# KMS-Zustände

Diplomarbeit

vorgelegt von

Timor Saffary
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

22. August 2001

**Gutachter der Diplomarbeit:**

Prof. Dr. J. Michaliček
Prof. Dr. H. Müller

# Inhaltsverzeichnis

# Einführung

Algebraische Formalismen werden in der statistischen Physik meistens auf Gleichgewichtsphänomene angewendet. Dabei wird versucht, Gleichgewichtszustände mit Zuständen auf einer $C^*$-Algebra zu identifizieren. Es gibt zwei verschiedene Zugänge, die eine genauere Charakterisierung dieser Zustände als gemeinsames Ziel haben.
Bei der ersten Formulierung beginnt man mit einem bestimmten Hamiltonoperator $H_\Lambda$, der die Wechselwirkungen und Randbedingungen für Teilchen in einem endlichen Teilraum $\Lambda$ beschreibt, und versucht dann den Gibbs-Gleichgewichtszustand

$$\omega_{\Lambda,\beta}(A) = \frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H_\Lambda} A)}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H_\Lambda})}$$

zu konstruieren. $\beta$ wird als das Inverse der Temperatur interpretiert. Bei dieser Konstruktion ist es notwendig, daß $H_\Lambda$ selbstadjungiert und $e^{-\beta H_\Lambda}$ ein Spurklassen-Operator sind. Deshalb ist dieser Weg beim unendlich dimensionalen Fall nicht mehr begehbar. Zum Abschluss untersucht man die Existenz (oder Nichtexistenz) des Grenzwertes des thermodynamischen Prozesses

$$\omega_\beta(A) := \lim_{\Lambda\to\infty} \omega_{\Lambda,\beta}(A).$$

Wir werden diesen Zugang in dieser Arbeit nicht behandeln.

Beim zweiten Zugang versucht man zunächst, die Dynamik des idealisierten unendlichen Systems allgemein zu beschreiben. Hierbei geht man von der einfachsten wie aber auch stärksten Annahme aus, daß die Zeitentwicklung $t \mapsto \tau_t(A)$ der Observablen $A$ durch eine stetige, einparametrige Gruppe $\tau$ von $^*$-Automorphismen der $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$ aller Observablen gegeben ist. Leider wird diese Forderung nur von ganz einfachen Modellen erfüllt. Sie ist sogar falsch beim nicht wechselwirkenden Bose-Gas. Für realistischere Theorien wird diese Annahme gelockert. Die Gleichgewichtssituationen beschreibenden Zustände versucht man durch ihre Eigenschaften bzgl. der Automorphismengruppe $\tau$ herauszusieben, z.B. Stationarität

$$\omega\big(\tau_t(A)\big) = \omega(A),$$

oder aber auch Stabilität, Ergodizität etc. Die Gleichgewichtszustände werden bei diesem Formalismus durch die Bedingung

$$\omega\big(A\tau_{i\beta}(B)\big) = \omega(BA)$$

für alle $A$, $B$ aus einer normdichten, $\tau$-invarianten $^*$-Unteralgebra von $\mathcal{A}$ ausgewählt. Diese sogenannte KMS-Bedingung geht zwar auf Kubo (1957), Martin und Schwinger (1959) zurück, aber erst Haag, Hugenholtz und Winnik [HHW67] haben sie zum Kriterium für Gleichgewichtszustände erhoben. Die KMS-Bedingung impliziert, daß die Abbildung $t \mapsto \omega\big(A\tau_t(B)\big)$ in dem Streifen $0 < \mathrm{Im}t < \beta$ analytisch ist, und daß dann die Observablen innerhalb des Zustandes miteinander kommutieren.
Die KMS-Bedingung hat seit den sechziger Jahren deshalb sehr viel Aufmerksamkeit erfahren, weil eine fast identische Relation in der Modularen Theorie auftauchte. Tomita wies jedem treuen Zustand $\omega$ über einer $W^*$-Algebra $\mathcal{M}$ eine kanonische einparametrige Gruppe von $^*$-Automorphismen $\tau^\omega$ zu, und Takesaki konnte zeigen, daß $\omega$ die KMS-Bedingung bzgl. der Gruppe $\tau^\omega$ erfüllte, jedoch mit dem kleinen Unterschied, daß die Abbildung $t \mapsto \tau_t^\omega(A)$, $A \in \mathcal{M}$, i. A. nicht normstetig war.
Mit der Zeit konnte die Interpretation der KMS-Zustände als Gleichgewichtszustände immer mehr gerechtfertigt werden. So konnte man zeigen, daß einerseits KMS-Zustände gewisse Stabilitätseigenschaften besitzen, adererseits aber auch, daß realistische Stabilitätskriterien an Gleichgewichtszustände die KMS-Bedingung implizieren. Ein prominentes Beipspiel aus der Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit, bei dem die KMS-Eigenschaft eine wesentliche Rolle spielt, ist der Hawking-Effekt. Beim Beweis von [FH90] wird mit der Hilfe der KMS-Bedingung ein idealisierter Detektor simuliert [Saf].

Wir haben uns bei dieser Diplomarbeit hauptsächlich an [BR81], [aW92], [Sak91] und [Bau] gehalten.
Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert. Zunächst geben wir eine sehr gestraffte Zusammenfassung der grundlegensten Größen und Werkzeuge wieder. Hier beschränken wir uns nur auf die Wiedergabe und lassen Beweise gänzlich weg.
Im zweiten Kapitel führen wir die KMS-Zustände ein und geben mehrere äquivalente Definitionen dieses Begriffes. Die Eigenschaften, wie z.B. die thermodynamischen Grenzwerte, werden hergeleitet. Die modulare Theorie wird skizziert und die Verbindung zur KMS-Bedingung ausgeführt. Zum Schluß werden Eigenschaften der Menge der KMS-Zustände diskutiert.
Im dritten Kapitel widmen wir uns ausschliesslich der Stabilität von KMS-Zuständen. Dabei versuchen wir beide Richtungen

$$\text{KMS-Bedingung} \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \omega\big([P, \tau_t(A)]\big)dt = 0 \quad \forall A, P \in \mathcal{A}_0$$

angemessen zu motivieren. Im letzten Unterkapitel leiten wir das Stabilitätskriterium aus der Normstetigkeit

$$\|\omega_{\pm}^{\lambda P}(A) - \omega(A)\| \stackrel{\lambda \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \forall A, P \in \mathcal{A}_0$$

ab.

Ein in der Literatur unbekanntes Ergebnis von Thorsteinsson wird diskutiert, nämlich die Herleitung des Stabilitätskriteriums aus den Bedingungen

$$(i) \quad \lim_{\lambda \to 0} \sup_t \|\omega(A) - \omega \circ \tau_t^{\lambda P}(A)\| = 0$$

$$(ii) \quad \lim_{t \to \infty} \left(\omega \circ \tau_t^{\lambda P}(A) - \omega \circ \tau_{-t}^{\lambda P}(A)\right) = 0.$$

Dieses Ergebnis ist insofern hilfreich und wichtig, als bei der Normstetigkeit die Existenz der Grenzwerte $\omega_{\pm}^{\lambda P}$, die i. A. nicht gegeben ist, nicht gefordert wird. Am Ende dieses Kapitels geben wir eine physikalische Motivation für das obige Stabilitätskriterium.

Im Anhang werden der Formalismus und einige wichtige Begriffe der algebraischen Quantenfeldtheorie, die an manchen Stellen dieser Diplomarbeit auftauchen, eingeführt.

# Kapitel 1

# Grundlagen

## 1.1 $C^*/W^*$-Algebren, Zustände, Darstellungen

Eine *Algebra* $\mathcal{A}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, bestückt mit einem billinearen, assoziativen Produkt

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}.$$

Die Algebra heißt *kommutativ* oder *abelsch*, falls das Produkt diese Eigenschaft besitzt. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} {}^* : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ A &\longmapsto A^* \end{aligned}$$

heißt *Involution von* $\mathcal{A}$, falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $(A^*)^* = A$,
- $(aA + bB)^* = \overline{a}A^* + \overline{b}B^*$,
- $(AB)^* = B^*A^* \qquad \forall a, b \in \mathbb{C}, \forall A, B \in \mathcal{A}$.

$A^*$ heißt die *Adjunktion* von A. Eine Algebra mit so einer Abbildung nennt man eine *involutive Algebra* oder $^* - Algebra$. Die *unitale Algebra* enthält das neutrale Element $\mathbb{1}$ mit $A\mathbb{1} = \mathbb{1}A = A$ für alle A aus $\mathcal{A}$. Ein Banachraum ist ein vollständiger und normierter Raum, d.h. die Norm weist jedem Element $A \in \mathcal{A}$ eine reelle Zahl $\|A\|$ zu und erfüllt die folgenden Eigenschaften:

(i) $\|A\| \geq 0, \qquad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,

(ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$,

(iii) $\|A + B\| \leq \|B\| + \|B\|$, und

(iv) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Ist die $^*$-Algebra zugleich ein *Banachraum* und es gilt außerdem noch

$$\|A^*\| = \|A\| \qquad \forall A \in \mathcal{A}, \tag{1.1}$$

dann spricht man von einer $Banach^* - Algebra$. Eine Algebra ohne Involution jedoch mit einer Norm mit den Eigenschaften (i)-(iv) nennt man eine $Banach - Algebra$.

**Definition 1.1** Eine $C^* - Algebra$ ist eine Banach$^*$-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\|A^*A\| = \|A\|^2$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Die Begriffe übertragen sich auf die Teilmengen $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, falls $\mathcal{B}$ die betreffenden Bedingungen erfüllt.

**Beispiele 1.2** für $C^*$-Algebren sind:

(i) Die Menge der beschränkten Operatoren $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit der Supremumsnorm $\|A\| := \sup\{\|A\psi\| | \ \psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1\}$.

(ii) Jede uniform abgeschlossene Unteralgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, die selbstadjungiert ist, d.h. daß aus $A \in \mathcal{B}$ $A^* \in \mathcal{B}$ folgt, z.B. die Menge der kompakten Operatoren $\mathcal{LC}(\mathcal{H})$ auf $\mathcal{H}$.

(iii) Die Menge der stetigen Funktionen $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ auf einem lokal kompakten Raum $\mathcal{X}$ ist mit der Supremumsnorm $\|f\| := \sup\{|f(x)|| \ x \in \mathcal{X}\}$ ist eine abelsche $C^*$-Algebra.

**Definition 1.3** Eine $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$ heißt $einfach$, wenn die einzigen abgeschlossenen Ideale $\{0\}$ und $\mathcal{A}$ sind.

**Satz 1.4** Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche und unitale $C^*$-Algebra, dann existiert ein kompakter Hausdorffraum $\mathcal{X}$, so daß $\mathcal{A}$ (isommetrisch) isomorph zu $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ ist. Besitzt $\mathcal{A}$ keine $\mathbb{1}$, dann ist $\mathcal{X}$ lokalkompakt und $\mathcal{A}$ (isommetrisch) isomorph zu $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$. In beiden Fällen ist der Raum $\mathcal{X}$ bis auf Homomorphie eindeutig.

**Definition 1.5** Eine $C^*$-Algebra $\mathcal{M}$ heißt $W^* - Algebra$, falls sie der Dualraum eines Banachraums ist.

Bei Operatoralgebren verwendet man statt $W^*$-Algebra die Terminologie $von\, Neumann - Algebra$. Sakai hat gezeigt, daß die obige abstrakte Charakterisierung von von Neumann-Algebren äquivalent zu der gängigeren Definition ist. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ die Menge der linearen beschränkten Operatoren

$$A : \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}, \qquad \|A\| := \sup_{\psi\in\mathcal{H}, \|\psi\|\leq 1} \|A\psi\| < \infty.$$

Die *Kommutante* $\mathcal{A}'$ von $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ enthält all die Operatoren, die mit jedem anderen Operator aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kommutieren, also

$$\mathcal{A}' := \{X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \ XA = AX, \ A \in \mathcal{A}\}.$$

Man kann zeigen, daß falls $\mathcal{A}$ *selbstadjungiert* ist, d.h. $A^* = A$ für alle $A \in \mathcal{A}$, dann ist $\mathcal{A}'$ eine $C^*$-Algebra. Es gilt weiterhin

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'' = \mathcal{A}^{(4)} = \mathcal{A}^{(6)} = ..., \\ \mathcal{A}' = \mathcal{A}''' = \mathcal{A}^{(5)} = \mathcal{A}^{(7)} = ..., \\ \text{wobei} \quad \mathcal{A}^{n+1} := (\mathcal{A}^n)'. \end{aligned}$$

**Theorem 1.6 (von Sakai)** Die $^*$-Algebra $\mathcal{M} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist genau dann eine von Neumann-Algebra, wenn $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ gilt.

**Beispiele 1.7** für von Neumann-Algebren sind:

(i) $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist nicht nur eine von Neumann-Algebra, sondern sogar ein Faktor, da $\mathcal{L}(\mathcal{H})' = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

(ii) $\mathcal{LC}(\mathcal{H})$ ist keine von Neumann-Algebra, denn $\mathcal{LC}(\mathcal{H})'' = (\mathbb{C}\mathbb{1})' = \mathcal{L}(\mathcal{H}) \neq \mathcal{LC}(\mathcal{H})$.

Für das weitere Studium von von Neumann-Algebren ist außer der uniformen Topologie (1.1) die Einführung einiger weiterer Operatortopologien notwendig.

**Definition 1.8** Seien $u, v, u_n, v_n \in \mathcal{H}$. Dann unterscheiden wir auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ die folgenden Operatortopologien:

(i) Die *ultraschwache*: $p(A) := \left|\sum_n (u_n, Av_n)\right|$ mit $\sum_n (\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2) < \infty$.

(ii) Die *schwache*: $p_{u,v}(A) := |(u, Av)|$.

(iii) Die *starke*: $p_u(A) := \|Au\|$.

(iv) Die *ultrastarke*: $p(A) := \sum_n \|Au_n\|^2$, wobei $\sum_n \|u_n\|^2 < \infty$.

(v) Die $^* -$ *starke*: $A \to p_u(A) + p_u(A^*)$.

(vi) Die $^* -$ *ultrastarke*: $A \to \left\{\sum_n \|Au_n\|^2 + \sum_n \|A^*u_n\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Einige Autoren verwenden statt der Bezeichnung “ultrat” auch “$\sigma$”, z.B. $\sigma$-stark$^*$-Topologie.

Für diese Operatortopologien bestehen die Beziehungen:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{uniform} & < & {}^*\text{-ultrastark} & < & \text{ultrastark} & < & \text{ultraschwach} \\ & & \wedge & & \wedge & & \wedge \\ & & {}^*\text{-stark} & < & \text{stark} & < & \text{schwach} \end{array}$$

Hier bedeutet “$<$” “feiner als”. Eine Gesetzmäßigkeit wird in der obigen Skizze veranschaulicht, nämlich daß die oben stehenden (außer der uniformen) und die unten stehenden Topologien jeweils die gleichen stetigen linearen Funktionale zulassen. Der Hauptunterschied zwischen der $^*$-starken und der $^*$-ultrastarken Topologie ist der, daß die Abbildung $A \mapsto A^*$ nur im Sinne der $^*$-starken stetig ist.
Mit Hilfe dieser Topologien formulieren wir das

**Theorem 1.9 (Kommutanten-)** Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine nicht degenerierte $^*$-Algebra. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.

(ii) $\mathcal{A}$ ist schwach abgeschlossen.

(iii) $\mathcal{A}$ ist stark abgeschlossen.

(iv) $\mathcal{A}$ ist $^*$-stark abgeschlossen.

(v) $\mathcal{A}$ ist ultraschwach abgeschlossen.

(vi) $\mathcal{A}$ ist ultrastark abgeschlossen.

(vii) $\mathcal{A}$ ist $^*$-ultrastark abgeschlossen.

Eine von Neumann-Algebra ist demnach eine $C^*$-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, die im Sinne der schwachen Operatortopologie abgeschlossen ist. Das Kommutanten-Theorem besagt aber auch, daß der Abschluß der $^*$-Algebra unabhängig von der Wahl einer bestimmten Operatortopologie ist. Eine unmittelbare Konsequenz des obigen Theorems ist

**Korollar 1.10 (von Neumann-Dichtetheorem)** Die nicht degenerierte $^*$-Operatoralgebra $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{H}$ ist im Sinne der schwachen, starken, $^*$-starken, ultraschwachen, ultrastarken und $^*$-ultrastarken Topologien dicht in $\mathcal{A}''$.

**Theorem 1.11 (Kaplanskys Dichte-)** Die Einheitskugel der $^*$-Operatoralgebra $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{H}$ liegt im Sinne der $^*$-ultrastarken Topologie dicht in der Einheitskugel des schwachen Abschlusses von $\mathcal{A}$.

**Definition 1.12** Sei $\mathcal{A}$ eine involutive Banach-Algebra, dann heißt $P \in \mathcal{A}$ eine *Projektion*, falls $P^2 = P$ und $P^* = P$ gilt. Zwei Projektionen $P, Q \in \mathcal{M}$ heißen *äquivalent* zueinander, $P \sim Q$, falls ein $W \in \mathcal{M}$ existiert, so daß $W^*W = P$ und $WW^* = Q$ gelten. Die Projektion $P$ nennt man *endlich*, wenn aus $Q \leq P$ und $Q \sim P$ sofort $Q = P$ folgt, ansonsten *unendlich*. Besitzt die Projektion $P$ keine endliche nichttriviale Unterprojektion $Q \leq P$, dann nennt man sie *rein unendlich*. $P$ heißt *abelsch*, falls $P\mathcal{M}P$ eine abelsche Unteralgebra ist. Eine *zentrale Projektion* ist eine Projektion auf $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$.

Da die durch die Projektionen aufgespannte Menge dicht in der von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ liegt, kann man diese Algebren durch die Menge der Projekionen in $\mathcal{M}$ charakterisieren.

**Definition 1.13** Eine von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ nennt man *endlich* oder *rein unendlich*, falls die identische Projektion $\mathbb{1}$ diese Eigenschaften besitzt. $\mathcal{M}$ heißt *semiendlich*, falls sie nicht rein unendlich, und *eigentlich unendlich*, wenn alle nichttrivialen, zentralen Projektionen unendlich sind.
Die von Neumann-Algebren $\mathcal{M}$ kann man dann in die folgenden Typen einteilen:

| | |
|---|---|
| Typ $I$ | Jede nicht triviale, zentrale Projektion in $\mathcal{M}$ majorisiert eine nicht triviale, abelsche Projektion in $\mathcal{M}$. |
| Typ $II$ | $\mathcal{M}$ besitzt keine nicht triviale, abelsche Projektion, und jede nicht triviale, zentrale Projektion in $\mathcal{M}$ majorisiert eine endliche nicht triviale Projektion von $\mathcal{M}$. |
| Typ $II_1$ | $\mathcal{M}$ ist vom Typ $II$ und endlich. |
| Typ $II_\infty$ | $\mathcal{M}$ ist vom Typ $II$ und besitzt keine nicht triviale, zentrale Projektion. |
| Typ $III$ | $\mathcal{M}$ ist rein unendlich. |

Ist $\mathcal{M}$ vom Typ $I, II$ oder $III$, dann ist es $\mathcal{M}'$ ebenfalls, und umgekehrt. Für die Typen $II_1$ und $II_\infty$ stimmt diese Aussage i. A. nicht. Weitehin kann man zeigen, daß jede von Neumann-Algebra als direkte Summe von Algebren der obigen vier Typen dargestellt werden kann.

**Definition 1.14** Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $C^*$-Algebren. dann heißt eine lineare Abbildung $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein $^* - Homomorphismus$, falls für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt:

(i) $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$

(ii) $\phi(A^*) = \big(\phi(A)\big)^*$.

Die Begriffe *Mono*−, *Epi*−, *Iso*−, *Endo*− und *Automorphismus* werden in der üblichen Weise eingeführt.

Wir halten einige grundlegenden Eigenschaften des $^*$-Homomorphismusses $\phi$ fest in dem

**Lemma 1.15** Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $C^*$-Algebren und $\phi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ ein $^*$-Homomorphismus. Dann gilt:

(i) $\phi$ bewahrt die Positivität: $A \geq 0 \Rightarrow \phi(A) \geq 0$.

(ii) $\phi$ ist stetig und $\|\phi(A)\| \leq \|A\|$, $\phi$ kann die Norm nur verkleinern.

(iii) $\phi$ ist genau dann ein $^*$-Isomorphismus, wenn ker $\phi := \{A \in \mathcal{A} :\ \phi(A) = 0\}$ erfüllt ist.

(iv) Ein $^*$-Isomorphismus ist automatisch isommetrisch, d.h. normerhaltend: $\|\phi(A)\| = \|A\|$

(iv) Das Bild $\phi(\mathcal{A}')$ einer $C^*$-Algebra $\mathcal{A}'$ ist wieder eine $C^*$-Algebra.

Im Falle von von Neumann-Algebren können wir weitere Aussagen machen.

**Theorem 1.16** $^*$-Homomorphismen $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ zwischen von Neumann-Algebren $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ sind ultraschwach- und ultrastark-stetig.

**Definition 1.17** Eine *Darstellung* einer $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$ ist ein Paar $\big(\mathcal{H}, \pi\big)$, bestehend aus einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und einem $^*$-Homomorphismus $\pi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Sie heißt *treu*, falls $\pi$ ein $^*$-Isomorphismus ist, und *nicht degeneriert*, falls $\{v \in \mathcal{H} :\ \pi(A)v = 0,\, A \in \mathcal{A}\} = \{0\}$. Ein Teilraum $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ heißt *invariant* unter $\pi(\mathcal{A})$, wenn $\pi(A)\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}$ für alle $A$ aus $\mathcal{A}$ gilt. Sind $\{0\}$ und $\mathcal{H}$ die einzigen invarianten, abegschlossenen Teilräume, dann heißt die Darstellung $\big(\mathcal{H}, \pi\big)$ *irreduzibel*, ansonsten nennt man sie *reduzibel*. Zwei Darstellungen $\big(\mathcal{H}_1, \pi_1\big)$ und $\big(\mathcal{H}_2, \pi_2\big)$ heißen zueinander (*unitär*) *äquivalent*, falls es einen unitären Operator $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ gibt mit $\pi_2(A) = U\pi_1U^*$.

**Satz 1.18** Die Darstellung $\big(\mathcal{H}, \pi\big)$ einer $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$ ist genau dann treu, falls eine der folgenden äquivalenten Kriterien erfüllt ist:

(i) $\ker \pi = \{0\}$.

(ii) $\|\pi(A)\| = \|A\| \qquad \forall A \in \mathcal{A}$.

(iii) $\pi(A) > 0 \qquad \forall A \in \mathcal{A}_+$.

Jede Darstellung $\big(\mathcal{H}, \pi\big)$ einer $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$ definiert eine treue Darstellung für den Quotienten $\mathcal{A}_\pi := \mathcal{A}/\ker \pi$. Die Darstellung einer einfachen Algebra ist immer treu.

**Satz 1.19** Für die selbstadjungierte Teilmenge $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{K}$ ist irreduzibel, d.h. die einzigen unter der Wirkung von $\mathcal{K}$ invarianten Unterräume sind $\{0\}$ und $\mathcal{H}$.

(ii) $\mathcal{K}'$ besteht nur aus den Vielfachen der $\mathbb{1}$.

(iii) Jedes $\psi \neq 0$, $\psi \in \mathcal{H}$ ist zyklisch für $\mathcal{K}$ in $\mathcal{H}$, oder $\mathcal{K} = 0$ und $\mathcal{H} = \mathbb{C}$.

**Definition 1.20** Sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann nennt man $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ *separierend* für $\mathcal{M}$ genau dann, wenn für alle $A \in \mathcal{M}$ und $\xi \in \mathcal{H}'$ aus $A\xi = 0$ $A = 0$ folgt.

**Definition 1.21** Eine *zyklische Darstellung* ist ein Trippel $\big(\mathcal{H}, \pi, \Omega\big)$, wobei $\big(\mathcal{H}, \pi\big)$ eine Darstellung von $\mathcal{A}$ und $\Omega \in \mathcal{H}$ ein für $\pi$ *zyklischer Vektor* in $\mathcal{H}$ sind, d.h. $\{\pi(A)\Omega : \ A \in \mathcal{A}\}$ ist dicht in $\mathcal{H}$.

**Satz 1.22** Sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{K}$ ist zyklisch für $\mathcal{M}$.

(ii) $\mathcal{K}$ ist separierend für $\mathcal{M}'$.

**Satz 1.23** Jede nicht degenerierte Darstellung einer $C^*$-Algebra läßt sich als direkte Summe von zyklischen Unterdarstellungen beschreiben.

Man kann sich somit bei der Diskussion über nicht degenerierte Darstellungen auf zyklische Darstellungen beschränken.

**Definition 1.24** Sei $\mathcal{A}$ eine unitale $C^*$-Algebra und $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional auf $\mathcal{A}$. Dann ist $\omega$

(i) *hermitesch*, falls gilt $\omega(A^*) = \overline{\omega(A)} \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

(ii) *positiv*, wenn $\omega(A) \geq 0 \quad \forall A \geq 0$.

(iii) ein *Zustand*, falls $\omega$ positiv ist und normiert, d.h. $\omega(\mathbb{1}) = 1$.

(iv) ein *treuer Zustand* auf der von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ genau dann, wenn $\omega$ ein Zustand ist und $\omega(A) > 0$ für alle $A \in \mathcal{M}_+$, der Menge der positiven Elemente von $\mathcal{M}$.

(v) ein *reiner Zustand*, falls $\omega$ nicht als konvexe Linearkombination anderer Zustände dargestellt werden kann.

(vi) ein *Spurzustand*, falls $\omega(AB) = \omega(BA) \quad \forall A, B \in \mathcal{M}$.

