

*Über die Eindeutigkeit  
stationärer physikalischer Zustände  
für rotationssymmetrische schwarze Löcher*

II. Institut für theoretische Physik  
Universität Hamburg

März 1998

*Diplomarbeit von Michael Andronache*

Zusammenfassung

Eine notwendige Bedingung an einen physikalisch zulässigen Zustand ist die Hadamard-Singularitätsstruktur seiner 2-Punkt-Funktion. Die Zeitinvarianz der Schwarzschild-Metrik liefert eine 1-Parameter-Familie von Isometrien auf der Kruskal-Raumzeit.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir einen quasifreien Hadamard-Zustand auf der Kruskal-Raumzeit, der invariant bezüglich der Isometrien der Raumzeit ist, und weisen nach, daß ein solcher Zustand eindeutig ist. Sehr wahrscheinlich stimmt dieser Zustand, eingeschränkt auf dem rechten Keil der Raumzeit, i.e. auf dem Schwarzschild Teil, mit dem Hartle-Hawking-Zustand überein.

Gutachter:

Prof. Dr. K. Fredenhagen

Prof. Dr. G. Mack

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>v</b>
<b>1 Kausale Struktur der Raumzeit</b>	<b>1</b>
<b>2 Mikrolokale Analysis</b>	<b>7</b>
<b>3 Quantenfeldtheorie auf global hyperbolischer Raumzeit</b>	<b>17</b>
3.1 Hadamard-Zustände . . . . .	24
<b>4 Die Kruskal-Raumzeit</b>	<b>29</b>
4.1 Der Hartle-Hawking-Zustand . . . . .	32
<b>5 Ein Hadamard-Zustand auf der Kruskal-Raumzeit</b>	<b>37</b>
<b>Index und Notationen</b>	<b>43</b>



# Einleitung

Das Bestreben der Physik ist seit jeher, die Gesetzmäßigkeiten der Natur durch konzeptionell einfachere, vereinheitlichte Theorien zu beschreiben. Zur Zeit kann *die Quantenfeldtheorie* als die grundlegendste existierende Theorie betrachtet werden. Ursprünglich sollte sie die Quantentheorie der Felder sein, aber sehr schnell stellte sich heraus, daß man die Quantenfeldtheorie bei der Beschreibung jedes Phänomens anwenden kann. Aus der heutigen Sicht sind die Quantenfelder fundamentaler als Teilchen, i.e. sie sind geeigneter, die Natur zu beschreiben.

Das Verhalten von Quantenfeldern in einem nicht dynamischen klassischen Gravitationsfeld als Hintergrund wird von *der Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit* untersucht. Diese Theorie betrachtet Phänomene, für die sowohl die Quantennatur der Felder als auch die Gravitation wichtig sind, für die aber die Quantennatur der Gravitation vernachlässigt werden kann.

Das erste bedeutungsvolle Resultat der Theorie wurde 1975 von Hawking [19] hergeleitet. Er untersuchte die Quantenfeldtheorie der Klein–Gordon–Gleichung

$$(\square_g - m^2) \phi = 0$$

auf einer Raumzeit, in der ein Stern der Masse  $M$  zu einem schwarzen Loch kollabiert, und zeigte, daß das schwarze Loch thermische Strahlung bei der Temperatur

$$T_H = \frac{c^3 \hbar}{8\pi k M G}$$

abgibt. Genauer heißt dies, daß der Invakuumzustand – der Grundzustand vor dem Anfang des Kollaps – zu später Zeit und aus großer Entfernung betrachtet, einem thermischen Zustand der Temperatur  $T_H$  in der Minkowski’schen Raumzeit entspricht.

Eine Theorie, die die Gravitation klassisch behandelt, wie die Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit es tut, kann nur eine Annäherung an die physikalische

Realität sein. In einer fundamentalen Theorie muß auch die Gravitation quantenmechanisch behandelt werden (in einer zur Zeit noch unbekanntem Weise), und insbesondere muß die Rückwirkung der Materie auf die Gravitation berücksichtigt werden. Die Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit bleibt jedoch von besonderem Interesse, da sie eine tiefe Einsicht in den Zusammenhang zwischen Quantentheorie und Raumzeitgeometrie gibt und weil ihre Voraussagen wahrscheinlich bis nahe der Planck-Länge

$$L_p = \left[ \frac{G \hbar}{c^3} \right]^{1/2} \approx 10^{-35} m$$

Gültigkeit haben, denn man nimmt an, daß sich erst bei dieser Größenordnung die Quantennatur der Gravitation bemerkbar machen wird.

In dieser Arbeit betrachten wir die Klein-Gordon-Gleichung auf einer global hyperbolischen Raumzeit. Obwohl die Klein-Gordon-Gleichung das freie Feld beschreibt, ist ihr Studium sinnvoll, um die konzeptionellen Fragen der Theorie zu untersuchen. Um eine wechselwirkende Theorie zu bekommen, besteht außerdem die Möglichkeit, der freien Theorie einen perturbativen Term anzufügen; deshalb ist die Kenntnis der freien Theorie unerlässlich. Wir beschränken uns auf global hyperbolische Raumzeiten, weil in diesem Fall die Kausalität global erfüllt ist. Diese Einschränkung ist in erster Linie physikalisch motiviert, da die Kausalität als eines der Leitprinzipien in der Quantenfeldtheorie angesehen wird. Auf mathematischer Ebene wird diese Klasse von Raumzeiten deshalb bevorzugt, weil das Anfangswertproblem einer hyperbolischen Differentialgleichung auf einer global hyperbolischen Raumzeit wohldefiniert ist, d.h. die Anfangsdaten zu einer frei gewählten Zeit bestimmen eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung (auf der ganzen Raumzeit). Diese Eigenschaft vereinfacht den Aufbau der Quantenfeldtheorie, und dieser wird dann im *algebraischen Zugang* nach der Theorie im Minkowski'schen Raum durchgeführt.

Mit Hilfe der Feldgleichung wird eine „minimale“ Algebra der Observablen für die zugrundeliegende Raumzeit konstruiert. Diese Algebra wird nicht alle Observablen enthalten, z.B. ist der Energie-Impuls-Tensor nicht darin; aber sie reicht aus, um die Quantenfeldtheorie zu formulieren. Die Zustände sind dann positive, normierte, lineare Funktionale auf der Algebra. Von der großen Anzahl der möglichen Zustände betrachten wir insbesondere die quasifreien Hadamard-Zustände. Quasifrei bedeutet,

daß die 1-Punkt-Funktion zusammen mit allen ungeraden  $n$ -Punkt-Funktionen verschwindet. Damit ist der Zustand eindeutig durch die 2-Punkt-Funktion bestimmt.

Die Beschränkung auf Hadamard-Zustände ist grundlegend. Die Hadamard-Bedingung ist für die physikalische Zulässigkeit eines Zustandes notwendig (für quasifreie Zustände auch ausreichend) und wird motiviert durch die Erfordernis, den Energie-Impuls-Tensor renormierbar zu machen. Im wesentlichen wird verlangt, daß die 2-Punkt-Funktion einen korrekten singulären Anteil besitzt.

Ein rotationssymmetrischer Körper wird durch die Schwarzschild-Metrik beschrieben. Die Schwarzschild-Raumzeit ist statisch, und deshalb betrachtet man bevorzugt die zeitinvarianten Zustände auf ihr. Nun existieren viele zeitinvariante Zustände, die auch die Hadamard-Singularitätsstruktur besitzen. Werden diese jedoch auf die ganze Kruskal-Raumzeit erweitert, dann verlieren sie ihre Hadamard-Struktur. Nur der Hartle-Hawking-Zustand, der Gleichgewichtszustand mit der Hawking-Temperatur, scheint über den Killing-Horizont, als Hadamard-Zustand erweiterbar zu sein. Wir beweisen in dieser Arbeit, daß auf der Kruskal-Raumzeit ein „zeitinvarianten“ Hadamard-Zustand, wenn er existiert, eindeutig ist. Der natürliche Kandidat für diesen Zustand ist der Hartle-Hawking-Zustand.

Dieses Resultat ist nicht neu: Kay und Wald [25] beweisen die Invarianz eines Hadamard-Zustandes, der invariant bzgl. einer 1-Parameter-Gruppe von Isometrien ist, für Raumzeiten mit einem verzweigten Killing-Horizont – die Kruskal-Raumzeit gehört auch zu dieser Klasse – unter der zusätzlichen Annahme, daß der 1-*Teilchen-Hamilton-Operator* keine Eigenvektoren zu verschwindenden Eigenwerten besitzt. Unser Beweis ist nur für die Kruskal-Raumzeit gültig, aber dafür benötigen wir keine zusätzlichen Annahmen. Man sei aber darauf hingewiesen, daß unser Resultat den masselosen Fall nicht mit einbezieht.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgeteilt:

Kapitel eins betrachtet die kausale Struktur der Raumzeit in der allgemeinen Relativitätstheorie. Dabei werden konzentriert nur diejenigen Begriffe eingeführt, die für spätere Abschnitte relevant sind. Für eine detaillierte Darstellung der allgemeinen Relativitätstheorie sei aus der umfassenden Literatur das Buch von Wald [35] empfohlen.

Kapitel zwei ist eine Einführung in die mikrolokale Analysis. Obwohl die Techni-

ken der Theorie ein geeignetes Hilfsmittel für die Behandlung der Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit zur Verfügung stellen, ist die Theorie an sich noch recht unbekannt in der theoretischen Physik. Deshalb ist der Abschnitt ausführlich und soll den Einstieg in die nicht ganz einfache Thematik ermöglichen. Das umfassende Standardwerk auf diesem Gebiet ist seit 15 Jahren die Buchreihe „The Analysis of Linear Partial Differential Operators“ von Hörmander. Unsere Einführung beschränkt sich hauptsächlich auf den ersten Band.

Das dritte Kapitel stellt den physikalischen Hintergrund dar. Wir konstruieren die Quantenfeldtheorie auf einer global hyperbolischen Raumzeit. Wir folgen dabei der Darstellung von Kay und Wald [25]. Eine Einführung in die Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit findet man in [1, 11, 26]. Fernerhin definieren wir einen Hadamard-Zustand und legen seine Besonderheiten fest.

Im vierten Kapitel stellen wir die essentiellen Eigenschaften der Kruskal-Raumzeit zusammen. Wie man die Kruskal-Metrik aus der Schwarzschild-Metrik herleitet, kann in jedem Buch über allgemeine Relativitätstheorie nachgeschlagen werden, und deshalb gehen wir hier nicht näher darauf ein. Wir führen weiter den Hartle-Hawking-Zustand ein und stellen die Ergebnisse dar, die zu der starken Vermutung führen, daß dieser Zustand die Hadamard-Singularitätsstruktur auf der ganzen Kruskal-Raumzeit besitzt.

Das letzte Kapitel vereinigt die zwei vorangegangenen Abschnitte: Wir betrachten einen Hadamard-Zustand auf der Kruskal-Raumzeit, und unter der plausiblen Annahme, daß der Zustand zeitinvariant ist, können wir seine Eindeutigkeit beweisen. Man geht davon aus, daß dieser Zustand der Hartle-Hawking-Zustand ist.



1.

---

## Kausale Struktur der Raumzeit

In der Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit wird die Gravitation klassisch behandelt, also in dem theoretischen Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie. Deshalb wird die Struktur der Raumzeit durch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  beschrieben, auf der eine Lorentz-Metrik  $g$ , d.h. eine symmetrische 2-Form der Signatur  $(-, +, \dots, +)$ , definiert ist. Im folgenden stellen wir die zentralen geometrischen Eigenschaften der Raumzeit zusammen, wobei der Schwerpunkt auf den Definitionen und Theoremen liegt, die auch später in der Arbeit von Bedeutung sind. Die Grunddefinitionen findet man in jedem Buch über allgemeine Relativitätstheorie und die nicht so weit verbreiteten sind extra gekennzeichnet.

Wir haben dabei die Notation und die Konventionen von Wald [35] übernommen.

Die Metrik teilt Vektoren  $v \in T_x\mathcal{M}$  durch die Bedingungen  $g_x(v, v) < 0$ ,  $g_x(v, v) > 0$  und  $g_x(v, v) = 0$  in zeit-, raum- und lichtartige Vektoren auf. Weiterhin spricht man von einer zeit-, raum- bzw. lichtartigen Kurve, wenn die Tangenten an die Kurve in jedem Punkt die entsprechende Eigenschaft haben. Eine Kurve ist kausal, wenn in jedem Punkt  $x$  die Tangente entweder zeit- oder lichtartig ist. Ebenso besteht der offene Lichtkegel  $V_x$  aus allen zeitartigen Vektoren in  $x$ .  $V_x$  zerfällt in zwei Komponenten durch die Aufteilung in Vektoren mit positiver und negativer Zeitkomponente. Falls eine globale Zuordnung in Zukunfts- und Vergangenheitskegel gemacht werden kann, wird die Raumzeit  $(\mathcal{M}, g)$  **zeitorientierbar** genannt, und die (Halb-) Kegel mit  $V_x^+$  und  $V_x^-$  bezeichnet.

Die chronologische Zukunft von  $x \in \mathcal{M}$  wird definiert durch:

$$I^+(x) := \left\{ y \in \mathcal{M} : \begin{array}{l} \exists \text{ zukunftsgerichtete zeitartige Kurve } \lambda(t) \\ \text{mit } \lambda(0) = x \text{ und } \lambda(1) = y \end{array} \right\}$$

Die kausale Zukunft von  $x \in \mathcal{M}$  – bezeichnet mit  $J^+(x)$  – wird ebenso definiert, wobei „zeitartige Kurve“ durch „kausale Kurve“ ersetzt wird. Sie enthält alle Punkte der Raumzeit, die von einem bei  $x$  gesendeten Signal erreicht werden können. Analog definiert man die chronologische und kausale Vergangenheit  $I^-(x)$  und  $J^-(x)$ .

**Definition 1.1** *Eine Cauchy-Fläche ist eine achronale<sup>1</sup> und abgeschlossene Menge  $\zeta \subset \mathcal{M}$ , die von jeder (zukunfts- und vergangenheitsgerichteten) nichterweiterbaren kausalen Kurve durch einen beliebigen Punkt  $x \in \mathcal{M}$  geschnitten wird.*

Es folgt, daß eine Cauchy-Fläche eine dreidimensionale zusammenhängende Hyperfläche ist. Eine Raumzeit, die eine Cauchy-Fläche besitzt, wird **global hyperbolisch** genannt. Die Struktur einer global hyperbolischen Raumzeit ist sogar noch weiter bestimmt:

**Theorem 1.1** *Sei  $(\mathcal{M}, g)$  eine global hyperbolische Raumzeit mit einer Cauchy-Fläche  $\zeta$ . Dann hat  $\mathcal{M}$  die Topologie von  $\mathbf{R} \times \zeta$ . Insbesondere kann man eine glatte „Zeitkoordinate“  $t$  auf  $\mathcal{M}$  finden, so daß auf jeder Cauchy-Fläche  $t$  konstant ist.*

Obwohl die Kausalität für jede Raumzeit lokal erfüllt ist, kann sie global verloren gehen. Ein einfaches Beispiel hierfür ist eine Raumzeit mit geschlossener Zeitachse; in einer solchen Raumzeit könnte man seine Vergangenheit beeinflussen. Um solche und ähnliche Fälle ausschließen zu können, wird a priori verlangt, daß die Kausalität auch global erfüllt bleibt, was bei global hyperbolischen Raumzeiten gegeben ist. Eine weitere Eigenschaft dieser Raumzeiten ist, daß die ganze Zukunft und die ganze Vergangenheit der Raumzeit vollständig durch den Zustand zu einer bestimmten Zeit  $t = konst$  bestimmt sind, bzw. rekonstruiert werden können.

