II. fourier analysis, selfadjointness. New York 1975, 361p.
- [40] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. Taschenbuch der Mathematik, Teil II. Teubner-Verlag (1995), 830 p.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Fredenhagen für die interessante Aufgabenstellung, seine freundliche und geduldige Betreuung dieser Arbeit, sowie vieler motivierender Gespräche, bedanken. Für die freundliche Aufnahme und die zahllosen, abwechslungsreichen Gespräche gilt mein Dank ferner den anderen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Algebraische Quantenfeldtheorie.

Ein besonderes Dankeschön gilt Jochen Zahn, Ulf Osterbrink, sowie Muharrem Küskü, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit mit konstruktiver Kritik unterstützten.

Diese Gelegenheit möchte ich überdies nutzen um meinen Freunden und all denen, die mich stets förderten zu danken.

Nicht in Worte fassbar ist der unendliche Dank, den ich meinen Eltern und meinem Bruder gegenüber aussprechen möchte.

Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Ich versichere, diese Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen verfasst zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Lutz Osterbrink
Hamburg, im September 2004