(vii) ein *Vektorzustand*, falls $\omega(A) = \omega_\Omega(A) := \big(\Omega, \pi(A)\Omega\big)$ $\Omega \in \mathcal{H}$, wobei $\|\Omega\| = 1$ und die Darstellung $\pi$ nicht degeneriert sind.

Im Falle einer abelschen $C^*$-Algebra ist $\omega$ genau dann ein reiner Zustand, wenn $\omega(AB) = \omega(A)\omega(B)$ für alle $A$, $B$ aus $\mathcal{A}$ gilt. Sollte $\mathcal{A}$ keine $\mathbb{1}$ besitzen, dann wird die Normiertheit durch die Bedingung $\|\omega\| := \sup\{|\omega(A)| \mid \|A\| = 1\} = 1$ ersetzt.

**Definition 1.25** Sei nun $\mathcal{M}$ ein von Neumann-Algebra und $\omega$ ein positives lineares Funktional auf $\mathcal{M}$. Gilt $\omega\big(\text{l.u.b.}_\alpha(A_\alpha)\big) = \text{l.u.b.}_\alpha\big(\omega(A_\alpha)\big)$ für alle steigenden Folgen $\{A_\alpha\}$ in $\mathcal{M}_+$, dann nennt man $\omega$ *normal*.

**Theorem 1.26** Die von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ operiere auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\omega$ sei ein Zustand auf $\mathcal{M}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\omega$ ist normal.

(ii) $\omega$ ist ultraschwach stetig.

(iii) Es existiert eine Dichtematrix $\rho$, d.h. ein positiver Spurklassen-Operator auf $\mathcal{H}$ mit $\text{Tr}(\rho) = 1$, mit der Eigenschaft $\omega(A) = \text{Tr}(\rho A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

**Definition 1.27** Eine von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ wird *Faktor* genannt, falls sie ein triviales Zentrum besitzt, d.h. $\mathbf{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}\mathbb{1}$. Ein Zustand $\omega$ auf einer $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$ heißt *Faktorzustand* oder *primärer Zustand*, falls $\pi_\omega(\mathcal{A})''$ ein Faktor ist, wobei $\pi_\omega$ die entsprechende zyklische Darstellung ist.

Ein Faktor ist entweder vom Typ $I, II_1, II_\infty$ oder $III$.

**Lemma 1.28** Sei $\big(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \pi\big)$ eine Darstellung der $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$. Dann ist die Darstellung genau dann treu, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $\ker \pi = \{0\}$.

(ii) $\|\pi(A)\| = \|A\|, \qquad \forall A \in \mathcal{A}$.

(iii) $\pi(A) > 0, \qquad A > 0$.

Man kann zu einer gegebenen nicht degenerierten Darstellung einer $C^*$-Algebra und einem Vektor $\Omega \in \mathcal{H}$ mit $\|\Omega\| = 1$ einen Zustand, den Vektorzustand, konstruieren. Die Möglichkeit der Konstruktion in umgekehrter Richtung wird von dem folgenden Theorem sichergestellt.

**Theorem 1.29** Für einen beliebigen Zustand $\omega$ auf einer $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$ existiert eine bis auf unitäre Äquivalenz eindeutige, zyklische Darstellung $(H_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ von $\mathcal{A}$, die sogenannte kanonische zyklische Darstellung von $\mathcal{A}$ bzgl. $\omega$, so daß

$$\omega(A) = \big(\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega\big) \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Diese Darstellung ist genau dann irreduzibel, wenn $\omega$ rein oder, gleichbedeutend damit, ein Extremalpunkt der Menge der Zustände auf $\mathcal{A}$ $\mathbf{E}_\mathcal{A}$ ist.

Es gilt natürlich dann auch $\|\Omega_\omega\| = 1$. Jeder Zustand auf $\mathcal{A}$ ist also ein Vektorzustand für eine bestimmte nicht degenerierte Darstellung von $\mathcal{A}$.
Das folgende Theorem stellt sicher, daß jede $C^*$-Algebra durch eine $C^*$-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dargestellt werden. Mit Hilfe dieses Theorems kommt man dann zu der sogenannten GNS-Konstruktion.

**Theorem 1.30 (GNS-; Gelfand, Naimark, Segal)** Für jede $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$ existiert ein Hilbertraum $\mathcal{H}$, so daß $\mathcal{A}$ $^*$-isomorph zu einer $C^*$-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist.

Wir werden weiterhin einige elementare Informationen über einparametrige Isometriegruppen brauchen. Hierfür betrachten wir zunächst einen komplexen Banachraum $\mathcal{X}$ und eine abgeschlossene Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}^*$, so daß $\mathcal{F} = \mathcal{X}^*$ oder $\mathcal{F}^* = \mathcal{X}$ gilt. Mit $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ bezeichnen wir die lokal konvexe Topologie auf $\mathcal{X}$, induziert durch die Funktionale auf $\mathcal{F}$.

**Definition 1.31** Eine $\mathcal{F} = \mathcal{X}^* -$ *stetige Isometriegruppe* von $\mathcal{X}$ ist eine einparametrige Familie $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t$ von linearen, beschränkten Abbildungen $\tau : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ mit:

(i) $\tau_{t_1+t_2} = \tau_{t_1} \cdot \tau_{t_2}, \qquad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},\ t_0 = \iota,$

(ii) $\|\tau_t\| = 1, \qquad t \in \mathbb{R},$

(iii) $t \mapsto \tau_t(A)$ ist $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{F})$-stetig für alle $A \in \mathcal{X}$, d.h.
$t \mapsto \eta\big(\tau_t(A)\big)$ ist stetig für alle $A \in \mathcal{X}$ und $\eta \in \mathcal{F}$,

(iv) $A \mapsto \tau_t(A)$ ist $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{F})$-stetig für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. $\eta \circ \tau_t \in \mathcal{F}$ für alle $\eta \in \mathcal{F}$.

Man bezeichnet dann $A \in \mathcal{X}$ als *analytisch* für $\tau_t$, wenn es ein Streifen $I_\lambda := \{z : |\mathrm{Im}\, z| < \lambda\} \subset \mathbb{C}$ und eine Funktion $f : I_\lambda \to \mathcal{X}$ gibt mit den beiden Eigenschaften

(i) $f(t) = \tau_t(A), \qquad \forall t \in \mathbb{R}$, und

(ii) $z \mapsto \eta\big(f(z)\big)$ ist analytisch für alle $\eta \in \mathcal{F}$.

**Proposition 1.32** Falls $A$ analytisch für $\tau_t$ auf $I_\lambda$ ist, so ist $A$ auch *stark analytisch* auf $I_\lambda$, d.h.

$$\lim_{h \longrightarrow 0} h^{-1}\big(f(z+h) - f(z)\big)$$

existiert in Norm für $z \in I_\lambda$.

## 1.2 CAR- und CCR-Algebren

Man kann auf zwei verschiedene Wege zur algebraischen Struktur quantenmechanischer Systeme von Punktteilchen gelangen.
Der erste ist praxisorientierter oder physikalischer. Man startet mit einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und definiert den *Fockraum* $\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{H}^n$, wobei $\mathcal{H}^0 := \mathbb{C}$ ist.
Für die Untersuchung von Bose- bzw. Fermiteilchen brauchen wir die folgenden Hilberträume

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}) &:= \mathcal{P}_\pm \mathcal{F}(\mathcal{H}) \text{ mit}\\ \mathcal{P}_+(f_1 \oplus \cdots \oplus f_n) &:= \frac{1}{n!}\sum_\pi f_{\pi_1} \oplus \cdots \oplus f_{\pi_n},\\ \mathcal{P}_-(f_1 \oplus \cdots \oplus f_n) &:= \frac{1}{n!}\sum_\pi \epsilon_\pi f_{\pi_1} \oplus \cdots \oplus f_{\pi_n}\end{aligned}$$

für alle $f_i \in \mathcal{H}$, über alle Permutationen $\pi : (1, ..., n) \mapsto (\pi_1, ..., \pi_n)$ und $\epsilon_\pi$ ist 1 bzw. -1, falls die Permutation gerade bzw. ungerade ist. $\mathcal{F}_+$ bezeichnet man als den $Bose-Fockraum$ (Bose-Einstein-Statistik) und $\mathcal{F}_-$ den $Fermi-Fockraum$ (Fermi-Dirac-Statistik). Weiterhin definieren wir für $f \in \mathcal{H}$ auf $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ die $Vernichtungs-$ und $Erzeugungsopertoren$ durch $a_\pm(f) := a(f)\mathcal{P}_\pm$ und $a^*_\pm(f) := \mathcal{P}_\pm a^*(f)$ mit

$$\begin{aligned}a(f)(f_1 \oplus \cdots \oplus f_n) &:= \sqrt{n}(f, f_1)(f_2 \oplus \cdots \oplus f_n),\\ a^*(f)(f_1 \oplus \cdots \oplus f_n) &:= \sqrt{n+1}(f \oplus f_2 \oplus \cdots \oplus f_n).\end{aligned}$$

Die Vernichtungs- und Erzeugungsopertoren auf $\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$ lauten dann

$$a_\pm(f) := \mathcal{P}_\pm a(f)\mathcal{P}_\pm = a(f)\mathcal{P}_\pm \text{ und } a^*_\pm(f) := \mathcal{P}_\pm a^*(f)\mathcal{P}_\pm = \mathcal{P}_\pm a^*(f),$$

die letzte Umformung ist dadurch begründet, weil $a(f)$ die Unterräume $\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$ invariant läßt.
Diese Operatoren genügen den $kanonischen\ Kommutatorrelationen$ $(CCR)$

$$\begin{aligned}[][a_+(f), a_+(g)] &= 0,\\ [a^*_+(f), a^*_+(g)] &= 0,\\ [a_+(f), a^*_+(g)] &= (f, g)\mathbb{1},\end{aligned}$$

und den $kanonischen\ Anti-Kommutatorrelationen$ $(CAR)$

$$\begin{aligned}\{a_-(f), a_-(g)\} &= 0,\\ \{a^*_-(f), a^*_-(g)\} &= 0,\\ \{a_-(f), a^*_-(g)\} &= (f, g)\mathbb{1},\end{aligned}$$

wobei $\{A, B\} := AB + BA$. Der Hauptunterschied zwischen Bose-Teichen und Fermi-Teilchen ist der, daß Bose-Teilchen dem $Pauli - Prinzip$, hier ausgedrückt durch die Operatorgleichung

$$a^*_-(f)a^*_-(f) = 0,$$

nicht genügen, d.h. beliebig viele Bosonen können den selben Zustand besetzen.
Man kann zeigen, daß während $a(f)$ und $a^*(f)$, $f, g \in \mathcal{H}$, beschränkte Erweiterungen auf dem Fermi-Fockraum $\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ haben, die Operatoren $a_+(f)$ und $a^*_+(f)$, $f, g \in \mathcal{H}$, unbeschränkt sind. So z.B. folgt für das n-fache Tensorprodukt $\psi^{(n)} := f \oplus \cdots \oplus f$ von $f \in \mathcal{H}$ mit sich selbst:

$$\|a(f)\psi^{(n)}\| = \sqrt{n}\|\psi^{(n)}\|\|f\|.$$

Diese Unbeschränktheit macht die Behandlung von Bosonensystemen viel schwieriger als die von Fermionensystemen. Deshalb werden die sogenannten $Weyl - Operatoren$

$$W(f) := e^{i\Phi(f)} \quad \text{mit} \quad \Phi(f) := \overline{\frac{1}{\sqrt{2}}\big(a_+(f) + a^*_+(f)\big)}$$

eingeführt, um Bosonensysteme geeignet beschreiben zu können. Die Weyl-Operatoren sind unitär und erfüllen den Weyl-Formen CCR:

$$W(f)W(g) = e^{-i\mathrm{Im}(f,g)/2}W(f+g) = e^{-i\mathrm{Im}(f,g)/2}W(f)W(g).$$

Jetzt wollen wir den abstrakteren Zugang beschreiten. Wir werden an dieser Stelle nur erwähnen, daß die Elemente, die die CARs oder Weyl-Formen erfüllen, eine $C^*$-Algebra eindeutig erzeugen. Die genauere Aussage fassen wir zusammen in dem folgenden

**Theorem 1.33** Sei $\mathcal{H}$ ein Prä-Hilbertraum und $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, zwei durch die $\mathbb{1}$ und den Elementen $a_i(f)$, erzeugte $C^*$-Algebren mit

(i) $f \mapsto a_i(f)$ ist antilinear,

(ii) $\{a_i(f), a_i(g)\} = 0$ und

(iii) $\{a_i(f), a^*_i(g)\} = (f, g)\mathbb{1}$

$\forall f, g \in \mathcal{H}$. Dann existiert genau ein $^*$-Isomorphismus

$$\alpha : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2 \quad \alpha\big(a_1(f)\big) = a_2(f) \forall f \in \mathcal{H}.$$

Weiterhin gilt:

(i) $\|a(f) = \|f\| \quad \forall f \in \mathcal{H}$.

(ii) Ist $\mathcal{H}$ $n$-dimensional, $n < \infty$, dann ist $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ isomorph zu einer $C^*$-Algebra von komplexwertigen $2^n \times 2^n$-Matrizen.

(iii) $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ ist genau dann separabel, wenn $\mathcal{H}$ separabel ist.

(iv) $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ ist einfach.

(v) Ist $U$ ein beschränkter linearer Operator auf $\mathcal{H}$ und $V$ ein beschränkter antilinearer Operator mit den Eigenschaften

$$V^*U + U^*V = 0 = UV^* + VU^*,$$
$$U^*U + V^*V = \mathbb{1} = UU^* + VV^*,$$

dann existiert ein eindeutig bestimmter $^*$-Automorphismus $\gamma$ von $\mathcal{A}(\mathcal{H})$, die sogenannte $Bogoliubov - Transformation$, so daß gilt:

$$\gamma\big(a(f)\big) = a(Uf) + a^*(Vf).$$

**Theorem 1.34** Mit den obigen Bezeichnungen betrachten wir zwei von den Elementen $W_i(f) \neq 0$ erzeugten $C^*$-Algebren mit

(i) $W_i(-f) = W_i(f)^*$,

(ii) $W_i(f)W_i(g) = e^{-i\sigma(f,g)/2} W_i(f+g) \; \forall f, g \in \mathcal{H}$,

wobei $\sigma : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ eine nicht degenerierte, symplektische Bilinearform auf einem reellen linearen Raum $H$ ist. Dann existiert genau ein $^*$-Isomorphismus

$$\alpha : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2 \quad \alpha\big(W_1(f)\big) = W_2(f) \quad \forall f \in H.$$

Weiterhin gilt:

(i) $W(0) = \mathbb{1}$, $W(f)$ ist unitär $\forall f \in \mathcal{H}$, und $\|W(f) - \mathbb{1}\| = 2 \; \forall f \in \mathcal{H},\; f \neq 0$.

(ii) Falls $H \neq \{0\}$, dann ist $\mathcal{A}(H)$ nicht separabel.

(iii) $\mathcal{A}(H)$ ist einfach.

(iv) Sei $T$ ein reeller, linearer und invertierbarer Operator auf $H$ mit

$$\sigma(Tf, Tg) = \sigma(f, g) \quad \forall f, g \in H,$$

dann existiert genau ein $^*$-Automorphismus $\gamma$ von $\mathcal{A}(H)$ mit

$$\gamma\big(W(f)\big) = W(Tf).$$

Wir können also davon ausgehen, daß in beiden Fällen die $C^*$-Algebra durch die (Anti-)Kommutatorrelationen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

## 1.3 Drei Sätze aus der Funktionentheorie

Wir werden im Hauptteil dieser Arbeit einige funktionentheoretische Sätze gebrauchen, die wir an dieser Stelle ohne Beweis wiedergeben.

**Theorem 1.35 (3-Linien-; Phragmen-Lindelöf)** Sei

$$\mathbf{D} := \{z \in \mathbb{C} : \ a < \mathrm{Im} z < b\}$$

der offene Streifen in $\mathbb{C}$ und $f$ eine auf $\mathbf{D}$ analytische und auf $\overline{\mathbf{D}}$ beschränkte und stetige komplexwertige Funktion. Dann ist die Funktion

$$[a, b] \ni y \mapsto g(y) := \log\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + iy)|\right)$$

konvex und es gilt im besonderen

$$\sup_{z \in \overline{\mathbf{D}}} |f(z)| = \max\left\{\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + ia)|, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + ib)|\right\}.$$

Aus der Quantenfeldtheorie verwenden wir ein Spezialfall des folgenden

**Theorem 1.36 (Edge-of-the-Wedge-)** Sei $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}$ eine offene und zusammenhängende Menge mit $\mathcal{V} := \mathcal{O} \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, und

$$\mathbf{D} := \{z := x + iy \in \mathbb{C} : \ y > 0\} \cap \mathcal{O}.$$

Ist weiterhin $F$ eine auf $\mathbf{D}$ holomorphe und auf $\mathbf{D} \cup \mathcal{V}$ stetige komplexwertige Funktion mit $F(x) = 0$ für alle $x \in \mathcal{V}$, dann folgt $F(z) = 0$ für alle $z \in \mathcal{D}$.

Zuletzt erwähnen wir den folgenden Satz aus der Funktionentheorie.

**Satz 1.37 (Paley-Wiener)** Eine Funktion $f$ ist genau dann das inverse Fouriertransformierte der Funktion $\widehat{f} \in \mathcal{D}$ mit dem Träger $[-R, R]$, wenn $f$ überall analytisch ist, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_n$ existiert, so daß

$$|f(z)| \leq C_n(1 + |z|)^{-n} e^{R|\mathrm{Im} z|}$$

gilt.

# Kapitel 2

# KMS-Zustände, ihre Menge und die Modular-Theorie

Die drei gängigsten Formalismen für die Beschreibung von Gleichgewichtszuständen sind das mikrokanonische Ensemble (Energie und Teilchenanzahl sind konstant), das kanonische Ensemble (Zustände mit variabler Energie bei festgehaltener Teichenanzahl) und das großkanonische Ensemble (variable Energie und Teilchenanzahl). Alle drei Zugänge können auch algebraisch formuliert werde, jedoch die großkanonische bietet sich ganz besonders an. Wir halten uns in diesem Kapitel an [BR81], [aW92], [KR83], [Sak91] und [Thi83].
Ein Gleichgewichtszustand im Gibbsschen großkanonischen Ensemble wird beschrieben durch

$$\omega_{\beta,\mu}(A) = \frac{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left(e^{-\beta(H-\mu N)}A\right)}{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left(e^{-\beta(H-\mu N)}\right)},$$

wobei $H$ die Hamiltonfunktion, $N$ die Teilchenzahl und $\beta, \mu \in \mathbb{R}$ sind. Es wird jedoch hier angenommen, daß $e^{-\beta(H-\mu N)}$ ein Spurklassenoperator ist. Beim Übergang zu unendlich ausgedehnten Systemen geht diese Eigenschaft allerdings verloren. Diese Bedingung spielt bei der Einführung der Evolution

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \tau_t(A) := e^{it(H-\mu N)}Ae^{-it(H-\mu N)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

keine Rolle, die immer existiert, solange $H$ selbstadjungiert ist. Mit Hilfe der Evolution kann man dann die $(\tau,\beta)$-KMS-Bedingung

$$\omega_{\beta,\mu}\big(A\tau_t(B)\big)|_{t=i\beta} = \omega_{\beta,\mu}(BA)$$

definieren. Die $(\tau,\beta)$-KMS-Zustände können dann mit Gleichgewichtszuständen identifiziert werden.

## 2.1 KMS-Zustände

**Definition 2.1** Ein $C^* - dynamisches\ System$ ist ein Tripel $(\mathcal{A}, \mathbf{G}, \alpha)$, bestehend aus einer $C^*$-Algebra $\mathcal{A}$, einer lokal kompakten Gruppe $\mathbf{G}$ und einer stark stetigen Darstellung $\alpha$ von $\mathbf{G}$ in die Gruppe der Automorphismen von $\mathcal{A}$, d.h. für alle $g \in \mathbf{G}$ ist $\alpha_g$ ein Automorphismus von $\mathcal{A}$ mit

$$\alpha_e = 1 \text{ und } \alpha_{g_1}\alpha_{g_2} = \alpha_{g_1 g_2}.$$

Man definiert ein $W^* - dynamisches\ System$ auf die gleiche Weise, nur mit dem Unterschied, daß schwache Stetigkeit für die Darstellung $\alpha$ gefordert wird. Wir werden ab jetzt nur das $C^*$-dynamisches System $(\mathcal{A}, \mathbb{R}, \tau)$ betrachten und es mit $(\mathcal{A}, \tau)$ abkürzen. Mit $\mathcal{A}_\tau$ bezeichnen wir die Menge der analytischen Elemente für $\tau$.
Falls $\mathcal{A}$ keine Identität besitzt, kann man sie trotzdem unital machen durch:

$$\begin{gathered}(\mathcal{A}, \tau) \to (\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\tau}) \quad \text{mit} \\ \tilde{\mathcal{A}} := \mathbb{C}\mathbb{1} + \mathcal{A}, \quad \omega(\lambda\mathbb{1} + A) := \lambda\|A\| + \omega(A) \quad \text{und} \\ \tilde{\tau} : \tilde{\mathcal{A}} \ni (\alpha, A) \mapsto \tilde{\tau}_t(\alpha, A) := \big(\alpha, \tilde{\tau}_t(A)\big)\end{gathered}$$

Der Vorteil einer Algebra mit $\mathbb{1}$ ist der, daß die Menge der Zustände auf $\mathcal{A}$ $\mathbf{E}_\mathcal{A}$ kompakt im Sinne der schwach$^*$-Topologie ist.

**Definition 2.2** Eine *kovariante Darstellung* eines $C^*$-dynamischen Systems ist ein Tripel $(\mathcal{H}, \pi, U)$, bestehend aus einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, einer nicht entarteten Darstellung $\pi$ von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{H}$ und einer stark stetigen, unitären Darstellung $U$ von $G$ auf $\mathcal{H}$ mit

$$\pi\left(\alpha_g(A)\right) = U_g \pi(A) U_g^*, \qquad A \in \mathcal{A},\ g \in G.$$

**Definition 2.3** Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ ein $C^*$-dynamisches System. Ein Zustand $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ heißt ein $\tau - KMS - Zustand$ bzgl. $\beta \in \mathbb{R}$, oder $(\tau, \beta) - KMS - Zustand$ falls er die $KMS - Bedingung$

$$\omega\left(A\tau_{i\beta}(B)\right) = \omega(BA)$$

für alle $A, B$ in einer normdichten, $\tau$-invarianten $^*$-Unteralgebra von $\mathcal{A}_\tau$ erfüllt.

Man kann sich bei Untersuchungen von $(\tau, \beta)$-KMS-Zuständen auf $\tau - KMS - Zustände$ (d.h. $\beta = -1$) beschränken, denn $\omega$ ist genau dann ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand , falls er ein $(\tau_{-\beta t}, -1)$-KMS-Zustand ist. Weiterhin kann man $\tau$ als ein Maß verstehen, der die Abweichung des $(\tau, \beta)$-KMS-Zustandes $\omega$ von einem Spurzustand $(\tau, 0)$-KMS-Zustand, also $\omega(AB) = \omega(BA)$, angibt.

**Beispiel 2.4** Sei $\mathcal{A} := \mathbf{M}_n$, die Menge der $n \times n$-Matrizen auf dem n-dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}_n$ und definiere für $H = H^* \in \mathbf{M}_n$

$$\tau_t(A) := e^{itH} A e^{-itH}.$$

Dann ist der Gibbs-Zustand

$$\omega_\beta(A) := \frac{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_n}(e^{-\beta H} A)}{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_n}(e^{-\beta H})}$$

der einzige $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand auf $\mathcal{A}$. Denn sei $\omega \neq \omega_\beta$ ein zweiter $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand , dann ist $(\omega + \omega_\beta)/2 \in \mathbf{K}_\beta$ aber $(\omega + \omega_\beta)/2 \notin \mathbf{E}(\mathbf{K}_\beta)$, der Menge der Extremalpunkte von $\mathbf{K}_\beta$ , d.h. der gemischte Zustand $(\omega + \omega_\beta)/2$ ist kein Faktorzustand. Dies steht im Widerspruch dazu, daß alle Zustände auf $\mathbf{M}_n$ Faktorzustände vom Typ I sind.

**Lemma 2.5** Sei $\omega$ ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand über der C*-Algebra $\mathcal{A}$ (oder W*-Algebra $\mathcal{M}$) mit $\beta \neq 0$. Dann ist $\omega$ $\tau - invariant$, d.h.

$$\omega\big(\tau_t(A)\big) = \omega(A)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$ (oder $A \in \mathcal{M}$) und $t \in \mathbb{R}$.

**Beweis:**

Zunächst nehmen wir die Eichung $\beta = -1$ vor. Sei $B$ ein Element aus der normdichten $\tau$-invarianten $^*$-Unteralgebra $\mathcal{B}_\tau \subset \mathcal{A}_\tau$, dann ist $F(z) := \omega\big(\tau_z(B)\big)$ analytisch und beschränkt auf dem Streifen $\overline{D} := \{z \in \mathbb{C} | -1 \leq \mathrm{Im} z \leq 0\}$ durch $M := \sup\{\|\omega\big(\tau_{i\gamma}(B)\big)\| | \gamma \in [-1, 0]\}$, denn

$$|F(z) = \|\omega\big(\tau_z(B)\big)\| \leq \|\tau_z(B)\| \overset{\tau_{s+t} = \tau_s\tau_t}{=} \|\tau_{\mathrm{Re} z}\big(\tau_{\mathrm{Im} z}(B)\big)\| \overset{\|\tau_{t \in \mathbb{R}}\| = 1}{=} \|\tau_{\mathrm{Im} z}(B)\|,$$

und im Falle einer unitalen Algebra $\mathcal{A}$ ist $F(z)$ periodisch mit der Periode $-i$

$$F(z - i) = \omega\big(\mathbb{1}\tau_{-i}[\tau_z(B)]\big) \overset{\text{KMS-Bed.}}{=} \omega\big(\tau_z(B)\mathbb{1}\big) = F(z),$$

also ist $|F(z)| \leq M \ \forall z \in \mathbb{C}$. Mit Hilfe des Theorems von Liouville können wir $F(z) = \mathrm{const}$ schließen, und da $\mathcal{B}_\tau$ dicht in $\mathcal{A}$ liegt, muß $\omega$ $\tau$-invariant sein. Besitzt die Algebra keine $\mathbb{1}$, dann kann man entweder die Algebra unitalisieren, oder man approximiert die $\mathbb{1}$ geeignet.