**Theorem 1.2** *Das Anfangsproblem der Klein-Gordon-Gleichung (KG Gl.) auf einer global hyperbolischen Raumzeit  $\mathcal{M}$  ist wohldefiniert, d.h. für je zwei glatte Funktionen  $f$  und  $p$  auf einer Cauchy-Fläche  $\zeta$ , die kompakte Träger besitzen, gibt es eine  $C^\infty$ -Lösung  $\phi$  der KG Gl. auf  $\mathcal{M}$ , so daß  $\phi = f$  und  $n^a \nabla_a \phi = p$  auf  $\zeta$  erfüllt ist.*

Weiterhin gilt:

$$\text{supp}(\phi) \subset \left( J^+(f) \cup J^-(f) \right) \cup \left( J^+(p) \cup J^-(p) \right).$$

---

<sup>1</sup>D.h. je zwei Punkte in der Menge können nicht durch eine zeitartige Kurve verbunden werden.

( $n^a$  bezeichnet den zukunftsgerichteten Normaleneinheitsvektor zu  $\zeta$ .)

Das ist das Existenz- und Eindeigkeitstheorem von Leray (1953) [27]. Einen schnell zugänglichen Beweis dieses Satzes findet man bei Dimock [7]. Die Eindeigkeit der Lösung ermöglicht es, die Konstruktion der Quantenfeldtheorie auf global hyperbolische Raumzeiten analog zu der im flachen (Minkowski'schen) Raum durchzuführen. Diese Konstruktion wird im übernächsten Abschnitt ausführlich besprochen, und wir beschränken uns deshalb im folgenden auf global hyperbolische Raumzeiten.

Als nächstes betrachten wir einige Horizonte der Raumzeit. Das Kollabieren eines genügend schweren Sterns endet in einem schwarzen Loch. Als schwarzes Loch wird der Bereich der Raumzeit bezeichnet, aus dem kein Signal die „Unendlichkeit“ erreichen kann. Dessen Rand ist der **Ereignishorizont**  $h_E$  der Raumzeit. Mathematisch korrekt hat man folgende Definition:

$$h_E = \mathcal{M} \cap \partial\left(J^-(\mathfrak{S}^+)\right).$$

Dabei ist  $\mathfrak{S}^+$  die lichtartige Zukunftsunendlichkeit. In diesem Kontext kann man sich darunter *ein weit entferntes Gebiet zu sehr später Zeit* vorstellen. Eine exakte Definition, die hier jedoch nicht gebraucht wird, findet man z.B. bei Wald [35].

Eine Isometrie ist eine Abbildung  $\kappa : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  mit der Eigenschaft, daß das Zurückziehen (Pullback) bzgl.  $\kappa$  die Metrik unverändert läßt, i.e.  $\kappa^*g = g$ . In Koordinatenschreibweise ist das Zurückziehen von  $g$  bzgl.  $\kappa$  definiert durch:

$$[\kappa^*g]_{\alpha\beta}(x) = g_{\mu\nu}\left(\kappa(x)\right) \frac{\partial\kappa(x)^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\kappa(x)^\nu}{\partial x^\beta}.$$

Sei  $\kappa_\tau \equiv \kappa(\tau)$  eine 1-Parameter-Familie von Isometrie der Raumzeit<sup>2</sup>  $(\mathcal{M}, g)$ . Das erzeugende Vektorfeld der Isometrien

$$\xi^a(x) = \frac{\partial}{\partial\tau} [\kappa_\tau(x)]^a \Big|_{\tau=0}$$

wird **Killing-Vektorfeld** genannt. Umgekehrt erzeugt ein Vektorfeld eine Familie von Isometrien, wenn es die Killing-Gleichung erfüllt:

$$\nabla_a \xi_b - \nabla_b \xi_a = 0$$

---

<sup>2</sup>Eine allgemeine Raumzeit muß aber keine solche Familie von Isometrien besitzen.

Diese Gleichung entspricht der Bedingung, daß die Lie–Ableitung der Metrik nach dem Killing–Vektor Null sein muß:  $\mathcal{L}_\xi g = 0$ .

**Definition 1.2** *Ein Killing–Horizont ist eine lichtartige Hyperfläche der Raumzeit, auf der das Killing–Vektorfeld orthogonal steht.*

Eine Raumzeit ist **stationär**, wenn sie ein zeitartiges Killing–Vektorfeld besitzt. Die erzeugten Isometrien stellen die „Zeittranslationsymmetrie“ der Raumzeit dar. Existiert zusätzlich noch eine raumartige Hyperfläche, auf der die Orbits der Isometrien orthogonal stehen, dann wird die Raumzeit **statisch** genannt. Für statische Raumzeiten hat die Metrik die Form:

$$ds^2 = -\alpha(\vec{x}) dt^2 + h_{ab}(\vec{x}) dx^a dx^b.$$

Eine stationäre aber nicht statische Metrik enthält in jedem Koordinatensystem unvermeidlich auch Mischterme  $dt dx^a$ .

Man kann zeigen (Hawking und Ellis 1973), daß der Ereignishorizont eines stationären schwarzen Loches ein Killing–Horizont sein muß. Nun beschreibt gerade die Kruskal–Raumzeit ein stationäres, rotationssymmetrisches schwarzes Loch, und deshalb stimmt für diese der Ereignishorizont mit dem Killing–Horizont überein. Fernerhin besitzt die Kruskal–Raumzeit zwei Killing–Horizonte  $h_A$  und  $h_B$ , die orthogonal zueinander stehen und die die Raumzeit in vier Keile unterteilen. Man nennt das Paar  $(h_A, h_B)$  einen verzweigten Killing–Horizont und den Durchschnitt der Horizonte die Bifurkationssphäre.

Wir definieren jetzt noch zwei weitere Typen von Untermengen der Raumzeit  $\mathcal{M}$ , die eng mit dem Begriff des geodätischen Abstands in Verbindung stehen, und die wir später bei der Definition eines Hadamard–Zustandes benutzen werden.

**Definition 1.3** *Eine konvexe normale Umgebung von  $x$  ist eine offene Umgebung  $U$  von  $x$ , so daß für alle  $p, q \in U$  genau eine ganz in  $U$  enthaltene Geodäte zwischen  $p$  und  $q$  existiert.*

Der quadratische geodätische Abstand ist dann durch

$$\sigma(x_1, x_2) = \pm \left( \int_a^b \left| g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} \right|^{1/2} d\tau \right)^2$$

definiert.  $x(\tau)$  ist dabei die einzige Geodäte zwischen  $x_1 = x(a)$  und  $x_2 = x(b)$ , und das Plus- oder Minuszeichen wird danach ausgewählt, ob die Geodäte raum- oder zeitartig ist.

**Definition 1.4** *Eine Menge  $\mathcal{N}$  ist eine kausale normale Umgebung einer Cauchy-Fläche  $\zeta$ , wenn  $\zeta$  auch für  $\mathcal{N}$  eine Cauchy-Fläche ist, und wenn man für alle Punkte  $x, y \in \mathcal{N}$  mit  $y \in J^+(x)$  eine konvexe normale Umgebung finden kann, die  $J^-(y) \cap J^+(x)$  enthält.*

Für uns ist im folgenden wichtig, daß man für jede Cauchy-Fläche eine kausale normale Umgebung finden kann [25].



## 2.

---

# Mikrolokale Analysis

Die mikrolokale Analysis ist die erweiterte Theorie der Distributionen und deren Beziehung zu Differentialoperatoren. Dabei erfolgt die Untersuchung hauptsächlich mit Hilfe der sogenannten Wellenfrontmenge. Durch die Wellenfront wird die Beschreibung einer Distribution aus der Mannigfaltigkeit heraus in den Kotangentenraum verschoben.

Obwohl die mikrolokale Analysis in der Mathematik schon in den siebziger Jahren von Duistermaat und Hörmander [17, 8] entwickelt wurde, hat man erst Anfang dieses Jahrzehnts ihre Bedeutung für die Physik erkannt. Es hat sich herausgestellt, daß diese Theorie für die Beschreibung von Feldtheorien auf gekrümmter Raumzeit geeignet ist [29, 20, 5]. Der wichtigste Grund dafür ist die Tatsache, daß die mikrolokale Analysis auch auf Mannigfaltigkeiten definiert ist, also daß die Theorie koordinatunabhängig formuliert werden kann.

Bevor wir Distributionen auf Mannigfaltigkeiten einführen [18, 10], betrachten wir einen Teilraum  $X \subset \mathbf{R}^n$ .

Nach Schwartz wird mit  $\mathcal{D}'(X)$  der Raum der Distributionen bezeichnet. Das sind lineare stetige Funktionale auf dem Raum der Testfunktionen  $C_0^\infty(X)$ . Testfunktionen sind unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger in  $X$ . Man benutzt fernerhin  $\mathcal{E}'(X)$  für den Raum der Distributionen mit kompaktem Träger in  $X$  und  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  für den Raum der temperierten Distributionen, d.h. für den Dualraum von

$$\mathcal{S} = \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbf{R}^n) : \forall \text{ Multiindices } \alpha, \beta \quad \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \{ |x^\beta \partial^\alpha \phi(x)| \} < \infty \right\}.$$

Jede Funktion  $f(x) \in C^\infty$  kann mit der Distribution

$$\phi \mapsto \int f(x)\phi(x)d^n x \quad \forall \phi \in C_0^\infty(X)$$

identifiziert werden. Nun ist jede Distribution  $u \in \mathcal{D}'(X)$  der Grenzwert einer Folge von Funktionen  $u_s \in C_0^\infty(X)$  in der schwachen-\* Topologie auf  $\mathcal{D}'(X)$ , d.h.

$$u(\phi) = \lim_{s \rightarrow \infty} u_s(\phi) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(X).$$

Deshalb wird eine Distribution  $u$  als eine verallgemeinerte Funktion<sup>1</sup> angesehen. Der Unterschied zu Funktionen zeigt sich im singulären Verhalten der Distributionen in einzelnen Punkten.

**Definition 2.1** *Der singuläre Träger von  $u$  –  $\text{singsupp}(u)$  – ist die Menge aller Punkte aus  $X$ , für die keine Umgebung  $U$  existiert, auf der die Restriktion von  $u$  eine  $C^\infty$ -Funktion ist.*

Die Eigenschaften von Funktionen, insbesondere die für Funktionen definierten Operationen, können in den meisten Fällen erfolgreich auf Distributionen übertragen werden. Es gibt jedoch Ausnahmen, wie z.B. die Multiplikation von zwei Distributionen, die nur mit Einschränkungen definiert werden kann. Ebenso kann die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}$  nicht für beliebige Distributionen  $u \in \mathcal{D}'(X)$  definiert werden. Für  $u \in \mathcal{E}'(X)$  jedoch bekommt man die Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n) &\rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n) \\ u &\mapsto \hat{u} \quad \text{mit} \quad \hat{u}(\xi) = u\left(e^{-i\langle \xi, \cdot \rangle}\right) \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Paley–Wiener–Schwartz [18] ist das schnelle Abfallen – schneller als jedes Polynom – der Fourier-Transformierten im Unendlichen eine hinreichende Charakterisierung einer glatten Funktion.

**Theorem 2.1** *Sei  $u \in \mathcal{D}'(X)$  und  $Y \subset X$ . Wenn für jede Funktion  $\phi \in C_0^\infty(Y)$  und jedes  $m \in \mathbf{R}$  eine Konstante  $C_m$  existiert, so daß*

$$|\widehat{\phi u}(\xi)| \leq C_m (1 + |\xi|)^{-m} \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n$$

dann ist  $u$  eine  $C^\infty$ -Funktion in  $Y$ . □

<sup>1</sup>Einige Autoren benutzen für Distributionen den Ausdruck „verallgemeinerte Funktionen“.



Die Funktion  $\phi$  wird im Theorem benötigt, damit  $\phi u$  eine Distribution mit kompaktem Träger wird, denn dann ist die Fourier–Transformation  $\mathcal{F}$  wohldefiniert.

Eine Verfeinerung dieser Überlegung führt auf folgende

**Definition 2.2** *Ein Tupel  $(x, k) \in X \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  ist ein regulär gerichteter Punkt von  $u$ , wenn sowohl eine Umgebung  $U \subset X$  von  $x$  als auch eine konische Umgebung  $\Sigma \subset \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  von  $k$  existieren, so daß es für jede Funktion  $\phi \in C_o^\infty(U)$  und jedes  $m \in \mathbf{R}$  eine Konstante  $C_m$  gibt, mit*

$$|\widehat{\phi u}(\xi)| \leq C_m (1 + |\xi|)^{-m} \quad \forall \xi \in \Sigma. \quad (2.1)$$

*Bemerkungen:*

- konische Umgebung von  $V$  bedeutet:  $x \in V \Rightarrow tx \in V$  für alle  $t \in \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$ .
- Sind für festes  $x$  alle Tupel  $(x, \xi)$  regulär gerichtete Punkte von  $u$ , dann gilt  $x \notin \text{singsupp}(u)$ .

Nun können wir den Begriff der **Wellenfrontmenge** einer Distribution  $u \in \mathcal{D}'(X)$  einführen. Sie ist das Komplement in  $X \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  der Menge aller regulär gerichteten Punkte von  $u$ .

$$WF(u) := \left\{ (x, \xi) \in X \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\} : (x, \xi) \text{ ist kein reg. gerichteter Punkt von } u \right\}$$

Offensichtlich ist die Projektion der Wellenfront auf die erste Variable der singuläre Träger der Distribution. Damit sind in der Wellenfrontmenge nicht nur die singulären Punkte kodiert, sondern auch die nicht schnell abfallenden Richtungen der Fourier–Transformierten.

Um die Wellenfrontmenge einer Distribution zu bestimmen, wird man meistens zuerst die regulär gerichteten Punkte via Ungleichung 2.1 ausrechnen. Ist die Distribution aber die Lösung einer Differentialgleichung, dann wird sich herausstellen, daß man viele Aussagen über die Wellenfrontmenge machen kann, auch ohne die regulär gerichteten Punkte zu bestimmen, also ohne explizit 2.1 zu benutzen.