□

**Theorem 2.6 (Äquivalente Formulierungen der KMS-Bedingung)** Seien $(\mathcal{A}, \tau)$ ein $C^*$-dynamisches System und $\omega$ ein Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\omega$ ist ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand .

(ii) $\omega\left(\tau_{-i\beta/2}(A)\tau_{i\beta/2}(B)\right) = \omega(AB)$.

(iii) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ existiert eine auf

$$\mathbf{D}_\beta := \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < \operatorname{Im} z < \beta\} & , \beta \geq 0 \\ \{z \in \mathbb{C} : \ \beta < \operatorname{Im} z < 0\} & , \beta \leq 0 \end{cases}$$

analytische und auf $\overline{\mathbf{D}_\beta}$ ($= \mathbb{R}$ für $\beta = 0$) stetige Funktion $F_{AB}$ mit

$$F_{AB}(t) = \omega\big(A\tau_t(B)\big) \quad \text{und} \quad F_{AB}(t + i\beta) = \omega\big(\tau_t(B)A\big) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\omega\big(A\tau_t(B)\big)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+i\beta)\omega\big(\tau_t(B)A\big)dt \quad \forall A, B \in \mathcal{A}, \ \forall \widehat{f} \in \mathcal{D}$.

(v) Die Maße

$$\mu_A(\widehat{f}) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\omega\big(A^*\tau_t(A)\big)dt \text{ und } \nu_A(\widehat{f}) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\omega\big(\tau_t(A)A^*\big)dt$$

auf $\mathcal{D}$ sind für alle $A \in \mathcal{A}$ äquivalent mit der $Radon-Nikodym-$ *Ableitung*

$$\frac{d\mu_A}{d\nu_A}(p) = e^{-\beta p} \Longleftrightarrow d\mu_A(p) \geq e^{-\beta p} d\mu_{A^*}(p).$$

(vi) [**Roepstorff-Araki-Sewell**] Sei $\delta := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\tau_t(A) - A\big)$ ein $infinitesimaler$ *Erzeuger* von $\tau$. Dann gilt für alle $A \in \mathbf{D}(\delta) := \{A \in \mathcal{A} : \ \exists \delta(A)\}$ die sogenannte untere Autokorrelationsschranke

$$\begin{aligned} -i\beta\omega\big(A^*\delta(A)\big) &\geq \omega(A^*A)\log\left(\frac{\omega(A^*A)}{\omega(AA^*)}\right) \\ &:= \begin{cases} \omega(A^*A)\log\left(\frac{\omega(A^*A)}{\omega(AA^*)}\right) & , \omega(A^*A), \omega(AA^*) > 0 \\ 0 & , \omega(A^*A) = 0, \ \omega(AA^*) \geq 0 \\ +\infty & , \omega(A^*A) > 0, \ \omega(AA^*) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathrm{i}) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & (\mathrm{ii}) & (\mathrm{vi}) \arrow[d, Rightarrow] & \\
(\mathrm{iii}) & (\mathrm{iv}) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{v}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathrm{vii}) \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 2.1: *Beweisstrategie*

(vii) [**Roepstorff-Fannes-Verbeure**] Sei $\omega$ $\tau$-invariant. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}_\tau$ die sogenannte obere Autokorrelationsschranke

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\beta}\int_0^\beta \omega\big(A^*\tau_{i\lambda}(A)\big)d\lambda &\leq \frac{\omega(A^*A)-\omega(AA^*)}{\log\big(\omega(A^*A)/\omega(AA^*)\big)} \\
&:= \begin{cases} \frac{\omega(A^*A)-\omega(AA^*)}{\log\big(\omega(A^*A)/\omega(AA^*)\big)} & ,\omega(A^*A) \neq \omega(A^*A), \\ & \ \omega(A^*A), \omega(AA^*) > 0 \\ \omega(A^*A) & ,\omega(A^*A) = \omega(A^*A) > 0 \\ 0 & ,\omega(A^*A)\omega(A^*A) = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

**Beweis:**
Wir folgen der in Abbildung 2.1 dargestellten Beweisstrategie.

(i)$\Longleftrightarrow$(ii)

$$
\begin{aligned}
\omega(BA) = \omega\big(A\tau_{i\beta}(B)\big) &= \omega\big[\big(\tau_{i\beta/2}\big(\tau_{-i\beta/2}(A)\tau_{i\beta/2}(B)\big)\big] \\
&\overset{\tau-\text{Inv.}}{=} \omega\big[\tau_{-i\beta/2}(A)\tau_{i\beta/2}(B)\big]
\end{aligned}
$$

□

(i)$\Rightarrow$(iii) Die Funktion $F_{AB}(z) := \omega\big(A\tau_z(B)\big),\ z \in \mathbb{C}$, ist für $t \in \mathbb{R}$ überall analytisch und

$$F_{AB}(t+i\beta) = \omega\big[A\tau_{i\beta}\big(\tau_t(B)\big)\big]$$

Nach Prop. 1.32 ist $z \mapsto \tau_z(B)$ stark analytisch und damit ist $[0,\beta] \mapsto \|\tau_{i\gamma}(B)\|$ stetig und beschränkt. Also gilt für $t + i\gamma \in D_\beta$

$$
\begin{aligned}
|F_{AB}(t+i\beta)| = |\omega\big(A\tau_{t+i\gamma}(B)\big)| \leq \|A\tau_t\big(\tau_{i\gamma}(B)\big)\| &= \|A\|\|\tau_{i\gamma}(B)\| \\
\leq M\|A\|,
\end{aligned}
$$

mit $M := \sup\{\|\tau_{i\gamma}(B)\| \,|\, \gamma \in [0,\beta]\}$, und somit stimmt (iii) für $A, B \in \mathcal{B}_\tau$. Seien nun $A, B \in \mathcal{A}$. Wir wählen Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{B}_\tau$ mit den Eigenschaften

$$\begin{array}{cc} \|A_n\| \le \|A\| & \|B_n\| \le \|B\|, \\ \pi_\omega(A_n)\Omega_\omega \to \pi_\omega(A)\Omega_\omega & \pi_\omega(B_n)\Omega_\omega \to \pi_\omega(B)\Omega_\omega, \\ \pi_\omega(A_n^*)\Omega_\omega \to \pi_\omega(A)^*)\Omega_\omega & \pi_\omega(B_n^*)\Omega_\omega \to \pi_\omega(B^*)\Omega_\omega. \end{array}$$

Mit $F_n(z) := F_{A_n,B_n},\ z \in \overline{D_\beta}$, gilt wegen des 3-Linien-Theorems dann

$$\begin{aligned} |F_n(z) - F_m(z)| \le \max\big\{&\sup_{t\in\mathbb{R}}|\omega\big(A_n\tau_t(B_n)\big) - \omega\big(A_m\tau_t(B_m)\big)|, \\ &\sup_{t\in\mathbb{R}}|\omega\big(\tau_t(B_n)A_n\big) - \omega\big(\tau_t(B_m)A_m\big)|\big\} \\ \le\ & \|B\|\big[\|\pi_\omega(A_n^* - A_m^*)\Omega_\omega\| + \|\pi_\omega(A_n - A_m)\Omega_\omega\|\big] \\ &+ \|A\|\big[\|\pi_\omega(B_n^* - B_m^*)\Omega_\omega\| + \|\pi_\omega(B_n - B_m)\Omega_\omega\|\big], \end{aligned}$$

d.h. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge auf $\overline{D_\beta}$. Die Grenzfunktion ist damit auf $\overline{D_\beta}$ beschränkt und stetig. Weiterhin folgt:

$$\begin{aligned} F_{A,B}(t) &= \lim_{n\to\infty} F_{A_n,B_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \omega\big(A_n\tau_t(B_n)\big) = \omega\big(A\tau_t(B)\big) \\ F_{A,B}(t+i\beta) &= \lim_{n\to\infty} F_{A_n,B_n}(t+i\beta) = \lim_{n\to\infty} \omega\big(\tau_t(B_nA_n)\big) = \omega\big(\tau_t(B)A\big) \quad (\star) \end{aligned}$$

□

(iii)⇒(i) Sei $G_{A,B}(z) := \omega\big(A\tau_z(B)\big),\ A, B \in \mathcal{A}_\tau,\ \forall z \in \mathbb{C}$. Für reelle $t$ ist $G_{A,B}(t) = F_{A,B}(t)$ also überall analytisch und mit Hilfe des Edge-of-the-Wedge-Theorems 1.36 folgt

$$\begin{aligned} G_{A,B}(z) &= F_{A,B}(z) \quad \forall z \in \overline{D_\beta}, \quad \text{also} \\ \omega\big(A\tau_{i\beta}(B)\big) &= F_{A,B}(i\beta) \overset{(\star)}{=} \omega(BA). \end{aligned}$$

□

(i)⇒(iv) Für $B \in \mathcal{A}_\tau$ ist $z \mapsto \omega\big(A\tau_z(B)\big)$überall analytisch, und nach dem Satz von Paley-Wigner 1.37 ist die Funktion $z \mapsto f(z)\omega\big(\tau_z(B)A\big)$ ebenfalls überall analytisch und verschwindet für $\mathrm{Re}(z) \to \infty$ schneller als $|\mathrm{Re}(z)|^{-2}$, falls $|\mathrm{Im}(z)| \le \beta$. Wir können also schließen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\omega\big(A\tau_t(B)\big)\,dt \overset{t\in\mathbb{R}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\omega\big(\tau_{t+i\beta}(B)A\big)\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t+i\beta)\omega\big(\tau_t(B)A\big)\,dt.$$

Die Verallgemeinerung auf $B \in \mathcal{A}$ erfolgt mit Hilfe der Stetigkeits- und Abfalleigenschaften von $f$.

□

(iv)⇒(i) Wir betrachten eine Funktionenfolge mit Werten in $[0,1]$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & , |x| \leq n \\ 0 & , |x| \geq n+1. \end{cases}$$

Dann gilt für eine beliebige aber beschränkte und stetige Funktion $g$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x) = g(0),$$

und damit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\omega\big(A\tau_t(B)\big)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\omega\big(\tau_{t-i\beta}(B)A\big)\,dt$$
$$\Longleftrightarrow \qquad \omega(AB) = \omega\big(\tau_{-i\beta}(B)A\big)$$
$$\Longleftrightarrow \qquad \omega(A\big(\tau_{i\beta}(B)\big) = \omega(BA).$$

□

(iv)⇒(v)

$$\begin{aligned}
\mu_A(\widehat{f}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\omega\big(A^*\tau_t(A)\big)\,dt \\
&\overset{(iv)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+i\beta)\omega\big(\tau_t(A)A^*\big)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(p)e^{ip(t+i\beta)}dp\,\omega\big(\tau_t(A)A^*\big)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(p)e^{-\beta p}e^{ipt}dp\,\omega\big(\tau_t(A)A^*\big)\,dt \\
&= \nu_A(e^{-\beta p}\widehat{f}).
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{d\mu_A}{d\nu_A}(p) = e^{-\beta p}.$$

□

(v)⇒(iv)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\omega\big(A^*\tau_t(A)\big)dt = \mu_A(\widehat{f}) = \nu_A(e^{-\beta p}\widehat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+i\beta)\omega\big(\tau_t(A)A^*\big)dt$$

(vi)⇒(v) $\underline{\beta = 0}$:

$$0 \geq \omega(A^*A)\log\Big(\frac{\omega(A^*A)}{\omega(AA^*)}\Big)$$
$$\Longleftrightarrow \omega(AA^*) \geq \omega(A^*A).$$

Durch Vertauschung $A \longleftrightarrow A^*$ erhalten wir

$$\omega(AA^*) = \omega(A^*A),$$

d.h. $\omega$ ist ein Spurzustand.
$\underline{\beta \neq 0}$:

(A) $\omega$ ist $\tau$-invariant, denn wegen $\omega\big(A\delta(A)\big) \in i\mathbb{R}$ für alle $A = A^* \in \mathbf{D}(\delta)$ gilt:

$$\begin{aligned}\omega\big(\tau_t(A^2)\big) - \omega(A^2) &= \int_0^t \big(\delta[\tau_t^2(A)]\big)ds \\ &= \int_0^t \big\{\omega\big(\delta(A)A\big) + \omega\big(A\delta(A)\big)\big\}ds \\ &= 0.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt wegen:

$$\omega\big(\delta(A)A\big) = \omega\big(\delta^*(A)A\big) = \overline{\omega\big(A^*\delta(A)\big)} = -\omega\big(A\delta(A)\big).$$

Da nun jedes positive $B \in \mathcal{A}$ als $B = A^2$, aber auch als Linearkombination von vier positiven Elementen beschrieben werden kann, ist die $\tau$-Invarianz bewiesen.

(B) $\tau_f(A) := \int f(t)\tau_t(A)dt \ \ \widehat{f} \in \mathcal{D}$, ist überall analytisch für $\delta$ und $\tau_f(A) \in \mathbf{D}(\delta)$.

$$\begin{aligned}
U_\omega(f) &= \int f(t) U_\omega(t) dt \\
&= \int\int f(t) e^{-ipt} dE(p) dt \\
&= \int \widehat{f}(p) dE(p) \\
&= \widehat{f}(-H_\omega).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-i\beta\omega\big(\tau_f(A)^*\delta[\tau_t(A)]\big) &= -i\beta\big(U_\omega(f)\pi_\omega(A)\Omega_\omega, iH_\omega U_\omega(f)\pi_\omega(A)\Omega_\omega\big) \\
&= \big(\pi_\omega(A)\Omega_\omega, \beta\overline{\widehat{f}(-H_\omega)}H_\omega \widehat{f}(-H_\omega)\pi_\omega(A)\Omega_\omega\big) \\
&= \mu_A\big(\log(e^{-\beta p})|\widehat{f}(p)|^2\big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega\big(\tau_f(A)^*\tau_f(A)\big) &= \mu_A(h) \\
\omega\big(\tau_f(A)\tau_f(A)^*\big) &= \nu_A(h) \\
i\beta\omega\big(\tau_f(A)\delta[\tau_f(A)^*]\big) &= -\nu_A\big(\log(e^{-\beta p})h\big),
\end{aligned}$$

wobei wir die die abkürzende Schreibweise $h(p) := |\widehat{f}(p)|^2$ benutzt haben. Aufgrund der $\tau$-Invarianz (A) lautet (vi):

$$\begin{aligned}
\mu_A\big(\log(e^{-\beta p})h\big) &\geq S\big(\mu_A(h), \nu_A(h)\big) \quad \text{bzgl.} \quad \tau_f(A)^* \\
\nu_A\big(\log(e^{-\beta p})h\big) &\geq S\big(\nu_A(h), \mu_A(h)\big) \quad \text{bzgl.} \quad \tau_f(A).
\end{aligned}$$

$\underline{\beta > 0}$: Seien:

$$\overline{p}(h) := \sup\big(\operatorname{supp} h(p)\big), \qquad \underline{p}(h) := \inf\big(\operatorname{supp} h(p)\big).$$

Mit

$$-\beta\overline{p}(h)h \leq h\log e^{-\beta p} \leq -\underline{p}(h)h$$

erhalten wir für die untere Autokorrelationsschranke:

$$-\underline{p}(h)\mu_A(h) \geq S\big(\mu_A(h), \nu_A(h)\big)$$
$$\beta\overline{p}(h)\nu_A(h) \geq S\big(\nu_A(h), \mu_A(h)\big)$$

$$\Longleftrightarrow e^{-\beta\underline{p}(h)}\nu_A(h) \geq \mu_A(h) \geq e^{-\beta\overline{p}(h)}\nu_A(h). \qquad \text{(I)}$$

Die Ungleichungen

$$e^{-\beta\underline{p}(h)}h \geq he^{-\beta p} \geq e^{-\beta\overline{p}(h)}h$$

führen zu:

$$e^{-\beta\underline{p}(h)}\nu_A(h) \geq \nu_A(he^{-\beta p}) \geq e^{-\beta\overline{p}(h)}\nu_A(h). \qquad \text{(II)}$$

Aus (I) und (II) bekommen wir für eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $h_n \in \mathcal{D}$ positiv, mit den Eigenschaften

$$\sum_n h_n = 1 \qquad \text{und} \qquad |e^{-\beta\underline{p}(h_n)} - e^{-\beta\overline{p}(h_n)}| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

die Ungleichung:

$$|\mu_A(hh_n) - \nu_A(hh_ne^{-\beta p})| < \varepsilon\nu_A(hh_n).$$

Schließlich gelangen wir mit Hilfe des Lebesgue-Theorems zu der maßtheoretischen Formulierung der KMS-Bedingung:

$$\mu_A(h) = (he^{-\beta p}).$$

$\underline{\beta < 0}$: Die Argumentation für diesen Fall erfolgt genauso.

□

(v)⇒(vii) Sei $\underline{\beta \neq 0}$ und $A \in \mathcal{A}_\tau$. Die Funktion $f(t) := \log\Big(\int e^{tp}d\mu(p)\Big)$ ist konvex, denn

$$f''(t) = \frac{\int e^{tp}d\mu \int p^2e^{tp}d\mu - \big(\int pe^{tp}d\mu\big)^2}{\big(\int e^{tp}d\mu\big)^2} \geq 0,$$

und insbesondere $f(t) \leq (1-t)f(0) + tf(1)$. Somit folgt:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^p - 1}{p} d\mu(p) &= \int_0^1 e^{f(t)} dt \leq \int_0^1 e^{f(0)} e^{t\left(f(1)-f(0)\right)} dt \\
&= \frac{e^{f(1)} - e^{f(0)}}{f(1) - f(0)} \\
&= \frac{\int d\mu(p) - \int e^p d\mu(p)}{\log\left(\int d\mu(p) / \int e^p d\mu(p)\right)} \\
&= \frac{\int e^p d\mu(p) - \int d\mu(p)}{\log\left(\int e^p d\mu(p) / \int d\mu(p)\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \qquad & \int \frac{e^p - 1}{p} d\mu(p) \leq \frac{\int e^p d\mu(p) - \int d\mu(p)}{\log\left(\int e^p d\mu(p) / \int d\mu(p)\right)} \\
\overset{\text{Umskalierung}}{\Longleftrightarrow} \qquad & \mu\Big(\frac{1 - e^{\beta P}}{-\beta p}\Big) \leq \frac{\mu_A\big(e^{\beta P}\big) - \mu_A(1)}{\log\big(\mu_A\big(e^{\beta P}\big)/\mu_A(1)\big)} \\
\overset{\mu_A\left(e^{\beta P}\right) = \nu_A(1)}{\Longleftrightarrow} \qquad & \mu\Big(\frac{1 - e^{\beta P}}{\log\big(e^{-\beta p}\big)}\Big) \leq \frac{\nu_A(1) - \mu_A(1)}{\log\big(\nu_A(1)/\mu_A(1)\big)} \\
\Longleftrightarrow \qquad & \frac{1}{\beta} \int_0^\beta \omega\big(A^* \tau_{i\lambda}(A)\big) d\lambda \leq \frac{\omega(A^*A) - \omega(AA^*)}{\log\big(\omega(A^*A)/\omega(AA^*)\big)}
\end{aligned}$$

Der Fall $\underline{\beta = 0}$ kann ähnlich bewiesen werden.

□

(vii)⇒(vi) Wir fangen mit der Umskalierung $\beta = 1$ an. Da die Funktion

$$f(p) := \frac{e^p - 1}{p} = \int_0^1 e^{pt} dt$$

konvex und streng monoton wachsend ist, existiert auf $\mathbb{R}_+$ ihre streng monoton steigende, konkave Umkehrfunktion

$$g\Big(\frac{e^p - 1}{p}\Big) = p.$$

Die obere Autokorrelationsschranke

$$\int \frac{e^p - 1}{p} \frac{d\mu_A(p)}{\omega(A^*A)} \leq \frac{\frac{\omega(AA^*)}{\omega(A^*A)} - 1}{\log\big(\omega(AA^*)/\omega(A^*A)\big)}$$

führt zur unteren Autokorrelationsschranke:

$$
\begin{aligned}
\frac{i\omega\big(A^*\delta(A)\big)}{\omega(A^*A)} &= \frac{\big(\pi_\omega\Omega_\omega, -H_\omega\pi_\omega(A)\Omega_\omega\big)}{\omega(A^*A)} \\
&= \int p \frac{d\mu_A(p)}{\omega(A^*A)} \\
&= \int g\Big(\frac{e^p-1}{p}\Big)\frac{d\mu_A(p)}{\omega(A^*A)} \\
&\leq g\Big(\int \frac{e^p-1}{p}\frac{d\mu_A(p)}{\omega(A^*A)}\Big) \\
&\leq g\Big(\frac{\frac{\omega(AA^*)}{\omega(A^*A)}-1}{\log\big(\omega(AA^*)/\omega(A^*A)\big)}\Big) \\
&= \log\Big(\frac{\omega(AA^*)}{\omega(A^*A)}\Big).
\end{aligned}
$$

Wir haben bei der ersten Ungleichung die stetige und konkave Eigenschaft der Funktion $g$ ausgenutzt. Da nun $\mathcal{A}_\tau$ der Kern von $\delta$ ist, sind diese Ungleichungen für alle $A \in D(\delta)$ richtig.

□

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden wir sehen, daß die Variable $\beta$ als das Inverse der Temperatur eines physikalischen Zustandes gedeutet werden kann.

**Definition 2.7** Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ $C^*$-dynamisches System, $\omega$ ein Zustand auf $\mathcal{A}$ und $\delta$ der Generator von $\tau$. Dann heißt $\omega$ ein $\tau -$ *Grund*$-$ bzw. $\tau -$ *Deckenzustand*, wenn

$$-i\omega\big(A^*\delta(A)\big) \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad i\omega\big(A^*\delta(A)\big) \geq 0$$

für alle $A \in \mathbf{D}(\delta)$ gilt.

Im ersten Fall spricht man auch vom $(\tau, +\infty)$-KMS-Zustand und im zweiten vom $(\tau, -\infty)$-KMS-Zustand. Ist $\beta = 0$, d.h. $T = \infty$, dann liegt ein *chaotischer Zustand* vor. Wir können mit Hilfe der verschiedenen Definitionen des $(\tau, \beta)$-KMS-Zustandes diese speziellen Zustände unterschiedlich charakterisieren.

**Beispiel 2.8** Sei $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ die CAR-Algebra über den Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\tau$ eine einparametrige Gruppe von Bogoliubov-Transformationen mit $\tau_t\big(a(f)\big) := a(e^{itH}f)$. Ist $f$ ein analytisches Element für $\mathcal{H}$, dann besagt die $(\tau, \beta)$-KMS-Bedingung:

$$\begin{aligned}\omega\big(a^*(f)a(g)\big) &\overset{\text{KMS}}{=} \omega\big(a(g)\tau_{i\beta}[a^*(f)]\big) = \omega\big(a(g)a^*(e^{-\beta H}f)\big)\\ &= (g, e^{-\beta H}f) - \omega\big(a^*(e^{-\beta H}f)a(g)\big)\\ \Longleftrightarrow \qquad & \omega\big(a^*[(\mathbb{1} + e^{-\beta H})f]a(g)\big) = (g, e^{-\beta H}f).\end{aligned}$$

Also lautet der eindeutige $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand

$$\omega\big(a^*(f)a(g)\big) = \big(g, e^{-\beta H}(\mathbb{1} + e^{-\beta H})^{-1}f\big).$$

Diese Zweipunktfunktion ist eichinvariant.

Die Grund- und Deckenzustände sind genau dann eindeutig, wenn es kein bzgl. der unitären Gruppe $U_t := e^{itH}$ invariantes $f \in \mathcal{H},\ f \neq 0$, gibt.

“ $\Longleftarrow$”: Nehmen wir an, daß es kein invariantes $f$ gibt und $\omega$ sei der Grundzustand. Es folgt, daß $\omega$ $\tau$-invariant und gerade ist. Mit Hilfe der Eigenschaften Linearität und Positivität kann man für $0 \leq T \leq 1$ schließen:

$$\omega\big(a^*(f)a(g)\big) = (g, Tf).$$

$T$ vertauscht stark mit $H$, denn $T$ vertauscht mit $U_t$ aufgrund der $\tau$-Invarianz. Die Bedingung an Grundzustände $-i\omega\big(A^*\delta(A)\big) \geq 0$ führt mit $A = a(f) = a^*(f),\ f \in D(H)$ zu:

$$\begin{aligned} TH = HT \leq 0, \qquad TH = HT \leq H\\ \Longrightarrow \qquad T = E_H(-\infty, 0).\end{aligned}$$

$E_H$ steht für die Spektralfamilie von $H$. Weiterhin gilt:

$$\pi_\omega\big(a[(\mathbb{1} - T)f]\big)\Omega_\omega = 0, \qquad \pi_\omega\big(a^*(Tf)\big)\Omega_\omega = 0,$$

und damit:

$$\omega\big(a(g_1)a(g_2)\big) = \omega\big(a[(\mathbb{1} - T)g_1]a(Tg_2)\big) = -\omega\big(a(Tg_2)a[(\mathbb{1} - T)g_1\big) = 0.$$

“ $\Longrightarrow$”: Sei $U_t f = f$ und $f \neq 0$. Man kann dann zeigen, daß für das Komplement $f^\perp$ von $f$ in $\mathcal{H}$ $\mathcal{A}(\mathcal{H}) \cong \mathcal{A}(\mathbb{C}f) \otimes \mathcal{A}(f^\perp)$ gilt. Sind also $\omega_f$ irgendein Zustand über $\mathcal{A}(\mathbb{C}f)$ und $\omega_0$ ein Grundzustand für $\tau$ über $\mathcal{A}(f^\perp)$, dann muß $\omega_f \otimes \omega_0$ ein Grundzustand für $\tau$ sein, d.h. der Grundzustand ist nicht eindeutig.

$$\begin{tikzcd}
\text{(i)} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{(ii)} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & \text{(iv)} \\
& \text{(iii)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(v)} &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2.2: *Diagramm zum Thm. von Pusz-Woronowicz*

□

Zunächst einmal versuchen wir, die KMS-Bedingung zu verallgemeinern. Wenn man sich bei der Definition nicht auf ein bestimmtes $\beta$ festlegt, sondern alle möglichen $\beta \in \mathbb{R}_+$ zulässt, dann kommt man zum Begriff der Passivit ät.