Als einfachstes Beispiel für die Bestimmung der Wellenfrontmenge dient die  $\delta$ –Distribution in  $\mathbf{R}^n$ .

$$|\widehat{\phi \delta}(\xi)| = |\delta(e^{-i\langle \xi, \cdot \rangle} \phi)| = |\phi(0)|$$

Also für keine Richtung ist (2.1) erfüllt, solange  $\phi(0) \neq 0$ . Damit hat man:

$$WF(\delta) = \left\{ (0, \xi) : \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \right\}$$

Einige wesentliche Eigenschaften der Wellenfront wollen wir nun aufzählen:

1. Sei  $\phi \in C_0^\infty(X)$  dann gilt:  $WF(\phi u) \subset WF(u)$
2.  $WF(u_1 + u_2) \subset WF(u_1) \cup WF(u_2)$
3. Differentialoperatoren  $P$  haben bekanntlich die lokale Eigenschaft:

$$\text{supp}(Pu) \subset \text{supp}(u).$$

Sie erfüllen außerdem noch die **pseudolokale Eigenschaft**<sup>2</sup>

$$WF(Pu) \subset WF(u). \quad (2.2)$$

Als nächstes untersuchen wir das Verhalten von Distributionen unter einer Koordinatentransformation<sup>3</sup>  $\pi$ . Dieses Verhalten wird es uns ermöglichen, Distributionen auf Mannigfaltigkeiten einzuführen und die Wellenfront als Menge in dem Kotangentenraum anzusehen. Allgemeiner können wir eine Abbildung  $\pi$  zwischen Räumen mit unterschiedlicher Dimension betrachten. Die Verallgemeinerung der Verkettung für Funktionen liefert die (Koordinaten-) Transformierte einer Distribution.

**Theorem 2.2** *Seien  $X$  und  $Y$  offene Mengen in  $\mathbf{R}^n$  bzw. in  $\mathbf{R}^m$  und  $\pi : X \rightarrow Y$  eine  $C^\infty$  Funktion. Man bezeichne die Normalenmenge der Abbildung  $\pi$  mit*

$$N_\pi = \left\{ (\pi(x), \eta) \in Y \times \mathbf{R}^m : {}^t[\pi'](x) \eta = 0 \right\}.$$

*Für alle Distributionen  $v \in \mathcal{D}'(Y)$  mit*

$$N_\pi \cap WF(v) = \emptyset$$

---

<sup>2</sup>Tatsächlich ist die pseudolokale Eigenschaft von einer größeren Klasse von Operatoren erfüllt, und zwar von Pseudodifferentialoperatoren. Einen guten Überblick über Pseudodifferentialoperatoren und ihren Zusammenhang zur mikrolokalen Analysis findet man in [20].

<sup>3</sup>Hier ist es gleichgültig, ob man die Abbildung als Verschiebung von Punkten in  $\mathbf{R}^n$  – aktive Interpretation – oder als einen Koordinatenwechsel – passive Interpretation – ansieht. Da jedoch später diese Abbildung eine Transformation zwischen Koordinatensystemen auf einer Mannigfaltigkeit beschreiben wird, ist die zweite Interpretation vorzuziehen.

existiert eine eindeutige stetige Abbildung  $\pi^* : \mathcal{D}'(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$  mit  $\pi^*v = v \circ \pi$ , wenn  $v \in C^0(Y)$ . Man nennt  $\pi^*u$  **das Zurückziehen** (Pullback) von  $u$  bzgl.  $\pi$ .

Außerdem gilt:

- Ist  $\pi$  ein Diffeomorphismus<sup>4</sup>, und haben  $X$  und  $Y$  die gleiche Dimension, dann ist

$$\pi^*v(\phi) = v(\Phi) \quad \text{mit } \Phi = \det[(\pi^{-1})'] \phi \circ \pi^{-1}.$$

- Ist das Zurückziehen von  $v$  definiert, dann gilt

$$WF(\pi^*v) \subset \pi^*WF(v) := \left\{ \left( x, {}^t[\pi'](x)\eta \right) : \left( \pi(x), \eta \right) \in WF(v) \right\}. \quad (2.3)$$

Das Zurückziehen führt uns in natürlicher Weise zu Distributionen auf Mannigfaltigkeiten, wenn man verlangt, daß ihre Definition koordinatenunabhängig sein soll.

**Definition 2.3** Sei  $\mathcal{M}$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Wenn für jedes Koordinatensystem  $\kappa : \mathcal{X}_\kappa \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}_\kappa$  eine Distribution  $u_\kappa \in \mathcal{D}'(\tilde{\mathcal{X}}_\kappa)$  gegeben ist, so daß

$$u_\kappa = (\kappa' \circ \kappa^{-1})^* u_{\kappa'} \quad \text{auf } \kappa(\mathcal{X}_\kappa \cap \mathcal{X}_{\kappa'}),$$

dann wird das System  $\{u_\kappa\}$  eine Distribution  $u$  auf  $\mathcal{M}$  genannt. Die Menge aller Distributionen auf  $\mathcal{M}$  wird mit  $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$  bezeichnet.

Nun definieren wir die Wellenfrontmenge einer Distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$  als die Teilmenge des Kotangententialraumes  $T^*\mathcal{M}$ , die eingeschränkt auf eine Karte einfach  $\kappa^*WF(u_\kappa)$  ist. Diese Definition ist koordinatenunabhängig und insbesondere invariant bzgl. der Wahl der lokalen Koordinaten; für einen Diffeomorphismus  $\pi$  zwischen offenen Mengen auf  $\mathbf{R}^n$  hat man als Konsequenz des Theorems 2.2, daß die Wellenfront von  $v$  und das Zurückziehen von  $WF(v)$  gleich sind.

Eine Problematik im Umgang mit Distributionen ist, daß das Produkt zweier Distributionen nicht allgemein definiert werden kann. Eine Möglichkeit, das Produkt eingeschränkt zu definieren, besteht darin, nur solche Distributionen zuzulassen, die geeignete Wellenfrontmengen besitzen. Dieses Verfahren ist konstruktiver Natur, d.h.

<sup>4</sup>Ein Diffeomorphismus  $f$  ist eine bijektive Abbildung mit  $f, f^{-1} \in C^\infty$ .

es besagt, wann zwei Distributionen multipliziert werden können. Wenn die gestellte Bedingung nicht erfüllt ist, kann das Produkt möglicherweise doch existieren.

Die Idee besteht darin, das Produkt von Distributionen über ihre Fourier–Transformierte zu definieren; man erinnere sich, daß die Fourier–Transformierte der Multiplikation zweier Funktionen  $\phi$  und  $\psi$  der Faltung der Funktionen im Fourier–Raum entspricht:

$$\widehat{\phi\psi}(\xi) = [\widehat{\phi} * \widehat{\psi}](\xi) .$$

**Theorem 2.3** *Seien  $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(X)$ , und sei folgende Bedingung für alle  $x \in X$  erfüllt*

$$(x, 0) \notin WF(u_1) \oplus WF(u_2) := \left\{ (x, \xi_1 + \xi_2) : (x, \xi_i) \in WF(u_i), i = 1, 2 \right\} .$$

*Dann kann das Produkt  $v := u_1 \cdot u_2 \in \mathcal{D}'(X)$  über seine Fourier–Transformierte definiert werden: Für alle  $x \in X$  existiert  $\psi \in \mathcal{D}(X)$  mit  $\psi = 1$  in einer Umgebung von  $x$ , so daß*

$$\widehat{\psi^2 v}(\xi) = \left[ \widehat{\psi u_1} * \widehat{\psi u_2} \right] (\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n .$$

*Darüber hinaus hat man noch:*

$$WF(v) \subset WF(u_1) \oplus WF(u_2) \cup WF(u_1) \cup WF(u_2)$$

Der Beweis des Theorems ist sehr instruktiv, deswegen wollen wir ihn hier wiedergeben. Auch hier läßt man sich von den Eigenschaften von Funktionen  $u, v \in C^\infty$  leiten. Das Produkt  $u(x)v(x)$  ist die Einschränkung des auf  $X \times X$  definierten Tensorprodukts  $[u \otimes v](x, y) = u(x)v(y)$  auf die Diagonale. Deshalb untersuchen wir zuerst das Tensorprodukt.

**Lemma 2.4** *Für  $u \in \mathcal{D}'(X)$  und  $v \in \mathcal{D}'(Y)$  gilt:*

$$\begin{aligned} WF(u \otimes v) \subset & \left[ WF(u) \times WF(v) \right] \cup \left[ WF(u) \times \left( \text{supp}(v) \times \{0\} \right) \right] \\ & \cup \left[ \left( \text{supp}(u) \times \{0\} \right) \times WF(v) \right] \end{aligned}$$

*Beweis:*

Es ist einfacher, die regulär gerichteten Punkte von  $u \otimes v$  zu betrachten. Die Menge aller regulären Punkte von  $u$  wollen wir hier mit  $RP(u)$  bezeichnen.

Sei  $(x, y; \xi, \eta)$  ein Punkt im Kotangentenbündel. Für glatte Funktionen  $\phi$  und  $\psi$ , die kompakte Träger in den Umgebungen von  $x$  bzw.  $y$  haben, und für  $\xi'$  und  $\eta'$ , die in konischen Umgebungen von  $\xi$  bzw.  $\eta$  enthalten sind, gilt die folgende Identität:

$$\left| \mathcal{F}[(\phi \otimes \psi)(u \otimes v)](\xi', \eta') \right| = \left| \widehat{\phi u}(\xi') \widehat{\psi v}(\eta') \right| = \left| \widehat{\phi u}(\xi') \right| \left| \widehat{\psi v}(\eta') \right|.$$

Diese Funktion erfüllt für alle  $\xi'$  und  $\eta'$  die „Wellenfront“-Ungleichung 2.1, wenn mindestens einer der Ausdrücke auf der rechten Seite schnell abfällt. Das ist immer der Fall, wenn

$$\alpha) \quad x \notin \text{supp}(u) \vee y \notin \text{supp}(v) \quad \text{oder}$$

$$\beta) \quad (x, \xi) \in RP(u) \vee (y, \eta) \in RP(v)$$

erfüllt ist. Diese Bedingungen bestimmen also eine Teilmenge  $\mathcal{W}$  der regulär gerichteten Punkte von  $u \otimes v$ . Für die dazugehörigen Komplementmengen in  $T^*(X \times Y) \setminus \mathbf{0}$  ( $\mathbf{0}$  bezeichnet den Nullschnitt) dreht sich die Teilmengenrelation gerade um:

$$WF(u \otimes v) \subset \mathcal{C}_{T^*(X \times Y) \setminus \mathbf{0}} \mathcal{W}$$

Jetzt bleibt nur noch nachzuweisen, daß die rechte Seite die gewünschte Menge liefert. Das Komplement von  $\mathcal{W}$  in  $T^*(X \times Y)$  enthält ersteinmal die Punkte im Kotangentenbündel, für welche die beiden Bedingungen

$$\alpha') \quad x \in \text{supp}(u) \wedge y \in \text{supp}(v) \quad \text{und}$$

$$\beta') \quad \left( (x, \xi) \in WF(u) \vee \xi = \mathbf{0} \right) \wedge \left( (y, \eta) \in WF(v) \vee \eta = \mathbf{0} \right)$$

gültig sind. Bei der Verneinung von  $\beta$ ) beachte man, daß  $RP(u)$  und  $RP(v)$  keine Punkte aus den Nullschnitten in  $T^*X$  bzw.  $T^*Y$  enthalten.

Die Einschränkung auf  $T^*(X \times Y) \setminus \mathbf{0}$  liefert dann die Behauptung.  $\square$

*Beweis von Theorem 2.3:*

Wir führen die Funktion  $D : X \rightarrow X \times X$  mit  $D(x) = (x, x)$  ein. Das Zurückziehen

von  $u \otimes v$  bzgl.  $D$  liefert das Produkt  $u \cdot v$  an denselben Punkten. Wir bemerken zuerst:

$$\begin{aligned} D'(x) &= (\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n) \\ \left( {}^t[D'](x) \right) (\xi, \eta) &= \xi + \eta \end{aligned}$$

Das Theorem über den Pullback (Th. 2.2) sagt uns, daß das Zurückziehen wohldefiniert ist, wenn

$$\left\{ (x, x; \xi, \eta) : \xi + \eta = \mathbf{0} \right\} \cap WF(u \otimes v) = \emptyset.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, dann gilt

$$WF(u \cdot v) \subset \left\{ (x, \xi + \eta) : (x, x; \xi, \eta) \in WF(u \otimes v) \right\}.$$

Die Anwendung des obigen Lemmas vervollständigt den Beweis.  $\square$

Ein weiteres bedeutsames Resultat ist das Theorem über die Ausbreitung von Singularitäten. Es verbindet mit Hilfe von Differentialoperatoren den Begriff der Wellenfront mit einem Problem der klassischen Mechanik.

Zunächst wollen wir die wichtigsten Begriffe im Zusammenhang mit Differentialoperatoren wiederholen und die hier benutzte Terminologie festlegen. Ist  $P(x, D)$  ein Differentialoperator auf  $\mathcal{M}$ , dann hat er die Form:

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq n} p_\alpha(x) D^\alpha \quad \alpha \text{ - Multiindizes}$$

**Das Hauptsymbol**  $H$  von  $P(x, D)$  ist die Abbildung  $H : T^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$  mit

$$H(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=n} p_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Wir definieren nun weiter **die charakteristische Menge** von  $P$ :

$$\text{char}(P) := H^{-1}(0) \setminus \mathbf{0} \equiv \{(x, \xi) \in T^*\mathcal{M} \setminus \mathbf{0} : H(x, \xi) = 0\}$$

Da  $T^*\mathcal{M}$  die Struktur einer symplektischen Mannigfaltigkeit trägt, kann  $T^*\mathcal{M}$  als ein Phasenraum angesehen werden. Eine Dynamik kann man auch einführen, indem man

$H(x, \xi)$  als Hamilton–Funktion ansieht.  $H(x, \xi)$  liefert dann weiter das Hamilton’sche Vektorfeld:

$$h^a = \sum \frac{\partial H(x, \xi)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi^i} - \frac{\partial H(x, \xi)}{\partial \xi^i} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Unter diesem Aspekt betrachtet, besteht die charakteristische Menge aus Zuständen im Phasenraum mit verschwindender Energie, aber nicht verschwindendem Impuls. Die Integralkurven von  $h^a$  mit Startpunkten in der charakteristischen Menge werden **Bicharakteristiken** genannt, und ihre Projektionen auf  $\mathcal{M}$  heißen **bicharakteristische Kurven**. Es ist klar, daß alle Bicharakteristiken in der charakteristischen Menge enthalten sein müssen. Wir führen auf der charakteristischen Menge noch die bicharakteristische Relation  $\sim$  ein: Zwei Punkte stehen in dieser Relation zueinander, wenn sie auf der selben Bicharakteristik liegen.

### Theorem 2.5 *Ausbreitung von Singularitäten*

Sei  $P$  ein Differentialoperator<sup>5</sup> der Ordnung  $n$  auf  $\mathcal{M}$ . Wenn  $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$  und  $Pu = f$ , dann gilt

$$WF(u) \setminus WF(f) \subset \text{char}(P),$$

und  $WF(u) \setminus WF(f)$  ist invariant unter dem Hamilton’schen Vektorfeld  $h^a$ .

Einen wichtigen Spezialfall stellen homogene Differentialgleichungen ( $f = 0$ ) dar. Hierbei ist die Wellenfront jeder schwachen Lösung  $u$  in der charakteristischen Menge enthalten, und die Wellenfront enthält mit jedem Punkt auch die gesamte zugehörige Bicharakteristik.

In dieser Arbeit sind wir in erster Linie an dem Klein–Gordon–Operator

$$P = \square_g - m^2$$

auf einer Raumzeit  $(\mathcal{M}, g)$  interessiert. Das Hauptsymbol von  $P$  ist  $H(x, \xi) = g^{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu$  und entspricht der Hamilton–Funktion für Geodäten. Die charakteristische Menge besteht deshalb aus nicht verschwindenden Kovektoren, die lichtartig sind, und die Bicharakteristiken sind Kurven  $t \mapsto (x(t), \xi_a(t))$  mit

<sup>5</sup>Das Theorem gilt auch für Pseudodifferentialoperatoren mit reellem Hauptsymbol, das homogen der Ordnung  $n$  ist. Siehe für Einzelheiten z.B. [20].

- $\lambda : t \mapsto x(t)$  ist eine Nullgeodäte ( $t$  ist affiner Parameter).
- $\xi_a(t)$  ist der Kotangentialvektor an der Kurve  $\lambda$  in  $x(t)$ , d.h.  $g^{ab}\xi_a(x)$  ist Tangentenvektor an  $\lambda$  in  $x(t)$ .

Zwei Punkte stehen fernerhin in der bicharakteristischen Relation zueinander  $(x, \xi) \sim (y, \eta)$ , wenn  $x$  und  $y$  auf der selben Nullgeodäte  $\lambda$  liegen und wenn  $\xi$  und  $\eta$  Kotangentialvektoren an  $\lambda$  in  $x$  bzw.  $y$  sind und durch Paralleltransport ineinander überführbar sind.

Zum Schluß sei noch eine Eigenschaft von symmetrischen Bidistributionen auf  $\mathcal{M}$  erwähnt, die später in der Arbeit gebraucht wird. Diese sind Funktionale auf  $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \times \mathcal{D}(\mathcal{M})$ , die in jeder Variablen linear und stetig sind. Zudem entsteht jede Bidistribution  $u$  aus einer Distribution  $\tilde{u}$  auf der Produktmannigfaltigkeit  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ , und zwar durch  $u(\phi, \psi) = \tilde{u}(\phi \otimes \psi)$ , wobei  $\phi$  und  $\psi$  Testfunktionen in  $\mathcal{M}$  sind. Die Wellenfrontmenge von  $u$  wird dann durch die Wellenfrontmenge der zugehörigen Distribution  $\tilde{u}$  definiert:

$$WF(u) := \left\{ (x, \xi; y, \eta) \in T^*\mathcal{M} \times T^*\mathcal{M} : (x, y; \xi, \eta) \in WF(\tilde{u}) \right\} \quad (2.4)$$

Den Raum der Bidistributionen bezeichnen wir einfach mit  $\mathcal{D}'_2(\mathcal{M})$ .

**Lemma 2.6** *Sei  $u \in \mathcal{D}'_2(\mathcal{M})$  eine symmetrische Bidistribution, i.e.  $u(f, g) = u(g, f)$ . Dann ist auch die Wellenfront von  $u$  symmetrisch:*

$$(x, \xi; y, \eta) \in WF(u) \Leftrightarrow (y, \eta; x, \xi) \in WF(u)$$

*Beweis:*

Ist die Bidistribution  $v \in \mathcal{E}'_2(\mathcal{M})$  symmetrisch, so ist auch ihre Fourier-Transformierte symmetrisch:

$$\hat{v}(\xi, \eta) = v(e^{-i\langle \xi, \cdot \rangle}, e^{-i\langle \eta, \cdot \rangle}) = v(e^{-i\langle \eta, \cdot \rangle}, e^{-i\langle \xi, \cdot \rangle}) = \hat{v}(\eta, \xi)$$

Deshalb gilt für eine beliebige symmetrische Bidistribution  $u \in \mathcal{D}'_2(\mathcal{M})$ :

$$|\widehat{\phi\psi}u(\xi, \eta)| = |\widehat{\psi\phi}u(\eta, \xi)| \quad \forall \phi, \psi \in C^\infty_0(\mathcal{M}),$$

und die Behauptung ist bewiesen. □



### 3.

---

## Quantenfeldtheorie auf global hyperbolischer Raumzeit

In dieser Arbeit betrachten wir das lineare Klein–Gordon–Feld auf einer global hyperbolischen Raumzeit  $(\mathcal{M}, g)$ , die eine 1–Parameter–Familie von Isometrien  $\kappa(\tau)$  besitzt. Unsere Darstellung ist größtenteils an die von Kay und Wald [25] angelehnt. Die Klein–Gordon–Gleichung

$$(\square_g - m^2) \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi - m^2 \phi = 0 \quad (3.1)$$

für ein skalares Feld ist eine hyperbolische Differentialgleichung, für die – wegen der globalen Hyperbolizität der Raumzeit – das Cauchy–Problem wohldefiniert ist, d.h. die Anfangsbedingung auf einer Cauchy–Fläche<sup>1</sup> legt eindeutig die Lösung der KG Gl. fest. Außerdem existieren für jede Inhomogenität  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$  die avancierte und die retardierte Lösung  $\Delta_A f$  und  $\Delta_R f$  der inhomogenen KG Gl.,

$$(\square_g - m^2) \Delta_{A,R} f = f,$$

mit den üblichen Trägereigenschaften:

$$\begin{aligned} \text{supp}(\Delta_A f) &\subset J^-(\text{supp}(f)) \\ \text{supp}(\Delta_R f) &\subset J^+(\text{supp}(f)) \end{aligned}$$

Dann ist  $E f = \Delta_R f - \Delta_A f$  eine Lösung von (3.1), und  $E : \mathcal{D}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{M})$  ist ein eindeutiger, stetiger, linearer Operator: **Die Fundamentallösung** der KG Gl.

---

<sup>1</sup>die sogenannten Cauchy–Daten

Fernerhin ist  $E$  surjektiv, also es existiert zu jeder Lösung  $\phi$  von (3.1) eine Funktion  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$  mit  $\phi = Ef$ .

In der Quantenfeldtheorie werden im algebraischen Zugang Operatoren als Elemente einer  $C^*$ -Algebra<sup>2</sup>  $\mathcal{A}$  angesehen, und ein Zustand  $\omega$  ist ein positives, normiertes und lineares Funktional auf  $\mathcal{A}$ , d.h.  $\omega(AA^*) \geq 0$  und  $\omega(\mathbf{1}) = 1$ . Die angenommenen Isometrien der Raumzeit induzieren weiterhin eine Automorphismen-Gruppe  $\alpha(\tau)$  auf  $\mathcal{A}$ . Das Paar  $(\mathcal{A}, \alpha(\tau))$  nennt man ein **dynamisches Quantensystem**.

Die Konstruktion von  $(\mathcal{A}, \alpha(\tau))$  für eine bestimmte Raumzeit erfolgt mit Hilfe von

**Definition 3.1** *Ein Tripel  $(D, \sigma, \mathcal{T}(\tau))$  ist ein dynamisches, klassisches und lineares System, wenn es folgende Eigenschaften erfüllt:*

- $D$  ist ein linearer (Phasen-) Raum
- $\sigma$  ist eine symplektische Form, d.h. eine nichtentartete  $(\sigma_{ab} v^b = 0 \Leftrightarrow v^a = 0)$ , geschlossene  $(d\sigma = 0)$  2-Form
- $\mathcal{T}(\tau)$  ist eine 1-Parameter-Gruppe von linearen, symplektischen Transformationen:

$$\sigma(\mathcal{T}(\tau) \phi_1, \mathcal{T}(\tau) \phi_2) = \sigma(\phi_1, \phi_2) \quad \forall \tau \in \mathbf{R}$$

Da  $(\mathcal{M}, g)$  global hyperbolisch angenommen wird, besitzt die Raumzeit sicherlich eine Cauchy-Fläche  $\zeta$ . Die reellen  $C^\infty$ -Lösungen der KG Gl. mit kompaktem Träger auf  $\zeta$  erzeugen den linearen Raum  $D$ . Die Integration über den Strom des Klein-Gordon Feldes  $j_a = [\phi_1 \nabla_a \phi_2 - \phi_2 \nabla_a \phi_1]$  liefert die symplektische Form:

$$\sigma(\phi_1, \phi_2) = \int_{\zeta} \phi_1 \overleftrightarrow{\nabla}_a \phi_2 \, dS^a \quad dS^a \text{ - Volumenelement auf } \zeta$$

Man beachte, daß die obige Definition unabhängig von der Wahl der Cauchy-Fläche  $\zeta$  ist: Betrachten wir zwei Cauchy-Flächen  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$ , die das Volumen  $Q$  einschliessen. Die Stromerhaltung  $\nabla^a j_a = 0$  liefert dann die gewünschte Unabhängigkeit:

$$0 = \int_Q \nabla^a j_a \, d\mu = \int_{\partial Q} j_a \, dS^a = \int_{\zeta_1} j_a \, dS^a - \int_{\zeta_2} j_a \, dS^a.$$

<sup>2</sup>Es ist auch möglich, nur eine  $*$ -Algebra zu betrachten, aber diese hat den Nachteil, daß ihre Elemente in einer Darstellung als Operatoren in einem Hilbertraum nicht notwendigerweise beschränkt sind, i.e. sie sind nicht überall definiert.

Die symplektischen Transformationen  $\mathcal{T}(\tau)$  ergeben sich in eindeutiger Weise aus den Isometrien  $\kappa(\tau)$ , und zwar durch

$$\left[ \mathcal{T}(\tau) \phi \right](x) = \phi(\kappa(\tau) x).$$

Steht das klassische System zur Verfügung, dann ergibt sich die gewünschte Algebra  $\mathcal{A}$  als die Weyl–Algebra über  $(D, \sigma)$ . Sie ist der Normabschluß der Algebra, die von den abstrakten Elementen  $W(\phi)$ ,  $\phi \in D$ , erzeugt wird. Die Elemente  $W(\phi)$  müssen weiterhin die Weyl–Relationen erfüllen:

- $W(\phi)^* = W(-\phi) = W(\phi)^{-1}$  (Unitarität)
- $W(\phi_1) W(\phi_2) = \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma(\phi_1, \phi_2)\right) W(\phi_1 + \phi_2)$

Physikalisch wird  $W(\phi)$  als das exponentierte Quantenfeld<sup>3</sup> interpretiert :

$$W(\phi) = \exp\left(-i\hat{\Phi}(\phi)\right)$$

(In der Literatur, besonders bei Wald, wird für das Quantenfeld das Symbol  $\sigma(\hat{\phi}, \phi)$  benutzt.)

Die Dynamik des Systems wird durch die Automorphismen–Gruppe  $\alpha(\tau)$  beschrieben. Man bekommt sie mit Hilfe der symplektischen Transformationen  $\mathcal{T}(\tau)$ :

$$\alpha(\tau)W(\phi) = W\left(\mathcal{T}(\tau)\phi\right)$$

Aus der Menge der möglichen Zustände betrachten wir in dieser Arbeit die quasifreien Zustände. Für diese verschwindet die 1–Punkt–Funktion, d.h. alle ungeraden  $n$ –Punkt–Funktionen verschwinden, und die 2–Punkt–Funktion bestimmt eindeutig den Zustand. Der Vorzug der quasifreien Zustände besteht also darin, daß man nur das Verhalten der 2–Punkt–Funktion untersuchen muß, um Aussagen über den Zustand machen zu können.

Man kann einen quasifreien Zustand durch das Einführen einer positiven, symmetrischen, bilinearen Abbildung  $\mu : D \times D \rightarrow \mathbf{R}$  bekommen, indem man definiert:

$$\omega_\mu\left(W(\phi)\right) = e^{-\frac{1}{2}\mu(\phi, \phi)}$$

---

<sup>3</sup>Die genaue Definition für das Quantenfeld folgt später.

Damit die Positivität des Funktionals gewährleistet ist, also damit  $\omega_\mu$  überhaupt einen Zustand definiert, muß die Abbildung  $\mu$  folgendermaßen eingeschränkt werden:

$$\frac{1}{2} \sigma(\phi_1, \phi_2) \leq \mu(\phi_1, \phi_1)^{\frac{1}{2}} \mu(\phi_2, \phi_2)^{\frac{1}{2}}$$

Wurde die Algebra  $\mathcal{A}$  der Observablen konstruiert, und ebenso ein Zustand  $\omega$  ausgewählt, dann bekommt man die übliche quantenmechanische Beschreibung des Systems in einem Hilbertraum durch die GNS-Konstruktion<sup>4</sup>. Dabei wird jedem Paar  $(\mathcal{A}, \omega)$  ein Tripel  $(\mathcal{H}, \varrho, \Omega)$  zugeordnet:  $\mathcal{H}$  ist ein Hilbertraum,  $\varrho$  eine Darstellung von  $\mathcal{A}$  in den beschränkten Operatoren  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , und  $\Omega \in \mathcal{H}$  ist ein zyklischer Vektor, d.h.  $\varrho(\mathcal{A})\Omega$  ist dicht in  $\mathcal{H}$ . Der Zustand wird eindeutig durch  $\Omega$  bestimmt:

$$\omega(\mathcal{A}) = \langle \Omega, \varrho(\mathcal{A})\Omega \rangle$$

Somit kann man zwischen den beiden Beschreibungen beliebig wechseln und immer die problembezogenere wählen. In der Minkowski'sche Theorie verlangt man, daß  $\Omega$  als einziger Vektor invariant bzgl. der Poincaré-Gruppe bleibt, und daher wird es physikalisch als das Vakuum interpretiert. Eine allgemeine Raumzeit besitzt aber keine Symmetriegruppe, und deshalb ist die Wahl von  $\Omega$  nicht eindeutig, und damit ist auch das Vakuum nicht eindeutig fixiert.

Für die konkrete Darstellung benötigen wir

**Definition 3.2** Die 1-Teilchen-Hilbertraum-Struktur  $(k, \mathcal{H})$  besteht aus einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und aus einer Abbildung  $k : D \rightarrow \mathcal{H}$  mit:

- $k(D) + i k(D)$  ist dicht in  $\mathcal{H}$ .
- $\langle k\phi_1, k\phi_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \mu(\phi_1, \phi_2) + \frac{i}{2} \sigma(\phi_1, \phi_2)$

**Theorem 3.1** Das GNS-Tripel für einen quasifreien Zustand  $\omega_\mu$  auf der Weyl-Algebra kann durch  $(\mathcal{F}^s(\mathcal{H}), \varrho_\mu, \Omega)$  dargestellt werden.