**Definition 2.9** Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ ein $C^*$-dynamisches System, $\omega$ ein Zustand auf der unitalen Algebra $\mathcal{A}$ und $\delta$ der Generator von $\tau$. Dann heißt $\omega$ ein *passiver Zustand*, falls

$$-i\omega\big(U^*\delta(U)\big) \geq 0 \qquad \forall U \in \mathbf{U}_0(\mathcal{A}) \cap \mathbf{D}(\delta).$$

Hierbei ist $U \in \mathbf{U}_0(\mathcal{A})$ die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{1}$ der Gruppe $\mathbf{U}(\mathcal{A})$ aller unitären Elemente von $\mathcal{A}$. Im Falle des $C^*$-dynamisches Systems $\left(\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}, \bigotimes_{j=1}^n \tau\right)$ heißt $\omega$ *vollständig passiv*, wenn $\bigotimes_{i=1}^n \omega$ für alle $n$ passiv ist.

Im Gegensatz zu KMS-Zuständen sind Linearkombinationen passiver Zustände wieder passiv.

**Theorem 2.10 (Pusz-Woronowicz)** Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ $C^*$-dynamisches System, $\omega$ ein Zustand auf der unitalen Algebra $\mathcal{A}$, $\delta$ der Generator von $\tau$ und $\delta^{(n)}$ der Generator von $\bigotimes_{j=1}^n \tau$ auf $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}$. Dann gilt für die folgenden Aussagen

(i) $\omega$ ist ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand mit $\beta \in \mathbb{R}_+$.

(ii) $\omega$ ist vollständig passiv.

(iii) $\omega$ ist passiv.

(iv) $-i\,(\bigotimes_{i=1}^n \omega)\,\big(B\delta^{(n)}(B)\big) \geq 0, \qquad \forall B = B^* \in \mathbf{D}(\delta^{(n)}),\ \forall n \in \mathbb{N}.$

(v) $-i\omega\big(B\delta(B)\big) \geq 0, \qquad \forall B = B^* \in \mathbf{D}(\delta).$

das Diagramm (2.2).

**Beweis:**

(i)$\Longrightarrow$(iii) Für $\beta \in (0, +\infty)$ folgt die Aussage aus der unteren Autokorrelationsschranke, und für $\beta = +\infty$ aus der Definition des Grundzustandes.
Sei nun $\beta = 0$, d.h. $\omega(AB) \overset{*}{=} \omega(BA)$. Man kann zeigen, daß für ein unitäres $U \in D(\delta)$ mit der Eigenschaft $\|U - 1\| < 2$ ein $A = A^* \in D(\delta)$ mit $\|A\| < \pi$ und $U = e^{iA}$ existiert, und weiter:

$$\begin{aligned}
\delta(U) &= \lim_{n\to\infty} \delta\left(\left[\mathbb{1} - \frac{iA}{n}\right]^{-n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\mathbb{1} - \frac{iA}{n}\right)^{-m} \delta\left(\left[\mathbb{1} - \frac{iA}{n}\right]^{-1}\right) \left(\mathbb{1} - \frac{iA}{n}\right)^{-n+m+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{i}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\mathbb{1} - \frac{iA}{n}\right)^{-m-1} \delta(A) \left(\mathbb{1} - \frac{iA}{n}\right)^{-n+m} \qquad (\triangle) \\
&= i \int_0^1 e^{irA} \delta(A) e^{i(1-r)A} dr,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \omega\big(U^*\delta(U)\big) &= i \int_0^1 \omega\left(e^{i(r-1)A}\delta(A)e^{-i(1-r)A}\right) dr \overset{*}{=} i\omega\big(\delta(U)\big) \\
&= i\omega\left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\tau_t(A) - A\right)\right) \overset{\tau-\text{Inv.}}{=} 0.
\end{aligned}$$

Für $U, V \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) \cap D(\delta)$ mit $-\omega\big(U^*\delta(U)\big) \geq 0$ und $\|V - U\| < 2$ existiert ein $U_1 := VU^{-1} \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) \cap D(\delta)$ mit $\|U_1 - \mathbb{1}\| = \|VU^{-1} - \mathbb{1}\| = \|U^{-1}\|\|V - U\| < 2$, d.h. also $\omega\big(U_1^*\delta(U_1)\big) = 0$.

$$\begin{aligned}
-\omega\big(V^*\delta(V)\big) &= -\omega\big(U^*U_1^*\delta(U_1U)\big) = -\omega\big(U^*U_1^*\delta(U_1)U\big) - \omega\big(U^*U_1^*U_1\delta(U)\big) \\
&\overset{*}{=} -\omega\big(U_1^*\delta(U_1)\big) - \omega\big(U^*\delta(U)\big) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die Menge aller $U$, $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \cap D(\delta)$, offen und abgeschlossen und beinhaltet $\mathcal{U}_0(\mathcal{A}) \cap D(\delta)$.

$\square$

(i)$\Longrightarrow$(ii) Diese Folgerung ist eine Konsequenz aus (i)$\Longrightarrow$(iii), denn, da $\omega$ ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand für $(\mathcal{A}, \tau)$ ist, muß $\bigotimes_{i=1}^n \omega$ ein $\beta$-KMS-Zustand für $(\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}, \bigotimes_{i=1}^n \tau)$ sein.

□

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Ist nach Definition richtig.

□

(iii)$\Longrightarrow$(v) Wie in ($\triangle$) kann man zeigen , daß für $A = A^* \in D(\delta)$

$$e^{i\epsilon A} \in \mathcal{U}_0(\mathcal{A}) \cap D(\delta) \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \delta\left(e^{i\epsilon A}\right) = i\epsilon \int_0^1 e^{i\epsilon r A}\delta(A)e^{i\epsilon(1-r)A} dr,$$

und damit:

$$\begin{aligned}
-i\omega\left(e^{-i\epsilon A}\delta\left(e^{i\epsilon A}\right)\right) &= \epsilon \int_0^1 \omega\left(e^{i\epsilon(r-1)A}\delta(A)e^{-i\epsilon(r-1)}A\right) dr \\
&= \epsilon \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \epsilon^n (r-1)^n}{n!}\, \omega\left(\big[\underset{1}{A}, \big[\underset{2}{A}, \cdots \big[\underset{n}{A}, \delta(A)\big]\big] \cdots\big]\right) dr \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n \epsilon^{n+1}}{(n+1)!}\, \omega\left(\big[\underset{1}{A}, \big[\underset{2}{A}, \cdots \big[\underset{n}{A}, \delta(A)\big]\big] \cdots\big]\right) \\
&= \epsilon\omega\big(\delta(A)\big) + \frac{\epsilon^2}{2} i\omega\big(\big[\delta(A), A\big]\big) + O\left(\epsilon^3\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung aufgrund der Passivität von $\omega$ für alle $\epsilon \in \mathbb{R}$ erfüllt sein muß, können wir schließen

$$\omega\big(\delta(A)\big) = 0 \quad \text{und} \quad i\omega\big(\big[\delta(A), A\big]\big) \geq 0, \quad \forall A = A^* \in D(\delta).$$

Wir erhalten also (v) durch:

$$\begin{aligned}
&0 \leq i\omega\big(\big[\delta(A), A\big]\big) = i\omega\big(\delta(A)A - A\delta(A)\big) = i\omega\big(\delta(A^2) - 2A\delta(A)\big) \\
&= 2i\omega\big(A\delta(A)\big).
\end{aligned}$$

□

(ii)$\Longrightarrow$(iv) Folgt als Spezialfall von (iii)$\Longrightarrow$(v).

$\square$

(iv)$\Longrightarrow$(ii) Trivial.

$\square$

Wir erwähnen ohne Beweis, daß unter gewissen Voraussetzungen die Inklusion (v)$\Longrightarrow$(i) gilt, so daß dann alle fünf Aussagen äquivalent sind. Hierbei reichen die beiden Forderungen, daß erstens eine Gruppe $G$ und eine Aktion $\alpha$ von $G$ als $^*$-Automorphismus von $\mathcal{A}$ mit

$$\omega \circ \alpha_g = \omega, \quad \alpha_g \tau_t = \tau_t \alpha_g, \quad g \in G,\ t \in \mathbb{R},$$

existieren, und zweitens, daß $\omega$ die schwache $\alpha - Cluster - Eigenschaft$ besitzt, d.h.

$$\inf_{B' \in \mathfrak{Co}\left(\alpha_G(B)\right)} |\omega(AB') - \omega(A)\omega(B)| = 0, \quad A, B \in \mathcal{A},$$

wobei $\mathfrak{Co}$ die konvexe Hülle ist.

Wir geben nun einige Konvergenzeigenschaften von KMS-Zuständen und eine Begründung für die Terminologie von KMS-Zuständen bei $\beta = \pm\infty$.

**Satz 2.11** Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ $C^*$-dynamisches System und $(\omega_\alpha)$ eine Folge von $(\tau, \beta_\alpha)$-Zuständen, $\beta_\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, auf $\mathcal{A}$, so daß die Grenzwerte

$$\lim_\alpha \omega_\alpha(A) = \omega(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \lim_\alpha \beta_\alpha = \beta \in \overline{\mathbb{R}}$$

existieren, dann ist $\omega$ ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand .

**Beweis:**

Für $|\beta| < \infty$ können wir $|\beta_\alpha| < \infty$ annehmen, und die Behauptung folgt sofort aus der unteren Autokorrelationsschranke.
Sei nun $\beta = +\infty$ (Der Beweis für $\beta = -\infty$ läuft auf die gleiche Weise). Dann gilt im Falle von $\beta_\alpha = +\infty\ \forall \alpha$

$$-i\omega\left(A^*\delta(A)\right) = \lim_\alpha -i\omega_\alpha\left(A^*\delta(A)\right) \geq 0,$$

und im Falle von $0 < \beta_\alpha < +\infty$

$$
\begin{aligned}
-i\omega\left(A^*\delta(A)\right) &= \lim_{\alpha} -i\omega_\alpha\left(A^*\delta(A)\right) \\
&\geq \overline{\lim_{\alpha}}\frac{1}{\beta_\alpha}\omega_\alpha(A^*A)\log\left(\frac{\omega_\alpha(A^*A)}{\omega_\alpha(AA^*)}\right) \\
&= \overline{\lim_{\alpha}}\frac{1}{\beta_\alpha}\omega_\alpha(AA^*)\left(\frac{\omega_\alpha(A^*A)}{\omega_\alpha(AA^*)}\log\left(\frac{\omega_\alpha(A^*A)}{\omega_\alpha(AA^*)}\right)\right) \\
&\geq \overline{\lim_{\alpha}}\frac{1}{\beta_\alpha}\omega_\alpha(AA^*)\left(\frac{\omega_\alpha(A^*A)}{\omega_\alpha(AA^*)}-1\right) \\
&= \overline{\lim_{\alpha}}\frac{1}{\beta_\alpha}\left(\omega_\alpha(A^*A)-\omega_\alpha(AA^*)\right) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

d.h $\omega$ ist ein Grundzustand. Die letzte Ungleichung gilt wegen der Konvexität der Abbildung $x \mapsto x\log x$.

□

Hilfreich für den Beweis der Existenz von KMS-Zuständen, speziell Grundzuständen, in Systemen, die thermodynamische Limiten sind, ist der folgende

**Satz 2.12** Sei $\mathcal{A}$ eine unitale $C^*$-Algebra und $(\tau^n)_{n\geq 1}$ eine Teilfolge einer einparametrigen Gruppe von $^*$-Automorphismen von $\mathcal{A}$ mit

$$\lim_{n\to\infty}\|\tau_t^n(A)-\tau_t(A)\| = 0 \qquad \forall t\in\mathbb{R},\ \forall A\in\mathcal{A}.$$

Weiterhin gebe es ein $(\tau_t^n,\beta_n)$-KMS-Zustand $\omega_n$, $\beta_n\in\overline{\mathbb{R}}$, auf $\mathcal{A}$ mit

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \beta\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Dann existiert ein $(\tau,\beta)$-KMS-Zustand $\omega$ auf $\mathcal{A}$

$$\omega = \lim_{n\to\infty}\omega_n.$$

**Beweis:**

Sei $\delta^n$ der Generator von $\tau^n$. Dann gibt es zu jedem $A\in D(\delta)$ eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n\in\mathcal{A}$, mit den Eigenschaften

$$\lim_{n\to\infty}A_n = A \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\delta^n(A_n) = \delta(A).$$

Da $\mathcal{A}$ eine unitale Algebra ist, ist $\mathbf{E}_{\mathcal{A}}$ im Sinne der schwach$^*$-Topologie kompakt, und zu jeder Folge von $(\tau^n, \beta_n)$-KMS-Zuständen $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine Teilfolge $(\omega_{n_\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}}$, so daß $\omega_{n_\alpha} \overset{n_\alpha\to\infty}{\longrightarrow} \omega$ im Sinne der schwach$^*$-Topologie. Zu zeigen ist nun, daß $\omega$ ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand ist.
Wie im vorhergehenden Beweis nehmen wir eine Fallunterscheidung vor.
Sei $|\beta| < \infty$. Wir können $|\beta_n| < \infty$ annehmen, und aus der unteren Autokorrelationsschranke erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
-i\beta_{n_\alpha}\omega_{n_\alpha}\left(A^*_{n_\alpha}\delta_{n_\alpha}\left(A_{n_\alpha}\right)\right) &\geq \omega_{n_\alpha}\left(A^*_{n_\alpha}A_{n_\alpha}\right)\log\left(\frac{\omega_{n_\alpha}\left(A^*_{n_\alpha}A_{n_\alpha}\right)}{\omega_{n_\alpha}\left(A_{n_\alpha}A^*_{n_\alpha}\right)}\right)\\
\Longleftrightarrow \qquad -i\beta\omega\left(A^*\delta\left(A_{n_\alpha}\right)\right) &\geq \overline{\lim_{\alpha}}\left[\omega_{n_\alpha}\left(A^*_{n_\alpha}A_{n_\alpha}\right)\log\left(\frac{\omega_{n_\alpha}\left(A^*_{n_\alpha}A_{n_\alpha}\right)}{\omega_{n_\alpha}\left(A_{n_\alpha}A^*_{n_\alpha}\right)}\right)\right]\\
&\geq \omega(A^*A)\log\left(\frac{\omega(A^*A)}{\omega(AA^*)}\right).
\end{aligned}
$$

Die letzte Ungleichung ist wegen der unteren Semistetigkeit der Abbildung $u, v \mapsto u \log\frac{u}{v}$ richtig.
Für $\beta = +\infty$ und $\beta_{n_\alpha} = +\infty$ oder $\beta_{n_\alpha} \in (0, \infty)$ zeigt man wie im vorhergehenden Beweis, daß $\omega$ ein Grundzustand ist.

□

**Beispiel 2.13 ($(\tau^n, \beta)$-KMS-Zustände und Spurzustände)** Sei $\mathcal{A}$ eine unitale $C^*$-Algebra, $\omega$ ein Spurzustand über $\mathcal{A}$, so daß $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega)$ eine treue Darstellung ist. Weiterhin betrachte man die Folge $H_n = H_n^* \in \mathcal{A}$, so daß

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} i[H_n, A]$$

für alle $A$ aus einer dichten $^*$-Unteralgebra $\mathbf{D}_0(\delta)$ von $\mathcal{A}$ existiert. Es ist $\omega \circ \delta = 0$, $\delta$ ist abschließbar, und falls die Unterräume $(\iota\pm\delta)(\mathbf{D}_0(\delta))$ dicht in $\mathcal{A}$ sind, dann ist der Abschluss $\overline{\delta}$ der Generator einer Gruppe von $^*$-Automorphismen von $\mathcal{A}$. Für $\tau_t^n(A) := e^{itH_n}Ae^{-itH_n}$ konvergiert $\tau_t^n(A) \longrightarrow \tau_t(A)$ uniform, und der Zustand

$$\omega_{\beta,n}(A) := \frac{\omega(e^{-\beta H_n}A)}{\omega(e^{-\beta H_n})}$$

ist ein $(\tau^n, \beta)$-KMS-Zustand auf $\mathcal{A}$, denn

$$
\begin{aligned}
\omega_{\beta,n}(AB) &= \frac{\omega(e^{-\beta H_n}AB)}{\omega(e^{-\beta H_n})}\\
&= \frac{\omega(e^{-\beta H_n}e^{\beta H_n}Be^{-\beta H_n}A)}{\omega(e^{-\beta H_n})}\\
&= \omega_n\big(\tau^n_{-i\beta}(B)A\big) \qquad\qquad \forall A, B \in \mathcal{A}.
\end{aligned}
$$

Die obige Zuordnung zwischen $(\tau^n, \beta)$-KMS-Zuständen und Spurzuständen auf $\mathcal{A}$ ist bijektiv, und $\mathcal{A}$ besitzt nach Satz 2.10 $(\tau, \beta)$-KMS-Zustände für alle $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$.

Zum Schluß sei noch bemerkt, dass nicht jedes $C^*$-dynamisches System $(\mathcal{A}, \tau)$ KMS-Zustände besitzen muß, siehe Beispiel 5.327 aus [BR81].

## 2.2 Modular-Theorie

**Definition 2.14** Die von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ heißt $\sigma - finit$, falls sie (maximal) abzählbar viele orthogonale Projektionen besitzt.

In der statistischen Quantenmechanik und in der Quantenfeldtheorie hat man nur $\sigma$-finite von Neumann-Algebren vorliegen. Man kann zeigen, daß $\mathcal{M}$ auf einen separablen Hilbertraum dargestellt werden kann, sofern $\mathcal{M}$ $\sigma$-finit ist. Der umgekehrte Schluß ist nicht erlaubt.

**Definition 2.15** Der Zustand $\omega$ auf der von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ heißt *treu*, wenn $\omega(A) > 0 \; \forall A \in \mathcal{M}_+$ gilt.

**Proposition 2.16** Gegeben sei die von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{M}$ ist $\sigma$-finit.

(ii) Es existiert eine abzählbare Teilmenge von $\mathcal{H}$, die separierend für $\mathcal{M}$ ist.

(iii) Es gibt einen treuen, normalen Zustand auf $\mathcal{M}$.

(iv) $\mathcal{M}$ ist isomorph zu einer von Neumann-Algebra $\pi(\mathcal{M})$, die einen separierenden, zyklischen Vektor zuläßt.

Die Äquivalenzbeziehung $(i) \Leftrightarrow (iv)$ deutet auf eine bijektive Abbildung $\mathcal{M} \ni A \mapsto A\Omega \in \mathcal{M}\Omega$ mit $\overline{\mathcal{M}\Omega} = \mathcal{H}$ hin, d.h. daß die algebraischen Operationen von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}\Omega$ übertragen werden können.

**Definition 2.17** Sei die von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ gegeben. $A \in \mathcal{M}$ nennt man einen *abgeschlossenen Operator*, wenn aus $u_n \to u$ und $Au_n \to v$ sofort $u \in D(A)$ und $Au = v$ folgt, wobei $u, v, u_n \in \mathcal{H}$. Falls $A$ eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt, nennt man $A$ *abschließbar*. Ein abgeschlossener Operator $A$ auf $\mathcal{H}$ heißt *verbunden* mit $\mathcal{M}$ mit der Schreibweise $A\eta\mathcal{M}$, wenn $\mathcal{M}'D(A) \subseteq D(A)$ und $AA' \supseteq AA' \; \forall A' \in \mathcal{M}'$.

Da im Falle einer von Neumann-Algebra die zyklische Eigenschaft von $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ für $\mathcal{M}$ gleichbedeutend mit der separierenden Eigenschaft von $\mathcal{K}$ für $\mathcal{M}'$ ist, überträgt $\Omega$ diese beiden Eigenschaften von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$. Deshalb sind die folgenden zwei antilinearen Operatoren

$$\begin{aligned} S_0 A\Omega &= A^*\Omega \qquad & A \in \mathcal{M} \quad & \text{auf } D(S_0) = \mathcal{M}\Omega \quad \text{und} \\ F_0 A'\Omega &= A'^*\Omega \qquad & A' \in \mathcal{M}' \quad & \text{auf } D(F_0) = \mathcal{M}'\Omega \end{aligned}$$

wohldefiniert. Weiterhin sind $S_0$ und $F_0$ abschließbar mit $S_0^* = \overline{F_0} =: F$ und $F_0^* = \overline{S_0} =: S$. Den sogenannten $Tomita - Operator$ $S$ kann man nun polar zerlegen in den eindeutigen, positiven und selbstadjungierten Operator $\Delta$, den *modularen Operator* bzgl. dem Paar $(\mathcal{M}, \Omega)$, und den eindeutigen antiunitären Operator $J$, der $modularen\ Konjugation$:

$$S = J\Delta^{1/2}.$$

Die folgenden Eigenschaften von $\Delta$ und $J$ kann man leicht verifizieren:

$$\begin{aligned} \Delta &= FS, \qquad & J &= J^*, \\ \Delta^{-1} &= SF, \qquad & J^2 &= \mathbb{1}, \\ F &= J\Delta^{-1/2}, \qquad & \Delta^{-1/2} &= J\Delta^{1/2}J. \end{aligned}$$

Wir geben zur Veranschaulichung dieser Konstruktion die folgenden zwei Beispiele aus [aW92].

**Beispiel 2.18** Betrachten wir $\mathcal{H} := \mathbf{L}^2([0,1], dx)$, den Hilbertraum der Lebesgue-meßbaren Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der Norm $\|f\| := \left(\int_0^1 \|f(x)\|^p dx\right)^{1/p}$, und $\mathcal{M} := \mathbf{L}^\infty([0,1], dx)$ die Menge der beschränkten Multiplikationsoperatoren $A$ auf $\mathcal{H}$, also

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \ni A &\longleftrightarrow a(.) \in \mathbf{L}^\infty([0,1], dx), \\ (Af)(x) &:= a(x)f(x), \qquad f \in \mathbf{L}^2([0,1], dx) \end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{M}$ eine abelsche von Neumann-Algebra mit der punktweisen Multiplikation

$$C = AB \longleftrightarrow c(x) = a(x)b(x),$$

und der komplexen Konjugation als Involution und der Identität

$$A^* \longleftrightarrow \overline{a(x)}, \qquad \mathbb{1} \longleftrightarrow a(x) := 1.$$

Weiterhin ist der Vektor $\mathcal{H} \ni \Omega \longleftrightarrow \Omega(x) := 1$ zyklisch und separierend für $\mathcal{M}$, denn $\mathbf{L}^\infty$ ist in $\mathbf{L}^2$ dicht, und aus $A\Omega(x) = a(x)$ folgt $A\Omega = 0$ genau dann, wenn $A = 0$. Der Tomita-Operator ist die komplexe Konjugation

$$SA\Omega = A^*\Omega \longleftrightarrow (Sa)(x) = \overline{a(x)}, \qquad A \in \mathcal{M},$$

und somit erhält man für die modulare Konjugation bzw. den modularen Operator

$$J = S \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta = \mathbb{1}.$$

**Beispiel 2.19** Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ endlich dimensionale Hilberträume mit $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{K} = n < \infty$, und $\mathcal{M} := \mathcal{L}(\mathcal{H}) \bigotimes \mathbb{C}\mathbb{1}_{\mathcal{K}}$. Die orthogonalen Basen von $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{K}$ bezeichnen wir mit $f_1, ..., f_n$ bzw. $g_1, ..., g_n$, und wir definieren den Einheitsvektor $\mathcal{H} \bigotimes \mathcal{K} \ni \Omega := \sum_{j=1}^n a_j f_j \otimes g_j$, mit $a_j > 0$ und $\sum_{j=1}^n |a_j|^2 = 1$. Zunächst einmal ist $\Omega$ zyklisch für $\mathcal{M}$, aber auch zyklisch für $\mathcal{M}' = \mathbb{C}\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \bigotimes \mathcal{L}(\mathcal{K})$ und damit separierend für $\mathcal{M}$.
Die Wirkung des Tomita-Operators $S$ auf $(\mathcal{M}, \Omega)$ wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} SA_{j,s}\Omega = A^*_{j,s}\Omega = A_{s,j}\Omega = a_s f_j \otimes g_s = S(a_j f_s \otimes g_j), \\ \text{mit} \qquad A_{j,s} f_p \otimes g_l := \delta_{j,p} f_s \otimes g_j, \qquad A_{j,s} \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$S(f_s \otimes g_j) = \frac{a_s}{a_j}(f_j \otimes g_s)$$

und hiermit für die Wirkung der modularen Konjugation und des modularen Operators:

$$\begin{aligned} J(f_s \otimes g_j) &= (f_j \otimes g_s), \\ \Delta(f_s \otimes g_j) &= \left(\frac{a_s}{a_j}\right)^2 (f_s \otimes g_j). \end{aligned}$$

Mit den oben eingeführten Größen können wir nun das Hauptresultat der modularen Theorie formulieren.