1.  $\mathcal{F}^s(\mathcal{H})$  ist der symmetrische Fockraum über dem 1-Teilchen-Hilbertraum  $\mathcal{H}$ .

---

<sup>4</sup>GNS steht für Gelfand, Naimark und Segal.

$$2. \varrho_\mu[W(\phi)] = \exp\left(-i\overline{[a^*(k\phi) + a(k\phi)]}\right)$$

Dabei sind  $a^*$  und  $a$  die gewöhnlichen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf  $\mathcal{F}^s(\mathcal{H})$ ; für alle  $u, v \in \mathcal{H}$  gilt:

$$[a(u), a^*(v)] = \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{und} \quad a(u)\Omega = 0.$$

Der Überstrich kennzeichnet den Abschluß des Operators.

3.  $\Omega := 1 \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \oplus \dots$  ist das Fockvakuum.

Das Quantenfeld  $\hat{\Phi}(\phi)$  wird als der (Segal-) Feldoperator des Fockraumes  $\mathcal{F}^s(\mathcal{H})$  definiert:

$$\hat{\Phi}(\phi) := \Phi_S(k\phi) \equiv a^*(k\phi) + a(k\phi) \quad (3.2)$$

Es ist bekannt [31], daß der Feldoperator wesentlich selbstadjungiert ist, und daß er die Kommutator-Beziehung

$$[\Phi_S(u), \Phi_S(v)] = 2i \operatorname{Im} \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in \mathcal{H}$$

erfüllt. Fernerhin ist das Fockvakuum  $\Omega$  zyklisch, und die Operatoren

$$\hat{W}(u) = \exp(-i\Phi_S(u))$$

erfüllen die Weyl-Relationen. Damit ist das Theorem fast von selbst bewiesen.

Die „symplektisch verschmierte“ 2-Punkt-Funktion ist durch

$$\lambda(\phi_1, \phi_2) := \langle \Omega, \hat{\Phi}(\phi_1)\hat{\Phi}(\phi_2)\Omega \rangle = \langle k\phi_1, k\phi_2 \rangle_{\mathcal{H}} \quad (3.3)$$

definiert. Da man für jede Testfunktion  $f$  eine eindeutige Lösung  $\phi = Ef$  hat (wie am Anfang des Kapitels erwähnt wurde), kann man weiter die 2-Punkt-Distribution definieren:

$$\Lambda(f_1, f_2) := \lambda(Ef_1, Ef_2). \quad (3.4)$$

Sie ist eine Bidistribution, die in jeder Variable eine schwache Lösung der KG Gl. ist.

Zustände teilt man in natürlicher Weise in reine und gemischte Zustände. Ein reiner Zustand ist extremal in der konvexen Menge der Zustände, d.h. man kann ihn nicht als eine Summe zweier anderer Zustände mit positiven Koeffizienten darstellen. Algebraisch heißt dies, daß die zugehörige GNS–Darstellung der Observablenalgebra  $\mathcal{A}$  auf dem Fockraum irreduzibel ist. In dem Formalismus der *1–Teilchen–Hilbertraum–Struktur*  $(k, \mathcal{H})$  ist  $\omega$  ein reiner Zustand, wenn  $kD$  bereits dicht in  $\mathcal{H}$  ist.

Bis jetzt haben wir in der Definition der 1–Teilchen–Hilbertraum–Struktur die symplektischen Transformationen  $\mathcal{T}(\tau)$  nicht benutzt. Sie induzieren jedoch eine stark stetige unitäre Gruppe<sup>5</sup>  $e^{-iH\tau}$  auf  $\mathcal{H}$  mit selbstadjungiertem  $H$  durch:

$$e^{-iH\tau}k = k\mathcal{T}(\tau)$$

Mit ihrer Hilfe werden zwei Klassen von Zuständen ausgezeichnet: Die Grund- und die KMS–Zustände<sup>6</sup>.

**Definition 3.3** Sei  $\omega$  ein quasifreier Zustand und  $e^{-iH\tau}$  die oben definierte unitäre Gruppe.

1.  $\omega$  ist ein Grundzustand, wenn die „1–Teilchen–Hamilton–Operator“  $H$  positiv und  $kD$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist.

$(k, \mathcal{H}, e^{-iH\tau})$  nennt man **1–Teilchen–(Hilbertraum)–Grundstruktur**.

2.  $\omega$  ist ein KMS–Zustand zu der Temperatur  $1/\beta$ , wenn die 1–Teilchen–KMS–Bedingung erfüllt ist:

$$\forall u, v \in kD \quad \langle e^{-iH\tau}u, v \rangle = \langle e^{-H\beta/2}v, e^{-iH\tau}e^{-H\beta/2}u \rangle$$

$(k, \mathcal{H}, e^{-iH\tau})$  nennt man dann **1–Teilchen–(Hilbertraum)–KMS–Struktur**.

Physikalisch entspricht der Grundzustand dem reinen Zustand mit der niedrigsten Energie der Theorie und ähnelt daher am besten dem Vakuumzustand im Minkowski’schen Raum. Entsprechen die Isometrien der Raumzeit der Zeitentwicklung, dann

<sup>5</sup>Nach dem Satz von Stone existiert für jede stark stetige 1–Parameter–Gruppe  $U(\tau)$  ein selbstadjungierter Operator  $H$  mit  $U(\tau) = e^{-iH\tau}$ . Deshalb haben wir gleich diese Darstellung gewählt.

<sup>6</sup>KMS steht für Kubo, Martin und Schwinger, die als erste das kanonische Gibbs–Ensemble in einer Form aufgeschrieben haben, die auch für unendliche Systeme verwendet werden kann.

ist ein KMS–Zustand  $\omega_\beta$  ein thermodynamischer Zustand zu der Temperatur  $1/\beta$ ; er ist die Verallgemeinerung des kanonischen Gibbs–Ensembles für unendliche Systeme. Heuristisch entspricht der KMS–Zustand der Dichtematrix  $\exp(-\beta H)/Z$ . Dabei ist  $Z = \text{tr}[\exp(-\beta H)]$  die Zustandssumme des Systems. In der Thermodynamik ist dann der Erwartungswert einer Observablen  $A$  gegeben durch

$$\omega_\beta(A) = \frac{\text{tr}[A \exp(-\beta H)]}{Z}.$$

Um diesen Ausdruck auswerten zu können, muß  $H$  ein diskretes Spektrum besitzen, deshalb wird das System auf geeignete Quader beschränkt. Die KMS–Bedingung übergeht diese Einschränkung und lautet allgemein für dynamische Quantensysteme (siehe Bratteli & Robinson [3]):

**Definition 3.4** Seien  $(\mathcal{A}, \alpha_\tau)$  ein  $C^*$ –dynamisches Quantensystem,  $\omega$  ein Zustand auf  $\mathcal{A}$  und  $\beta$  eine reelle Zahl. Man definiere

$$\mathcal{D}_\beta = \{z \in \mathbf{C} : 0 < \text{Im}z < \beta\},$$

wenn  $\beta \geq 0$ , und

$$\mathcal{D}_\beta = \{z \in \mathbf{C} : \beta < \text{Im}z < 0\},$$

wenn  $\beta < 0$ .

Nun ist  $\omega$  ein  $\alpha$ –KMS–Zustand zu dem Wert  $\beta$ , wenn für jedes Paar  $A, B \in \mathcal{A}$  eine komplexe Funktion  $F_{A,B}$  existiert, die analytisch auf  $\mathcal{D}_\beta$  und stetig auf  $\overline{\mathcal{D}_\beta}$  ist, so daß für alle  $\tau \in \mathbf{R}$  gilt:

$$\begin{aligned} F_{A,B}(\tau) &= \omega(A\alpha_\tau(B)), \\ F_{A,B}(\tau + i\beta) &= \omega(\alpha_\tau(B)A). \end{aligned}$$

Die Funktion  $F_{A,B}$  ist die Restriktion auf  $\overline{\mathcal{D}_\beta}$  der ganzen analytischen Funktion

$$z \mapsto \omega(A\alpha_z(B)).$$

Unsere Definition 3.3 beschränkt sich auf quasifreie Zustände in dem 1–Teilchen–Hilbertraum–Formalismus.

Einen Zustand wollen wir weiter regulär nennen, wenn der *1-Teilchen-Hamilton-Operator*  $H$  keine Eigenvektoren zum Eigenwert Null besitzt.

Unter der zusätzlichen Annahme, daß der Grund- oder KMS-Zustand regulär ist, gilt die folgende Eindeutigkeit der 1-Teilchen-Struktur [21]:

**Theorem 3.2** *Sind zwei reguläre 1-Teilchen-Grundstrukturen  $(k_j, \mathcal{H}_j, e^{-iH_j\tau})$ ,  $j = 1, 2$  für ein klassisches lineares System  $(D, \sigma, \mathcal{T}(\tau))$  gegeben, dann sind sie unitär äquivalent, d.h. es gibt eine eindeutige unitäre Abbildung  $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  mit:*

- $U k_1 = k_2$  auf  $D$
- $U e^{-iH_1\tau} = e^{-iH_2\tau} U$  auf  $\mathcal{H}_1$

Ebenso sind zwei reguläre 1-Teilchen-KMS-Strukturen zu der Temperatur  $1/\beta$  unitär äquivalent.

### 3.1 Hadamard-Zustände

Eine wichtige Unterklasse von Zuständen sind die Hadamard-Zustände. Sie sind in der Physik von Bedeutung, weil sie den Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors renormierbar machen [34]. Z.B. macht die semiklassische Einsteingleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_\omega$$

erst dann Sinn, wenn der Energie-Impuls-Tensor wohldefiniert ist. Außerdem sind Hadamard-Zustände leichter zu handhaben, da sie alle das gleiche singuläre Verhalten aufzeigen, d.h. sie unterscheiden sich nur in einem  $C^\infty$ -Anteil, was noch explizit gezeigt werden soll.

Das erste Mal treten Hadamard-Zustände in der Physik bei Brehme und DeWitt 1960 [4] auf. In ihrer Arbeit wählen sie für eine „Elementarlösung“ der KG Gl. eine Form, die schon 1923 von Hadamard eingeführt wurde. Daher der Name dieser Zustände. Wir folgen zuerst Kay und Wald [25] und führen die rigorose Definition eines Hadamard-Zustandes ein. Diese Definition gibt explizit den singulären Term der 2-Punkt-Funktion an. Man braucht hierfür:



1. eine Zeitfunktion  $T$ , also eine zukunftsgerichtete wachsende Funktion,
2. eine kausale normale Umgebung  $\mathcal{N}$  einer beliebigen Cauchy-Fläche  $\zeta$ ,
3. eine offene Umgebung  $\mathcal{O} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  der Menge aller kausal geordneten Punkte  $(x, y)$  mit der Eigenschaft, daß  $J^+(x) \cup J^-(y)$  und  $J^-(x) \cup J^+(y)$  in einer konvexen normalen Umgebung enthalten sind, und
4. eine offene Umgebung  $\mathcal{O}' \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$  der Menge aller kausal geordneten Punkte, so daß der Abschluß von  $\mathcal{O}'$  (in  $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ ) in  $\mathcal{O}$  enthalten ist.

Die obigen Definitionen für  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{O}'$  sind so gewählt, daß innerhalb der Mengen der geodätische Abstand wohldefiniert ist. Für alle  $n \in \mathbf{N}$  und für alle  $x, y \in \mathcal{O}$  definieren wir komplexwertige Funktionen

$$G_\epsilon^{T,n}(x, y) := \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{\Delta(x, y)^{1/2}}{\sigma_\epsilon(x, y)} + v^{(n)}(x, y) \ln(\sigma_\epsilon(x, y)) \right)$$

- $\Delta(x, y)$  ist die van Vleck–Morette Determinante. Die kovariante Ableitung des geodätischen Abstandes  $\sigma(x, y)$  nach  $x^\alpha$  und nach  $y^\mu$  liefert nahezu die Elemente der Determinante (siehe [4]).  $\Delta(x, y)$  ist eine Funktion, die an den Stellen nicht verschwindet, wo  $\sigma(x, y)$  es tut.
- $v^{(n)}(x, y) = \sum_{m=0}^n v_m(x, y) \sigma^m(x, y) \in C^\infty$  — Die Funktionen  $v_m$  sind glatt und werden eindeutig durch die Hadamard–Rekursionsrelation bestimmt [4].
- $\sigma_\epsilon(x, y) = \sigma(x, y) + 2i\epsilon[T(x) - T(y)] + \epsilon^2$  — Diese Funktion bestimmt das singuläre Verhalten der 2–Punkt–Distribution.

Man benötigt weiterhin eine Funktion  $\chi \in C^\infty(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$  mit der Eigenschaft

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) \notin \mathcal{O} \\ 1 & \text{für } (x, y) \in \mathcal{O}' \end{cases}$$

damit die Bereiche in  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$  abgeschnitten werden, in denen  $G_\epsilon^{T,n}(x, y)$  nicht definiert ist.

**Definition 3.5** Sei  $(\mathcal{M}, g)$  eine global hyperbolische Raumzeit und  $\zeta$  eine Cauchy-Fläche in  $\mathcal{M}$ . Ein quasifreier Zustand  $\omega$  über der Weyl-Algebra  $\mathcal{A}$  ist ein **Hadamard-Zustand**, wenn für alle  $n \in \mathbf{N}$  Funktionen  $H^{(n)} \in C^n(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$  existieren, so daß gilt

$$\Lambda(f_1, f_2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{N} \times \mathcal{N}} \left[ \chi(x, y) G_\epsilon^{T, n}(x, y) + H^{(n)}(x, y) \right] f_1(x) f_2(y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Diese Definition hat die bemerkenswerte Eigenschaft, nicht von der Wahl der Cauchy-Fläche  $\zeta$  mit ihrer kausal normalen Umgebung  $\mathcal{N}$ , von der Wahl der Zeitfunktion  $T$  oder von der Funktion  $\chi$  abzuhängen. Einzelheiten findet man bei Kay und Wald [25].

Die zweite mögliche Charakterisierung eines Hadamard-Zustandes wurde von Radzikowski [29] in einer beachtlichen Arbeit gefunden und zeigt, daß die ganze Information in der Wellenfront der 2-Punkt-Funktion kodiert ist.

**Theorem 3.3** Ein quasifreier Zustand auf einer global hyperbolischen Raumzeit ist genau dann ein Hadamard-Zustand, wenn:

$$WF(\Lambda) = \left\{ (x, \xi; y, -\eta) \in T^*(\mathcal{M} \times \mathcal{M}) \setminus \mathbf{0} : (x, \xi) \sim (y, \eta) \text{ und } \xi^0 \geq 0 \right\} \quad (3.5)$$

Die Notation  $(x, \xi) \sim (y, \eta)$  wurde schon nach dem Theorem über die „Ausbreitung von Singularitäten“ eingeführt:

- $x$  und  $y$  liegen auf derselben Geodäte  $\gamma$ ,
- $\xi$  und  $\eta$  sind Kovektoren in  $x$  bzw. in  $y$  und kotangential an  $\gamma$  und
- außerdem ist  $\eta$  der Paralleltransport von  $\xi$  von  $x$  nach  $y$ .