**Theorem 2.20 (Tomita-Takesaki)** Sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra mit dem zyklischen und separierenden Vektor $\Omega$, und $\Delta$ wie auch $J$ wie oben definiert. Dann gilt

$$J\mathcal{M}J = \mathcal{M}' \quad \text{und} \quad \Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} = \mathcal{M} \; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Betrachten wir nun einen treuen und normalen Zustand $\omega$ auf $\mathcal{M}$ und die entsprechende zyklische Darstellung $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$. Sei weiterhin $\Delta$ der modulare Operator bzgl. $(\pi_\omega(\mathcal{M}), \Omega_\omega)$. Dann erlaubt das Theorem von Tomita-Takesaki die Existenz einer $\sigma$-schwachen, einparametrigen Gruppe von Automorphismen

$$t \mapsto \sigma_t^\omega(A) := \pi_\omega^{-1}\big(\Delta^{it}\pi_\omega(A)\Delta^{-it}\big),$$

der sogenannten modularen Automorphismen-Gruppe bzgl. $(\mathcal{M}, \omega)$.
Wir wollen jetzt die Verbindung zwischen der modularen Theorie und KMS-Zuständen herausarbeiten. Sei hierfür $(\mathcal{M}, \tau)$ ein dynamisches System, $\omega$ ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand auf der von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ für die $\sigma$-schwach stetige Automorphismen-Gruppe $\tau$ und $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ die entsprechende zyklische Darstellung. Man kann zeigen, daß $\Omega_\omega$ für $\pi_\omega(\mathcal{M})''$ separierend und damit auf $\pi_\omega(\mathcal{M})$ treu ist. Da $\ker \pi_\omega$ ein $\sigma$-schwach abgeschlossenes beidseitiges Ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$ ist, kann man zeigen, daß es eine Projektion $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ gibt mit $\mathcal{I} = \mathcal{M}(\mathbb{1} - E)$. Hieraus folgt $\omega(1 - E) = 0$, daß $\omega$ auf $\mathcal{M}E$ treu ist und

$$\omega(AE) = \omega(A) = \big(\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega\big).$$

Daß nun die obige Bedingung Ausreichend für die KMS-Eigenschaft von $\omega$ ist, folgt aus der modularen Theorie.

**Theorem 2.21 (Takesaki)** Sei $\omega$ ein normaler Zustand auf der von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\omega$ ist ein treuer Zustand auf $\pi_\omega(\mathcal{M})$, d.h. es existiert eine Projektion $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ mit $\omega(\mathbb{1} - E) = 0$, und $\omega|_{\mathcal{M}E}$ ist treu.

(ii) Es existiert eine $\sigma$-schwach stetige einparametrige Gruppe $\tau$ von $^*$-Automorphismen von $\mathcal{M}$, so daß $\omega$ ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand ist.

Gelten diese beiden Aussagen, dann ist $\tau_t(E) = E \ \forall t \in \mathbb{R}$, und die Einschränkung von $\tau$ auf $\mathcal{M}E$ ist die durch $\omega$ eindeutig bestimmte modulare Automorphismen-Gruppe von $\mathcal{M}E$ bzgl. $\omega$.

## 2.3 Die Menge der KMS-Zustände

Da die Menge der KMS-Zustände $\mathbf{K}_\beta \subset \mathbf{E}_\mathcal{A}$ (Menge aller Zustände auf $\mathcal{A}$) konvex ist, kann man zeigen, daß $\mathbf{K}_\beta$ bzgl. der schwach$^*$-Topologie abgeschlossen ist. Deshalb kann man in diesen Fällen nur $W^*$-dynamische Systeme $(\mathcal{M}, \tau)$ betrachten.

**Theorem 2.22** Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ ein $C^*$-dynamisches System mit $\mathbb{1}$. Dann gelten für $\beta < \infty$ die folgende Aussagen:

(i) $\mathbf{K}_\beta$ ist konvex und schwach$^*$-kompakt.

(ii) $\mathbf{K}_\beta$ ist ein Simplex.

(iii) $\omega \in \mathbf{K}_\beta$ ist ein Extremalpunkt (Ecke) von $\mathbf{K}_\beta$ genau dann, wenn $\omega$ ein Faktorzustand ist.

(iv) $\omega_1, \omega_1$ seien zwei Extremalpunkte von $\mathbf{K}_\beta$ , dann sind sie entweder identisch oder disjunkt.

**Beweis:**

Nehmen wir zunächst den Fall $\beta \neq 0$ an. Sei o. E. $\beta = -1$.

(i) Die erste Teilaussage ist trivial und die $^*$-schwache Kompaktheit folgt aus Thm.2.6.(vi).

(ii) Seien $\omega, \varphi \in \mathbb{R}_+\mathbf{K}_{-1}$, der Menge der positiven $\tau$-KMS-Funktionale. Man kann zeigen, daß für $\rho := \omega + \varphi$, da $\omega, \varphi \leq \rho$, $\omega$ und $\varphi$ $\pi_p$-normal sind und es weiterhin positive Operatoren $T_1, T_2 \in \Xi_p := \pi_p(\mathcal{A})'' \cap \pi_p(\mathcal{A})'$ existieren mit

$$\omega(A) = \widehat{\rho}(AT_1) \text{ und } \varphi(A) = \widehat{\rho}(AT_2),\ \forall A \in \mathcal{A},$$

wobei $\widehat{\rho}$ die normale Erweiterung von $\rho$ auf $\pi_p(\mathcal{A})''$ ist. Weil $\Xi_p$ abelsch ist, existiert die größte untere Schranke in $\Xi_p$, und $(\omega \wedge \varphi)(A) := \widehat{\rho}\big(A(T_1 \wedge T_2)\big)$ ist für alle $A \in \mathcal{A}$ ein positives $\tau$-KMS-Funktional. Für alle $\tau \in \mathbb{R}_+\mathbb{K}_1$ mit $\tau \leq \omega, \varphi$ folgt $\tau \leq \rho$ und es gibt ein $T \in \Xi_{p+}$, so daß

$$\tau(A) = \widehat{\rho}(AT)$$

gilt. Weil $T_1, T_2$ und $T$ in $\Xi_p$ liegen, muß gelten

$$T \leq T_1, T_2$$

und damit

$$T \leq T_1 \wedge T_2 \text{ und } \tau \leq \omega \wedge \varphi.$$

Also ist $\omega \wedge \varphi$ die eindeutig bestimmte untere Schranke von $\omega$ und $\varphi$ in $\mathbb{R}_+\mathbb{K}_1$. Damit haben wir gezeigt, daß $\mathbb{R}_+\mathbb{K}_1$ ein Gitter ist und $\mathbb{K}_{-1}$ ein Simplex.

(iii) Für $\omega \in \mathbb{K}_{-1}$ muß $\varphi(A) = \widehat{\omega}(AT)$ folgen, wobei $T \in \pi_\omega(\mathcal{A})'' \cap \pi_\omega(\mathcal{A})'$ mit $0 \leq T \leq \mathbb{1}$ ist, und es eine bijektive Beziehung zwischen $T$ und $\varphi$ gibt. Hieraus folgt, daß $\omega$ genau dann in $\mathbb{K}_{-1}$ extremal ist, falls $\pi_\omega(\mathcal{A})'' \cap \pi_\omega(\mathcal{A})' = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

Der Fall $\beta = 0$ kann aus dem ersten Fall abgeleitet werden. In diesem Fall ist $\mathbf{K}_0$ die Menge der Spurenzustände auf $\mathcal{A}$, d.h. also der KMS-Zustände für die triviale Dynamik $\tau_t = \iota$.

□

Die Aussage (*ii*) ist für $\beta = \pm\infty$ im allgemeinen nicht richtig, denn beispielsweise ist im Falle von $\tau = \eta$ für alle $t \in \mathbb{R}$ $\mathbf{K}_\infty = \mathbf{E}_\mathcal{A}$. Besteht $\mathbf{K}_\beta$ aus genau einem Punkt, dann ist es ein Faktorzustand. Dies ist insofern wichtig, als Faktorzustände über Cluster-Eigenschaften charakterisiert werden können, die weitreichende Korrelationen ausschliessen.

# Kapitel 3

# Stabilität von KMS-Zuständen

Bei Stabilitätsuntersuchungen von KMS-Zuständen geht es darum, ein $C^*$-dynamisches System $(\mathcal{A}, \tau)$ mit einem *gestörtem System* $(\mathcal{A}, \tau^P)$ der *Störung* $P = P^* \in \mathcal{A}$ zu vergleichen. Hierbei wird die Automorphismengruppe $\tau^P$ durch den Generator $\delta + \delta_P$ mit $\delta_P(A) := i[P, A]$ erzeugt. Es gibt zwei verschiedene Zugänge, eine "zeitunabhängige" von Connes und Araki, und eine "zeitabhängige" von Robinson. Der erste Zugang ist auf den Vergleich von $\tau$-KMS-Zuständen mit $\tau^P$-KMS-Zuständen zugeschnitten, während die zweite Methode dazu geeignet ist, allgemeinere Zustände von Systemen, die die Ergodizitäteigenschaft besitzen (z.B. asymptotische Kommutativität), zu behandeln. Mehr Details findet man in [BR81], [BKR78], [HHW67], [HKTP74], [HTP77] und [Rob73]. Wir wollen nun auf dem direkten Weg auf die Haupttheoreme hinarbeiten. Die gestörte Gruppe $\tau^P$ ist die eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d\tau_t^P(A)}{dt} = \tau_t^P\big(\delta(A) + \delta_P(A)\big) \qquad \forall A \in D(\delta).$$

Durch Integration und anschliessender Iteration erhält man die explizite Form, die sogenannte Dysonsche Reihenentwicklung

$$\tau_t^P(A) = \tau_t(A) + \sum_{n\geq 1} i^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \Big[\tau_{t_n}(P)\big[\cdots[\tau_{t_1}(P), \tau_t(A)]\big]\Big].$$

Für den n-ten Term der Dysonschen Reihenentwicklung erhält man

$$\tau_t^{P(n)}(A) = \int_0^t \tau_s^{P(n-1)} \circ \delta_P \circ \tau_{t-s}(A) ds,$$

und weiter mit $\tau_t^{P(0)}(A) = \tau_t(A)$ die Beziehung

$$\tau_t^P(A) = \tau_t(A) + i \int_0^t \tau_s^P\big([P, \tau_{t-s}(A)]\big) ds.$$

Vertauscht man bei der obigen Argumentation die Rollen von $\tau$ und $\tau^P$, dann erhält man

$$\tau_t^P(A) = \tau_t(A) + i \int_0^t \tau_s\big([P, \tau_{t-s}^P(A)]\big) ds.$$

Man verifiziert weiterhin durch direktes Rechnen

$$\frac{d}{dt}\tau_t^P \tau_{-t}(A) = i\tau_t^P \tau_{-t}\big([\tau_t(P), A]\big),$$

und somit

$$\begin{aligned} \tau_{t_2}^P \tau_{-t_2}(A) - \tau_{t_1}^P \tau_{-t_1}(A) &= i \int_{t_1}^{t_2} ds \tau_s^P \tau_{-s}\big([\tau_s(P), A]\big) \\ \tau_{t_1}^P \tau_{t_2}(A) - \tau_{t_1+t_2}(A) &= i \int_{t_1}^{t_2} ds \tau_s^P \tau_{-s}\big([\tau_s(P), \tau_{t_1+t_2}(A)]\big). \end{aligned}$$

Die gestörte Gruppe läßt sich auch darstellen durch

$$\tau_t^P(A) = \Gamma_t^P \tau_t(A) \Gamma_t^{P^*},$$

wobei

$$\Gamma_t^P := \mathbb{1} + \sum_{n \geq 1} i^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \tau_{t_n}(P) \cdots \tau_{t_1}(P)$$

die Lösung der folgenden Differentialgleichung ist:

$$\frac{\Gamma_t^P}{dt} = i\Gamma_t^P \tau_t(P).$$

Es kann gezeigt werden, daß $\Gamma_t^P$ die cozyklische Relation

$$\Gamma_{t+s}^P = \Gamma_t^P \tau_t\big(\Gamma_t^P\big)$$

erfüllt. Alle oben auftretenden Integrale konvergieren im $C^*$-dynamischen Fall im Sinne der starken und im $W^*$-dynamischen Fall im Sinne der $\sigma$-schwachen Topologie.

**Beispiel 3.1** Seien $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ die CAR-Algebra über den Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\tau$ eine einparametrige Gruppe von Bogoliubov-Transformationen mit

$$\tau_t\big(a(f)\big) := a(U_t f), \qquad U_t := e^{itH}.$$

Symmetrische Störungen erhält man beispielsweise durch quadratische Elemente, $a^*(f)a(f)$, oder durch Kombinationen von diesen, z.B.:

$$a^*(f)a(g) + a^*(g)a(f) := \frac{1}{2}\big[a^*(f+g)a(f+g) - a^*(f-g)a(f-g)\big].$$

Die durch die quadratische Störung erzeugte Automorphismengruppe $\tau^P$ ist auch eine Gruppe von Bogoliubov-Transformationen, weil für

$$P := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a^*(f_j)a(f_j)$$

folgt:

$$\delta_P\big(a(f)\big) = i\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (f, f_j) a(f_j).$$

Daraus ergibt sich

$$\tau_t^P\big(a(f)\big) = a(U_t^P) \quad \text{mit} \quad U_t^P := e^{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j E_j},$$

wobei $E_j$ die Projektion auf $f_j$ ist, d.h. $E_j g = (f_j, g) f_j$ für alle $g \in \mathcal{H}$.

## 3.1 Stabilitätseigenschaften von KMS-Zuständen

Wir geben nun einige Stabilitätseigenschaften von KMS-Zuständen im "zeitunabhängigen" Formalismus.

**Theorem 3.2** Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ ein $C^*$-dynamisches oder $W^*$-dynamisches System und $\omega$ ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand über $\mathcal{A}$. Dann ist für alle $A \in \mathcal{A}$ und $P = P^* \in \mathcal{A}$ die Funktion

$$F_A(t_1, \cdots, t_n) := \omega_T\big(A; \tau_{t_n}(P); \cdots; \tau_{t_1}(P)\big)$$

der Grenzwert einer Funktion $F_A(z)\big(\omega_T\big(A; \tau_{z_n}(P); \cdots; \tau_{z_1}(P)\big)$, die innerhalb von $\mathbf{D}_\beta^{(n)} := \{z = (z_1, \cdots, z_n) : \ \operatorname{Im} z_1 \in (0, \beta), \operatorname{Im} z_i \in (0, \operatorname{Im} z_{i-1})\}$ holomorph, in $\overline{\mathbf{D}_\beta^{(n)}}$ stetig und uniform beschränkt und

$$\sup_{z\in\mathcal{D}_\beta^{(n)}} |F_A(z)| \leq 2^n n! \|P\|^n \|A\|.$$

Gilt $2\|P\| < 1$, dann ist der *gestörte* $(\tau^P, \beta) - KMS - Zustand$

$$\omega^P(A) := \frac{\omega(A\Gamma^P_{i\beta})}{\omega(\Gamma^P_{i\beta})}$$

gegeben durch die uniform konvergente Summe

$$\omega^P(A) = \omega(A) + \sum_{n\geq 1}(-1)^n \int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \omega_T\big(A; \tau_{is_n}(P); \cdots; \tau_{is_1}(P)\big).$$

Und damit gilt

$$\lim_\alpha \|\omega^{P_\alpha}\| = 0, \quad P_\alpha = P_\alpha^* \in \mathcal{A}\ P_\alpha \longrightarrow 0.$$

**Beweis:**

Wir wählen Œ$\beta = -1$. Sei $(P_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}_\tau$ mit $\|P_l\| \leq \|P\|$ und $\|P_l - P\| \longrightarrow 0$. Wir benennen die einzelnen Folgenglieder mit $Q_i$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in D_{-1}^{(n)}} |\omega\big(A\tau_{z_n}(Q_n)\cdots\tau_{z_1}(Q_1)\big)| &\leq \sup_{1\leq j\leq n} \sup_{t\in\mathbb{R}^n} |\omega\big(A\tau_{t_n}(Q_n)\cdots\tau_{t_j - i}(Q_j)\cdots\tau_{t_1-i}(Q_1)\big)| \\
&= \sup_{1\leq j\leq n} \sup_{t\in\mathbb{R}^n} |\omega\big(\tau_{t_j}(Q_j)\cdots\tau_{t_1}(Q_1)A\tau_{t_n}(Q_n)\cdots\tau_{t_{j+1}}(Q_{j+1})\big)| \\
&\leq \|A\| \prod_{i=1}^n \|Q_i\|.
\end{aligned}$$

Somit bekommen wir für die Funktion

$$f_{A,l}(z) := \omega\big(A\tau_{z_n}(P_l)\cdots\tau_{z_1}(P_l)\big)$$

mit $\epsilon > 0$ die Ungleichung

$$|f_{A,l}(z) - f_{A,m}(z)| \leq \sum_{j=1}^n |\omega\big(A\tau_{z_n}(P_l)\cdots\tau_{z_j}(P_l - P_m)\cdots\tau_{z_1}(P_m)\big)| < \epsilon,$$

d.h. $f_{A,l}$ ist eine Cauchy-Folge im Sinne der uniformen Topologie und folglich die Grenzfunktion $f_A$ holomorph auf $\mathbf{D}_{-1}^{(n)}$ und stetig auf $\overline{\mathbf{D}_{-1}^{(n)}}$. Weil die Funktionen $F_A$ als endliche Linearkombinatinen der Funktionen $f_A$ definiert werden können, übertragen sich die geforderten Eigenschaften auf $F_A$. Wir bekommen insbesondere die Abschätzung

$$\sup_{z\in D_{-1}^{(n)}} |f_A(z)| \leq \|A\|\|P\|^n. \tag{$\diamondsuit$}$$

Für $P \in \mathcal{A}_\tau$ folgt wegen der Beziehung

$$\begin{aligned}&\omega_T\big(A;\tau_{t_n}(P)\cdots;\tau_{t_{j+1}}(P);\tau_{t_j-i}(P);\cdots;\tau_{t_1-i}(P)\big)\\ \overset{\text{KMS-Beb.}}{=}\;&\omega_T\big(\tau_{t_j}(P)\cdots;\tau_{t_1}(P);A;\tau_{t_n}(P);\cdots;\tau_{t_{j+1}}(P)\big)\end{aligned}$$

die Ungleichung:

$$\sup_{z\in D_{-1}^{(n)}} |F_A(z)| \leq \sup_{1\leq j\leq n} \sup_{t\in\mathbb{R}^n} \omega_T\big(\tau_{t_j}(P)\cdots;\tau_{t_1}(P);A;\tau_{t_n}(P);\cdots;\tau_{t_{j+1}}(P)\big). \tag{3.1}$$

Nun besteht aber zwischen $F$ und ihrer *Truncation* $F_T$ [1] die Beziehung

$$F(I) = F_T(I) + \sum_{\alpha\in J\subsetneq I} F_T(J)F(I\backslash J), \tag{$\spadesuit$}$$

wobei $I$ eine Indexmenge ist. Unter den Annahmen $|F(I)| \leq 1$, und $|F_T(I)| < 2^{|I|-1}(|I|-1)!$ für $|I| \leq n,\ n \geq 2$ ($|I|$ bezeichnet die Anzahl der Elemente von $I$), erhalten wir:

$$\begin{aligned}F_T(I) &\leq 1 + \sum_{m=1}^{n} {}^nC_{m-1}2^{m-1}(m-1)!\\ &= 2^n n!\left[(2^n n!)^{-1} + \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(n-m+1)!}\frac{1}{2^{n-m+1}}\right]\\ &\leq 2^n n![\frac{1}{8} + e^{1/2} - 1] < 2^n n!.\end{aligned}$$

[1] Die *Truncation* $F_T$ von $F$ wird rekursiv definiert durch $F(I) = \sum_{\mathcal{P}_I}\prod_{J\in\mathcal{P}_I} F_T(J)$, wobei die Summe über alle Partitionen $\mathcal{P}_I$ der endlichen Indexmenge $I$ geht, und die Elemente eines jeden $J$ die Ordnung von $I$ bewahren.

Wir übertragen jetzt diese Abschätzung durch Induktion nach $n$ auf alle Funktionen $\omega_T(A_1; A_2; \cdots; A_n)$ mit $\|A_i\| \leq 1$.

$$\begin{array}{cc} & |\omega(A_1A_2\cdots A_n)| \leq 1 \quad \text{und} \quad |\omega_T(A_i)| \leq 1, \quad |\omega(A_i; A_j)| \leq 2 \\ \Longrightarrow & \omega_T(A_1; A_2; \cdots; A_n) \leq 2^{n-1}(n-1)!. \end{array}$$

Unter Verwendung von ($\diamondsuit$) folgt

$$\sup_{z \in D_{-1}^{(n)}} |F_A(z)| \leq \|A\|\|P\|^n.$$

Den allgemeinen Fall, d.h. die obige Aussage für alle $P \in \mathcal{A}$, erhält man durch uniforme Approximation.
Wir definieren

$$\omega_n^P(A) := (-1)^n \int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \omega\big(A\tau_{is_n}(P)\cdots\tau_{is_n}(P)\big),$$
$$\omega_0^P(A) := \omega(A),$$

deren Summe wir auch schreiben können als

$$\sum_{n\geq 0} \omega_n^P(A) = \omega(A\Gamma_{-i}^P). \tag{*}$$

Mit den kozyklischen Beziehungen für $\Gamma_{it}^P \in \mathcal{A}_\tau$

$$\Gamma_{-i(s+t)}^P = \Gamma_{it}^P \tau_{it}(\Gamma_{is}^P), \quad \tau_{it}(\Gamma_{-it}^P) = (\Gamma_{-it}^P)^* = (\Gamma_{it}^P)^{-1}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \omega(A\Gamma_{-i}^P) &= \omega\big(A\Gamma_{-i/2}^P\tau_{-i/2}(\Gamma_{-i/2}^P)\big) \\ &= \omega(\Gamma_{-i/2}^{P*}A\Gamma_{-i/2}^P) \\ &= \omega^P(A)\omega(\Gamma_{-i/2}^{P*}\Gamma_{-i/2}^P) \\ &= \omega^P(A)\omega(\Gamma_{-i}^P) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(*)}{\Longrightarrow} \qquad \sum_{n\geq 0} \lambda^n\omega_n^P(A) = \omega^{\lambda P}(A)\sum_{n\geq 0}\lambda^n\omega_n^P(\mathbb{1}).$$

Wir wissen aber auch, daß $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \omega^{\lambda P}(A)$ durch eine Potenzreihenentwicklung mit nicht verschwindendem Konvergenzradius

$$\omega^{\lambda P}(A) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \widehat{\omega}_n^P(A)$$

dargestellt werden kann. Ein Vergleich der beiden Reihendarstellungen ergibt

$$\omega_n^P(A) = \widehat{\omega}_n^P(A) + \sum_{r=1}^{n} \widehat{\omega}_{n-r}^P(A)\omega_r^P(\mathbb{1}), \tag{**}$$

und im besonderen $\widehat{\omega}_0^P(A) = \omega(A)$, also

$$\widehat{\omega}_1^P(A) = \omega_1^P(A) - \omega(A)\omega_1^P(\mathbb{1}) = -\int_0^\beta \omega_T\big(A; \tau_{is}(P)\big)ds.$$

Wir verwenden jetzt bzgl. der Indexmenge $I = \{i_m, \cdots, i_1\}$ die Notation

$$\begin{aligned}
\omega_T(A; I) &= \omega_T\big(A; \tau_{is_{i_1}}(P); \cdots; \tau_{is_{i_m}}(P)\big), \\
\omega(A; I) &= \omega\big(A; \tau_{is_{i_1}}(P); \cdots; \tau_{is_{i_m}}(P)\big).
\end{aligned}$$

Wir beweisen nun die Aussage

$$\widehat{\omega}_r^P(A) = (-1)^n \int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \omega_T\big(A; \{1, 2, ..., r\}\big)$$

durch Indunktion nach $r$. Sei diese Behauptung für $r \leq n-1$ richtig, dann kann man mit $(**)$ und der Definition von $\omega_r^P(\mathbb{1})$ schließen

$$\begin{aligned}
\omega_n^P(A) = \widehat{\omega}_n^P(A) + (-1)^n \sum_{r=1}^{n} \int_0^\beta ds_{n-r+1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \omega_T\big(A; \{n-r+1, ..., n\}\big) \\
\int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{n-r-1}} ds_{n-r} \omega\big(\mathbb{1}; \{1, ..., n-r\}\big) \\
= \widehat{\omega}_n^P(A) + (-1)^n \int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \sum_{J \subsetneq I} \omega_T(A; J)\omega(\mathbb{1}; I \backslash J),
\end{aligned}$$

wobei $I = \{1, 2, ..., n\}$. Die letzte Umformung ist durch den Wechsel der Integrationsvariablen begründet.

Zum Schluß benutzen wir die Relation (♠) zwischen $\omega$ und $\omega_T$

$$\omega(A;I) - \omega_T(A;I) = \sum_{J \subsetneq I} \omega_T(A;J)\omega(\mathbb{1}; I \backslash J),$$

und damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}_n^P(A) &= \omega_n^P(A) - (-1)^n \int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \big[\omega(A;I) - \omega_T(A;I)\big] \\ &= (-1)^n \int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \omega_T(A;I)\end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung auf $P \in \mathcal{A}$ bekommt man wieder durch uniforme Approximation.