Diese neue Beschreibung eines Hadamard-Zustandes hat den Vorteil, einfacher und übersichtlicher zu sein. Dies zeigt sich auch in dem folgenden

**Lemma 3.4** Seien  $\omega_1$  und  $\omega_2$  jeweils ein Hadamard-Zustand. Dann ist die Differenz der 2-Punkt-Distributionen eine glatte Funktion:

$$\Lambda_1 - \Lambda_2 \in C^\infty(\mathcal{M} \times \mathcal{M}).$$

*Beweis:*

Wie wir in der Definition der 1-Teilchen-Hilbertraum-Struktur gesehen haben, ist der antisymmetrische Anteil jeder 2-Punkt-Funktion gleich, und zwar  $i\sigma(E \cdot, E \cdot)$ . Das heißt  $\Lambda_1 - \Lambda_2$  ist symmetrisch, und mit Lemma 2.6 ist auch die Wellenfront von  $(\Lambda_1 - \Lambda_2)$  symmetrisch. Andererseits haben wir

$$WF(\Lambda_1 - \Lambda_2) \subset WF(\Lambda_1) = WF(\Lambda_2),$$

und wie man an Gl. 3.5 sehen kann, ist weder die Menge  $WF(\Lambda_1)$  noch eine Unter-  
menge davon symmetrisch. Also  $WF(\Lambda_1 - \Lambda_2) = \emptyset$ .  $\square$

Wir wollen im folgenden zeigen, daß in der Kruskal-Raumzeit ein zeitinvarianter Hadamard-Zustand existiert und daß dieser eindeutig ist. Mit Hilfe des obigen Lemmas vermeidet man die Arbeit mit der expliziten Form der 2-Punkt-Funktion von Kay und Wald. Statt dessen hat man nur zu beweisen, daß die Differenz von zwei Hadamard Zuständen, als  $C^\infty$ -Funktion, Null ist. In der weiteren Arbeit wollen wir diese Differenz mit  $H(x, y)$  bezeichnen. Zuerst jedoch schauen wir uns die Kruskal-Raumzeit genauer an und stellen die wichtigsten Aussagen zusammen.



## 4.

---

# Die Kruskal–Raumzeit

Die einzige rotationssymmetrische Lösung der Einstein–Gleichung ist die Schwarzschild–Metrik<sup>1</sup>. Sie lautet:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

Diese Lösung besitzt Singularitäten bei  $r = 2M$  und bei  $r = 0$ . Die erste ist keine echte Singularität, d.h. die Raumzeitgeometrie an diesem Punkt ist nicht singulär. Sie entsteht, weil man sozusagen die falschen Koordinaten gewählt hat, und diese überdecken eine bestimmte Region der Raumzeit nicht richtig. Dagegen ist  $r = 0$  eine echte Raumzeitsingularität, wie man an der Divergenz des Krümmungsskalars  $R_{abcd}R^{abcd}$  an dieser Stelle sehen kann. Weil es im allgemeinen auch geometrische Singularitäten geben kann, für die der Krümmungsskalar nicht divergiert, ist die Klassifizierung in echte und unechte Singularitäten kein einfaches Problem, und eine allgemeingültige Definition von „Singularitäten der Raumzeitgeometrie“ ist schwierig [35].

Die Schwarzschild–Lösung beschreibt das Gravitationsfeld eines rotationssymmetrischen Sterns. Da normalerweise der Radius des Sterns  $R$  viel größer als der Schwarzschild–Radius  $2M$  ist und weil die obige Lösung nur für den Außenraum  $r > R$  gültig ist, bereitet die Singularität bei  $r = 2M$  keine Schwierigkeit. Ist der Stern aber sehr massiv, dann ist  $R < 2M$ , und der Bereich  $R < r \leq 2M$  wird physikalisch relevant. Für ein schwarzes Loch ist der ganze Bereich  $0 < r \leq 2M$  von Bedeutung. Die Kruskal–Raumzeit hat den Vorzug, gerade diese Fälle geeignet beschreiben zu können.

Die Kruskal–Raumzeit entsteht durch passende Koordinatentransformationen. Dabei wird man einen Teil davon mit der Schwarzschild–Raumzeit identifizieren können.

---

<sup>1</sup>Dieses Ergebnis wurde zuerst von Birkhoff(1923) gezeigt.

Die neue Metrik lautet:

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} \exp\left(\frac{-r}{2M}\right) (dT^2 - dX^2) + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \quad (4.1)$$

(Dabei ist  $r$  eine Funktion von  $X$  und  $T$ .)

In diesen Koordinaten bekommt man die Killinghorizonte durch  $T = \pm X$ . Die neuen Koordinaten  $U = (T + X)$  und  $V = (T - X)$  liefern die Killinghorizonte einfach durch  $U = 0$  bzw.  $V = 0$ . Die Metrik bleibt nahezu gleich, nur der Term  $(dT^2 - dX^2)$  ändert sich zu  $(dUdV)$ . Dabei hat man folgende Beziehung zwischen den neuen und den alten Koordinaten:

$$UV = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right) \quad (4.2)$$

$$\frac{U}{V} = -\exp\left(\frac{t}{2M}\right) \quad (4.3)$$

Die Abbildung 4.1 verdeutlicht die Zusammenhänge: Die Schwarzschild–Raumzeit entspricht dem Keil I ( $U > 0$  und  $V < 0$ ), und Keil II ist ein Gebiet, aus dem Teilchen nicht mehr entkommen können, also ist es das Innere eines schwarzen Loches. Jeder Beobachter im Gebiet II erreicht nach endlicher Eigenzeit die Singularität  $r = 0$ . Das Gebiet III hat genau die „zeitumgedrehten“ Eigenschaften wie Gebiet II, d.h. jeder Beobachter in diesem Gebiet kommt aus der Singularität und wird nach endlicher Zeit den Horizont überqueren. Letztendlich besitzt Keil IV die gleichen Eigenschaften wie das Gebiet I.

Die Metrik (Gl. 4.1) ermöglicht uns, den Laplace–Beltrami–Operator explizit aufzuschreiben.

$$\begin{aligned} \square_g &\equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \\ &= -\frac{1}{8M^3} \exp\left(\frac{r}{2M}\right) \left[ r \partial_U \partial_V + \frac{\partial r}{\partial U} \partial_V + \frac{\partial r}{\partial V} \partial_U \right] + \frac{\Delta_\Sigma}{r^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die Abkürzung  $\Delta_\Sigma$  soll den Laplace–Operator auf der Kugel  $\mathbf{S}^2$  kennzeichnen. Die partiellen Ableitungen von  $r$  nach  $U$  bzw.  $V$  bekommt man aus Gl. 4.2, indem man beide Seiten total ableitet und dann einen Koeffizientenvergleich anstellt.

$$\frac{\partial r}{\partial U} = -V \frac{4M^2}{r} \exp\left(\frac{-r}{2M}\right) \quad (4.5)$$

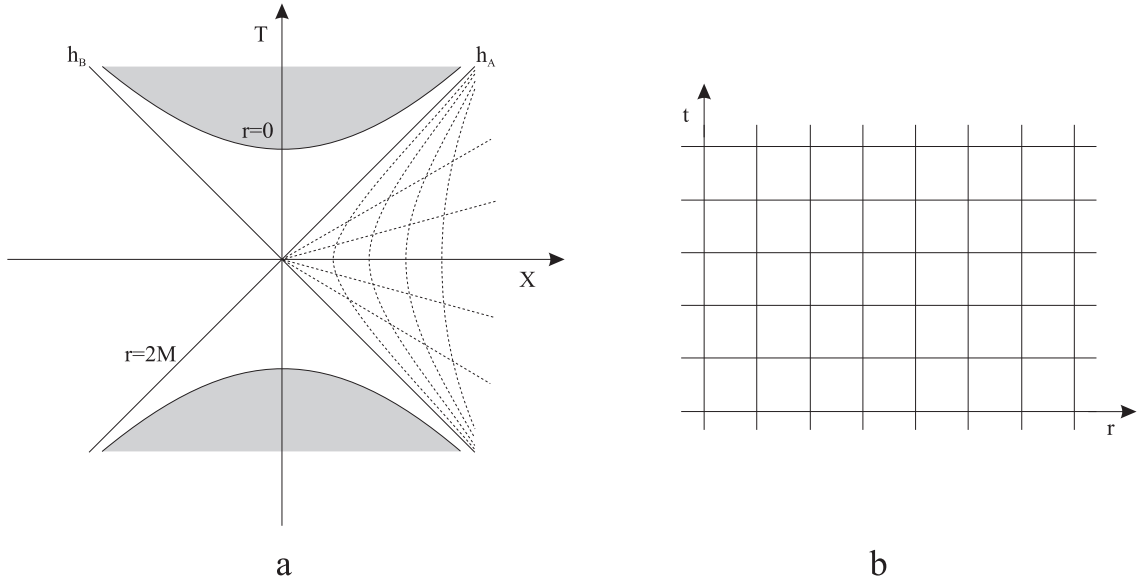


Abbildung 4.1: (a) stellt die Kruskal-Raumzeit und (b) die Schwarzschild-Raumzeit dar. (b) stimmt mit dem rechten Keil (Bereich I) der Kruskal-Raumzeit überein. Koordinatenlinien  $r = \text{const}$  entsprechen dabei jeweils einer Hyperbel, und Koordinatenlinien  $t = \text{const}$  Linien, die durch den Nullpunkt gehen.

Die Schwarzschild-Lösung ist invariant unter Zeittranslationen  $t \mapsto t + \tau$ . Für die Kruskal-Raumzeit findet man, daß die induzierten Isometrien  $\kappa(\tau)$  dieselbe Form haben wie die Lorentz-Boosts in der Minkowski-Metrik, d.h. in  $(T, X, \vartheta, \varphi)$  Koordinaten kann man  $\kappa(\tau)$  als eine  $4 \times 4$ -Matrix darstellen:

$$\kappa(\tau) = \begin{pmatrix} \cosh(\tau/4M) & \sinh(\tau/4M) & 0 & 0 \\ \sinh(\tau/4M) & \cosh(\tau/4M) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere auf den Killinghorizonten entspricht  $\kappa(\tau)$  einer Verschiebung. In den  $(U, V, \vartheta, \varphi)$ -Koordinaten ergibt dies:

$$\kappa(\tau) : (U, 0, \vartheta, \varphi) \mapsto \left( \exp\left(\frac{\tau}{4M}\right) U, 0, \vartheta, \varphi \right) \quad (4.6)$$

bzw.

$$\kappa(\tau) : (0, V, \vartheta, \varphi) \mapsto \left( 0, \exp\left(\frac{-\tau}{4M}\right) V, \vartheta, \varphi \right) \quad (4.7)$$

## 4.1 Der Hartle–Hawking–Zustand

In dem Schwarzschild–Teil der Kruskal–Raumzeit kann der Grundzustand, das Boulware–Vakuum, explizit konstruiert werden. Er ist physikalisch nicht relevant, denn auf dem Killing–Horizont verliert der Zustand seine Hadamard–Form. Nun ist aber der Horizont ein gewöhnlicher Teil der Raumzeit – ein Beobachter würde es gar nicht merken, wenn er den Horizont überquert –, und deshalb darf hier der Erwartungswert des Energie–Impuls–Tensors nicht divergieren.

Durch „Aufheizen“ des Grundzustands auf die Hawking–Temperatur  $T_H$  entsteht ein KMS–Zustand, der Hartle–Hawking–Zustand, der auch über den Horizont hinaus als Hadamard–Zustand fortgesetzt werden kann. „Aufheizen“ heißt hier, daß die 1–Teilchen–Hilbertraum–Struktur des KMS–Zustandes sich aus der 1–Teilchen–Struktur des Grundzustandes bestimmen läßt.

Wir beginnen deswegen mit der Konstruktion des Boulware–Vakuums. Es ist dafür zweckmäßig, die Regge–Wheeler–Koordinate

$$x := r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right)$$

einzuführen. Die neuen Koordinaten  $(t, x)$  liefern die KG Gl. als:

$$(\partial_t^2 - A)\phi = 0 \tag{4.8}$$

mit

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( -\frac{2M}{r^3} + \frac{\Delta_\Sigma}{r^2} - m^2 \right) \tag{4.9}$$

Der Operator  $A$  ist wesentlich selbstadjungiert und strikt positiv, i.e.  $A$  besitzt keine verschwindenden Eigenwerte. Deshalb existieren alle Potenzen von  $A$  und insbesondere ist  $A$  invertierbar. Diese Eigenschaften ermöglichen die Konstruktion des Grundzustandes wie folgt:



Wir arbeiten mit  $t = 0$  als Cauchy–Fläche  $\zeta = (\mathbf{R} \times \mathbf{S}^2)$ . Sei weiter  $D = C_o^\infty(\zeta) \times C_o^\infty(\zeta)$  der Raum der Cauchy–Daten der KG Gl. auf  $\zeta$ . Jede Lösung  $(f, p) \in D$  erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} f \\ p \end{pmatrix} = -\mathbf{h} \begin{pmatrix} f \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

wobei  $A$  als Differentialoperator auf  $\zeta$  angesehen wird. Auf  $D$  können wir die „kanonische“ symplektische Form

$$\sigma\left((f_1, p_1), (f_2, p_2)\right) = \int (f_1 p_2 - f_2 p_1) dx d^2s$$

eingeführen. ( $d^2s$  ist das gewöhnliche Volumenelement auf  $\mathbf{S}^2$ .) Der Abschluß des Operators  $\mathbf{h}$ , ebenfalls mit  $\mathbf{h}$  bezeichnet, ist selbstadjungiert, und der Definitionsbereich von seinem Inversen beinhaltet den symplektischen Raum  $D$ , i.e.  $D \subset \mathcal{D}(\mathbf{h}^{-1})$ . Sei  $\hat{\sigma}$  die Erweiterung von  $\sigma$  in diesem Raum. (Für technische Details siehe Dimock und Kay [7].) Jetzt wird das klassische dynamische System durch  $(\mathcal{D}(\mathbf{h}^{-1}), \hat{\sigma}, e^{-\mathbf{h}\tau})$  definiert.