□

Man kann zeigen, daß die Abbildung $\gamma_\tau^P : \omega \mapsto \omega^P$ ein Isomorphismus von der Menge der $(\tau, \beta)$-KMS-Zustände in die Menge der $(\tau^P, \beta)$-KMS-Zustände ist, die Extremalpunkte in Extremalpunkte abbildet.
Betrachten wir nun den Orbit des Zustandes $\omega$ unter der gestörten Evolution $\tau^P$. Beim "zeitabhängigen" Formalismus sieht man das System als stabil an, wenn der entwickelte Zustand $\omega^P$ der eindeutige $\tau^P$-KMS-Zustand von $\omega$ ist, in Formeln lautet diese Forderung

$$\omega^P(A) = \lim_{t \to \pm\infty} \omega\big(\tau_t^P(A)\big).$$

Wegen der $\tau$-invarianten Eigenschaft von $\omega$ erhält man

$$\begin{aligned}\omega^P(A) &= \lim_{t \to \pm\infty} \omega\big(\tau_{-t}\tau_t^P(A)\big) \\ &= \omega(A) \\ &+ \lim_{t \to \pm\infty} \sum_{n \geq 1} i^n \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^t dt_n \omega\left(\Big[\tau_{t_n}(P)\big[\cdots[\tau_{t_1}(P), A]\big]\Big]\right).\end{aligned}$$

Wir haben also eine von der im Theorem angegebenen unterschiedliche Entwicklungen für $\omega^P(A)$ erhalten. Durch Termvergleich der beiden Formen erhält man schließlich eine Stabilitätsbedingung.

**Theorem 3.3** Sei $\omega$ ein $(\tau,\beta)$-KMS-Zustand über dem $C^*$-dynamischen oder $W^*$-dynamischen System $(\mathcal{A},\tau)$ mit der starken Cluster-Eigenschaft

$$\lim_{t\to\pm\infty}\omega\big(A\tau_t(B)\big)=\omega(A)\omega(B) \qquad \forall A,B\in\mathcal{A}.$$

Dann gilt

$$\lim_{T_1\to\pm\infty}\cdots\lim_{T_n\to\pm\infty} i^n\int_0^{T_1}dt_1\int_{t_1}^{T_2}dt_2\cdots\int_{t_{n-1}}^{T_n}dt_n\omega\Big(\Big[\tau_{t_n}(B)\big[\cdots[\tau_{t_1}(B),A]\big]\Big]\Big)$$
$$=\int_0^\beta ds_1\cdots\int_0^{s_{n-1}}ds_n\omega_T\big(A;\tau_{is_n}(B);\cdots;\tau_{is_1}(B)\big),$$

und im besonderen

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\omega\big([A,\tau_t(B)]\big)dt=0$$

für alle $A,P\in\mathcal{A}$.

**Beweis:**

Sei $B\in\mathcal{A}_\tau$ und $B(s_1,...,s_j):=\tau_{is_j}(B)\cdots\tau_{is_1}(B)$. Da $\omega$ ein $(\tau,\beta)$-KMS-Zustand ist, folgt nach einer Integration für alle $C\in\mathcal{A}$

$$\int_{t_j}^{T_{j+1}}dt_{j+1}\int_0^\beta ds_1\cdots\int_0^{s_{j-1}}ds_j\omega\big(\big[\tau_{t_{j+1}}(B),C\big]\tau_{t_{j+1}}\big(B(s_1,...,s_j)\big)$$
$$=-i\int_0^\beta ds_1\cdots\int_0^{s_j}ds_{j+1}\omega\big(C\tau_{t_j}\big(B(s_1,...,s_{j+1})\big)-C\tau_{T_{j+1}}\big(B(s_1,...,s_{j+1})\big)\big),$$

denn das Integral von $z\mapsto\omega\big(C\tau_z(B)\big)$ um das Parallelepiped mit den Ecken $(0,0),(T,0),(T,\beta)$, und $(0,\beta)$ leistet keinen Beitrag. Weiterhin kann man aufgrund der KMS-Bedingung die linke Seite der obigen Gleichung als die Differenz der Größen

$$L_1:=\int_{t_j}^{T_{j+1}}dt_{j+1}\int_0^\beta ds_1\cdots\int_0^{s_{j-1}}ds_j\omega\big(C\tau_{t_{j+1}}\big(B(\beta,s_1,...,s_j)\big)\big)$$
und $$L_2:=\int_{t_j}^{T_{j+1}}dt_{j+1}\int_0^\beta ds_1\cdots\int_0^{s_{j-1}}ds_j\omega\big(C\tau_{t_{j+1}}\big(B(s_1,...,s_j,0)\big)\big)$$

darstellen. Wechseln wir nun die Variablen $s'_k := s_{k+1} - s_k + \beta,\ k = 1, ..., j-1$ und $s'_j := \beta - s_1$ und führen wieder die Integration durch, so bekommen wir:

$$
\begin{aligned}
L_2 := &\int_{t_j}^{T_{j+1}} dt_{j+1} \int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{j-1}} ds_j \omega\big(C\tau_{t_{j+1}}\big(B(\beta - s_j, s_1 - s_j, ..., s_{j-1} - s_j, 0)\big)\big) \\
&= L_1 + i \int_{t_j}^{T_{j+1}} dt_{j+1} \int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_j} ds_{j+1} \\
&\qquad \Big\{\omega\big(C\tau_{t_j}\big(B(\beta - s_j + s_{j+1}, ..., s_{j-1} - s_j + s_{j+1}, s_{j+1})\big)\big) \\
&\qquad - \omega\big(C\tau_{T_{j+1}}\big(B(\beta - s_j + s_{j+1}, ..., s_{j-1} - s_j + s_{j+1}, s_{j+1})\big)\big)\Big\}
\end{aligned}
$$

Ein wiederholter Wechsel der Integrationsvariablen führt zur gewünschten Identifikation mit der Differenz $L_1 - L_2$. Man kann durch Approximation mit analytischen Elementen eine ähnliche Form für den allgemeineren Fall $P \in \mathcal{A}$ finden. Die obige Identität ergibt zusammen mit der starken Cluster- Eigenschaft für die Größen

$$
\begin{aligned}
C(t_1, ..., t_n) &= \big[\tau_{t_n}(B), [\cdots [\tau_{t_1}(B), A]]\big] \\
X(T_1, ..., T_n) &= \int_0^{T_1} dt_1 \int_{t_1}^{T_2} dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^{T_n} dt_n \omega\big(C(t_1, ..., t_n)\big)
\end{aligned}
$$

für $n \geq 2$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{T_1,...,T_n \to \pm\infty} X(T_1, ..., T_n) = &\sum_{j=1}^{n-1} -(-i)^{n-j} \lim_{T_1,...,T_j \to \pm\infty} \int_0^{T_1} dt_1 \cdots \int_{t_{j-1}}^{T_j} dt_j \omega\big(C(t_1, ..., t_j)\big) \\
&\int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{n-j-1}} ds_{n-j} \omega\big(B(s_1, ..., s_{n-j})\big) \\
&+ (-i)^n \int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \omega\big(B(s_1, ..., s_n)\big).
\end{aligned}
$$

Der Beweis wird durch Induktion nach $n$ abgeschlossen. Für $n = 1$ erhalten wir den Spezialfall:

$$
\lim_{T_1 \to \pm\infty} X(T_1) = -i \int_0^\beta \big\{\omega\big(A\tau_{is_1}(P)\big) - \omega(A)\omega(P)\big\} ds_1.
$$

Sei nun die obige Aussage für $j \leq n - 1$ richtig, dann folgt mit der obigen Identität:

$$\begin{aligned}
\lim_{T_1,\dots,T_n\to\pm\infty} X(T_1,\dots,T_n) = -(-i)^n \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{n-j-1}} ds_{n-j}\,\omega\big(\tau_{is_{n-j}}(B)\cdots\tau_{is_1}(B)\big) \\
\int_0^\beta ds_{n-j+1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n\,\omega_T\big(A;\tau_{is_n}(B);\cdots;\tau_{is_{n-j+1}}(B)\big) \\
+ (-i)^n \int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n\,\omega\big(A\tau_{is_n}(B)\cdots\tau_{is_1}(B)\big) \\
= (-i)^n \int_0^\beta ds_1 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n\,\omega_T\big(A;\tau_{is_n}(B);\cdots;\tau_{is_1}(B)\big).
\end{aligned}$$

Beispielsweise lautet die Stabilitätsbedingung erster Ordnung:

$$\lim_{T\to\pm\infty} i\int_0^T \omega\big([A,\tau_t(B)]\big)\,dt = \int_0^\beta \omega_T\big(A;\tau_{is}(B)\big)\,ds.$$

Die Stabilitätsbedingung wird von allen $(\tau,\beta)$-KMS-Zuständen, $\beta\in\overline{\mathbb{R}}$ erfüllt, die auf einem $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}_0)$-*asymptotisch abelschen* $C^*$-dynamischen System leben, d.h. auf einer normdichten Unteralgebra von $\mathcal{A}_0\subset\mathcal{A}$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|[A,\tau_t(B)]\|dt < \infty \qquad \forall A,B\in\mathcal{A}_0.$$

Diese starke Form von asymptotischer Kommutativität ist für die Existenz von Grenzwerten von $\tau_t^{-1}\tau_t^P$ bei $t\to\pm\infty$ notwendig. Jedoch kann man deren Gültigkeit bei konkreten Modellen leider nur schwer oder garnicht verifizieren. Ein Beispiel, bei dem diese Eigenschaft gezeigt werden kann, ist das ideale Fermi-Gas (siehe hierzu Bsp. 5.4.9 in [BR81]).

## 3.2 Herleitung der KMS-Bedingung aus Stabilitätskriterien

Bis jetzt haben wir gezeigt, daß KMS-Zustände bestimmten Stabilitätsbedingungen genügen. Das nächste Ziel ist es, die KMS-Bedingung aus Stabilitätskriterien abzuleiten.
Der stärkste Stabilitätsbegriff ist die Existenz eines $(\tau^P,\beta)$-KMS-Vektorzustandes. Jedoch besitzt z.B. das ideale Fermi-Gas keinen $\tau^P$-Grundzustand als normalen Zustand für Störungen der Form $P=a^*(f)a(f)$. Die physikalische Begründung ist die, daß so eine Störung unendlich viele infra-Teilchen erzeugt, d.h. Teilchen mit infinitesimal kleinen Energien, immer dann, wenn $f$ auf der Fermi-Fläche $p^2=\mu$ nicht verschwindet. Zusätzlich hierzu weist der Grundzustand eine unendlich große Dichte auf (siehe für mehr Details [Rob73]).

Wir wollen nun einen etwas schwächeren Stabilitätsbegriff formulieren. Hierbei bedienen wir uns dem zeitunabhängigen und zeitabhängigen Ansatz.
Beim zeitunabhängigen Ansatz geht man davon aus, daß das gestörte System einen $\tau^P$-invarianten Zustand $\omega^P$ besitzt, der nur wenig von $\omega$ in der Lokalisationsregion von $\omega$ abweicht und

$$\omega^{\lambda P} \xrightarrow{\lambda \to 0} \omega.$$

Beim zeitabhängingen Zugang betrachtet man die Entwicklung von $\omega^{\lambda P}$ unter der dynamischen Gruppe $\tau$, wobei $\tau$ "genügend" ergodisch (dispersiv, mischend) ist, mit

$$\lim_{|t| \to \infty} \omega^{\lambda P}\big(\tau_t(A)\big) = \omega(A).$$

Mit diesen beiden Argumenten ergibt sich die folgende Stabilitätsbedingung:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \omega\big([P, \tau_t(A)]\big) dt &= \lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{\lambda P}\big([P, \tau_t(A)]\big) dt \\
&= \lim_{\lambda \to \infty} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \omega^{\lambda P}\big([P, \tau_t(A)]\big) dt \\
&= \lim_{\lambda \to \infty} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{i}{\lambda} \frac{d}{dt} \omega^{\lambda P}\big(\tau_{-t}^{\lambda P} \tau_t(A)\big) dt \\
&= \lim_{\lambda \to \infty} \lim_{T \to \infty} \frac{i}{\lambda} \Big[\omega^{\lambda P}\big(\tau_T(A)\big) - \omega^{\lambda P}\big(\tau_{-T}(A)\big)\Big] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotische Kommutativität erlaubt die Vertauschung von Limes und Integral für alle $P, A \in \mathcal{A}_0$.
Fassen wir die Postulate für ein stabiles System zusammen:

(i) $\tau$-Invarianz, d.h. Stationarität in der Zeit,

(ii) Ergodizität von $(\mathcal{A}, \tau)$, z.B. asymptotische Kommutativität,

(iii) relative "Reinheit" von $\omega$, z.B. soll $\omega$ extremal unter den $\tau$-invarianten Zuständen sein und

(iv) Stabilität unter Störungen.

Diese Postulate führen dann zum Stabilitätskriterium

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega\big([P, \tau_t(A)]\big) dt = 0, \quad \forall A, P \in \mathcal{A},$$

das der KMS-Bedingung in der Radon-Nikodym-Formulierung bei $E = 0$ entspricht. Dies ist ein starker Hinweis darauf, daß die KMS-Eigenschaft durch diese Postulate erzwungen wird.
Leider ist auch diese Bedingung i. A. nicht erfüllt, so z.B. genügt ihr der freie Fermi-See nicht. Die obige Forderung ist aber immer gültig bei $C^*$-dynamischen Systemen für normdichte Unteralgebren $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$.
Nun kann man bei der Herleitung dieses Stabilitätskriteriums die vier Postulate verschieden stark gewichten. Wir werden im folgenden zwei verschiedene Versionen geben. Im ersten Theorem haben Haag, Kastler und Trych-Pohlmeyer (1974) stärkere Cluster-Eigenschaften als bei der "Extremalität" und relativ schwache asymptotische Kommutativität gefordert. Im Gegensatz hierzu haben Bratteli, Kishimoto und Robinson (1978) im zweiten Theorem schwächere Forderungen an die Cluster-Eigenschaft gesetzt, aber dafür die $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotische Kommutativität für $(\mathcal{A}, \tau)$ verlangt.

Wir geben nun ein Ergebnis von Haag, Kastler und Trych-Pohlmeyer [HKTP74], die gezeigt haben, daß extremale Zustände $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotisch kommutativer $C^*$-dynamischer Systeme, die bei lokalen Störungen stabil sind, extremale $(\tau, \beta)$-KMS-Zustände mit Werten $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ sind.

**Theorem 3.4 (Haag,Kastler,Trych-Pohlmeyer)** Sei $(\mathcal{A}, \tau)$ ein $C^*$-dynamisches System und $\omega$ ein $\tau$-invarianter Zustand auf $\mathcal{A}$. Es gelten weiterhin:

(i) $\lim_{|t|\to\infty} \|\pi_\omega\big([\tau_t(A), B]\big)\psi\| = 0 \qquad \forall A, B \in \mathcal{A},\ \forall \psi \in \mathcal{H}_\omega$.

(ii) Die Funktionen

$$
\begin{aligned}
&t \mapsto |\omega\big(P\tau_t(A)\big) - \omega(P)\omega(A)| \qquad \text{und} \\
&t \mapsto \sup_{s\in\mathbb{R}} |\omega\big(P_1\tau_s(P_2)\tau_t(A_1\tau_s(A_2))\big) - \omega\big(P_1\tau_s(P_2)\omega(A_1\tau_s(A_2))\big)|
\end{aligned}
$$

sind $L^1$-Funktionen für alle $A_1, A_2, P_1$ und $P_2$ in $\mathcal{A}_0$.

(iii) $\omega$ ist im Sinne von

$$
\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \omega\big([A, \tau_t(B)]\big)dt = 0 \qquad \forall A, B \in \mathcal{A}_0
$$

stabil.

Dann ist $\omega$ ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand mit $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$.

**Beweisskizze:**

Wir leiten die KMS-Eigenschaft von $\omega$ mit Hilfe der maßtheoretischen Formulierung her. Seien hierzu

$$F_{A_i,P_i}(t) := \omega\big(P_i\tau_t(A_i)\big) - \omega(P_i)\omega(A_i))$$
$$G_{A_i,P_i}(t) := \omega\big(\tau_t(A_i)P_i\big) - \omega(A_i)\omega(P_i)$$

für $A_i, P_i \in \mathcal{A}_0,\ i = 1,2$.
Der Beweis stützt sich auf die folgenden Aussagen, wobei wir (A) und (B) für (C) und (D) brauchen werden.

(A) Die Abbildung

$$t \mapsto F_{A_1,P_1}(t)F_{A_2,P_2}(t) - G_{A_1,P_1}(t)G_{A_2,P_2}(t)$$

ist eine $L^1$-Funktion mit

$$\int \big[F_{A_1,P_1}(t)F_{A_2,P_2}(t) - G_{A_1,P_1}(t)G_{A_2,P_2}(t)\big]\,dt = 0.$$

(B) Es gilt

$$\widehat{F}_{A_1,P_1}(p)\widehat{F}_{A_2,P_2}(-p) = \widehat{G}_{A_1,P_1}(p)\widehat{G}_{A_2,P_2}(-p)$$

für alle $p \in \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ und $A_i, P_i \in \mathcal{A}_0$.

(C) Falls das Spektrum von $H_\omega$ nicht in $[0,\infty>$ oder $<-\infty,0]$ enthalten ist, dann existieren für $p \in \mathbb{R}$ $A, P \in \mathcal{A}_0$ mit $\widehat{F}_{A,P}(p) \neq 0$.

(D) Falls das Spektrum $\sigma(H_\omega)$ nicht einseitig ist, dann gibt es eine eindeutige positive Funktion $\Phi$ auf $\mathbb{R}$ mit $\widehat{F}_{A,P}(p) = \Phi(p)\widehat{G}_{A,P}(p)$.

Man kann zeigen, daß falls $\sigma(H_\Omega)$ einseitig sein sollte, dann ist $\omega$ ein Grundzustand. Sei es von nun an nicht einseitig. Mit der Spaktralzerlegung $\int p dE_\omega(p)$, wobei $E_\omega$ die Projektion auf $\mathbb{C}\Omega_\omega$ ist, gilt für $A, P \in \mathcal{A}_0$

$$F_{A,P}(t) = \int e^{itp}\big(P^*\Omega_\omega, (dE_\omega(p) - E_\omega\delta(p)dp)A\Omega_\omega\big)$$
$$G_{A,P}(t) = \int e^{itp}\big(A^*\Omega_\omega, (dE_\omega(-p) - E_\omega\delta(p)dp)P\Omega_\omega\big)$$

Wegen (D) sind dann die Spektralmaße absolut stetig und

$$\big(P^*\Omega_\omega, (dE_\omega(p) - E_\omega\delta(p)dp)A\Omega_\omega\big) = \Phi(p)\big(A^*_\omega, (dE_\omega(-p) - E_\omega\delta(p)dp)P\Omega_\omega\big).$$

Da $\Phi$ positiv ist und $\Phi(0) = 1$, folgt

$$\begin{aligned} \big(P^*\Omega_\omega, dE_\omega(p)dp)A\Omega_\omega\big) &= \big(\Phi(p)^{1/2}A^*\Omega_\omega, dE_\omega(-p)\Phi(p)^{1/2}P\Omega_\omega\big) \\ \Longrightarrow \qquad \big(P^*\Omega_\omega, A\Omega_\omega\big) &= \big(\Phi(-H_\omega)^{1/2}A^*\Omega_\omega, \Phi(-H_\omega)^{1/2}P\Omega_\omega\big), \end{aligned}$$

wegen $\mathcal{A}_0\Omega_\omega \subseteq D\big(\Phi(-H_\omega)^{1/2}\big)$. Da $\pi_\omega(\mathcal{A}_0)$ stark $^*$-dicht in $\mathcal{M}_\omega = \pi_\omega(\mathcal{A})''$ und $\Phi(-H_\omega)^{1/2}$ ein abgeschlossener Operator sind, erhält man

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_\omega\Omega_\omega \subseteq D\big(\Phi(-H_\omega)^{1/2}\big) \\ \Longrightarrow \quad & (B\Omega_\omega, A\Omega_\omega) = \big(\Phi(-H_\omega)^{1/2}A^*\Omega_\omega, \Phi(-H_\omega)^{1/2}B\Omega_\omega\big) \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_\omega \\ \Longrightarrow \quad & A\Omega_\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad A^*\Omega_\omega = 0 \quad \forall A \in \mathcal{M}_\omega. \end{aligned}$$

Man zeigt nun, daß $\mathcal{M}_\omega\Omega_\omega$ sowohl für $\Phi(-H_\omega)^{1/2}$ als auch für $\triangle^{1/2}$, der Quadratwurzel des modularen Operators bzgl. $(\mathcal{M}_\omega, \Omega_\omega)$ ein Kern ist. Deshalb können wir wegen

$$\begin{aligned} \big(\Phi(-H_\omega)^{1/2}A\Omega_\omega, \Phi(-H_\omega)^{1/2}B\Omega_\omega\big) &= \big(B^*\Omega_\omega, A^*\Omega_\omega\big) \\ &= \big(\triangle^{1/2}A\Omega_\omega, \triangle^{1/2}B\Omega_\omega\big) \end{aligned}$$

schließen, daß

$$\Phi(-H_\omega)^{1/2} = \triangle^{1/2}.$$

Da $\omega$ $\tau$-invariant ist, folgt für die modulare Automorphismengruppe $\sigma_t = \triangle^{it}A\triangle^{-it}$ $\tau_t\sigma_s = \sigma_s\tau_t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$, und mit der separierenden Eigenschaft von $\omega$

$$\inf_{B' \in \mathcal{C}_0\left(\tau_{\mathbb{R}}(B)\right)} |\omega(AB'C) - \omega(B)\omega(AC)| = 0 \quad \forall A, B, C \in \mathcal{M}_\omega.$$

Wegen (C) und $\log\Phi(-H_\omega) = \log\triangle$ ist die Funktion $p \mapsto \log\Phi(p)$ linear, und es existiert ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(p) = e^{-\beta p},$$

und somit

$$e^{-\beta H_\omega} = \triangle,$$

d.h. $\omega$ ist ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand .

□

Im folgenden diskutieren wir ein Ergebnis von Bratteli, Kishimoto und Robinson[BKR78], die gezeigt haben, daß extremale Zustände $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotisch stabiler $C^*$-dynamischer Systeme, die bei lokalen Störungen stabil sind, extremale $(\tau,\beta)$-KMS-Zustände mit Werten $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ sind.

**Theorem 3.5 (Bratteli,Kishimoto, Robinson)** Sei $(\mathcal{A},\tau)$ ein $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotisch abelsches $C^*$-dynamisches System und $\omega$ ein $\tau$-invarianter Zustand über $\mathcal{A}$. Seien zusätzlich noch die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Entweder

$$\lim_{\substack{\inf |t_i-t_j|\to\infty \\ i\neq j}} \omega\big(\tau_{t_1}(A_1)\tau_{t_2}(A_2)\tau_{t_3}(A_3)\big) = \omega(A_1)\omega(A_2)\omega(A_3) \quad \forall A_k \in \mathcal{A},$$

oder $\omega$ ist ein Faktorzustand.

(ii) $\omega$ genügt der Stabilitätsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega\big([A,\tau_t(B)]\big)\,dt = \infty \qquad \forall A,B \in \mathcal{A}_0.$$

Dann ist $\omega$ ein extremaler $(\tau,\beta)$-KMS-Zustand mit $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$.

**Beweisskizze:**

Da die Funktion $t \mapsto \tau_t(B)$ stetig (uniform) für $B \in \mathcal{A}_0$ ist, folgt aus der $L^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotischen Kommutativität

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|[A,\tau_t(B)]\| = 0$$

für alle $A, B$ aus $\mathcal{A}_0$ und damit auch aus $\mathcal{A}$. Wenn $\omega$ ein Faktorzustand ist, dann gilt

$$\lim_{\substack{\inf |t_i-t_j|\to\infty \\ i\neq j}} \omega\big(\tau_1(A_1)\cdots\tau_n(A_n)\big) = \omega(A_1)\cdots\omega(A_n), \quad \forall A_i \in \mathcal{A},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

d.h. wir können uns bei dem Beweis auf die drei-cluster-Eigenschaft beschränken. Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß $\mathcal{A}_0$ abgeschlossen unter Regularisierung durch $L^1$-Funtkionen ist. Wir werden für den weiteren Verlauf der Beweisskizze die folgenden Definitionen gebrauchen:

$$\begin{aligned}
F_i(t) &:= F_{A_i,P_i}(t) := \omega\big(P_i\tau_t(A_i)\big) - \omega(P_i)\omega(A_i)\\
G_i(t) &:= G_{A_i,G_i}(t) := \omega\big(\tau_t(A_i)P_i\big) - \omega(A_i)\omega(P_i)\\
H_i(t) &:= H_{A_i,P_i}(t) := F_i(t) - G_i(t)\\
\psi_i : &\ \text{Radon-Nikodym } (|\mu|+|\nu|)\text{-meßbare Funktionen mit } \psi_1(-p) = -\psi_2(p)\\
\varphi(p) &:= \begin{cases} \frac{\psi_1(p)}{\psi_2(p)} & \text{, auf } S\backslash S_\infty \\ 1 & \text{, auf } \mathbb{R}\backslash S. \end{cases}\\
S &:= \{p \in \mathbb{R} |\ \widehat{H}_{A,P}(p) \neq 0 \quad \text{für einige } A, P \in \mathcal{A}_0\}\\
S_0 &:= \{p \in S|\ \psi_1(p) = 0\}\\
S_\infty &:= \{p \in S|\ \psi_2(p) = 0\}\\
S_f &:= \mathbb{R}\backslash\{S_0 \cap S_\infty\}\\
S_+ &:= \bigcap_{A\in\mathcal{A}_0} \{p|\ \widehat{H}_{A,A^*}(p) \geq 0\}\\
S_- &:= \bigcap_{A\in\mathcal{A}_0} \{p|\ \widehat{H}_{A,A^*}(p) \leq 0\}.
\end{aligned}$$

Der Beweis beruht hauptsächlich auf die folgenden Aussagagen:

(A) $S_0 = S_\infty, \quad S_f = -S_f$, in dem Sinne, daß diese Mengen sich nur um einer Menge vom $(|\mu|+|\nu|)$-Maß Null unterscheiden.

(B) $\big(P^*\Omega_\omega, E_\omega(S_f)A\Omega_\omega\big) = \big(\varphi(-H_\omega)^{1/2}A^*\Omega_\omega, \varphi(-H_\omega)^{1/2}P\Omega_\omega\big) \quad \forall A, P \in \mathcal{M}_\omega = \pi_\omega(\mathcal{A})''$.

(C) $E_f = E_\omega(S_f)$.

(D) Das Spektrum $\Sigma$ von $(\log\Delta, H_E)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}^2$.

(E) Falls $E_\omega(S_f)$ nicht eindimensional ist, ist $S_f$ dicht in $\mathbb{R}$ und $\sigma(H_E) = \mathbb{R}$.

(F) $\sigma(H_E) + \sigma(H_{\mathbb{1}-E}) \subseteq \sigma(H_{\mathbb{1}-E})$.

(G) $\overline{S_\infty} \cap \overline{S_0} \cap S \subseteq S_+ \cap S_- \cap S = \emptyset$.

(H) $\sigma(H_{\mathbb{1}-E}) = \overline{S_\infty}$.

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.

<u>Fall 1:</u> $E_\omega(S_f)$ ist nicht eindimensional.
$\overset{(E)}{\Longrightarrow} \sigma(H_E) = \mathbb{R}. \qquad (*)$
Sei $E_f \neq \mathbb{1} \overset{(F)}{\Longrightarrow} \sigma(H_{\mathbb{1}-E}) = \mathbb{R} \overset{(H)}{\Longrightarrow} \overline{S_\infty} = \mathbb{R} \overset{(A)}{\Longrightarrow} \overline{S_0} = \overline{-S_\infty} = \mathbb{R} \Longrightarrow \overline{S_\infty} \cap \overline{S_0} \cap S = S \overset{S_\infty \subseteq S}{\Longrightarrow} S \neq \emptyset$. Diese Aussage steht im Widerspruch

zu $(G)$, d.h. also daß $E_f = \mathbb{1} \overset{(C)}{\Longrightarrow} E_\omega(S_f) = \mathbb{1} \Longrightarrow E_\omega(S_\infty) = 0$. Wir können durch Modifizierung von $\psi_1, \psi_2$ auf Mengen des $(|\mu| + |\nu|)$-Maßes Null $S_\infty = S_0 = \emptyset$ annehmen.
$\overset{(B)}{\Longrightarrow} (\Delta^{1/2} A^* \Omega_\omega, \Delta^{1/2} P \Omega_\omega) = (P^* \Omega_\omega, A \Omega_\omega) = \big(\varphi(-H_\omega)^{1/2} A^* \Omega_\omega, \varphi(-H_\omega)^{1/2} P \Omega_\omega\big)$
$\forall A, P \in \mathcal{M}_\omega$.
Da $\mathcal{M}_\omega \Omega$ der Kern für $\Delta^{1/2}$ ist, und $H_\omega$ und $\Delta^{1/2}$ stark kommutieren, kann man zeigen

$$\begin{aligned}
& \Delta = \varphi(-H_\omega) \\
\Longrightarrow\quad & \Sigma \subseteq \overline{\big\{ \big[ \log \big( \varphi(-p) \big), p \big] \,|\, p \in \mathbb{R} \big\}} \\
\overset{(E)}{\Longrightarrow}\quad & \Sigma \text{ kann keine isolierte Punkte haben.} \qquad (**) \\
\overset{(D)}{\Longrightarrow}\quad & \mathbb{R}^2 \supset \Sigma \text{ ist abgeschlossen.} \\
\overset{(*)}{\Longrightarrow}\quad & \Sigma \text{ besitzt eine der folgenden Formen:}
\end{aligned}$$

$(i)\Sigma = \mathbb{R}^2$.
$(ii)\Sigma$ ist ein Feld von äquidistanten geraden, zur $\log \Delta$-Achse nicht parallel liegenden Linien. Eine dieser Linien enthält den Ursprung.
$(iii)\Sigma$ ist eine gerade, zur $\log \Delta$-Achse nicht parallel liegende Linie durch den Ursprung

Die ersten beiden Fälle führen zu Widersprüchen. Im Fall $(iii)$ existiert ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
& \Sigma = \{(-\beta p, p) \,|\, p \in \mathbb{R}\} \\
\Longrightarrow\quad & \log \Delta = -\beta H_\omega \quad \vee \quad \Delta = e^{-\beta H_\omega}.
\end{aligned}$$

Das Theorem von Takesaki besagt, daß dann $\omega$ ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand ist.

<u>Fall 2:</u> $E_\omega(S_f)$ ist eindimensional.
$E_\omega(S_f) = \mathbb{1}$: Dann ist $\omega$ ein $\tau$-invarianter Charakter und damit ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand mit Werten $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$.
$E_\omega(S_f) \neq \mathbb{1}$: Dann ist $E_\omega(S_\infty) = \mathbb{1} - E_\omega(S_f) \neq 0$ und $S \neq \emptyset$ wegen $S_\infty \subseteq S$. Sei $\overline{S_\infty} = \mathbb{R}$, dann gilt $\overline{S_0} = \overline{-S_\infty} = \mathbb{R}$ und folglich $\overline{S_\infty} \cap \overline{S_0} \cap S = S \neq \emptyset$ im Widerspruch zu $(G)$. D.h. also $\overline{S_\infty} \neq \mathbb{R}$ und damit wegen $(H)$ $\sigma(H_\omega) \subseteq \overline{S_\infty} \cup \{0\} \neq \mathbb{R}$. Weil $\sigma(H_\omega)$ keine isolierten Punkte besitzt $(**)$, kann man zeigen, daß $\sigma(H_\omega)$ entweder in $+[0, +\infty >$ liegt oder in $-[0, +\infty >$, d.h. $\omega$ ist entweder ein Grund- oder ein Deckenzustand.

□

Die vorangegangenen drei Theoreme verknüpfen die Stabilität und die KMS-Bedingung für $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotisch abelsches $C^*$-dynamische Systeme aufs engste miteinander. Man kann also die Interpretation von KMS-Zuständen als Gleichgewichtszustände physikalischer Systeme genügend rechtfertigen.

## 3.3 Stabilität aus Normstetigkeit

Wir versuchen an dieser Stelle, die Stabilitätsbedingung aus der Normstabilität der Grenzwerte $\lim_{t\to\pm\infty} \omega \circ \tau_t^{\lambda P}$ herzuleiten [HTP77].
Für die Automorphismen $\gamma_t^{\lambda P} := \tau_t^{-1}\tau_t^{\lambda P}$ erhält man nach einer Differentiation

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\gamma_t^{\lambda P}(A) &= -\lambda\tau_t^{-1}\big([P,\tau_t^{\lambda P}(A)]\big) \\ i\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_t^{\lambda P})^{-1}(A) &= \lambda(\tau_t^{\lambda P})^{-1}\big([P,\tau_t(A)]\big). \end{aligned} \tag{*}$$

Im Falle der $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotischen Kommutativität sind die rechten Seiten der beiden Gleichungen für $A \in \mathcal{A}_0$ und hinreichend kleine $\lambda$ absolut integrabel. Somit existieren die Grenzwerte

$$\gamma_\pm^{\lambda P} := \lim_{t\to\pm\infty} \gamma_t^{\lambda P}$$

und sind Automorphismen. Sie sind zunächst einmal $^*$-Morphismen, weil sie Grenzwerte von $^*$-Morphismen sind, und damit bilden $\gamma_\pm^{\lambda P\,*}$ positive Funktionale in sich selbst ab. Wegen $\gamma_\pm^{\lambda P}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ muß dann $\gamma_\pm^{\lambda P\,*}$ $\mathbf{E}_\mathcal{A}$ in $\mathbf{E}_\mathcal{A}$ abbilden. In Analogie zur Streutheorie bezeichnet man $\gamma_\pm^{\lambda P}$ als $M\ddot{o}ller - Automorphismen.$
Gegeben sei nun ein primärer Zustand $\omega$, der bzgl. $\tau_t$ stationär ist, d.h. $\omega \circ \tau_t = \omega$. Dann sind die folgenden primären Zustände

$$\omega_\pm^{\lambda P}(A) := \omega\big(\gamma_\pm^{\lambda P}(A)\big)$$

stationär unter $\tau_t^{\lambda P}$.

**Satz 3.6 (Normstetigkeit)** Seien $\omega_\pm^{\lambda P}$ wie oben definiert, $A, P \in \mathcal{A}_0$ und es gelte

$$\|\omega_\pm^{\lambda P}(A) - \omega(A)\| \overset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

dann erfüllt $\omega$ die Stabilitätsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega\big([P,\tau_t(A)]\big)dt = 0.$$

**Beweis:**

Zuerst einmal hat $\omega_\pm^{\lambda P}$ die Eigenschaft, in den Gleichgewichtszustand zurückzukehren:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\omega_+^{\lambda P}\big(\tau_t(A)\big) &= \lim_{t\to\infty}\omega_+^{\lambda P}\big(\tau_{-t}^{\lambda P}\tau_t(A)\big)\\ &= \omega_+^{\lambda P}\big(\gamma_+^{\lambda P}(A)\big) = \omega(A),\end{aligned}$$

und entsprechend für $\omega_-^{\lambda P}$

$$\lim_{t\to-\infty}\omega_-^{\lambda P}\big(\tau_t(A)\big) = \omega(A).$$

Für hinreichend kleine $\lambda < \lambda_0$, d.h. sobald

$$\|\omega_\pm^{\lambda P}(A) - \omega\| =: c_\pm(\lambda) < 2$$

ist, liegen $\omega_+^{\lambda P}, \omega_-^{\lambda P}$ und $\omega$ in demselben Folium[2]. Da nun ein primäres Folium maximal einen bzgl. der $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotisch abelschen Dynamik $\tau_t^{\lambda P}$ stationären Zustand enthalten darf, folgt

$$\omega_+^{\lambda P} = \omega_-^{\lambda P}, \quad \forall\lambda < \lambda_0.$$

Mit Hilfe von (*) erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\omega_\pm^{\lambda P}(A) - \omega(A)}{\lambda} &= i\int_0^{\pm\infty}\omega_\pm^{\lambda P}\big([P,\tau_t(A)]\big)dt.\\ \Longrightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\omega_{\mathrm{sign}t}^{\lambda P}\big([P,\tau_t(A)]\big)dt &= 0 \quad \text{für } 0<\lambda<\lambda_0\end{aligned}$$

Für $A \in \mathcal{A}_0$ und mit $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotischen Kommutativität erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega\big([P,\tau_t(A)]\big)dt < M_+c_+ + M_-c_- \overset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

wobei $M_+$ und $M_-$ die Zeitintegrale von $\|[P,\tau_t(A)]\|$ sind, d.h. endliche Konstanten, die nur von $A$ und $P$ aber nicht von $\lambda$ abhängen.

□

Ein Beispiel für Möller-Morphismen finden wir in der quantenmechanische Streutheorie.

[2]Das Folium ist die Menge $\{\omega_\varrho = \mathrm{Tr}\varrho\pi_\omega(A) : \varrho \text{ ist positiver Spurklassenoperator in } \mathcal{L}(\mathcal{H})\}$

**Beispiel 3.7** Sei $\mathcal{A}$ die CAR-Algebra über $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^\nu)$ und $\tau$ die freie Evolution mit

$$\tau_t\big(a(f)\big) := a(U_t f) \quad \text{mit} \quad (U_t f)(x) := (2\pi)^{-\nu/2} \in \widehat{f}(p) e^{ipx+ip^2 t} d^\nu p.$$

Mit der quadratischen Störung $P := a^*(f)a(f)$ sind $\tau$ und $\tau^{\lambda P}$ beide Bogoljubov-Transformationen:

$$\tau_t\big(a(f)\big) = a(U_t f), \qquad \tau_t^{\lambda P}\big(a(f)\big) = a(U_t^{\lambda P} f).$$

Die infinitesimalen Erzeuger der beiden Gruppen $U$ und $U^{\lambda P}$ sind $-\nabla^2$ und $-\nabla^2 + \lambda E$, wobei $E$ wieder die Projektion von $f$ ist, also $Eg = (f,g)f$ für alle $g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^\nu)$. Die Existenz der Grenzwerte

$$W_\pm g := \lim_{t \to \pm\infty} U_{-t}^{\lambda P} U_t g$$

in $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^\nu)$ ist ein bekanntes Resultat der Streutheorie. Somit existieren auch die Möller-Morphismen $\gamma_\pm$ auf $\mathcal{A}$ mit

$$\gamma_\pm\big(a(f)\big) = a(W_\pm f).$$

Es taucht an dieser Stelle ein Problem auf, nämlich daß der Grenzwert $\omega_\pm^{\lambda P}$ i. A. nicht gegeben ist. Im Falle eines starken Cluster-Grundzustandes, bei dem $H_\omega$ an der Stelle Null eine Energielücke besitzt, muß die Existenz der normalen gestörten Grundzustände nicht unbedingt folgen, so beispielsweise beim freien Fermi-See [BKR78]. Wir wollen nun das obige Stabilitätskriterium so modifizieren, so daß man die Existenz der Grenzwerte $\omega_\pm^{\lambda P}$ nicht fordern muß. Thorsteinsson diskutiert in [Tho94] die sogenannte *gleichbleibende Stabilität*:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sup_t \|\omega(A) - \omega \circ \tau_t^{\lambda P}(A)\| = 0.$$

Zunächst läßt es sich leicht zeigen, daß ein $(\tau, \beta)$-KMS-Zustand gleichbleibend stabil ist, denn

$$\begin{aligned}
\|\omega(A) - \omega \circ \tau_t^{\lambda P}\| &\leq \|\omega - \omega^{\lambda P}\| + \|\omega^{\lambda P} - \omega \circ \tau_t^{\lambda P}\| \\
&\leq \|\omega - \omega^{\lambda P}\| + \|\omega^{\lambda P} \circ \tau_t^{\lambda P} - \omega \circ \tau_t^{\lambda P}\| \\
&\leq 2\|\omega - \omega^{\lambda P}\|,
\end{aligned}$$

und die rechte Seite konvergiert nach Thm. 3.1 für $\lambda \to 0$ gegen Null. Das Hauptergebnis von Thorsteinsson ist der folgende

**Satz 3.8** Sei $(\mathcal{A},\tau)$ ein $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotisch abelsches $C^*$-dynamisches System und $\omega$ ein $\tau$-invarianter, primärer Zustand, und es gelte für alle $A,\ P = P^* \in \mathcal{A}_0$

(i) $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sup\limits_t \|\omega(A) - \omega\circ\tau_t^{\lambda P}\omega(A)\| = 0,$

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} \big(\omega\circ\tau_t^{\lambda P}(A) - \omega\circ\tau_{-t}^{\lambda P}(A)\big) = 0.$

Dann ist $\omega$ ein extremaler $(\tau,\beta)$-KMS-Zustand mit $\beta\in\overline{\mathbb{R}}$.

**Beweis:**
Zu zeigen ist nur, daß die beiden Bedingungen (i) und (ii) die Stabilitätsbedingung aus den letzten beiden Theoremen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega\big([P,\tau_t(A)]\big)dt = 0$$

implizieren. Mit

$$\lim_{T\to\infty} \omega\big(\tau_{\pm T}^{\lambda P}\circ\gamma_{\pm T}^{\lambda P}(A)\big) = \lim_{T\to\infty} \omega\big(\tau_{\mp T}\tau_{\pm T}^{\lambda P}\tau_{\mp T}^{\lambda P}\tau_{\pm T}(A)\big) = \omega(A)$$

und (ii) folgt:

$$\lim_{T\to\infty} \Big(\omega\big(\tau_T^{\lambda P}\circ\gamma_T^{\lambda P}(A)\big) - \omega\big(\tau_{-T}^{\lambda P}\circ\gamma_{-T}^{\lambda P}(A)\big)\Big) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{T\to\infty} \Big(\omega\circ\tau_T^{\lambda P}(A) - i\lambda\int_0^T \omega\circ\tau_{T-t}^{\lambda P}\big([P,\tau_t(A)]\big)dt \\ - \omega\circ\tau_{-T}^{\lambda P}(A) - i\lambda\int_0^{-T} \omega\circ\tau_{-T-t}^{\lambda P}\big([P,\tau_t(A)]\big)dt\Big) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{T\to\infty} \Big(\int_0^T \omega\circ\tau_{T-t}^{\lambda P}\big([P,\tau_t(A)]\big)dt + \int_{-T}^0 \omega\circ\tau_{-T-t}^{\lambda P}\big([P,\tau_t(A)]\big)dt\Big) = 0 \quad (*).$$

Wir schließen den Beweis ab mit der abkürzenden Schreibweise $[\cdot,\cdot] := [P, \tau_t(A)]$:

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\omega\big([\cdot,\cdot]\big)dt = \lim_{T\to\infty}\Big\{\int_{-T}^{0}&\Big(\omega\big([\cdot,\cdot]\big) - \omega\circ\tau^{\lambda P}_{-T-t}\big([\cdot,\cdot]\big) + \omega\circ\tau^{\lambda P}_{-T-t}\big([\cdot,\cdot]\big)\Big)dt \\
&+ \int_{0}^{T}\Big(\omega\big([\cdot,\cdot]\big) - \omega\circ\tau^{\lambda P}_{T-t}\big([\cdot,\cdot]\big) + \omega\circ\tau^{\lambda P}_{T-t}\big([\cdot,\cdot]\big)\Big)dt\Big\} \\
= \lim_{T\to\infty}&\Big\{\int_{-T}^{0}\big(\omega - \omega\circ\tau^{\lambda P}_{-T-t}\big)\big([\cdot,\cdot]\big)dt + \int_{0}^{T}\big(\omega - \omega\circ\tau^{\lambda P}_{T-t}\big)\big([\cdot,\cdot]\big)dt\Big\} \\
+ &\underbrace{\lim_{T\to\infty}\Big\{\int_{-T}^{0}\omega\circ\tau^{\lambda P}_{-T-t}\big([\cdot,\cdot]\big)dt + \int_{0}^{T}\omega\circ\tau^{\lambda P}_{T-t}\big([\cdot,\cdot]\big)dt\Big\}}_{=0 \text{ wegen } (*)} \\
\leq &\lim_{T\to\infty}\sup_t\|\omega - \omega\circ\tau^{\lambda P}_t\|\int_{-T}^{T}[P,\tau_t(A)] \xrightarrow{(ii)} 0.
\end{aligned}$$

Das Integral ist aufgrund der $\mathcal{L}^1(\mathcal{A}_0)$-asymptotischen Kommutativität endlich.

□

**Bemerkung 3.9** Mit den oben eingeführten Größen sind wir nun in der Lage, die Notwendigkeit des Stabilitätskriteriums

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega\big([P,\tau_t(A)]\big)dt \quad \forall A, P \in \mathcal{A}_0$$

physikalisch zu begründen. Betrachten wir hierfür einen primären und stationären Zustand, der das Stabilitätskriterium nicht erfüllt [HTP77]. Solche Zustände findet man beispielsweise beim freien Fermi-Gas. Wir diskutieren an dieser Stelle einen beliebigen quasifreien Zustand über die Algebra der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren eines Fermi-Systems, die CAR-Algebra. Bei einem quasifreien Zustand sind die $n$-Punktfunktionen mit ungeradem $n$ identisch Null, und die übrigen können nur durch die Zweipunktfunktion (siehe Anhang), hier in diesem Fall

$$W^{(2)}(\mathbf{p},\mathbf{p}') = \varrho(\mathbf{p})(\mathbf{p}-\mathbf{p}'),$$

beschrieben werden, wobei $\varrho$ nicht die Form $(1+e^{\alpha+\beta\varepsilon})^{-1}$ hat. Wenn wir $\varrho$ richtungsunabhängig wählen, dann ist das Stabilitätskriterium für

$$P := \int a^*(\mathbf{p})a(\mathbf{p}')g(\mathbf{p},\mathbf{p}')d^3pd^3p' \text{ und}$$
$$A := \int a^*(\mathbf{p})a(\mathbf{p}')f(\mathbf{p},\mathbf{p}')d^3pd^3p'$$

verletzt.
Entwicklen wir $\omega_+^{\lambda P}(A)$ nach $\lambda$

$$\omega_+^{\lambda P} = \omega + \lambda\omega^{(1)} + \lambda^2\omega^{(2)} + ...,$$

dann erhalten wir mit den oben eingeführten Größen und diskutierten Beziehungen:

$$\begin{aligned}\omega_+^{(2)}(A) = &- \int\limits_{\infty>t_2>t_1>0} \omega\big(\left[\alpha_{-t_2}(P),\left[\alpha_{-t_1}(P),A\right]\right]\big)dt_1dt_2 \\ &- \int\limits_{\infty>t_2>t_1>0} \big(\varrho(p_1)-\varrho(p_2)\big)g(p_1,p_1')g(p_1',p_2') \\ &\qquad f(p_2',p_1)e^{i(\varepsilon_1'-\varepsilon_1)t_2+i(\varepsilon_2'-\varepsilon_1')t}d^3p_1d^3p_1'd^3p_2dt_1dt_2 + *.\end{aligned}$$

$*$ symbolisiert das komplex konjugierte, falls $P$ und $A$ selbstadjungiert sind. Das Lokalisationgebiet der Observablen $A$ soll genügend weit von dem der Observablen $P$ entfernt sein, d.h. wir setzen in der obigen Gleichung $\alpha_x(A)$ für $A$ ein und betrachten die asymptotische Region bei großem $|x|$. Die Intergration über $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2'$ wie aber auch über $t_1$ und $t_2$ kann dann mit Hilfe der Methode der stationären Phase durchgeführt werden. Die stationären Phasen liegen bei

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2' = |\mathbf{p}_1'|\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \quad \text{und} \quad t_1 = t_2 = m\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{p}_1'|},$$

und man erhält:

$$\omega_+^{(2)}\big(\alpha_x(A)\big) \longrightarrow \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\int f(\mathbf{p},\mathbf{p})|g(\mathbf{p},\mathbf{p}')|^2\big(\varrho(\mathbf{p})-\varrho(\mathbf{p}')\big)d^3\mathbf{p}', \quad \mathbf{p} = |\mathbf{p}'|\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

Dieser Ausdruck beschreibt den Effekt, der durch die Differenz der vom Impuls $\mathbf{p}$ nach $\mathbf{p}'$ gestreuten Teilchen und der Teilchen, die den umgekehrten Weg gehen. Im stabilen Fall ist $\varrho(\mathbf{p}) = \varrho(\mathbf{p}')$ und die Zweipunktfunktion $\omega_+^{(2)}\big(\alpha_x(A)\big)$ verschwindet schneller als $\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$. Führt man die gleiche Rechnung mit

$$P = \int g(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2;\mathbf{p}_1',\mathbf{p}_2')a^*(\mathbf{p}_1)a^*(\mathbf{p}_1')a(\mathbf{p}_1)a(\mathbf{p}_1')d^3p_1d^3p_1'd^3p_2d^3p_2'$$

durch, die die Kraft zwischen zwei Teilchen beschreibt, so bekommt man für den dominierenden Term ein ähnliches Ergebnis, das proportional zu $\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$ ist, mit dem Unterschied, daß der Term $\varrho(\mathbf{p}) - \varrho(\mathbf{p}')$ durch

$$\varrho(p_1)\varrho(p_2)\big(1-\varrho(p_1')\big)\big(1-\varrho(p_2')\big) - \big(1-\varrho(p_1)\big)\big(1-\varrho(p_2)\big)\varrho(p_1')\varrho(p_2'),$$

den Zweiteilchen-Kollisionsfaktor, ersetzt wird. Dieser Kollisionsfaktor verschwindet auf der Massenschale genau dann, wenn $\varrho$ eine Fermi-Distribution ist. Wir haben also gezeigt, daß ein primärer, stationärer Zustand, der dem Stabilitätskriterium nicht genügt, unter der Störung $P$ in einen stationären Zustand $\omega_+^{\lambda P}$ übergeht, der nur wie $\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$ mit dem Abstand abfällt und damit einen radialen, asymptotisch konstanten Fluß bei jedem festem Winkel besitzt (unabhängig vom Winkel). Für $\omega_-^{\lambda P}$ erhält man den gleichen Fluß jedoch mit dem umgekehrten Vorzeichen. Im stabilen Zustand ist $\omega_+ = \omega_-$, und es wird kein Fluß durch die Störung $P$ verursacht.

# Anhang A

# Algebraische Quantenfeldtheorie

Bei einer Quantentheorie endlicher Dimension wird die "kinematische Struktur" vollständig von den kanonischen Kommutatorrelationen für die Orts- und Impulsoperatoren beschrieben. Nach dem Stone-von Neumann-Theorem legen diese Kommutatorrelationen die Wahl des Hilbertraumes und der selbstadjungierten Operatoren in diesem Raum bis auf unitäre Äquivalenz fest. Im Falle unendlicher Dimension gilt dieses Theorem nicht mehr, und man erhält bei der Konstruktion einer Quantenfeldtheorie unendlichviele, unitär unäquivalente und irreduzible Darstellungen aus den Kommutatorrelationen. Im flachen Minkowski-Raum kann man mit Hilfe der Poincaré -Symmetrie eine bestimmte Darstellung auszeichnen, genauer definiert man über die Tranlationsinvarianz und die Spektrumsbedingung den Vakuumzustand. Diese Wahl ist mathematisch gleichbedeutend mit der Definition des Teilchenbegriffs. Leider geht beim Übergang zu beliebigen, gekrümmten Raumzeiten diese Poincaré -Symmetrie verloren, und man stößt damit beim Teilchenbegriff auf Schwierigkeiten. Mit dem algebraischen Zugang kann man diese Probleme umgehen. Mit diesem Ansatz ist man in der Lage alle Zustände in den vielen unitär unäquivalenten Hilberträumen gleichwertig zu behandeln ohne sich auf eine bestimmte Darstellung der Kommutatorrelationen festlegen oder eine genaue Teilcheninterpretation geben zu müssen. Für die Auswahl der physikalisch sinnvollen Zustände wird dann ein zur Spektrumsbedingung analoges Kriterium gegeben, die sogenannte Hadamard-Bedingung. Mehr Details findet man in [Haa], [Fre], [Saf], [Ful89] und [Küs01].