**Das Boulware–Vakuum**  $\omega_B$  ist nun durch seine 1–Teilchen–Hilbertraum–Struktur  $(k_B, \mathcal{H}_B, \exp(-i h_B \tau))$  definiert:

$$\begin{aligned} k_B : \quad \mathcal{D}(\mathbf{h}^{-1}) &\rightarrow \mathcal{H}_B := L_{\mathbb{C}}^2(\zeta) \\ (f, p) &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(A^{1/4}f + iA^{-1/4}p) \end{aligned}$$

Der Hamilton–Operator ist  $h_B = A^{1/2}$ . Die 2–Punkt–Distribution bekommt man mit Hilfe von Gl. 3.3 und Gl. 3.4. Eine kurze Rechnung liefert:

$$\begin{aligned} \Lambda_B(f_1, f_2) = & -\frac{1}{2} \int \overline{\left( A^{1/2} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) E(f_1; 0, x, s)} A^{-1/2} \\ & \left( A^{1/2} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) E(f_2; 0, x, s) dx d^2s. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die Hadamard–Singularitätsstruktur von  $\Lambda_B$  außerhalb des Horizonts könnte man nachweisen, indem man „einfach“ die Wellenfrontmenge von  $\Lambda_B$  ausrechnet und die Übereinstimmung mit der Wellenfront der 2–Punkt–Distribution eines Hadamard–Zustandes (Gl. 3.5) aufzeigt. Nun hat aber Junker [20] – mit derselben Idee als Ausgangspunkt – bewiesen, daß der Grundzustand auf einer ultrastatischen global hyper-

bolischen Raumzeit die Hadamard–Form besitzt. Die Metrik hat für diese Klasse von Raumzeiten die Form

$$ds^2 = -dt^2 + h_{ab}(\vec{x}) dx^a dx^b .$$

Die Konstruktion der Grundzustände erfolgt in großer Analogie zu der des Boulware–Vakuums, und der Vergleich zeigt, daß die Analyse von Junker übertragen werden kann, allerdings nur für  $r > 2M$ . Eine essentielle Eigenschaft, die dabei gebraucht wird, ist die elliptische Form des Operators  $A$ . Auf dem Horizont aber ist  $A$  nicht mehr elliptisch, und der Zustand verliert auch seine Hadamard–Form.

Als nächstes betrachten wir einen KMS–Zustand zu der Temperatur  $1/\beta$ . Kay [21] zeigt ausdrücklich, wie man aus einem gegebenen quasifreien Grundzustand quasifreie KMS–Zustände konstruieren kann.

**Theorem 4.1** *Sei  $(k, \mathcal{H}, \exp(-i h \tau))$  die 1–Teilchen Hilbertraum Struktur für einen quasifreien Grundzustand über das klassische dynamische System  $(D, \sigma, \mathcal{T}(\tau))$ , so daß die „Regularitätsbedingung“  $kD \subset \mathcal{D}(h^{1/2})$  erfüllt ist. Dann bekommt man die 1–Teilchen–Struktur  $(k^\beta, \tilde{\mathcal{H}}, \exp(-i \tilde{h} \tau))$  für einen quasifreien KMS–Zustand zu der Temperatur  $1/\beta$  wie folgt:*

$$\begin{aligned} k^\beta : \quad D &\rightarrow \tilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \\ F &\mapsto C(\sinh Z^\beta) kF \oplus \cosh Z^\beta kF \\ e^{i \tilde{h} \tau} &= \begin{pmatrix} e^{i h \tau} & 0 \\ 0 & e^{-i h \tau} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$Z^\beta$  ist implizit definiert durch  $\tanh Z^\beta = e^{-\beta h}$ , und  $C$  ist eine komplexe Konjugation, für die  $C e^{-i h \tau} = e^{i h \tau} C$  gilt. Der KMS–Zustand ist dann definiert durch:

$$\omega^\beta(W(\phi)) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \langle k\phi, \coth \left( \frac{\beta h}{2} \right) k\phi \rangle_{\mathcal{H}} \right] \quad (4.13)$$

Die Regularitätsbedingung gewährleistet die Wohldefiniertheit der 1–Teilchen KMS–Struktur, weil  $\mathcal{D}(h^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(\sinh Z^\beta), \mathcal{D}(\cosh Z^\beta)$  (siehe [21]), und deshalb macht Gl. 4.12 dann Sinn.

**Definition 4.1** *Der Hartle–Hawking–Zustand entsteht durch das „Aufheizen“ des Boulware–Vakuums auf die Hawking–Temperatur<sup>2</sup>  $T_H = (8\pi M)^{-1}$ , i.e.  $\omega_H = \omega_B^{8\pi M}$ .*

<sup>2</sup>Hier benutzen wir natürliche Einheiten:  $\hbar = c = k = 1$ .

Der Hartle–Hawking–Zustand wurde zuerst in [16] eingeführt. Dort wird der Gleichgewichtszustand eines schwarzen Loches auf der Kruskal–Raumzeit betrachtet. Die Temperatur des Zustandes ergibt sich dann aus dem Vergleich der Absorbti- und der Emissionswahrscheinlichkeit, die im Pfadintegral–Formalismus berechnet werden.

Beim Aufheizen geht die Hadamard–Form eines Zustandes nicht verloren. Dies geht auch aus der Arbeit von Junker hervor. Für den Hartle–Hawking–Zustand heißt dies, daß er außerhalb des Horizonts ein Hadamard–Zustand ist. Leider ist es nicht so einfach zu beweisen, daß dieser Zustand auch auf dem Horizont die Hadamard–Form hat. Wäre dies der Fall, dann hätte er nach Fulling, Sweeny und Wald [12] auf der ganzen Kruskal–Raumzeit die Hadamard–Form. In [12] wird gezeigt, daß die 2–Punkt–Funktion mit der Hadamard–Singularitätsstruktur in einer offenen Umgebung einer Cauchy–Fläche überall auf der Raumzeit diese Eigenschaft besitzt.

Eine Reihe von Ergebnissen machen die Annahme plausibel, daß der Hartle–Hawking–Zustand auf der ganzen Kruskal–Raumzeit erweitert werden kann und daß er überall die Hadamard–Form besitzt.

1. Tatsächlich ist von Haag, Narnhofer und Stein [15] bewiesen worden, daß nur ein KMS–Zustand existiert, der auf dem Horizont die Skalenlimes–Bedingung erfüllt, und zwar der Zustand mit der Hawking–Temperatur. Die Skalenlimes–Bedingung ergibt sich aus dem *Prinzip der lokalen Definitheit*, das hauptsächlich verlangt, daß das Verhalten der  $n$ –Punkt Distributionen für kurze Entfernungen dasselbe sein soll wie das Verhalten der Zustände (im Vakuum–Sektor) im flachen Raum.

2. Andererseits ist ein zeitinvarianter quasifreier Zustand auf der Kruskal–Raumzeit, der die Hadamard–Form in einer Umgebung des Killing–Horizonts besitzt, eindeutig auf einer „großen“ Unteralgebra der Observablen. Eingeschränkt auf Gebiet I, d.h. auf dem Schwarzschild Teil, erfüllt dieser Zustand die KMS–Bedingung zu der Temperatur  $T_H$ . Setzt man weiter voraus, daß die 1–Teilchen–Hamilton–Funktion keine Nulleigenwerte besitzt, dann ist der obige Zustand eindeutig auf der ganzen Raumzeit.

Die Eindeutigkeit eines Hadamard–Zustandes auf der ganzen Raumzeit ist, wie schon oben erwähnt, unter der zusätzlichen Annahme, daß Null–Moden fehlen, bei Kay und Wald [25] bewiesen<sup>3</sup>. Wir wollen nun einen alternativen Beweis hierfür geben, der die Annahme über die Abwesenheit der Null–Moden nicht benutzt.

---

<sup>3</sup>Der Beweis von Kay und Wald ist allgemeiner; er ist für alle Raumzeiten mit einem verzweigten Killinghorizont gültig.



---

## Ein Hadamard–Zustand auf der Kruskal–Raumzeit

Der Hadamard–Zustand, den wir nun betrachten, soll invariant bzgl. der 1–Parameter–Familie von Isometrien  $\kappa(\tau)$  der Kruskal–Raumzeit sein. Es wird sich zeigen, daß er eindeutig ist. Um dies nachzuweisen, betrachten wir die Differenz  $H(x, y)$  der 2–Punkt–Funktionen zweier solcher Zustände und beweisen, daß diese Differenz auf der ganzen Raumzeit identisch Null ist. Wir wissen bereits (Lemma 3.4), daß  $H$  eine glatte Funktion ist. Weiterhin ist die Differenz  $H$  ebenso invariant bzgl. den Isometrien  $\kappa(\tau)$ , also

$$H\left(\kappa(\tau)x, \kappa(\tau)y\right) = H(x, y).$$

Im ersten Schritt betrachten wir die Funktion auf dem Killinghorizont und stellen fest:

**Lemma 5.1** *Auf den Killinghorizonten  $h_A$  und  $h_B$  ist die Differenzfunktion  $H$  Null.*

*Beweis:*

O.B.d.A. schauen wir uns den Killinghorizont  $h_A$  an. Die besondere Form der Isometrien auf  $h_A \times h_A$  (Gl. 4.6) ermöglicht (im Grenzwert  $\tau \rightarrow -\infty$  bzw.  $\tau \rightarrow \infty$ ), Punkte auf dem Killinghorizont beliebig nahe an die Bifurkationssphäre ( $U = V = 0$ ) zu verschieben.

$$\begin{aligned} H(U_1, 0, s_1; U_2, 0, s_2) &= H\left(\exp\left(\frac{\tau}{4M}\right)U_1, 0, s_1; \exp\left(\frac{\tau}{4M}\right)U_2, 0, s_2\right) \\ &\stackrel{\tau \rightarrow \pm\infty}{=} H(0, 0, s_1; 0, 0, s_2) \end{aligned}$$

( $s_1, s_2$  sind dabei Elemente aus  $\mathbf{S}^2$ ) Das hat zur Folge:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial U_1} \right|_{h_A \times h_A} = \left. \frac{\partial H}{\partial U_2} \right|_{h_A \times h_A} = 0$$

Beziehung 4.2 ergibt fernerhin auf dem Horizont:

$$\left. \frac{\partial r}{\partial U_1} \right|_{h_A \times h_A} = 0$$

Zusammen mit dem Laplace-Beltrami-Operator (Gl. 4.4) bekommen wir eine bemerkenswert einfache Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\square_g - m^2) H|_{h_A \times h_A} = \left( \frac{\Delta_\Sigma}{r^2} - m^2 \right) H|_{h_A \times h_A} = 0 \quad (5.1)$$

Sämtliche Eigenwerte des Laplace-Operators auf der Kugel sind negativ und haben die Form  $-l(l+1)$ . Da die obige Gleichung nur positive Eigenwerte zuläßt, ist ersichtlich, daß sie keine nicht triviale Lösung besitzt. Deshalb gilt  $H|_{h_A \times h_A} = 0$ .  $\square$

Also wissen wir nun, daß die Differenz  $H$  auf den Killinghorizonten Null ist. In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen entsprechen die Killinghorizonte charakteristischen Flächen. Das heißt, wir haben das charakteristische Anfangsproblem für einen hyperbolischen Differentialoperator zu lösen. Es ist bekannt, daß das Problem nicht allgemein lösbar ist. In unserem Fall aber, da wir uns auf zwei Variablen einschränken können, ist die Lösung konstruierbar und eindeutig<sup>1</sup>. Man bekommt eine zweidimensionale Differentialgleichung, weil Gl. 4.4 eine Trennung der Variablen zuläßt. Da die Lösung des Problems nicht von der genauen Form der Koeffizienten abhängt, wollen wir im folgenden den allgemeinsten Fall betrachten. Wir folgen dabei der Darstellung von Samarskii und Tikhonow [32].

Die allgemeinste hyperbolische Differentialgleichung in zwei Variablen hat die Form:

$$\partial_U \partial_V f(U, V) = a \partial_U f(U, V) + b \partial_V f(U, V) + c f(U, V) + d(U, V) \quad (5.2)$$

Dabei sind  $a, b, c, d$  Funktionen in  $\mathbf{R}^2$ , die in dem betrachteten Gebiet nicht singulär sein sollen. In diesen Koordinaten entsprechen die Anfangsdaten auf einer charakteristischen Fläche den Funktionen  $f(0, V)$  und  $f(U, 0)$ .

<sup>1</sup>Das Problem ist in der Literatur unter den Namen *Goursat Problem* bekannt

Die Gleichung 5.2 kann nun zweimal aufintegriert werden. Man bekommt dadurch zwar eine Integro-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} f(U, V) &= \int_0^U \int_0^V \left[ a \partial_U f(U', V') + b \partial_V f(U', V') + c f(U', V') \right] dU' dV' \\ &\quad + f(0, V) + f(U, 0) - f(0, 0) + \int_0^U \int_0^V d(U', V') dU' dV', \end{aligned}$$

aber ihr Vorteil liegt darin, daß mit ihrer Hilfe eine iterative Lösung konstruiert werden kann. Als 0. Näherung wählt man  $f_0 = 0$ . Für die 1. Näherung ergibt sich:

$$f_1(U, V) = f(0, V) + f(U, 0) - f(0, 0) + \int_0^U \int_0^V d(U', V') dU' dV'$$

und entsprechend:

$$f_n(U, V) = \int_0^U \int_0^V \left[ a \partial_U + b \partial_V + c \right] f_{n-1} dU' dV' + f_1(U, V) \quad (5.3a)$$

$$\partial_U f_n(U, V) = \int_0^V \left[ a \partial_U + b \partial_V + c \right] f_{n-1} dV' + \partial_U f_1(U, V) \quad (5.3b)$$

$$\partial_V f_n(U, V) = \int_0^U \left[ a \partial_U + b \partial_V + c \right] f_{n-1} dU' + \partial_V f_1(U, V) \quad (5.3c)$$

Damit diese iterative Lösung wohldefiniert ist, muß sie konvergieren. Um dies zu beweisen, benutzt man einen kleinen Trick: Man definiert die Differenzvariable

$$z_n = f_{n+1} - f_n$$

und zeigt, daß die Reihe  $\sum z_n$  konvergiert. Die Gleichungen 5.3 a bis c modifizieren sich entsprechend zu

$$z_n(U, V) = \int_0^U \int_0^V \left[ a \partial_U z_{n-1} + b \partial_V z_{n-1} + c z_{n-1} \right] dU' dV' \quad (5.4a)$$

$$\partial_U z_n(U, V) = \int_0^V \left[ a \partial_U z_{n-1} + b \partial_V z_{n-1} + c z_{n-1} \right] dV' \quad (5.4b)$$

$$\partial_V z_n(U, V) = \int_0^U \left[ a \partial_U z_{n-1} + b \partial_V z_{n-1} + c z_{n-1} \right] dU' \quad (5.4c)$$

**Lemma 5.2** Die Reihe  $\sum z_n$  konvergiert in dem Quader  $U, V \leq L$ .

*Beweis:*

Für  $|z_n|$ ,  $|\partial_U z_n|$  und  $|\partial_V z_n|$  hat man folgende Majoranten:

$$|z_n| \leq 3QM^n K^{n-1} \frac{(U+V)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (5.5a)$$

$$|\partial_U z_n| \leq 3QM^n K^{n-1} \frac{(U+V)^n}{n!} \quad (5.5b)$$

$$|\partial_V z_n| \leq 3QM^n K^{n-1} \frac{(U+V)^n}{n!} \quad (5.5c)$$

Dabei sind folgende Abkürzungen benutzt worden:

- $Q$  ist eine obere Schranke von  $|z_0|$ ,  $|\partial_U z_0|$ ,  $|\partial_V z_0|$  in dem Quader.
- $M$  ist eine obere Schranke für die Funktionen  $|a|$ ,  $|b|$ ,  $|c|$
- $K \geq 2 + 2L$

Die Richtigkeit der Ungleichungen für alle  $n$  kann mit vollständiger Induktion gezeigt werden.