## A.1 Der algebraische Zugang zur Quantenfeldtheorie

Bei der üblichen Formulierung einer Quantentheorie geht man von Zuständen als Vektoren eines Hilbertraumes aus und definiert dann die Observablen als

die auf die Zustände wirkenden Operatoren. Beim algebraischen Zugang geht man umgekehrt vor, d.h. man betrachtet die Observablen als Elemente einer abstrakten Algebra und führt daraufhin die Zustände als Objekte, die jeder Observablen eine reelle Zahl zuordnen, ein.
Zunächst konstruiert man ein *Netz von* $C^* - $*Algebren* $\mathcal{A}(\mathcal{O})$, d.h. jeder offenen Teilmenge $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ wird eine $C^*$-Algebra der in $\mathcal{O}$ meßbaren physikalischen Größen zugewiesen:

$$\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O}) \tag{A.1}$$

Ist diese Abbildung einmal bekannt, dann können im Prinzip alle physikalischen Größen berechnet werden. Die obige Zuordnung enthält somit die gesamte physikalische Information. Die $C^*$-Algebra $\mathcal{A} := \bigcup_{\mathcal{O}} \mathcal{A}(\mathcal{O})$ heißt dann die *Algebra der Observablen*. Zwei Netze lokaler Observablen $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ und $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{O})$ heißen zueinander isomorph, falls eine Isomorphie $i : \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ mit $i[\mathcal{A}(\mathcal{O})] = \tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{O})$ existiert. Weiterhin wird gefordert, daß das Netz die folgenden Bedingungen erfüllt:

- *Isotonie*: $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$.
- *Lokalität*: Für raumartig getrennte $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ gilt $[\mathcal{A}(\mathcal{O}_1), \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)] = \{0\}$.
- *Primitivität*: $\mathcal{A}$ besitzt eine treue irreduzible Darstellung.
- *Kausalität*: $\mathcal{O}_1 \subset D(\mathcal{O}_2) \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$.
- *Kovarianz*: Für jede Isometrie $\kappa : (\mathcal{M}, g) \longrightarrow (\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ existiert eine Isomorphie $\alpha_\kappa : \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ mit $\alpha_\kappa[\mathcal{A}(\mathcal{O})] = \tilde{\mathcal{A}}(\kappa(\mathcal{O}))$, $\alpha_{id} = id$ und $\alpha_{\kappa_1} \circ \alpha_{\kappa_2} = \alpha_{\kappa_1 \circ \kappa_2}$.

Im Falle des Minkowski-Raumes sind die Isometrien die Poincaré-Transformationen und man erhält die bekannte Forderung der Poincaré-Invarianz. Die ersten drei Bedingungen sind identisch den *Haag* $-$ *Kastler* $-$ *Axiomen*, die die Quantenfeldtheorie im Minkowski-Raum algebraisch formuliert haben.
Der Zustand auf dieser Observablenalgebra $\mathcal{A}$ wird durch das lineare Funktional $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\omega(\mathbb{1}) = 1$ (Normiertheit) und $\omega(A^*A) \geq 0 \;\; \forall A \in \mathcal{A}$ (Positivität) repräsentiert. Der Zustand $\omega$ nimmt also die Rolle des Erwartungswertfunktionals ein. Spätestens hier sieht man, daß die *-Algebra-Struktur nicht genügt und für Messungen die $C^*$-Algebra-Struktur notwendig ist.
Der Zusammenhang zwischen der algebraischen und der "üblichen" Formulierung der Quantenfeldtheorie kann mit dem GNS-Theorem (Gelfand,Naimark,Segal) gegeben werden, die besagt, daß jede $C^*$-Algebra durch eine $C^*$-Unteralgebra beschränkter, linearer Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, repräsentiert werden kann. Der Beweis dieses Theorems ist konstruktiv und führt zur sogenannten GNS-Konstruktion.

**Theorem A.1 (GNS-Konstruktion)** Sei $\mathcal{A}$ eine $C^*$-Algebra und $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Zustand auf ihr. Dann existiert ein sogenanntes GNS-Tripel $(\mathcal{H}, \pi, \psi)$, bestehend aus einem Hilbert-Raum $\mathcal{H} := \bigoplus_{\omega \in \mathcal{E}_\mathcal{A}} \mathcal{H}_\omega$, einer Darstellung $\pi := \bigoplus_{\omega \in \mathcal{E}_\mathcal{A}} \pi_\omega$, $\pi_\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, und einem Vektor $|\psi> \in \mathcal{H}$, so daß gilt:

- $\omega(A) =< \psi, \pi(A)\psi > \ \forall A \in \mathcal{A}$ und
- $|\psi >$ ist zyklisch, d.h. $\pi(\mathcal{A})|\psi >= \{\pi(A)|\psi > \mid A \in \mathcal{A}\}$ liegt dicht in $\mathcal{H}$.

Durch diese Forderungen ist das GNS-Tripel bis auf unitäre Äquivalenz vollständig charakterisiert. Umgekehrt erhält man bei gegebener Dichtematrix $\rho : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ und gegebener Darstellung $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ den algebraischen Zustand durch

$$\omega(A) = \mathrm{tr}\,(\rho\pi(A)) \tag{A.2}$$

Die Menge aller Vektoren $|\psi >$ und Dichtematrizen $\rho$ in der GNS-Darstellung eines algebraischen Zustandes $\omega$ heißt das $Folium$ vom $\omega$. Sind bei einer gegebenen treuen Darstellung zwei Zustände $\omega_1$ und $\omega_2$ und eine endliche Anzahl von Observablen in der Algebra gegeben, dann gibt es immer einen Zustand $\omega$ in dem Folium von $\omega_1$, der $\omega_2$ bezüglich der Erwartungswerte beliebig genau approximiert, $|\omega(A_i) - \omega_2(A_i)| < \varepsilon_i$ mit $\varepsilon_i > 0$.

## A.2 Das freie Klein-Gordon-Feld

Wir gehen zunächst von der auf gekrümmte Raumzeiten verallgemeinerten Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(x) := \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi(x)\nabla_\nu\varphi(x) - m^2\varphi(x)^2 - \xi R(x)\varphi(x)^2\right)$$

aus, wobei $\varphi(x)$ das skalare Feld, $m$ die Masse des Feldquantes, $R(x)$ der Ricci-Krümmungsskalar und $\xi$ eine reelle Zahl sind. Der Term $\xi R(x)\varphi(x)^2$ representiert die einzig mögliche lokale, skalare Kopplung zwischen dem skalaren und dem Gravitationsfeld [BD]. Die Variation des Wirkungsintegrals

$$S = \int \mathcal{L}(x) d^n x$$

ergibt die Euler-Lagrange-Gleichungen für das skalare Feld :

$$\begin{aligned}\left(\Box_g + m^2 + \xi R(x)\right)\varphi &= \left(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + m^2 + \xi R(x)\right)\varphi \\ &= \left(|g|^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu g^{\mu\nu}|g|^{\frac{1}{2}}\partial_\nu + m^2 + \xi R(x)\right)\varphi = 0\end{aligned} \tag{A.3}$$

Hierbei ist $\Box_g$ der zur Metrik $g$ gehörende Laplace-Beltrami-Operator und $|g| := |\det g_{\mu\nu}|$. Wir betrachten jedoch in dieser Arbeit das einfachste Beispiel einer Quantenfeldtheorie auf einer global hyperbolischer Raumzeit, nämlich ein skalares Feld, das die kovariante Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\Box_g + m^2\right)\varphi = 0 \tag{A.4}$$

erfüllt. Diese Differentialgleichung enthällt keine selbstwirkenden Terme und man spricht deshalb vom freien Feld. Sie ist jedoch über den metrischen Tensor mit dem Gravitationsfeld gekoppelt. Da die obige Gleichung eine hyperbolische Differentialgleichung ist, ist das Cauchy-Problem nach dem Theorem von Lerray eindeutig lösbar [Dim80].

**Theorem A.2 (Cauchy-Problem)** Sei $\Sigma$ eine Cauchy-Fläche und $u_0, u_1 \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ mit

$$\begin{gathered}\left(\Box_g + m^2\right)u = 0, \quad \rho_0(u) = u_0, \quad \rho_1(u) = u_1 \\ \text{und} \qquad \mathrm{supp}(u) \subset \bigcup_i \bigcup_\pm J^\pm\big(\mathrm{supp}(u_i)\big),\end{gathered}$$

wobei $\rho_0(u) : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ der Restriktionoperator und $\rho_1(u) : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ die Normalenableitung auf $\Sigma$ sind.

Es existieren folglich für jede Testfunktion $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ avancierte und retardierte Fundamentallösungen

$$\begin{aligned} E_{av/ret} &: \mathcal{D}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{M}) \\ E_{av/ret} : (f,g) \mapsto E_{av/ret}(f,g) &:= \int f(x)(E_{av/ret}g)(x)g^{\frac{1}{2}}d^4x \end{aligned} \tag{A.5}$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{gathered}\left(\Box_g + m^2\right)E_{av/ret} = E_{av/ret}\left(\Box_g + m^2\right) = \mathrm{id} \\ \mathrm{supp}(E_{av}f) \subset J^+(\mathrm{supp}(f)) \quad \text{und} \quad \mathrm{supp}(E_{ret}f) \subset J^-(\mathrm{supp}(f))\end{gathered}$$

Die Differenz $E := E_{ret} - E_{av}$ ist eine antisymmetrische Distribution und heißt die *Fundamentallösung* oder der *Propagator der Klein − Gordon − Gleichung* und genügt den folgenden Bedingungen:

$$\left(\Box_g + m^2\right)Ef = Ef\left(\Box_g + m^2\right) = 0$$

$$\mathrm{supp}(Ef) \subset J^+(\mathrm{supp}(f)) \cup J^-(\mathrm{supp}(f)), f \in \mathcal{D}(\mathcal{M}).$$

Mit Hilfe der Feldgleichung und den Vertauschungsrelationen auf einer beliebigen Cauchyfläche $\Sigma$

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0$$
$$[\phi(x), \partial_\Sigma \phi(y)] = i\delta_\Sigma(x, y)$$
$$[\phi(x), \phi(y)] = 0$$

erhält man die Vertauschungsrelationen auf ganz $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$:

$$[\phi(x), \phi(y)] = iE(x, y)$$

Um das Quantenfeld als Operator definieren zu können, muß man mit dem verschmierten Feld

$$\phi(f) = \int \phi(x) f(x) g^{\frac{1}{2}} d^4x, mit f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$$

weiterarbeiten. Das Feld wird also als eine operatorwertige Distribution angesehen, d.h. als eine lineare Abbildung $\phi : \mathcal{D}(\mathcal{M}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Wir betrachten jetzt eine unitale $^*$-Algebra $\mathcal{A}$, die von den Elementen $\phi(f)$, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ erzeugt wird, und die die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) Die Abbildung $\phi : \mathcal{D}(\mathcal{M}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist linear,

(ii) $\phi(f)^* = \phi(\bar{f})$,

(iii) $\phi\left(\left(\Box_g + m^2\right) f\right) = 0$,

(iv) $[\phi(f), \phi(g)] = iE(f, g) \quad \forall f, g, \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Diese Algebra erhält man, indem man die $Borchersalgebra$ über $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, das ist die Tensoralgebra mit der speziellen $^*$-Operation $f^* := \bar{f}$, durch das Ideal, das von den Feldgleichungen und den Vertauschungsrelationen erzeugt wird, dividiert. (Die lokalen Algebren $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ werden dann von den Elementen $\phi(f)$, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ erzeugt). Diese Algebra besitzt jedoch keine $C^*$-Norm, denn die Vertauschungsrelationen lassen eine Darstellung durch beschränkte Operatoren nicht zu. Erst mit der $Weylalgebra$, der Algebra der exponierten Feldoperatoren $e^{i\phi(f)}$ erhält man die $C^*$-Struktur.
Ein Zustand auf dieser $^*$-Algebra $\mathcal{A}$ wird eindeutig festgelegt durch seine $n - Punkt - Funktionen\ \omega_n, \quad n \in \mathbb{N}$:

$$\omega_n(f_1, ..., f_n) := \omega(\phi(f_1) \cdots .\phi(f_n)), \quad f_i \in \mathcal{D}(\mathcal{M}), \tag{A.6}$$

wobei $\omega_n$ bzgl. jeder Komponente eine Distribution ist. Das Kerntheorem von Schwartz erlaubt uns, die n-Punkt-Funktionen als wohldefinierte Distributionen auf ganz $\mathcal{M}^n$ anzusehen. Aufgrund der Relationen der Algebra gelten die folgenden Eigeschaften für die n-Punkt-Funktionen:

(i) Sie sind bzgl. jeder Komponente eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung.

(ii) Wegen der Vertauschungsrelationen gilt:

$$\omega_n(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n) - \omega_n(x_1, ..., x_{k+1}, x_k, ..., x_n) = iE(x_k, x_{k+1})\omega_{n-2}(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+2}, ..., x_n)$$

(iii) Normiertheit: $\omega_0 = 1$ wegen $\omega(\mathbb{1}) = 1$.

(iv) Positivität:

$$\sum_{i,j} \omega_{i+j}(f_i^* \otimes f_j) \geq 0, \quad \text{mit } f_k \in \mathcal{D}(\mathcal{M}^k),\ k = 1, ..., n$$
$$\text{und} \qquad f_k^*(x_1, ..., x_n) = \overline{f_k(x_n, ..., x_1)}.$$

Von großem Interesse sind die sogenannten *quasifreien Zustände*. Diese Zustände sind dadurch charakterisiert, daß ihre $n$-Punkt-Funktionen mit ungeradem $n$ identisch Null sind, und die übrigen allein durch ihre 2-Punkt-Funktion $\Lambda \equiv \omega_2$ eindeutig festgelegt sind:

$$\omega_{2n}(f_1, ..., f_{2n}) = \sum_\sigma \prod_{i=1}^n \Lambda(f_{\sigma(i)}, f_{\sigma(i+n)}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A.7}$$

wobei die Summe über alle Permutationen $\sigma$ von $\{1, ..., 2n\}$ mit $\sigma(1) < \sigma(2) < ... < \sigma(n)$ und $\sigma(i) < \sigma(i+n)$ läuft.
Wir fassen abschliessend die Eigenschaften der 2-Punkt-Funktion nochmal zusammen:

(i) $\Lambda((\Box_g + m^2)f, g) = \Lambda(f, (\Box_g + m^2)g) = 0, \quad \forall f, g \in (\mathcal{M})$,

(ii) $\Lambda(f, g) = \overline{\Lambda(g, f)}$,

(iii) $\mathrm{Im}\Lambda(f, g) = \frac{1}{2}E(f, g)$,

(iv) $\Lambda(\bar{f}, f) \geq 0$.

# Notation

| | |
|---|---|
| $x$ | $= (x_1, ..., x_n)$ |
| $\xi$ | $= (\xi_1, ..., \xi_n)$ |
| $\alpha$ | $= (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ |
| $\lvert\alpha\rvert$ | $= \Sigma_{i=1}^n \alpha_i$ |
| $\alpha!$ | $= \Pi_{i=1}^n \alpha_i$ |
| $x^\alpha$ | $= \Pi_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ |
| $\partial_x^\alpha$ | $= (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$ |
| $D_x^\alpha$ | $= (-1)^{\lvert\alpha\rvert} \partial_x^\alpha$ |

| | |
|---|---|
| $\mathcal{C}^l(\Omega)$ | Vektorraum der bis zur Ordnund $l \in \mathbb{N}_0$ stetig differenzierbaren Funktionen über $\Omega$ |
| $\mathcal{C}(\Omega)$ | $= \mathcal{C}^0(\Omega)$ |
| $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ | $= \cap\{\mathcal{C}^l(\Omega) \mid l \in \mathbb{N}_0\}$ |
| $\mathcal{E}(\Omega)$ | $= \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ |
| $\mathcal{D}(\Omega)$ | $= \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ |
| $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ | Vektorraum der in allen Ableitungen schnell fallenden $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen über $\mathbb{R}^n$ |
| $\mathcal{E}'(\Omega)$ | Dualraum von $\mathcal{E}(\Omega)$ |
| $\mathcal{D}'(\Omega)$ | Dualraum von $\mathcal{D}(\Omega)$ |
| $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ | Dualraum von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ |

| | |
|---|---|
| $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ | $C^*$-Algebren |
| $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ | von Neumann-Algebren |
| $\mathcal{A}^+$ | Der positive Anteil von $\mathcal{A}$ |
| $\mathcal{M}',\ \mathcal{M}''$ | Kommutante, Bikommutante von $\mathcal{M}$ |
| $A,\ B,\ C$ | Elemente von $C^*$-Algebren oder von Neumann-Algebren |
| $A_+,\ A_-$ | positiver bzw. negativer Anteil von $A$ |
| $\omega,\ \phi$ | Zustände |
| $\tau,\ \gamma,\ \alpha,\ \sigma$ | Automorphismen oder Gruppen von Automorphismen |
| $\iota$ | Identität der Automorphismengruppe |
| $\mathbb{1}$ | Identität der Operatoralgebren |
| $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ | Hilberträume |
| $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ | Menge der linearen und beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$ |
| $\Omega,\ \xi,\ \eta,\ \psi$ | Vektoren im Hilbertraum |
| $\Omega_\omega$ | zyklischer Vektor bzgl. $\omega$ |
| $P,\ E,\ F$ | orthogonale Projektionen |
| $G$ | Gruppe |
| $\pi$ | $^*$-Morphismus |
| $(\mathcal{H}, \pi)$ | Darstellung |
| $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ | zyklische Darstellung auf $\mathcal{H}$ mit dem zyklische Vektor $\Omega$ |
| $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ | durch $\omega$ definierte zyklischce Darstellung |
| $\mu,\ \nu$ | Maße |

| | |
|---|---|
| $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ | Fockraum über $\mathcal{H}$ |
| $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}),\ \mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ | Bose- bzw. Fermi-Fockraum über $\mathcal{H}$ |
| $a_+(f),\ a_-(f)$ | Bose- bzw. Fermi-Vernichtungsoperator auf dem Fockraum |
| $a_+^*(f),\ a_-^*(f)$ | Bose- bzw. Fermi-Erzeugungsoperator auf dem Fockraum |
| $\gamma$ | Bogoliubov-Transformation |
| | |
| $S$ | Tomita-Operator |
| $\triangle$ | modularer Operator |
| $J$ | modulare Konjugation |
| | |
| $\mathbf{Z}(\mathcal{M})$ | Zentrum von $\mathcal{M}$ |
| $\mathbf{D}_\beta$ | Streifen in $\mathbb{C}$ |
| $\mathbf{D}_\beta^{(n)}$ | Schlauch in $\mathbb{C}^n$ |
| $\mathbf{E}_\mathcal{A}$ | Menge aller Zustände auf $\mathcal{A}$ |
| $\mathbf{E}_\mathcal{A}^G$ | Menge der $G$-invarianten Zustände auf $\mathcal{A}$ |
| $\mathbf{K}_\beta$ | Menge aller KMS-Zustände auf $\mathcal{A}$ |
| $\mathbf{E}(\mathbf{K}_\beta)$ | Menge der Extremalpunkte der konvexen Menge $\mathbf{K}_\beta$ |
| | |
| $(\mathcal{A}, \mathbf{G}, \tau)$ | $C^*$-dynamisches System. |
| $(\mathcal{A}, \tau)$ | $C^*$-dynamisches System mit $\mathbf{G} = \mathbb{R}$ |
| $\delta(A)$ | $= \lim_{t\to 0} \big(\tau_t(A) - A\big)$ : infinitesimaler Erzeuger von $\tau$ |
| | |
| $P$ | Störung, $P = P^* \in \mathcal{A}$ |
| $\delta_P(A)$ | $:= i[P, A]$ : gestörter Generator |
| $\tau^P$ | vom Generator $\delta + \delta_P$ erzeugte Automorphismengruppe |
| $\omega^P$ | gestörter $(\tau^P, \beta)$-KMS-Zustand |
| $\gamma_t^{\lambda P}$ | $:= \tau_t^{-1}\tau_t^{\lambda P}$ : Möller-Automorphismen |
| $\gamma_\pm^{\lambda P}$ | $:= \lim_{t\to\pm\infty} \gamma_t^{\lambda P}$ |
| $\omega_\pm^{\lambda P}(A)$ | $:= \omega\big(\gamma_\pm^{\lambda P}(A)\big)$ |
| | |
| $\mathcal{M}$ | vier dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit |
| $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ | $C^*$-Algebra der in $\mathcal{O} \in \mathcal{M}$ meßbaren physikalischen Größen |
| $\Sigma$ | Cauchy-Fläche |
| $\omega_n(f_1, ..., f_n)$ | $n$-Punktfunktion, $f_i \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ |
| $\Lambda(f, g)$ | $= \omega_2(f, g)$ |

# Literaturverzeichnis


[aW92] H. Baumgärtel and M. Wollenberg. *Causal Nets of Operator Algebras.* Akademie Verlag, 1992.

[Bau] H. Baumgaertel. Operator Algebraic Methods in Quantum Field Theory: A Series of Lectures. Berlin, Germany: Akademie-Verl. (1995) 228 p.

[BD] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. Quantum fields in curved space. Cambridge, Uk: Univ. Pr. ( 1982) 340p.

[BKR78] O. Bratteli, A. Kishimoto, and D.W. Robinson. Stability Properties and the KMS Condition. *Commun. Math. Phys.*, 61:209, 1978.

[BR81] O. Bratelli and D.W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1,2.* Springer, 1981.

[Dim80] J. Dimock. Algebras of Local Observables on a Manifold. *Commun. Math. Phys.*, 77:219–228, 1980.

[Dix82] J. Dixmier. *$C^*$-Algebras.* North Holland Publishing Company, 1982.

[dlHJ95] P. de la Harpe and V. Jones. An Introduction to $C^*$-Algebras, 1995.

[FH90] K. Fredenhagen and R. Haag. On the Derivation of Hawking Radiation Associated With the Formation of a Black Hole. *Commun. Math. Phys.*, 127:273, 1990.

[Fre] K. Fredenhagen. Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit, Vorlesungsskript.

[Ful] S. A. Fulling. Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time. CAMBRIDGE, UK: UNIV. PR. (1989) 315 P. (LONDON MATHEMATICAL SOCIETY STUDENT TEXTS, 17).

[Ful89] S. Fulling. *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime.* Cambridge University Press, 1989.

[Haa] R. Haag. Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras. Berlin, Germany: Springer (1992) 356 p. (Texts and monographs in physics).

[HHW67] R. Haag, N. M. Hugenholtz, and M. Winnink. On the Equilibrium States in Quantum Statistical Mechancics. *Commun. Math. Phys.*, 5:215–236, 1967.

[HK64] R. Haag and D. Kastler. An Algebraic Approach to Quantum Field Theory. *J. Math. Phys.*, 5:848–861, 1964.

[HKTP74] R. Haag, D. Kastler, and E. Trych-Pohlmeyer. Stability and Equilibrium States. *Commun. Math. Phys.*, 38:173–193, 1974.

[HTP77] R. Haag and E. Trych-Pohlmeyer. Stability Properties of Equilibrium States. *Commun. Math. Phys.*, 56:213, 1977.

[Key97] M. Keyl. Algebraische Methoden der Quantentheorie, 1997.

[KR83] R. Kadison and J.R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, volume 1,2,3. Academic Press, 1983.

[Küs01] M. Küskü. The Free Maxwell Field in Curved Spacetime, Diplomarbeit. Master's thesis, Hamburg, 2001.

[Lan98] N.P. Landsman. Lecture Notes on $C^*$-Algebras, Hilbert $C^*$-Modules and Quantum Mechanics, 1998.

[Mic] J. Michalicek. Persönliche Gespräche.

[Mur90] *$C^*$-Algebras and Operator Theory.* Academic Press, Inc., 1990.

[Nak90] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics.* IOP Publishing, 1990.

[Rob73] D.W. Robinson. Return to Equilibrium. *Commun. Math. Phys.*, 31:171–189, 1973.

[RS75] M. Reed and B. Simons. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume 2. Academic Press, 1975.

[Saf] T. Saffary. Der Hawking-Effekt. DESY-THESIS-2001-008.

[Sak91] S. Sakai. *Operator Algebras in Dynamical Systems.* Cambridge University Press, 1991.

[SV00] H. Sahlmann and R. Verch. Passivity and Microlocal Spectrum Condition. *Commun. Math. Phys.*, 214:705–731, 2000.

[Tak79] *Theory of Operator Algebra 1.* Springer-Verlag, 1979.

[Thi83] *Quantum Mechanics of Large Systems.* Springer-Verlag, 1983.

[Tho94] E.H. Thorsteinsson. Zur Stabilität von algebraischen Gleichgewichtszuständen. Master's thesis, Hamburg, 1994.

[Wal99] Robert M. Wald. The Thermodynamics of Black Holes. 1999.

## Danksagung

Ich möchte mich zuerst bei Herrn Michaliček herzlichst bedanken, der mir nicht nur während der Bearbeitung der Diplomarbeit zur Seite gestanden, sondern seit dem Beginn meines Studiums mich an vielen Stellen unterstützt hat. Ich habe viel von unseren Treffen profitiert, auch wenn, oder vielleicht gerade weil, unsere Kaffee-Runden sich nicht immer um Mathematik drehten.
Wie die Physik-Diplomarbeit ist diese Diplomarbeit ebenfalls fast ausschließlich in der einzigartigen DATSCHA entstanden, und das DATSCHA-Team hat seinen gebührenden Anteil daran.

Grenzenloser Dank gilt meiner Familie, ohne deren Hilfe das meiste in meinem Leben nicht möglich gewesen wäre. Taschakur.