Für  $n = 1$  gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} |z_1| &< 3QMUV < 3HM \frac{(U+V)^2}{2!} \\ |\partial_U z_1| &< 3QMV < 3HM(U+V) \\ |\partial_V z_1| &< 3QMU < 3HM(U+V) \end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsvoraussetzung erfüllt. Nun seien die Ungleichungen 5.5 a bis c für die  $n$ -te Näherung richtig. Eine Reihe von Vereinfachungen liefert für die  $(n+1)$ -te Näherung die gewünschten Beziehungen:

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| &< 3QM^{n+1}K^{n-1} \frac{(U+V)^{n+2}}{(n+2)!} \left( \frac{U+V}{n+3} + 2 \right) \\ &< 3QM^{n+1}K^n \frac{(U+V)^{n+2}}{(n+2)!} \\ |\partial_U z_{n+1}| &< 3QM^{n+1}K^{n-1} \frac{(U+V)^{n+1}}{(n+1)!} \left( \frac{U+V}{n+2} + 2 \right) \\ &< 3QM^{n+1}K^n \frac{(U+V)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
|\partial_V z_{n+1}| &< 3Q M^{n+1} K^{n-1} \frac{(U+V)^{n+1}}{(n+1)!} \left( \frac{U+V}{n+2} + 2 \right) \\
&< 3Q M^{n+1} K^n \frac{(U+V)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Die Existenz der Majoranten ist somit gewährleistet. Nach der Annahme ist  $U+V$  immer kleiner als  $2L$ , und deshalb haben die Majoranten – nach geeigneter Umformung – die Form der Exponentialreihe. D.h. die Majoranten sind konvergent.  $\square$

Also existieren die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
f &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n z_k, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_U f_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \partial_U z_k \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_V f_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \partial_V z_k
\end{aligned}$$

und haben nach der Konstruktion die gewünschten Eigenschaften, insbesondere ist  $f$  eine Lösung von Gl. 5.2.

**Lemma 5.3** *Die Lösung einer zweidimensionalen hyperbolischen Differentialgleichung mit Anfangsdaten auf Charakteristiken ist eindeutig.*

*Beweis:*

Angenommen  $f_1$  und  $f_2$  sind zwei Lösungen von Gl. 5.2. Ihre Differenz  $s(U, V) = f_1(U, V) - f_2(U, V)$  erfüllt die Integro-Differentialgleichung

$$s(U, V) = \int_0^U \int_0^V [a \partial_U s + b \partial_V s + cs] dU' dV'.$$

(siehe auch Gleichung 5.4 a) Mit  $\tilde{Q}$  als obere Schranke von  $|s(U, V)|$ ,  $|\partial_U s(U, V)|$  und  $|\partial_V s(U, V)|$  in dem Quader  $U, V \leq L$  kann man die obige vollständige Induktion wiederholen, und zeigen, daß die Ungleichung

$$|s| < 3\tilde{Q} M^{n+1} K^n \frac{(U+V)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3\tilde{Q}}{MK^2} \frac{(2MKL)^{n+2}}{(n+2)!}$$

für alle Werte von  $n$  erfüllt ist<sup>2</sup>. Deshalb ist  $s(U, V) = 0$   $\square$

<sup>2</sup>Genauer: Man erkennt leicht, daß die Ungleichung für  $n = 1$  richtig ist. Und wenn sie für ein  $n$  gegeben ist, dann ist sie auch für  $n + 1$  erfüllt. Man benutzt hierbei dieselben Abschätzungen, wie in Lemma 5.2.

Nun können wir als wichtiges Ergebnis formulieren:

**Theorem 5.4** *Die Lösung einer hyperbolischen Differentialgleichung in zwei Variablen mit Anfangsdaten auf Charakteristiken kann iterativ bestimmt werden und ist eindeutig.*  $\square$

In unserem Fall ist die Lösung von  $H$  auf der charakteristischen Fläche gleich Null. Das hat zur Folge, daß die Lösung in dem physikalisch sinnvollen Gebiet der Kruskal-Raumzeit<sup>3</sup> Null ist, denn

- die KG Gl. besitzt keinen homogenen Term, d.h. die Funktion  $d(U, V)$  in Gleichung 5.2 ist Null, und deswegen verschwindet die erste Näherung
- bei jedem Iterationsschritt (Gl. 5.3 a) kommen keine neue Beiträge hinzu, und deshalb bleiben alle Näherungen Null.

Daß  $H$  identisch Null ist, bedeutet aber wiederum, daß der Hadamard-Zustand auf der Kruskal-Raumzeit eindeutig ist. Das wollen wir jetzt als Hauptergebnis notieren.

**Theorem 5.5** *Ein quasifreier zeitinvarianter Hadamard-Zustand ist auf der Kruskal-Raumzeit eindeutig.*  $\square$

Wie schon in dem vorigen Abschnitt diskutiert, erwarten wir, daß der Hartle-Hawking-Zustand, erweitert auf die ganze Raumzeit, dieser eindeutige Hadamard-Zustand ist. Zur Zeit wird versucht, die Hadamard-Form des Hartle-Hawking-Zustandes in einer Umgebung der Bifurkationssphäre herzuleiten, da man glaubt, so weiterkommen zu können.

---

<sup>3</sup>Physikalisch sinnvoll bedeutet  $r > 0$ . In diesem Gebiet findet man immer eine obere Schranke an die Koeffizienten-Funktionen des Laplace-Beltrami-Operators (Gl. 4.4) und das Theorem 5.4 kann angewandt werden.

## Index und Notationen

$x$	$= (x^1, \dots, x^n)$ — Koordinaten auf $\mathbf{R}^n$ , bzw.
$\xi$	$= (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — auf seinem Dualraum
$\langle x, \xi \rangle$	$= \sum x^s \xi_s$ — das Skalarprodukt auf $\mathbf{R}^n$
$ \xi $	$= \left( \sum \xi_s^2 \right)^{1/2}$ — die Euklidische-Norm auf $\mathbf{R}^n$
$\alpha$	$= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — ein Multiindex
$ \alpha $	$= \sum \alpha_s$ — die Länge eines Multiindex
$x^\alpha$	$= \prod (x^s)^{\alpha_s}$
$D^\alpha$	$= \prod \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^s} \right)^{\alpha_s}$
$\mathcal{M}$	— eine (vierdimensionale) diferenzierbare Mannigfaltigkeit
$\zeta$	— eine Cauchy-Fläche der Raumzeit
$I^+(x) / I^-(x)$	— die chronologische Zukunft bzw. Vergangenheit von $x$
$J^+(x) / J^-(x)$	— die kausale Zukunft bzw. Vergangenheit von $x$
$\sigma(x_1, x_2)$	— der quadratische geodätische Abstand zwischen $x_1$ und $x_2$
$\kappa^*(u)$	— das Zurückziehen (Pullback) von $u$ bzgl. $\kappa$
$C_o^\infty(X)$	— der Raum der unendlich oft diferenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in $X$
$\mathcal{D}'(X)$	— der Raum der Distributionen auf $X$
$\mathcal{E}'(X)$	— der Raum der Distributionen mit kompaktem Träger in $X$
$\hat{u}$	— die Fourier-Transformierte von $u$
$\text{supp}(u)$	— der Träger von $u$
$\text{singsupp}(u)$	— der singuläre Träger der Distribution $u$
$WF(u)$	— die Wellenfrontmenge der Distribution $u$
$P(x, D)$	— ein Differentialoperator
$H(x, \xi)$	— das Hauptsymbol eines Differentialoperators
$\text{char}(P)$	— die charakteristische Menge des Differentialoperators $P(x, D)$

- 
- $E(f_1, f_2)$  — die Fundamentallösung der Klein–Gordon–Gleichung. Sie ist die Differenz zwischen der retardierten und der avancierten Lösung.  
 $\mathcal{A}$  — die Weyl–Algebra (der Observablen)  
 $\mathcal{H}$  — ein (1–Teilchen) Hilbertraum  
 $\mathcal{F}^s(\mathcal{H})$  — der symmetrische Fockraum über den Hilbertraum  $\mathcal{H}$   
 $\omega$  — ein Zustand auf der Weyl–Algebra  $\mathcal{A}$   
 $\omega_\mu$  — ein quasifreier Zustand, dem die Bilinearform  $\mu$  zugeordnet ist  
 $\lambda(\phi_1, \phi_2)$  — die „symplektisch verschmierte“ 2–Punkt–Funktion eines Zustandes  
 $\Lambda(f_1, f_2)$  — die 2–Punkt–Distribution eines Zustandes  
 $H(x, y)$  — die Differenzfunktion zweier Hadamard–Zustände  
 $h_A / h_B$  — die Killing–Horizonte der Kruskal–Raumzeit

Das Boulware–Vakuum ist der Grundzustand auf der Schwarzschildmetrik.

Der Hartle–Hawking–Zustand ist der KMS–Zustand zu der Hawking–Temperatur auf der Schwarzschildmetrik.

## Literaturverzeichnis

- [1] Birell, N.D. & Davis, P.C.W.: Quantum fields in curved space, Cambridge University Press 1982
- [2] Bratteli, O. & Robinson, D.W.: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I, Springer Verlag 1980
- [3] Bratteli, O. & Robinson, D.W.: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II, Springer Verlag 1981
- [4] Brehme Robert W. & DeWitt Bryce S.: Radiation Damping in a Gravitational Field, Ann. Phys. (N.Y) 9 (1960) 220-259
- [5] Brunetti, R. & Fredenhagen, K. & Köhler, M.: The microlocal spectrum condition and Wick polynomials of free fields on curved spacetime, Comm. Math. Phys. 180 (1996) 633-653
- [6] Courant, R. & Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik II, Springer Verlag 1968
- [7] Dimock, J.: Algebras of Local Observables on a Manifold, Comm. Math. Phys. 77 (1980) 219-228
- [8] Duistermaat, J.J & Hörmander, L.: Fourier integral operators II, Acta math. 128 (1972) 128-183
- [9] Fredenhagen, Klaus & Haag, Rudolf: On the derivation of Hawking radiation associated with the formation of a black hole, Comm. Math. Phys. 127 (1990) 273-284
- [10] Friedlander, F. G.: The Wave Equation on a Curved Space-Time, Cambridge University Press 1975
- [11] Fulling, Stephen A.: Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time, Cambridge University Press 1989

- [12] Fulling, Stephen A. & Sweeny, Mark & Wald, Robert M.: Singularity Structure of the Two-Point Function in Quantum Field Theory in Curved Spacetime, *Comm. Math. Phys.* 63 (1978) 257-264
- [13] Fulling, Stephen A. & Narcowich, F. J. & Wald, Robert M.: Singularity Structure of the Two-Point Function in Quantum Field Theory in Curved Spacetime II, *Ann. Phys. (NY)* 136 (1981) 243-272
- [14] Haag, Rudolf: *Local Quantum Physics*, Springer Verlag 1990
- [15] Haag, Rudolf & Narnhofer, Heide & Stein, Ulrich: On Quantum Field Theory in Gravitational Background, *Comm. Mat. Phys.* 94 (1984) 219-238
- [16] Hartle J. B. & Hawking S. W.: Path-integral derivation of black-hole radiance, *Phys. Rev. D* 13 (1976) 2188-2203
- [17] Hörmander, Lars: *Fourier integral operators I*, *Acta math.* 127 (1971) 79
- [18] Hörmander, Lars: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer Verlag 1990
- [19] Hawking, Stephen W.: Particle creation by black holes, *Comm. Math. Phys.* 43 (1975) 199
- [20] Junker, Wolfgang: Hadamard states, adiabatic vacua and the construction of physical states for scalar quantum fields on curved spacetime, *Rev. Math. Phys.* 8 (1996) 1091-1159
- [21] Kay, B.S.: A uniqueness result for quasifree KMS states, *Helv. Phys. Acta* 58 (1985) 1017-1029
- [22] Kay, B.S.: The double-wedge algebra for quantum fields on Schwarzschild and Minkowski spacetimes, *Comm. Math. Phys.* 100 (1985) 57-81
- [23] Kay, B.S.: Quantum field theory in curved spacetime. In: Bleuler, K. & Werner, M.: *Differential geometrical methods in theoretical physics*, Kluwer Acad. Publ. 1988, Seiten: 373-393
- [24] Kay, B.S. & Wald, R.M.: Some recent developments related to the Hawking effect. In: Doebner, H.D. & Hennig, J.D.: *Differential geometric methods in theoretical physics*, Claustal/Germany 1986
- [25] Kay, B.S. & Wald, R.M.: Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate Killing horizon, *Phys. Rep.* 207 (1991) 49-136

- 
- [26] Kay, B.S. & Radzikowski, M.J. & Wald, R.M.: Quantum field theory on spacetimes with a compactly generated Cauchy horizon, Preprint gr-qc/9603012
- [27] Leray, J.: Hyperbolic differential equations, Lectures Notes, Princeton 1953
- [28] Nakahara, Mikio: Geometry, Topology and Physics, Adam Hilger 1990
- [29] Radzikowsky, Marek J.: Micro-Local Approach to the Hadamard Condition in Quantum Field Theory on Curved Spacetime, Comm. Math. Phys. 179 (1996) 529-553
- [30] Reed, Michael & Simon, Barry: Methods of modern mathematical physics Vol.I, „Functional analysis“, Academic Press 1980
- [31] Reed, Michael & Simon, Barry: Methods of modern mathematical physics Vol.II, „Fourier analysis, self-adjointness“, Academic Press 1975
- [32] Samarskii, A. & Tikhonow, A.: Equation of Mathematical Physics, Dover Publications 1990
- [33] Sxl, R.U. & Urbantke, H.K.: Gravitation und Kosmologie, Spektrum Akademischer Verlag 1995
- [34] Wald, Robert M.: Trace anomaly of a conformally invariant quantum field in curved spacetime, Phys. Rev. D 17 (1978) 1477-1484
- [35] Wald, Robert M.: General Relativity, The University of Chicago Press 1984
- [36] Wald, Robert M.: Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics, University of Chicago Press 1994

## Danksagung

Als erstes möchte ich mich bei Herrn Professor Fredenhagen für die freundliche Betreuung der Arbeit bedanken.

Desweiteren bedanke ich mich bei all meinen Kollengen in der mathematischen Physik, die mir während dieser Zeit mit Rat und Tat zur Seite gestanden haben. Einen besonderen Dank auch meiner Cousine Ina für das sorgsame Durchlesen der Arbeit.

Zum Schluß ein Dankeschön an meine Eltern Miron und Violetta für ihre Unterstützung während des Studiums und einen herzlichen Dank meiner Frau Gabriella für den moralischen Beistand und für ihre Liebe.

## Erklärung

Ich versichere, diese Arbeit unter alleiniger Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel selbständig angefertigt zu haben.

März 1998

Michael Andronache